Билеты Высшая Математика - 2

Тимур Адиатуллин | telegram, github

Содержание

1 Интегралы

1.1 Определение и свойства первообразной. Теорема о связи первообразных одной функции.

Определение 1.1.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Функция $F(x)$, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$, называется **первообразной** функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если

$$F'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \langle a, b\rangle.$$

На концах промежутка имеем в виду односторонние производные функции $F(x)$.

Следствие.

Если $F(x)$ является первообразной некоторой функции на $\langle a, b\rangle$, то $F(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

Теорема о связи первообразных одной функции

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall\, c \in R \quad F(x) + c$ также первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. 2. Если $\Phi(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то $\exists\, c \in R\colon \Phi(x) = F(x) + c$.

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$. 2. $(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$ на $\langle a, b\rangle$. Следовательно, $\Phi(x) - F(x) = c$ на $\langle a, b\rangle$.

Следствие

Если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то каждая функция семейства функций $\{F(x) + c\} \quad (c \in R)$ является **первообразной**, и других первообразных нет.

1.2 Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательствами).

Определение 1.2

Описанное выше семейство функций $\{F(x)+c\}$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int 0\,dx = c \tag{1}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1 \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{3}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \tag{4}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \tag{5}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c, \quad a > 0 \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c, \quad a \neq 0 \tag{10}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \tag{11}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = \coth x + c \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad a \neq 0 \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + c, \quad \alpha \neq 0 \tag{16}$$

Комментарий

Формулы справедливы на всех промежутках $\langle a, b\rangle$, на которых существуют функции, стоящие под знаком интеграла.

Доказательство

Формулы доказываются непосредственной проверкой того, что производная выражения, стоящего справа, совпадает с подынтегральной функцией.

Проверим формулы (15) и (16):

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}{}' = \frac{1}{4a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}\frac{(x-a)(x+a)-(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2} \tag{18}$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)^{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)' = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)^{2} 2\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right) = \frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \tag{20}$$

1.3 Интегрирование с помощью замены переменной. Вычисление

Теорема: Простейшие свойства неопределенного интеграла

Пусть $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

Пусть существует $\int f(x)dx$. Тогда

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \text{то есть} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{на} \quad \langle a, b\rangle.$$

Пусть существуют $\int f_1(x)dx$, $\int f_2(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда существует

$$\int (af_1(x) + bf_2(x))dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx \quad \text{на} \quad \langle a, b\rangle.$$

Теорема 1.4: Интегрирование при помощи замены переменной

Пусть существует

$$\int f(t)dt = F(t) + c \quad \text{на } \langle a, b\rangle.$$

Пусть $\varphi(x)$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$. Тогда существует

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c \quad \text{на } \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Теорема 1.5: Интегрирование при помощи замены переменной (подстановка)

Пусть существует

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + c \quad \text{на } \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$.
Тогда существует

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \quad \text{на } \langle a, b\rangle.$$

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c \quad (a > 0).$$

1.4 Интегрирование по частям. Вычисление

Теорема 1.6: Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$ и существует

$$\int v(x)du(x).$$

Тогда существует

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Доказательство

Поскольку $d(uv) = u\,dv + v\,du$, то $u\,dv = d(uv) - v\,du$, следовательно, существует $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ на $\langle a, b\rangle$.

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + c.$$

1.5 Интегрирование рациональных дробей.

Теорема 2.1: Интегрирование правильных рациональных дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,d(x-a) = A\ln|x-a| + c. \tag{1}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \int \frac{A}{(x-a)^k}\,d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c \quad (k \neq 1). \tag{2}$$

Теорема 2.2: Интегрирование правильных рациональных дробей вида $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$x^2+px+q = (x+(p/2))^2 + q^*, \quad \text{где} \quad q^* = q - p^2/4 > 0, \quad \text{так как} \quad p^2-4q<0.$$

Сделаем замену $t = x + (p/2)$, тогда $x = t - (p/2)$ и $dx = dt$.
Следовательно,

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{B(t-(p/2))+C}{(t^2+q^*)^n}dt =$$

$$= \int \frac{Bt}{(t^2+q^*)^n}dt + \int \frac{C^*}{(t^2+q^*)^n}dt, \quad \text{где} \quad C^* = -B(p/2)+C.$$

Разберем, как вычисляются интегралы $\int \frac{t}{(t^2+q^*)^n}dt$ и $\int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt$. После вычисления интегралов следует заменить t на $x+\frac{p}{2}$.

$$\text{a)} \int \frac{t}{(t^2+q^*)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+q^*)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q^*)}{(t^2+q^*)^n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(t^2+q^*)+c, & n=1 \\ \frac{1}{2(1-n)(t^2+q^*)^{1-n}}+c, & n\neq 1 \end{cases}$$

Вычисление интеграла I_n

Рассмотрим интеграл:

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt.$$

Для случая $n=1$:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+q^*}dt = \frac{1}{\sqrt{q^*}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q^*}} + C.$$

Для $n \geq 2$, используем метод интегрирования по частям:

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt = \left[u = (t^2+q^*)^{-n}, \quad dv = dt\right].$$

Тогда:

$$du = -n(t^2+q^*)^{-n-1}2tdt, \quad v = t.$$

$$I_n = \frac{t}{(t^2+q^*)^n} + 2n\left[\int \frac{t^2}{(t^2+q^*)^{n+1}}dt\right].$$

Учитывая, что $t^2 = (t^2+q^*) - q^*$, преобразуем:

$$I_n = \frac{t}{(t^2+q^*)^n} + 2nI_n - 2nq^* I_{n+1}.$$

Получаем рекуррентную формулу:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nq^*}\left[\frac{t}{(t^2+q^*)^n} + (2n-1)I_n\right].$$

Эта формула позволяет вычислять $I_2, I_3, \ldots$ последовательно.

Определение 1.2: Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ этого отрезка:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Определим интегральную сумму:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где ξ_k — произвольные точки в $[x_{k-1}, x_k]$, а $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении λ_τ (ранга разбиения) к нулю, то этот предел называют определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a,b]$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)dx.$$

1.6 Интегральные суммы Римана. Определение определенного интеграла. Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке.(с доказательством)

Определение 1.1: Интегральные суммы Римана

1) Говорят, что выбрано разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a,b]$, если выбраны точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, b, такие что:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

Длину i-го отрезка разбиения обозначим Δx_i ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Число $\lambda_\tau = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ называется рангом разбиения τ.

2) Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Выберем разбиение τ отрезка $[a,b]$. Выберем в каждом из получившихся отрезков разбиения по точке:

$$\xi_1 \in [x_0, x_1], \quad \xi_2 \in [x_1, x_2], \quad \dots, \quad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Вычислим значение функции $f(x)$ в этих точках и составим интегральную сумму Римана:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

3) Если существует конечный предел I интегральных сумм при стремлении ранга разбиения к нулю, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения τ, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

То есть,

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$$

то есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (\lambda_\tau < \delta \implies |\sigma_\tau - I| < \varepsilon) \; \forall \tau, \forall \{\xi_k\}_{k=0}^{n}$$

Замечания

1) $\lambda_\tau \to 0 \Rightarrow n \to \infty$. Обратное неверно.
2) Геометрический смысл σ_τ для $f(x) \geq 0$.

Определение 1.2

Если существует $\int_a^b f(x)dx$, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и пишут $f(x) \in R([a,b])$ (читается: $f(x)$ принадлежит классу функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$).

Теорема 1.1

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

Замечание

Обратное неверно.

Пример

Функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

где Q — множество рациональных чисел.

1.7 Теорема об интегрируемости функции на более узком промежутке, о связи интегралов от f на промежутках [a,b], [a,c], [c,b].

Теорема

1) Пусть

$$f(x) \in R([a,b]), [a_1,b_1] \subseteq [a,b] \text{ Тогда } f(x) \in R([a_1,b_1])$$

.

2) Пусть

$$c \in [a,b], f(x) \in R([a,c]), f(x) \in R([c,b])$$

.

Тогда

$$f(x) \in R([a,b]) \text{ и } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(без доказательства)

1.8 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной и ограниченной функции.

Теорема

1) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

$$f(x) \in C([a, b]) \Rightarrow f(x) \in R([a, b]).$$

2) Если $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и непрерывна там всюду, за исключением конечного числа точек, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

3) Если $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

(без доказательства)

1.9 Действия над интегрируемыми функциями.

Теорема 1.4: Действия над интегрируемыми функциями

Если $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$, то:
1) $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R([a,b])$, и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2) $f(x)g(x) \in R([a,b])$.

1.10 Теорема об интегрировании функции, равной нулю всюду, за исключением конечного числа точек, и функции, у которой изменены значения в конечном числе точек.

Теорема 1.5

1) Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$ и равна нулю всюду, за исключением конечного числа точек. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2) Пусть $g(x) \in R([a, b])$.

Если в конечном числе точек изменить значения функции $g(x)$, то функция останется интегрируемой, и величина интеграла не изменится.

1.11 Свойства определенного интеграла.

Теорема 1.6: Свойства определенного интеграла

1)

$$\int_a^b dx = b - a.$$

2) Пусть a, b, c — три числа, $p = \max\{a, b, c\}$, $q = \min\{a, b, c\}$. Если $f(x) \in R([q, p])$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3) Если $f(x) \in R([a, b])$, то $|f(x)| \in R([a, b])$, и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.12 Неравенства для определенных интегралов.

Теорема 1.7

Пусть $f(x) \in R([a,b])$, $A \leq f(x) \leq B$ на $[a,b]$.
Тогда

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a).$$

Следствия

1) Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (\text{взять } A = 0).$$

2) Пусть $f(x), g(x) \in R([a,b])$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0, \text{ то есть,}$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

3) Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $|f(x)| \leq K$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a)$$

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \Rightarrow \quad -K(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq K(b-a).$$

1.13 Теорема о среднем значении функции на промежутке.

Теорема 1.8: о среднем значении функции на промежутке

Пусть $f(x) \in C([a, b])$. Тогда существует $x^* \in [a, b]$, такое что:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b - a).$$

Замечание

Формула

$$\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b - a)$$

справедлива и при $b < a$ (умножим обе части равенства на -1).

1.14 Непрерывность функции (с доказательством)

Определение 1.4

Пусть $f(x) \in R([a,b])$.
Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, определенную на $[a,b]$.
Функция $\Phi(x)$ называется функцией верхнего предела интеграла от $f(x)$.

Теорема 1.9

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$. Тогда для любой точки $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

то есть,

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Поскольку $f(x) \in R([a,b])$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть,

$$\exists K : |f(x)| \leq K \text{ на } [a,b].$$

Тогда

$$\left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq K|x - x_0|.$$

Следовательно,

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leq K|x - x_0| \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0),$$

то есть, $\Phi(x)$ непрерывна в точке x_0.
Поскольку x_0 — произвольная точка отрезка $[a,b]$, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1.10

В каждой точке x промежутка $[a,b]$, в которой $f(x)$ непрерывна, существует $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$, в которой функция непрерывна.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 : (|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

то есть,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon, \quad \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Пусть $|\Delta x| < \delta$. Тогда на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$ функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству.

1) Тогда:

а) Пусть $\Delta x \geq 0$,

$$(f(x_0) - \varepsilon)\Delta x \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)\Delta x;$$

б) Пусть $\Delta x < 0$,

$$(f(x_0) - \varepsilon)(-\Delta x) \leq \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)(-\Delta x).$$

Разделим все части неравенства из пункта а) на Δx, а все части неравенства из пункта б) на $-\Delta x$. Получим:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

что эквивалентно:

$$\left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

2) Рассмотрим

$$\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_{a}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_{a}^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

3) Получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad (|\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

то есть, существует $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

1.15 Дифференцируемость функции. Формула Ньютона – Лейбница.

Следствия

1) Частный случай (теорема Барроу):
Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда $F'(x) = f(x)$ на $[a,b]$.
(То есть, у любой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.)
2) Формула Ньютона-Лейбница:
Пусть $f(x) \in C([a,b])$, $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство

2) Так как $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ также является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, то существует число c:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + c,$$

то есть,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Пусть $x = a$.

$$0 = F(a) + c.$$

Следовательно, $c = -F(a)$. Пусть $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.16 Формулы интегрирования по частям и замены переменных в определенном интеграле.

Теорема 1.11

Пусть $u(x), v(x) \in C^1([a, b])$. Тогда:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

$$(u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)).$$

Теорема 1.12

Пусть $f(x) \in C([a, b])$ (или $f(x) \in C([b, a])$); $\varphi(t) \in C^1[\alpha, \beta]$, причем $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ (или $\varphi([\alpha, \beta]) = [b, a]$), $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (например, $\varphi(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$). Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

1.17 Несобственные интегралы II рода: определение, главное значение. Критерий сходимости интеграла II рода от неотрицательной функции.

Определение 2.1

1) Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$ и не ограничена в любой правой полукрестности точки a. Пусть $f(x) \in R([\alpha, b])\ \forall \alpha \in (a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода.

Если существует конечный предел $I = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$, то символу $\int_a^b f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.

2) Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена в любой левой полукрестности точки b. Пусть $f(x) \in R([a, \beta))\ \forall \beta \in [a, b)$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода.

Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx,$$

то символу $\int_a^b f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.

3) Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ всюду, за исключением точки $c \in (a, b)$, и не ограничена в любой окрестности точки c.

Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$ и не содержащем точку c.

$$\int_a^b f(x)dx$$

В этом случае символ $\int_a^b f(x)dx$ также называется несобственным интегралом II рода.

Есть два равносильных способа приписать символу $\int_a^b f(x)dx$ числовое значение: а)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится, если } \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся.}$$

б)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0, \delta_2 \to 0} \left(\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \right).$$

Замечание

Если не существует конечный

$$\lim_{\delta_1\to+0}\left(\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx\right)+\int_{c+\delta_2}^b f(x)dx,$$

но существует конечный

$$\lim_{\delta\to+0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right),$$

то этот предел называют **главным значением интеграла**

$$\int_a^b f(x)dx$$

и обозначают **v.p.**

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(то есть,

$$v.p.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right).$$

Лемма 2.1

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

1) Пусть $a'\in(a,b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^{a'} f(x)dx \text{ сходится и } \int_{a'}^b f(x)dx \text{ сходится}$$

$$(\text{и } \int_a^b f(x)dx=\int_a^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^b f(x)dx).$$

2) Пусть $c\neq 0$. Тогда

$$\int_a^b cf(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ сходится}$$

$$(\text{и } \int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx).$$

Теорема 2.1

Критерий сходимости несобственного интеграла II рода от неотрицательной функции.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x)\geq 0$ на $[a,b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \exists K\geq 0: \int_a^\beta f(x)dx\leq K \quad \forall\beta\in[a,b).$$

Лемма 2.2

Пусть $F(x)$ возрастает на $[a, b)$. Тогда

$$\lim_{x \to b-0} F(x) \text{ конечный } \Leftrightarrow F(x) \text{ ограничена сверху на } [a, b).$$

(без доказательства)

1.18 Первый и второй признаки сравнения. Сходимость интеграла

Теорема 2.2

Первый признак сравнения несобственных интегралов II рода от неотрицательных функций.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x) \geq g(x) \geq 0$ на $[a, b)$. Тогда:

1) Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ тоже сходится.

2) Если $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема 2.3

Второй признак сравнения несобственных интегралов II рода от неотрицательных функций.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x), g(x) > 0$ на $[a, b)$, и

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad l \neq 0, l \neq \infty$$

(например, $f(x) \sim g(x)$). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{сходится} \quad \iff \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{сходится.}$$

Примеры

Пусть $p > 0$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x^p}$$

Сходятся при $p < 1$, расходятся при $p \geq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b, & p \neq 1 \\ \ln(x)\Big|_a^b, & p = 1 \end{cases}$$

$$\exists \text{ существует } \lim_{a \to +0} \int_a^b \frac{dx}{x^p} \text{ только при } p < 1$$

Примеры интегралов

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \text{ сходится.}$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x+x^4}} \text{ расходится.}$$

1.19 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов II рода .

Определение 2.2

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют абсолютно **сходящимся**.

Теорема 2.4

Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.
(без доказательства)

Замечание

Обратное неверно.
Если интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, а интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится условно.

1.20 Несобственные интегралы I рода: определение, главное значение. Признаки сходимости. Сходимость интеграла

Определение 3.1

1) Пусть $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$, $f(x) \in R([a, A])\ \forall A \in (a, +\infty)$.
Символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода.
Если существует конечный предел

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx,$$

то символу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл сходится.
Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.
2) Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, b]$, $f(x) \in R([B, b])\ \forall B \in (-\infty, b)$.
Символ $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода.
Если существует конечный предел

$$I = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)dx,$$

то символу $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ присваивают значение I, то есть,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.
Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.
3) Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$, $f(x)$ интегрируема на любом отрезке.
В этом случае символ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ также называется несобственным интегралом I рода.
Есть два равносильных способа приписать символу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ числовое значение:

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

где c — произвольная точка из $(-\infty, +\infty)$.
Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty, B \to +\infty} \int_A^B f(x)dx.$$

Замечание

Если не существует конечный

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^B f(x)dx,$$

но существует конечный

$$\lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^B f(x)dx,$$

то этот предел называют **главным значением интеграла**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

и обозначают **v.p.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

$$(\text{то есть, } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^{B} f(x)dx).$$

Примеры

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} xdx$$

сходится только в смысле главного значения, и его главное значение равно 0.

$$2) \int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

$$\int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^A, & p \neq 1 \\ (\ln x)\Big|_a^A, & p = 1 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{A \to \infty} \int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p} \text{ только при } p > 1.$$

только при $p > 1$.

1.21 Признак Дирихле. Сходимость интеграла при p>0.

Определение 3.2

Рассмотрим интеграл из определения 3.1.

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Если сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то интеграл называют **абсолютно сходящимся**.

Теорема 3.1

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла I рода.
Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$. Пусть:
1) $f(x) \in C([a, +\infty))$ и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$;
2) $g(x) \in C^1([a, +\infty))$, $g(x)$ монотонно убывает на $[a, +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ **сходится**.

Пример

Интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

(при $a > 0, p > 0$) **сходится абсолютно** при $p > 1$, **сходится условно** при $0 < p \leq 1$.

1.22 Площадь криволинейной трапеции. Вычисление площади эллипса с помощью параметризации кривой.

Пример

Найдем площадь эллипса, то есть, фигуры, ограниченной кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введем параметризацию эллипса:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Функции $y_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $\quad y_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ - верхняя и нижняя части кривой. Тогда площадь эллипса

$$S = \int_{-a}^{a} (y_1(x) - y_2(x))dx = \int_{-a}^{a} y_1(x)dx - \int_{-a}^{a} y_2(x)dx = [x = x(t), y = y(t)] =$$

$$= \int_{\pi}^{0} y(t)dx(t) - \int_{\pi}^{2\pi} y(t)dx(t) = -\int_{0}^{2\pi} y(t)dx(t) = ab\int_{0}^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt = \pi ab.$$

Замечание

Мы на примере показали справедливость утверждения:

$$\text{Если} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

- уравнение гладкой замкнутой кривой без самопересечений, пробегаемой против часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру площадью S, то

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)dx(t) = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

1.23 Площадь криволинейного сектора.

Теорема 4.2

Площадь криволинейного сектора, то есть, фигуры, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ ((r, φ) - полярные координаты), равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

1.24 Объем прямого кругового цилиндра.

Определение 4.2

Функция $V(T)$, определенная на некотором классе Ω множеств в пространстве, называется **объемом**, если она обладает следующими свойствами:

1) **Монотонность**: $\forall T_1, T_2 \in \Omega : T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow V(T_1) \leq V(T_2)$.

2) **Аддитивность**: Если T_1 и T_2 не имеют общих внутренних точек, то $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.

3) **Инвариантность**: Если T_1 можно совместить с T_2 при помощи параллельного переноса и поворота, то $V(T_1) = V(T_2)$.

4) **Нормировка**: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его трех смежных сторон.

Замечание

Множества из Ω называются кубируемыми или измеримыми по Жордану.

Все множества, которые мы рассматриваем, измеримы (без доказательства).

Лемма 4.1

Объём V прямого кругового цилиндра (тела T, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0, z = h$) равен

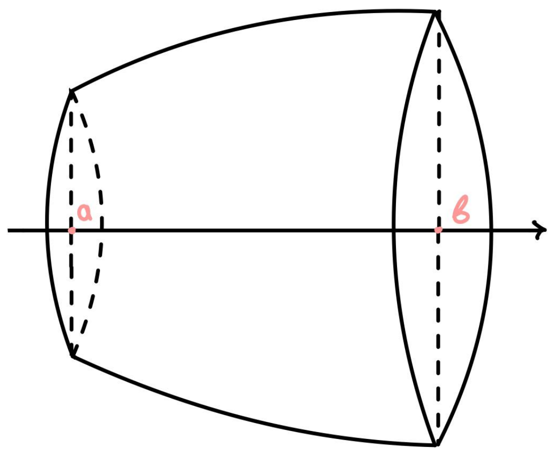
$$V = \pi R^2 h.$$

1.25 Объем тела вращения. Объем тела с известными площадями поперечных сечений. Объем эллипсоида.

Теорема: Объем тела вращения

$$\text{Пусть } f \in C[a,b], \quad f \geq 0 \text{ на } [a,b].$$

Объём V тела T, полученного путём вращения подграфика $y = f(x)$ вокруг оси OX, равен:



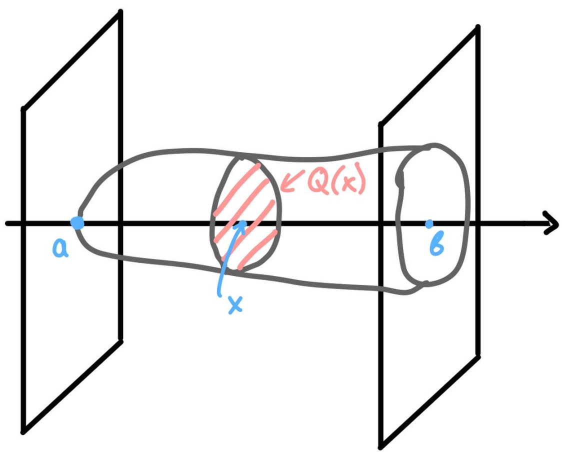
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Объем тела с известными площадями поперечных сечений

Рассмотрим тело T, заключенное между плоскостями $x = a, x = b$.

Пусть $Q(x)$ - фигура, полученная при сечении тела плоскостью $x = const, (x \in [a,b])$

Пусть $Q(x)$ - фигура, полученная при сечении тела плоскостью $\forall x \in [a,b]$ и функция $S(x) = S(Q(x))$ непрерывна на $[a,b]$.



$$\text{Тогда } V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Объем элипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

В сечении элипсоида пл-тью $x=x_0$ имеем эллимсоида пл-тью

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2} \iff \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\right]^2}=1$$

$$\Rightarrow \text{площадь сечения } S(x_0)=\pi b_1 c_1=\pi bc\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow V=\int_{-a}^{a} S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi bc\left[(a-\frac{a^3}{3a^2})-(-a+\frac{a^3}{3a^2})\right]=\pi bc\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc$$

Следствие

Обьем шара радиуса $R\,(a=b=c=R)$, есть $\frac{4}{3}\pi R^3$

1.26 Длина кривой, заданной параметрически. Следствия. Вычисление длины окружности.

Определение:

Рассмотрим кривую, заданную параметрически

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C([\alpha, \beta])$$

(кривая - совокупность точек плоскости с координатами $(\varphi(t), \psi(t))$ где $t \in [\alpha, \beta]$)

Если точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ ссовпадает с точкой $A(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, то кривая называется **замкнутой**

Кривая называется **гладкой**, если φ и ψ имеют непрерывные производные, которые не обращаются одновременно в **ноль**

Определение:

Рассмотрим кривую (1). Пусть $\tau = \{t\}_{k=0}^{n}$ - некоторое разбиение $[\alpha, \beta]$.

Составим:

$$l(r) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

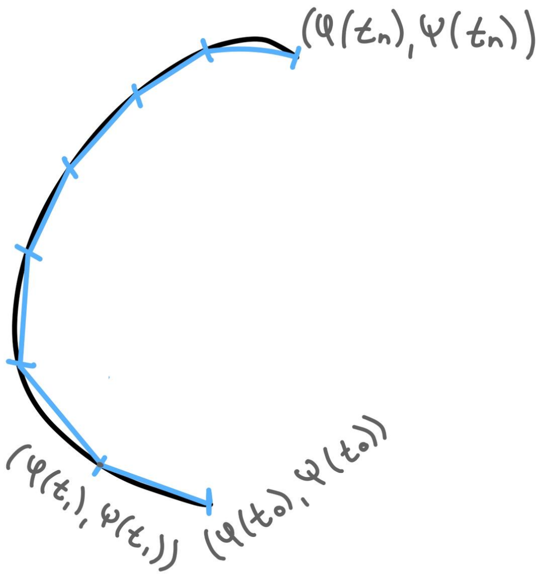
- длина ломаной с вершинами в точках $(\varphi(t_k), \psi(t_k)), (k = 0, 1, \ldots, n)$

Длина кривой назовем:

$$l = \sup_{\tau \in T} l(\tau)$$

(здесь T - набор всевозможных разбиений $[\alpha, \beta]$)

Если l конечно, то кривая называется спрямляемой.

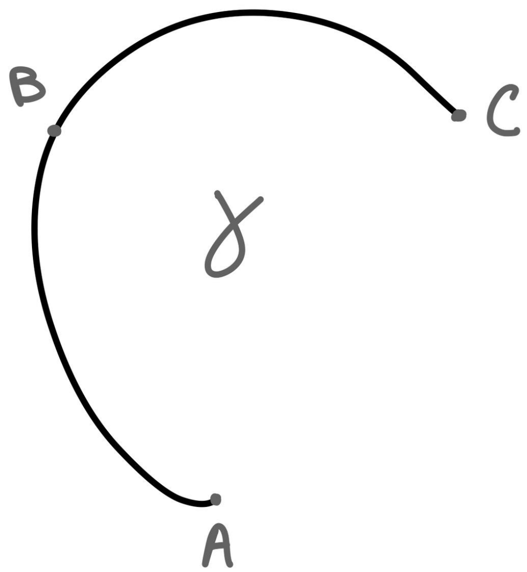


Замечания. **(без доказательства)**

1) Всякая гладкая кривая допускает **параметризацию**.

2) Длина криво обладжает свойством **аддитивности**.

Т.е, если l_1 - длина кривой γ между точками A и B, l_2 - длина кривой между точками B и , то $l = l_1 + l_2$ - длина кривой γ между точками A и



2 Алгебра

2.1 Группы, кольца, поля.

Определение:

Пусть A - множество математических объектов одной природы, на котором задано отображение

$$f : (A \times A) \to A,$$

то есть, правило, сопоставляющее каждой паре элементов (a, b), $a \in A$, $b \in A$, некоторый элемент $c \in A$.

Тогда говорят, что на множестве A введена бинарная операция.

Обозначение:

$$a \circ b = c.$$

Определение:

Если на множестве A введена бинарная операция, обладающая свойствами 2, 3, 4, то множество A называется **группой**.

Если также выполнено свойство 1, группа называется **абелевой**.

Примеры

1) Z - абелева группа относительно операции сложения.
2) $Q^+ = \{q \in Q \mid q > 0\}$ - абелева группа относительно операции умножения (здесь $0 = 1$, $-q = \frac{1}{q}$).

Возможные свойства бинарных операций

1. **Коммутативность**:

$$a \circ b = b \circ a$$

2. **Ассоциативность**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

3. **Существование нейтрального элемента** операции, называемого нулем (обозначаемого 0), то есть, элемента, не меняющего второй элемент, участвующий в операции. То есть,

$$a \circ 0 = 0 \circ a = a \quad \forall a \in A$$

4. **Существование противоположного элемента** для каждого элемента a множества A, обозначаемого $-a$, такого, что

$$a \circ (-a) = (-a) \circ a = 0$$

Определение 4

Пусть A — абелева группа относительно операции $\circ$. Пусть на A задана ещё одна бинарная операция $*$.

Если для всех $a, b, c \in A$ выполняются **распределительные свойства**:

5.

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$$

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$$

то множество A называется **кольцом**, а $\circ$ — сложением, $*$ — умножением.

Определение 5

Пусть A — абелева группа относительно операции $\circ$. Пусть на A задана ещё одна бинарная операция $*$, обладающая следующими свойствами:

6. **Коммутативность**:

$$a * b = b * a$$

7. **Ассоциативность**:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

8. **Существование нейтрального элемента** операции, называемого единицей (обозначаемого I), то есть, элемента, не меняющего второй элемент, участвующий в операции:

$$a * I = I * a = a, \quad \forall a \in A$$

9. **Существование обратного элемента** для каждого $a \neq 0$ множества A, обозначаемого $1/a$, такого, что:

$$a * (1/a) = (1/a) * a = I$$

Тогда множество A называется **скалярным полем** или **полем**.

Примеры

R, C — поля действительных и комплексных чисел.

2.2 Определение линейного пространства. Теорема о линейно зависимых и независимых системах векторов.

Определение 1.1 (в билете)

Рассмотрим поле R (или C) и множество L некоторых математических объектов. Будем говорить, что L является **линейным (векторным) пространством** над полем R (или C), если введены две операции:

1. Бинарная операция $+$ (сложение), относительно которой L образует абелеву группу.

2. Операция умножения элементов множества L на скаляры (числа) из поля R (или C), удовлетворяющая следующим свойствам:

а) $1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in L$;
б) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall\, x \in L, \quad \forall\, \alpha, \beta \in R$ (или C);
в) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in L, \quad \forall\, \alpha, \beta \in R$ (или C);
г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall\, x, y \in L, \quad \forall\, \alpha \in R$ (или C).

Элементы линейного пространства L называются **векторами**.

Лемма 1.1

Рассмотрим операцию умножения элементов множества L на скаляры (числа) из поля R (или C). Она обладает следующими свойствами:

1. $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in L$;
2. $\alpha \cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha \in R$ (или C);
3. $-x = -1 \cdot x$, где $-x$ — противоположный вектор к x;
4. $\alpha \cdot x = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, где 0 — нейтральный элемент операции сложения в L.

Пример

Пусть M — множество многочленов степени, меньшей либо равной n.

Это линейное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на число (здесь 0-многочлен — это многочлен, равный нулю для любого x, то есть, многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю).

Определение 1.2

Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейного пространства L называется вектор

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$ (или C).

Числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Лемма 1.2

Линейная комбинация линейных комбинаций векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ также является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Определение 1.3 (в билете)

1) Система (то есть, совокупность) векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейного пространства L называется **линейно независимой**, если равенство

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = 0$$

возможно только в случае, когда $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. То есть, линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ равна нулевому вектору **только при всех нулевых коэффициентах**.

2) Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = 0.$$

Иными словами, если хотя бы один коэффициент отличен от нуля и при этом выполняется равенство, то система является линейно зависимой.

Пример

Пусть M — линейное пространство многочленов степени, меньшей либо равной n. Система векторов

$$e = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

линейно независима, поскольку равенство

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$$

верно **только** при $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Здесь 0 — многочлен, равный нулю для любого x, то есть, многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю.

2.3 Теорема о линейной зависимости системы из k векторов, каждый из которых является линейной комбинацией некоторой системы из m векторов (k > m).

Теорема 1.1

Пусть $e = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — система векторов линейного пространства L.

1. Если e содержит нулевой вектор, то e линейно зависима.

2. Пусть $e' \subseteq e$. Тогда:

a) если e' линейно зависима, то e линейно зависима;

b) если e линейно независима, то e' линейно независима.

3. e линейно зависима $\iff$ один из векторов является линейной комбинацией остальных.

4. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ линейно независима, а $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k\}$ линейно зависима. Тогда x_k является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$.

Теорема 1.2

Пусть $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — две системы векторов линейного пространства L.

Если каждый вектор системы v является линейной комбинацией векторов системы u и $k > m$, то система векторов v **линейно зависима**.

2.4 Базис линейного пространства. Теорема об инвариантности числа элементов базиса. Теорема о количестве элементов линейно независимой системы (Т. 1.3, Т.1.4).

Определение 1.4

Система векторов $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ называется **порождающей** для линейного пространства L, если любой вектор из L можно представить в виде линейной комбинации векторов системы u.

Определение 1.5

Упорядоченная система векторов $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ называется **базисом** линейного пространства L, если она: 1) линейно независима; 2) порождающая для линейного пространства L.

Замечание

Базис линейного пространства определяется неоднозначно.

Пример

Пусть M — линейное пространство многочленов степени, меньшей либо равной n.
Система векторов $e = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ является базисом M.

Теорема 1.3

Количество элементов базиса является **инвариантом**, то есть неизменным, для линейного пространства L.

Определение 1.6

Пусть $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ является базисом линейного пространства L. Количество m элементов базиса называется **размерностью** линейного пространства L (обозначение: $\dim L = m$).

Говорят, что L — линейное пространство размерности m или m-мерное линейное пространство.

Если не существует базиса, состоящего из конечного числа элементов, пространство называется **бесконечномерным**.

Теорема 1.4

Пусть L — линейное пространство (в дальнейшем будем писать ЛП) и $\dim L = n$.

Пусть система векторов $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ линейно независима. Тогда выполняются следующие свойства:

1) $m \le n$;
2) если $m = n$, то u является базисом L;
3) если $m < n$, то u можно дополнить до базиса векторами из L.

2.5 Координаты вектора. Теоремы о координатах вектора (Т.1.5 и Т. .1). ???????

Определение 1.7

Пусть L – линейное пространство, а $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – его базис.
Каждый вектор x из L можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – координаты вектора x в базисе e.

$$\text{Запись координатного столбца: } X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Этот столбец называется **координатным столбцом вектора** x в базисе e.

Теорема 1.5

Координаты вектора в базисе определяются **однозначно**.

Доказательство

Пусть $x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$ и $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.
Тогда:

$$0 = (c_1 - a_1)e_1 + (c_2 - a_2)e_2 + \cdots + (c_n - a_n)e_n.$$

Так как система векторов e **линейно независима**, то:

$$c_1 - a_1 = c_2 - a_2 = \cdots = c_n - a_n = 0,$$

то есть:

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2, \quad \ldots, \quad c_n = a_n.$$

2.6 Определение и свойства скалярного произведения. Угол между векторами.

Определение 1.8

1) Пусть L — линейное пространство над полем R. Пусть задана функция, сопоставляющая паре векторов x, y вещественное число, обозначаемое (x, y), и удовлетворяющая следующим требованиям:
- **Положительная определенность**:

$$(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- **Симметрия**:

$$(x, y) = (y, x).$$

- **Линейность по первому аргументу**:

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y).$$

- **Аддитивность**:

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y).$$

Тогда говорят, что в L задано **скалярное произведение**.
2) **Нормой (или длиной) вектора** x называется число:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

(Другое обозначение: $\|x\|$.)

Замечания

1) Из свойств линейности по первому аргументу и симметрии скалярного произведения следует свойство линейности по второму аргументу:

$$(y, \alpha x + \beta z) = \alpha(y, x) + \beta(y, z).$$

(Требования 3) и 4) равносильны требованию

$$(\alpha x + \beta z, y) = \alpha(x, y) + \beta(z, y).$$

Следовательно,

$$(y, \alpha x + \beta z) = (\alpha x + \beta z, y) = \alpha(y, x) + \beta(y, z).$$

2) **Нулевой элемент**: $\langle 0, y \rangle = 0$ для всех $y \in L_1$.
(Пусть $\langle 0, y \rangle = a$. Тогда:

$$\langle 0, y \rangle = \langle 0 + 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle + \langle 0, y \rangle.$$

Следовательно, $a = a + a$, откуда $a = 0$.)

Лемма 1.4: Свойства длины (нормы)

1) $|x| \geq 0$, при этом $|x| = 0 \iff x = 0$.
2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$.
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**неравенство треугольника**).
4) $|xy| \leq |x||y|$.

Следствие

Пусть $x, y \neq 0$. Тогда выполняется неравенство:

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1.$$

Определение 1.9

Пусть $x, y \neq 0$. Так как

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1,$$

существует угол $\varphi \in [-\pi, \pi]$, такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Этот угол называется **углом между векторами** x и y.

Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Следовательно, если $x, y \neq 0$, то угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Базис $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется **ортогональным**, если:

$$(e_i, e_j) = 0, \quad \text{при } i \neq j.$$

Базис называется **ортонормированным**, если:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Пример 1

Пусть M — линейное пространство многочленов степени, меньшей либо равной n. Введем в M скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_0^1 fg\,dx.$$

Данное скалярное произведение удовлетворяет всем свойствам.

Рассмотрим многочлены:

$$f = x^2, \quad g = x^4 - \frac{3}{7}.$$

Проверка ортогональности

Вычислим скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_0^1 x^2 \left(x^4 - \frac{3}{7}\right) dx.$$

Раскрывая скобки:

$$\int_0^1 \left(x^6 - \frac{3}{7}x^2\right) dx.$$

Вычисляя интегралы:

$$\frac{x^7}{7}\bigg|_0^1 - \frac{x^3}{7}\bigg|_0^1 = 0.$$

Следовательно, векторы f и g **ортогональны**.

Вычисление нормы (длины) вектора

Определим норму вектора f:

$$(f, f) = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, длина вектора f равна:

$$|f| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2.7 Пространства R^n и R_n

Пример. Линейные пространства R^n и $R_{n.}$

1) n-мерной строкой (столбцом) называется упорядоченный набор из n вещественных чисел, записанных в строку или столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

R^n — множество n-мерных столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n, \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$R_{n.}$ — множество n-мерных строк:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{n.}, \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

На множествах R^n и $R_{n.}$ введены операции сложения и умножения на число:
- Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
1) $X = Y \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2) $Z = X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
Здесь:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0), \quad -X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

(Аналогично для столбцов.)
3) $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.
(Аналогично для столбцов.)
Выполнены все свойства операций, следовательно, R^n и $R_{n.}$ — линейные пространства.

2)Система векторов e, состоящая из векторов

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

является **базисом** R^n, так как:

- **Порождающая система**: любой вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить как линейную комбинацию:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

- **Линейная независимость**: если $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n = 0$, то это возможно **только** при $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Этот базис называется **каноническим**, а размерность пространства R^n равна n, то есть $\dim R^n = n$.

Аналогичные рассуждения справедливы для **столбцов**.

Замечание

Каждый столбец из R^n является **своим же координатным столбцом** в каноническом базисе.

3) Скалярное произведение в R^n

Определим скалярное произведение для векторов $X, Y \in R^n$:

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Оно удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения.

Длина (норма) вектора

Норма (или длина) вектора X определяется как:

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ортонормированность канонического базиса

Канонический базис является **ортонормированным**, так как:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

4) Геометрическая интерпретация пространств R_1, R_2, R_3

Пространство V_3 направленных отрезков (геометрических векторов) может служить геометрическим образом пространства R_3.

Для этого векторам канонического базиса R_3 поставим в соответствие тройку попарно ортогональных единичных векторов:

$$i, j, k.$$

Тогда строке $A = (x, y, z)$ сопоставляется геометрический вектор:

$$a = xi + yj + zk \quad \text{из } V_3.$$

Скалярное произведение

Пусть $B = (x_1, y_1, z_1)$, тогда строке B сопоставляется геометрический вектор:

$$b = x_1 i + y_1 j + z_1 k \quad \text{из } V_3.$$

Скалярное произведение:

$$(a, b) = (A, B) = xx_1 + yy_1 + zz_1.$$

Косинус угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{(A, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Длина (норма) вектора

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |A|.$$

Вывод

Операции сложения, умножения на скаляр, а также скалярные произведения в R_3 и V_3 соответствуют друг другу.

2.8 Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов

Определение 1.10

Подмножество P векторов линейного пространства L называется **подпространством** L, если оно само является линейным пространством относительно операций, введенных в L.

Следствие

Подмножество P является подпространством L тогда и только тогда, когда оно **замкнуто** относительно операций сложения и умножения на число, введенных в L:

$$\forall\, x_1, x_2 \in P, \quad \forall\, a, b \in R \text{ (или } C) \quad ax_1 + bx_2 \in P.$$

Примеры

1) Множество столбцов из R^n, у которых совпадают первая и последняя компоненты, является **подпространством** R^n.

2) Множество столбцов из R^n, у которых первая компонента равна l, **не является** подпространством R^n.

Определение 1.11

Пусть L — линейное пространство, а $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — некоторая система векторов из L.

Рассмотрим множество всех возможных линейных комбинаций этих векторов:

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \left\{ x \in L \mid x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \right\}.$$

(то есть,$L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ - множество всех возможных линейных комбинаций векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$).

Это множество называется **линейной оболочкой** векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Лемма 1.5

1) $L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — это **подпространство** L.

2) Максимальный по количеству векторов **линейно независимый** набор векторов из $u_1, u_2, \ldots, u_m$ является **базисом** $L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

Замечания

1) $L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ также называют **пространством, натянутым на векторы** $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

2) **Любое линейное пространство** является **линейной оболочкой** своего **базиса**.

2.9 Ортогональные матрицы

Определение 2.1

Квадратная матрица $Q \in R^{n \times n}$ называется **ортогональной**, если:

$$QQ^T = Q^TQ = E.$$

Замечание

Матрица Q ортогональна $\iff$ существует обратная матрица Q^{-1}, равная транспонированной:

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Лемма 2.1

1) Матрица Q является ортогональной $\iff$ её **столбцы** образуют **ортонормированную систему** векторов в R^n.

2) Матрица Q является ортогональной $\iff$ её **строки** образуют **ортонормированную систему** векторов в R^n.

Замечание

Пусть $X, Y \in R^n$, тогда их скалярное произведение определяется как:

$$(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = X^TY.$$

Здесь X и Y записаны в виде столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Это определение скалярного произведения удовлетворяет всем его свойствам.

Лемма 2.2

1) Q — ортогональная матрица $\iff$ Q^T — ортогональная матрица.

2) Пусть Q_1 и Q_2 — ортогональные матрицы одного размера. Тогда Q_1Q_2 — ортогональная матрица.

Доказательство

1) а) Пусть Q — ортогональная матрица. Тогда:

$$Q^T(Q^T)^T = Q^TQ = E, \quad Q(Q^T)^T = QQ^T = E.$$

Следовательно, Q^T — ортогональная матрица.

б) Пусть Q^T — ортогональная матрица. Тогда:

$$QQ^T = (Q^T)^TQ^T = E, \quad Q^TQ = Q^T(Q^T)^T = E.$$

Следовательно, Q — ортогональная матрица.

2) Пусть Q_1 и Q_2 — ортогональные матрицы одного размера. Тогда:

$$(Q_1Q_2)(Q_1Q_2)^T = (Q_1Q_2)(Q_2^TQ_1^T) = Q_1Q_2Q_2^TQ_1^T = Q_1Q_1^T = E.$$

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = (Q_2^TQ_1^T)(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^TQ_2 = E.$$

Следовательно, Q_1Q_2 — ортогональная матрица.

Лемма 2.3

Пусть $X, Y \in R^n$, Q $n \times n$ — ортогональная матрица. Тогда:
1) $\langle QX, QY\rangle = \langle X, Y\rangle$.
2) $|QX| = |X|$

2.10 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы несовместны или имеют единственное решение. ???????

2.11 11. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений в случае, когда системы имеют бесконечно много решений. Структура общего решения систем. ??????????

2.12 Однородные системы линейных уравнений. ???????

2.13 Горизонтальный и вертикальный ранги матрицы. Ранг по минорам. Их совпадение для трапециевидной матрицы(с доказательством)

Теорема 4.1

Столбцы (строки) квадратной матрицы A **линейно независимы** $\iff |A| \neq 0$.

Доказательство

1) Пусть $|A| \neq 0$. Докажем от противного:

Если строки матрицы A являются линейно зависимой системой в R_n, то одна из строк является линейной комбинацией остальных. Пусть

$$A_{k*} = \alpha_1 A_{1*} + \cdots + \alpha_{k-1} A_{(k-1)*} + \alpha_{k+1} A_{(k+1)*} + \cdots + \alpha_n A_{n*}.$$

Тогда:

$$|A| = (k) \begin{vmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{k*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{k*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{vmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{vmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{k*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{vmatrix} = 0$$

так как в каждом слагаемом определитель имеет две одинаковые строки. Противоречие. Для столбцов доказательство аналогично.

2) Пусть столбца матрицы A линейно независимы. То есть, $\sum_{j=1}^{n} c_j A_{*j} = 0$ только при

$$c_1 = \cdots = c_n = 0. \text{ То есть, система } \begin{cases} {}_1a_{11} + c_2 a_{12} + \cdots + c_n a_{1n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}_1a_{n1} + c_2 a_{n2} + \cdots + c_n a_{nn} = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Следовательно, по теореме Крамера, $|A| \neq 0$. Доказательство для строк аналогично.

Определение 4.1

Пусть A — матрица размера $m \times n$.

1) Пусть $L_г(A)$ — линейная оболочка строк матрицы A. **Горизонтальным рангом** матрицы A называется размерность этого линейного пространства:

$$r_г(A) = \dim L_г(A).$$

2) Пусть $L_в(A)$ — линейная оболочка столбцов матрицы A. **Вертикальным рангом** матрицы A называется размерность этого линейного пространства:

$$r_в(A) = \dim L_в(A).$$

Следствие

Совокупность строк матрицы является **порождающей системой** пространства $L_2(A)$. Максимальный по количеству векторов **линейно независимый** набор строк является **базисом** $L_2(A)$ (см. Лемму 1.5). Следовательно, **горизонтальный ранг матрицы** равен количеству линейно независимых строк.

Аналогично, **вертикальный ранг матрицы** равен количеству линейно независимых столбцов.

Определение 4.2

1) **Минором** матрицы A называется **определитель** квадратной матрицы, полученной из A путем вычеркивания некоторого количества строк и столбцов. Размер минора — это количество его строк (столбцов).

2) **Ранг матрицы по минорам** $r_m(A)$ — это **наибольший размер отличного от нуля минора** этой матрицы.

Теорема 4.2

Пусть U — трапециевидная матрица размера $m \times n$. Тогда ее **вертикальный**, **горизонтальный** ранги и **ранг по минорам** совпадают и равны количеству **ненулевых строк** U.

Доказательство

Рассмотрим матрицу U:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & * & * & \dots & * & * \\ 0 & u_{22} & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{r,r+1} & u_{r,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где элементы $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{rr}$ не равны нулю, элементы $u_{r,r+1}, \dots, u_{rn}$, а также элементы, стоящие на месте $*$, могут быть любыми.

Построим квадратную **невырожденную** матрицу $U^{(1)}$, выделяя ненулевые строки:

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} u_{11} & * & * & * & * \\ 0 & u_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & u_{33} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{rr} \end{bmatrix}$$

Так как $|U^{(1)}| \neq 0$, это означает, что количество линейно независимых строк U равно количеству её **ненулевых строк**.

Следовательно, **вертикальный ранг**, **горизонтальный ранг** и **ранг по минорам** матрицы U совпадают и равны количеству **ненулевых строк** U.

Доказательство

1) Любой минор матрицы U размера, большего, чем r, равен 0, так как содержит нулевую строку. Следовательно, $r_M(U) = r$.

2) Столбцы матрицы $U^{(1)}$ линейно независимы (см. теорему 4.1). Их количество равно r, поэтому они образуют базис пространства R^r. Следовательно, каждый столбец матрицы $U^{(2)}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $U^{(1)}$.

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ u_{r,r+1} & \dots & u_{rm} \end{bmatrix}$$

Дополнение матрицы

Дополняем столбцы матриц $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ нулями до столбцов матрицы U.

Первые r столбцов матрицы U остаются линейно независимыми, так как:

$$c_1 U_{r+1} + c_2 U_{r+2} + \cdots + c_r U_{r*} = 0 \Rightarrow c_1 U^{(1)}_{r+1} + c_2 U^{(1)}_{r+2} + \cdots + c_r U^{(1)}_{r*} = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_r = 0.$$

Столбцы матрицы U с номерами $r+1, \ldots, n$ продолжают быть линейными комбинациями первых r столбцов (так как добавленные элементы равны нулю).

Следовательно, $r_6(U) = r$.

Доказательство

3) Рассмотрим матрицу $\overline{U}$:

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Соединим $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ (не перемножим, а приставим друг к другу, получим новую матрицу, состоящую из первых r строк матрицы U).

Строки матрицы $\overline{U}$ **линейно независимы**, так как:

$$c_1 \overline{U}_{1*} + c_2 \overline{U}_{2*} + \cdots + c_r \overline{U}_{r*} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 U^{(1)}_{1*} + c_2 U^{(1)}_{2*} + \cdots + c_r U^{(1)}_{r*} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

Поскольку строки $U^{(1)}$ **линейно независимы** (так как $|U^{(1)}| \neq 0$), остальные строки матрицы U являются **нулевыми**.

Следовательно, матрица $\overline{U}$ имеет r линейно независимых строк, то есть:

$$r_{\text{г}}(U) = r.$$

2.14 Неизменность ранга матрицы при умножении ее на невырожденную. Теорема о равенстве рангов для произвольной матрицы.

Теорема 4.3

Вертикальный и горизонтальный ранги матрицы A не меняются при умножении A на **невырожденную квадратную матрицу**.

Теорема 4.4

Вертикальный ранг, горизонтальный ранг и ранг по минорам **произвольной матрицы** A размера $m \times n$ **совпадают**. Их общая величина называется **рангом матрицы** A.

2.15 Теорема Кронекера - Капелли.

Для того, чтобы СЛАУ $AX = B$ (A – матрица системы размера $m \times n$, $B \in R^m$, $X \in R^n$) была совместна (т.е. имела решения), необходимо и достаточно, чтобы **ранг матрицы** A системы был равен **рангу расширенной матрицы** системы.

(Расширенной матрицей системы называется матрица $(A|B)$, полученная приставлением столбца B к матрице A.)

При этом: - если $\operatorname{rank} A$ совпадает с количеством неизвестных, то **решение единственно**; - если $\operatorname{rank} A$ меньше количества неизвестных, то **решений бесконечно много**.

Доказательство

1) Пусть система совместна, т.е. существует столбец X:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B.$$

Следовательно, столбец B является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Добавление столбца B не увеличивает количество линейно независимых столбцов, следовательно, не меняет ранг матрицы.

2) Пусть $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = r$. Матрица A имеет r линейно независимых столбцов, пусть это $A_1, A_2, \dots, A_r$. Остальные столбцы, включая B, являются их линейными комбинациями. Следовательно, существуют числа $c_1, \dots, c_r$:

$$B = c_1 A_1 + \dots + c_r A_r.$$

Тогда вектор X имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, столбец X является решением системы, и система совместна.

3) Пусть $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = r$, то есть система совместна. Сведем систему к эквивалентной системе $UX = F$ с трапециевидной матрицей U (см. метод Гаусса).

- Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = n$, то количество ненулевых строк U совпадает с количеством неизвестных. Следовательно, система имеет единственное решение.

- Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U < n$, то количество ненулевых строк U меньше количества неизвестных, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

2.16 Собственные числа и векторы матрицы. Совпадение характеристических многочленов у подобных матриц. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.

Определение собственных чисел и векторов

Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$. Число λ называется **собственным числом** матрицы A, если существует ненулевой вектор x, удовлетворяющий уравнению:

$$Ax = \lambda x.$$

Такой вектор x называется **собственным вектором**, соответствующим собственному числу λ.

Характеристический многочлен и его свойства

Для нахождения собственных чисел рассматривают **характеристическое уравнение**:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Выражение $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется **характеристическим многочленом** матрицы A. Корни этого многочлена — собственные числа матрицы.

Собственные числа подобных матриц

Две матрицы A и B называются **подобными**, если существует невырожденная матрица S, такая что:

$$B = S^{-1}AS.$$

Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены:

$$\det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda E).$$

С учетом свойства определителя:

$$\det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det(A - \lambda E),$$

откуда следует, что характеристический многочлен матрицы B совпадает с характеристическим многочленом матрицы A, а значит, подобные матрицы имеют одинаковые собственные числа.

Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — различные собственные числа матрицы A, а $x_1, x_2, \dots, x_m$ — соответствующие собственные векторы, то система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ **линейно независима**.

Доказательство:

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = 0.$$

Применим матрицу A к этому равенству:

$$A(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2 + \dots + c_mAx_m.$$

По определению собственных векторов:

$$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \dots + c_m\lambda_mx_m = 0.$$

Вычтем из него исходное уравнение:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda)x_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda)x_2 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda)x_m = 0.$$

Так как собственные числа различны, коэффициенты $\lambda_i - \lambda$ ненулевые. Следовательно, из линейной независимости векторов следует, что $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Таким образом, собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

2.17 Связь между линейной зависимостью системы векторов и соответствующей системы координатных столбцов. Связь координатных столбцов одного вектора в разных базисах.

Теорема 5.1. Действия с векторами в координатной форме

Пусть L — линейное пространство, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис L.
Пусть векторам x, y, z сопоставлены координатные столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

в базисе e.
Тогда равенство $z = ax + by$, где $a, b \in R$, равносильно равенству:

$$Z = aX + bY,$$

то есть:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.2

Векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ и их координатные столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k$ в некотором базисе линейно зависимы или независимы одновременно.

Определение 5.1

Пусть L — линейное пространство, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ — базисы L.
Матрицей перехода от базиса e к базису e' называется матрица C, столбцами которой являются координатные столбцы векторов базиса e' в базисе e.

Замечание 10.1

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1) X — координатный столбец вектора x в базисе $e \Leftrightarrow$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Leftrightarrow x = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = eX.$$

(матричное умножение базисной строки $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ на координатный столбец X).
2)Аналогично,

$$e'_j = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})(\text{столбец}) = e \cdot C_{*j}, \quad \text{где } C_{*j} \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } C.$$

3)Следовательно,

$$e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e \cdot C_{*1}, e \cdot C_{*2}, \ldots, e \cdot C_{*n}) = e \cdot C.$$

(матричное умножение базисной строки $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ на матрицу C).

Теорема 5.3

Связь координат одного вектора в разных базисах
Пусть L — линейное пространство, $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ — базисы L.
Пусть вектору x сопоставлены координатные столбцы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

в базисах e и e'.
Пусть C — матрица перехода от базиса e к базису e'.
Тогда:

$$X = CX'.$$

Замечание

Матрица C невырожденная, так как её столбцы линейно независимы по теореме 5.2. Следовательно,

$$X' = C^{-1}X.$$

2.18 Линейное отображение линейных пространств. Матрица отображения в некоторых базисах. Ее использование для вычисления образа вектора. Связь матриц отображения в разных базисах.

Определение 6.1

Отображение A линейного пространства V в линейное пространство W $(A : V \to W)$ называется линейным, если:

$$A(ax + by) = aAx + bAy, \quad \forall x, y \in V, \forall a, b \in R.$$

Если $V = W$, линейное отображение A называется **линейным оператором**.

Примеры

1) Отображение $A : R^n \to R^m$ состоит в том, что каждый столбец $X \in R^n$ умножается слева на фиксированную матрицу B размера $m \times n$. Отображение A линейно, так как:

$$A(aX + bY) = B(aX + bY) = aBX + bBY = aAX + bAY$$

$$\forall X, Y \in R^n, \quad \forall a, b \in R.$$

2) Пусть M — линейное пространство многочленов степени $\leq n$.

$$Af = a_k f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_0 f$$

— линейный оператор, сопоставляющий каждому многочлену f многочлен $a_k f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_0 f$. Проверьте линейность самостоятельно.

Определение 6.2

Пусть $A : V \to W$ — линейное отображение.

1) Пусть $Ax = y$. Вектор $y \in W$ называется **образом** вектора $x \in V$.

Вектор $x \in V$ называется **прообразом** вектора $y \in W$.

2) Множество

$$A(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$$

(то есть, «множество значений» отображения A) называется **образом** отображения A и обозначается $\operatorname{Im} A$.

3) Множество

$$A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid Ax = 0\}$$

(то есть, множество прообразов вектора 0) называется **ядром** отображения A и обозначается $\operatorname{Ker} A$.

2.19 Ядро и образ отображения.

Теорема 6.1

Образ $\operatorname{Im} A$ является подпространством линейного пространства W.
Ядро $\operatorname{Ker} A$ является подпространством линейного пространства V.

Доказательство

1) Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$, то есть существуют такие $x_1, x_2 \in V$, что $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$.
Рассмотрим вектор $y = ay_1 + by_2$. Он является образом вектора $x = ax_1 + bx_2$, так как:

$$A(ax_1 + bx_2) = aAx_1 + bAx_2 = ay_1 + by_2 = y.$$

Следовательно, множество $\operatorname{Im} A$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр, что означает, что $\operatorname{Im} A$ является подпространством W.
2) Пусть $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} A$, то есть $Ax_1 = 0$, $Ax_2 = 0$.
Рассмотрим вектор $x = ax_1 + bx_2$, тогда:

$$A(ax_1 + bx_2) = aAx_1 + bAx_2 = 0.$$

Следовательно, множество $\operatorname{Ker} A$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр, что означает, что $\operatorname{Ker} A$ является подпространством V.

Определение 6.3

Пусть $A : V \to W$ — линейное отображение, а $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ — базисы пространств V и W.
Матрицей линейного отображения A в базисах e, f называется матрица A размера $m \times n$, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$, то есть образов векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ в базисе f.

Замечание 11.1

Для каждого j выполняется:

$$Ae_j = fA_{*j}$$

(по замечанию 5.1).
Следовательно,

$$(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (fA_{*1}, fA_{*2}, \dots, fA_{*n}) \Rightarrow Ae = fA.$$

Здесь $Ae = A(e_1, e_2, \dots, e_n) = (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)$, а fA — матричное произведение базисной строки $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ на матрицу A.

Замечание 11.2

Каждую матрицу A размера $n \times n$ можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора в некотором базисе.

Теорема 11.2

Пусть $A : V \to W$ — линейное отображение, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ — базисы V и W.
Матрица A размера $m \times n$ является матрицей линейного отображения A в базисах e, f.
Тогда $\forall x \in V, \forall y \in W$ справедливо:

$$Ax = y \iff AX = Y$$

(здесь X — координатный столбец вектора x в базисе e, Y — координатный столбец вектора y в базисе f).

Теорема 6.3

Пусть $A : V \to W$ — линейное отображение, e, e' — базисы пространства V, f, f' — базисы пространства W.

Матрица A является матрицей линейного отображения A в базисах e, f.

Матрица A' является матрицей линейного отображения A в базисах e', f'.

Матрица C является матрицей перехода от базиса e к базису e'.

Матрица S является матрицей перехода от базиса f к базису f'.

Тогда матрицы A и A', представляющие одно линейное отображение в разных базисах, связаны соотношением:

$$A' = S^{-1}AC.$$

Лемма 6.1

1) Пусть $A_1X = A_2X$ для любого столбца X (где A_1, A_2 — матрицы одного размера, а X — столбец соответствующего размера). Тогда $A_1 = A_2$.

2) Пусть $XA_1 = XA_2$ для любой строки X (где A_1, A_2 — матрицы одного размера, а X — строка соответствующего размера). Тогда $A_1 = A_2$.

Следствие

Если A — оператор, то

$$A' = C^{-1}AC.$$

2.20 20. Собственные числа и собственные векторы оператора. Матрица оператора в базисе из собственных векторов. (с доказательсвом)

Определение 6.4

$\mathcal{A} : L \to L$ — линейный оператор (L – линейное пространство).

Число $\lambda \in C$ и ненулевой вектор $x \in L$ называются **собственным числом** и соответствующим этому числу **собственным вектором** оператора $\mathcal{A}$, если выполняется равенство:

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Следствия

1) Пусть e — базис L, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e. Тогда:

$$\mathcal{A}x = \lambda x \iff AX = \lambda X$$

по теореме 6.2, где x — вектор из L, X — его координатный столбец в базисе e, а λX — координатный столбец вектора λx.

Следовательно, число $\lambda \in C$ и ненулевой вектор $x \in L$ являются собственным числом и собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда λ и координатный столбец X вектора x в базисе e являются собственным числом и собственным вектором матрицы A.

2) Так как матрицы A, A' оператора $\mathcal{A}$ в базисах e, e' связаны соотношением:

$$A' = C^{-1}AC,$$

где C — матрица перехода от e к e', то их **собственные числа совпадают**. Это корни характеристического многочлена:

$$\det(A - \lambda E).$$

Многочлен $\phi(t) = \det(A - tE)$ называется **характеристическим многочленом** оператора $\mathcal{A}$.

3) λ — собственное число оператора $\mathcal{A} \iff \lambda$ — корень характеристического многочлена $\phi(t)$.

Лемма 6.2

Матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда базис e состоит из собственных векторов оператора. При этом на диагонали матрицы A стоят соответствующие этим векторам собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \iff$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j e_j \iff$$

(по замечанию 6.1)

$$\mathcal{A}e_j = eAe_j = (e_1, e_2, \dots, e_n) \iff$$

λ_j - собственное число A, $\quad e_j$ - собственный вектор A.

2.21 Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам оператора. Собственные подпространства, их размерность. Следствия.

Определение 6.4

$A : L \to L$ — линейный оператор (L – линейное пространство).

Число $\lambda \in C$ и ненулевой вектор $x \in L$ называются **собственным числом** и соответствующим этому числу **собственным вектором** оператора A, если выполняется равенство:

$$Ax = \lambda x.$$

Следствия

1) Пусть e — базис L, а A — матрица оператора A в базисе e. Тогда:

$$Ax = \lambda x \iff AX = \lambda X$$

по теореме 6.2, где x — вектор из L, X — его координатный столбец в базисе e, а λX — координатный столбец вектора λx.

Следовательно, число $\lambda \in C$ и ненулевой вектор $x \in L$ являются собственным числом и собственным вектором оператора A тогда и только тогда, когда λ и координатный столбец X вектора x в базисе e являются собственным числом и собственным вектором матрицы A.

2) Так как матрицы A, A' оператора A в базисах e, e' связаны соотношением:

$$A' = C^{-1}AC,$$

где C — матрица перехода от e к e', то их **собственные числа совпадают**. Это корни характеристического многочлена:

$$\det(A - \lambda E).$$

Многочлен $\phi(t) = \det(A - tE)$ называется **характеристическим многочленом** оператора A.

3) λ — собственное число оператора $A \iff \lambda$ — корень характеристического многочлена $\phi(t)$.

Лемма 6.3

Собственные векторы матрицы A, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

Теорема 6.4

1) Собственные векторы оператора, отвечающие различным собственным числам, линейно независимы.

2) Собственные векторы оператора, отвечающие одному собственному числу λ, объединенные с нулевым вектором, образуют линейное подпространство пространства L. Это подпространство называется **собственным подпространством**, отвечающим (соответствующим) собственному числу λ.

3) Размерность собственного подпространства, отвечающего собственному числу λ, не превосходит кратности собственного числа λ как корня характеристического многочлена.

Важные следствия

1) Матрица A оператора A в некотором базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда e состоит из собственных векторов оператора.

Это возможно, когда все собственные числа оператора вещественны, и размерность каждого собственного подпространства максимально возможная, то есть совпадает с кратностью собственного числа как корня характеристического многочлена (так как мы должны набрать n линейно независимых собственных векторов, которые получим, объединив базисы собственных подпространств).

2) Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$.

Пусть существует невырожденная матрица C размера $n \times n$:

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Тогда столбцы C — это собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Действительно, рассмотрим матрицу A как матрицу некоторого линейного оператора в некотором базисе e (см. замечание 6.2). Тогда матрицу C можно рассматривать как матрицу перехода к новому базису. В новом базисе матрица оператора диагональная, следовательно, новый базис состоит из собственных векторов оператора. Следовательно, столбцы матрицы C, которые являются координатными столбцами векторов нового базиса в исходном базисе e, это собственные векторы матрицы A (см. следствие 1 и определение 6.4).

3) Квадратная матрица A диагонализируема (т. е. подобна диагональной, т. е. существует невырожденная матрица C, такая что:

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы вещественны, и размерность каждого собственного подпространства максимально возможная, то есть совпадает с кратностью собственного числа как корня характеристического многочлена.

(Собственные векторы матрицы, отвечающие одному собственному числу λ, объединённые с нулевым вектором, образуют линейное подпространство пространства R^n, доказательство аналогично теореме 6.4, пункт 2).

2.22 Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Линейная независимость ортонормированной системы векторов

Определение 7.1

Линейное пространство над полем R с заданным на нем скалярным произведением называется **евклидовым**, над полем C — **унитарным**.

Замечание

В унитарном пространстве L свойство симметрии скалярного произведения изменяется на:

$$(x, y) = \overline{(y, x)}.$$

Остальные свойства остаются прежними:
1) $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \quad \forall x, y, z \in L, \forall \alpha, \beta \in C$.

Пример 7.1

Рассмотрим C^n – линейное пространство столбцов с n комплексными компонентами. Скалярное произведение вводится следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Пусть X, Y - векторы из C^n.

$$(X, Y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n} \quad (\Leftrightarrow \quad (X, Y) = X^T\overline{Y}, \qquad X^T = (x_1, \ldots, x_n),$$

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}).$$

Тогда $(X, X) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \ldots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \geq 0.$.

Теорема 7.1

Пусть E — евклидово пространство, $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис E, (т.е. $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$).

Пусть векторы x, y имеют координатные столбцы X, Y в базисе e. Тогда:
1) $(x, y)_e = (X, Y)_{R^n}$, то есть **скалярное произведение векторов совпадает со скалярным произведением их координатных столбцов в ортонормированном базисе**.
2) Векторы x, y ортогональны $\iff$ ортогональны их координатные столбцы в ортонормированном базисе,
т.е. $(x, y)_e = 0 \iff (X, Y)_{R^n} = 0$.

Теорема 7.2. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – линейно независимая система векторов из евклидова пространства E. Тогда можно построить ортонормированную систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, принадлежащих линейной оболочке векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ $(L(f_1, f_2, \ldots, f_k))$.

Теорема 7.3

1) Любая ортонормированная система векторов линейно независима.
2) В евклидовом пространстве E всегда можно построить ортонормированный базис.

Доказательство

1) Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — ортонормированная система векторов.
Рассмотрим равенство:

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ke_k = 0.$$

Умножим обе части равенства скалярно на e_i:

$$(c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ke_k, e_i) = (0, e_i).$$

Так как система ортонормирована, получим:

$$c_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, равенство возможно только при $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, что означает линейную независимость системы.

2) Пусть $\dim E = n$, $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ — базис E.

Применяем процесс ортогонализации Грама–Шмидта к системе f. В результате получаем ортонормированную систему векторов $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, принадлежащих E.

Так как система e линейно независима и содержит n векторов, она образует базис пространства E.

2.23 Теорема о собственных числах и собственных векторах вещественной симметричной матрицы.

Теорема 7.4

1) Все собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны.

2) Собственные векторы вещественной симметричной матрицы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны.

Доказательство

1) Пусть λ — собственное число матрицы A, столбец $X \in C^n$ — собственный вектор матрицы, соответствующий собственному числу λ.

а) Рассмотрим число $\alpha = \overline{X}^T AX$.

$$\overline{\alpha} = \alpha^T = (\overline{X}^T AX)^T = \dot{X}^T \dot{A}\dot{X} = \overline{X}^T AX = \alpha.$$

Следовательно, α — вещественное число.

(В первом переходе используем: $(DBC)^T = \dot{C}^T\dot{B}^T\dot{D}^T$, а также то, что $A^T = A$. Во втором переходе используем то, что $\dot{X}^T\dot{A}\dot{X}$ — число, слагаемые которого являются произведениями элементов столбцов $\dot{X}, X$ и матрицы A. Пользуемся свойствами комплексного сопряжения: $a + b = \overline{a} + \overline{b}$, $ab = \overline{a} \cdot \overline{b}$. В результате каждый элемент столбцов $\dot{X}, X$ меняется на комплексно сопряженный, элементы матрицы A не меняются, так как они вещественны.)

b) $\alpha = \overline{X}^T AX = \overline{X}^T \lambda X = \lambda|X|^2$, где число $|X|^2 = \overline{X}^T X = (\overline{X}^T X)^T = X^T\overline{X}$ — квадрат длины столбца X. Следовательно,

$$\lambda = \frac{\alpha}{|X|^2}$$

— вещественное число.

2) Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), столбцы $X_1, X_2 \in R^n$ — собственные векторы матрицы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2.

а) Покажем, что $(AX_1, X_2) = (X_1, AX_2)$.

$$(AX_1, X_2) = (AX_1)^T X_2 = X_1^T AX_2 = X_1^T(AX_2) = (X_1, AX_2).$$

б) Следовательно,

$$0 = (AX_1, X_2) - (X_1, AX_2) = (\lambda_1 X_1, X_2) - (X_1, \lambda_2 X_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(X_1, X_2).$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(X_1, X_2) = 0$, что доказывает ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.

Замечание

Так как λ — вещественное собственное число вещественной симметричной матрицы A, рассматриваем только вещественные собственные векторы X матрицы, соответствующие собственному числу λ, которые являются решениями СЛАУ:

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

2.24 Теорема об ортогональном подобии вещественной симметричной матрицы некоторой диагональной матрице. Следствия.

Теорема 7.5

Любая вещественная симметричная матрица A размера $n \times n$ ортогонально подобна диагональной, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A.

(То есть, существует ортогональная матрица Q: $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа A).

Доказательство

1) Существует собственное число $\lambda \in R$ и соответствующий ему собственный вектор $X \in R^n$ матрицы A (т.е. $AX = \lambda X$).

Возьмем столбец $P_1 = X/|X|$ (P_1 также собственный вектор матрицы A). Дополним P_1 векторами $P_2', P_3', \dots, P_n'$ до базиса пространства R^n. Проведем процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Получим ортонормированный базис $P_1, P_2, \dots, P_n$ пространства R^n.

Рассмотрим матрицу $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$. P – ортогональная матрица, так как ее столбцы – ортонормированная система векторов. Следовательно, $P^{-1} = P^T$.

Рассмотрим матрицу $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda P_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P_1^T P_1 & * & \dots & * \\ \lambda P_2^T P_1 & & & \\ \vdots & & B & \\ \lambda P_n^T P_1 & & & \end{pmatrix}.$$

Так как:
a) $\lambda P_j^T P_1 = \lambda(P_j, P_1) = 0$ для $j = 2, 3, \dots, n$,
b) матрица $P^{-1}AP$ симметричная ($(P^TAP)^T = P^TA(P^T)^T = P^TAP$),
то $P^{-1}AP$ имеет вид:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

где B – симметричная матрица.

2) Проведем доказательство теоремы методом математической индукции по размерности матрицы A.

a) **База индукции.** Пусть $n = 1$, тогда A — диагональная матрица $A = a_{11}$.

b) **Индукционный переход.** Пусть утверждение теоремы справедливо для $n-1$, то есть если симметричная матрица B имеет размер $(n-1) \times (n-1)$, то существует ортогональная матрица $\tilde{Q}$ размера $(n-1) \times (n-1)$, такая что:

$$\tilde{Q}^T B \tilde{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Рассмотрим симметричную матрицу A размера $n \times n$. Применим преобразование, описанное в пункте 1, и получим матрицу:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Так как B имеет размер $(n-1) \times (n-1)$, по предположению индукции существует ортогональная матрица $\tilde{Q}$ размера $(n-1) \times (n-1)$, такая что:

$$\tilde{Q}^T B \tilde{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Покажем, что T — ортогональная.

$$TT^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}^T & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}\tilde{Q}^T & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично, $T^T T = E$. (См. перемножение блочных матриц, лемма 2.2).

Рассмотрим

$$T^{-1}A'T = T^T A'T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}^T & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}^T B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \tilde{Q}^T B \tilde{Q} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Следовательно,

$$T^{-1}A'T = T^{-1}(P^{-1}AP)T = (PT)^{-1}A(PT) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Возьмем в качестве матрицы Q произведение PT. Матрица $Q = PT$ ортогональна, так как является произведением ортогональных матриц.

Получаем:

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Так как собственные числа диагональной матрицы — это её элементы, стоящие на главной диагонали (выпишите характеристический многочлен диагональной матрицы и найдите его корни), и собственные числа подобных матриц совпадают (так как совпадают их характеристические многочлены), то

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

— собственные числа матрицы A.

Важные следствия

1) Столбцы матрицы Q являются собственными векторами матрицы A (см. следствие 2 к теореме 6.4).

2) Для любой симметричной матрицы A размера $n \times n$ существуют n линейно независимых собственных векторов. Следовательно, размерность каждого собственного подпространства максимально возможная, то есть совпадает с кратностью собственного числа как корня характеристического многочлена.

3) **Построение матрицы** Q:

* Находим собственные числа (корни характеристического многочлена). * Находим собственные векторы матрицы A (это линейное пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)X = 0$). * Выполняем ортогонализацию Грама – Шмидта базиса каждого собственного подпространства. * Собираем базисные векторы всех собственных подпространств и составляем из них матрицу Q.

На диагонали матрицы $Q^{-1}AQ$ будут стоять собственные числа в том порядке, в котором мы расставили соответствующие собственные векторы в матрице Q.

4) Если матрица A оператора A в некотором базисе e симметричная, то существует базис f, в котором матрица оператора имеет диагональный вид (возьмём $f = eQ$, то есть, возьмём матрицу Q как матрицу перехода к базису f). Базис f состоит из собственных векторов оператора (см. лемму 6.2).

При этом, если e — ортонормированный базис, то f также будет ортонормированным базисом, так как по теореме 7.1:

$$(f_i, f_j) = (Q_{*i}, Q_{*j}) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

(Напоминаю, Q_{*i} — координатный столбец вектора f_i в базисе e).

2.25 Определение билинейной и квадратичной форм. Матрица билинейной формы в некотором базисе, ее использование для вычисления билинейной формы. Связь матриц одной билинейной формы в разных базисах.

Определение 8.1

Пусть L — линейное пространство.

1) Функция $B : L \times L \to R$, сопоставляющая каждой паре элементов x, y из L некоторое число, называется **билинейной формой**, если $\forall x, y, z \in L, \forall \alpha, \beta \in R$ выполняются соотношения:

$$B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z),$$

$$B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z).$$

(Линейность по первому и второму аргументам.)

2) Билинейная форма называется **симметричной**, если $\forall x, y \in L$ выполняется:

$$B(x, y) = B(y, x).$$

3) **Квадратичная форма** — это числовая функция $B(x, x)$, которая получается из симметричной билинейной формы $B(x, y)$ при $y = x$.

Определение 8.2

Пусть L — линейное пространство, $B(x, y)$ — билинейная форма, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис L.

Матрицей билинейной формы в базисе e называется матрица B, элементы которой:

$$b_{ij} = B(e_i, e_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Матрицей квадратичной формы $B(x, x)$ в базисе e называется матрица соответствующей билинейной формы $B(x, y)$.

Теорема 13.1

Пусть L — линейное пространство, $B(x, y)$ — билинейная форма, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис L, B — матрица билинейной формы в базисе e.

Пусть векторы x, y имеют координатные столбцы X, Y в базисе e. Тогда:

$$B(x, y) = X^T B Y.$$

Следствия

1) Если билинейная форма $B(x, y)$ симметрична, то симметрична ее матрица в любом базисе (т.к. $b_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = b_{ji}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$).

Если матрица B билинейной формы $B(x, y)$ в некотором базисе e симметрична, то $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма.

$$(B(x, y) \text{ – число, следовательно, } B(x, y) = (B(x, y))^T = (X^T B Y)^T = Y^T B X = B(y, x)).$$

2) Для квадратичной формы справедливо

$$B(x, x) = X^T B X, \quad \text{где } B = B^T.$$

Пример

Пусть L – линейное пространство размерности 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы в некотором базисе e,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - координатный столбец вектора x в базисе e.

Тогда

$$B(x,x) = X^T B X = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2, 3x_1 + 4x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4$$

Теорема 13.2

Пусть L – линейное пространство, $B(x,y)$ — билинейная форма, e, e' — базисы L.

Тогда матрицы B и B' билинейной формы в базисах e и e' связаны соотношением:

$$B' = C^T B C,$$

где C — матрица перехода от базиса e к базису e'.

2.26 Теорема о существовании ортогонального преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Практический метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса (метод собственных векторов).

Определение 8.3

Квадратичная форма $B(x,x)$ в базисе e имеет **канонический вид**, если её матрица B в базисе e диагональная, то есть

$$B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Тогда квадратичная форма принимает вид:

$$B(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

где X — координатный столбец вектора x в базисе e:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются **коэффициентами канонической формы**.

Теорема 8.3

Любую вещественную квадратичную форму можно привести к каноническому виду.

Более того, существует ортогональное преобразование базиса e в базис e', в котором квадратичная форма принимает канонический вид. В этом случае коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ определяются однозначно (с точностью до порядка расположения).

Доказательство

Пусть B – матрица квадратичной формы $B(x,x)$ в базисе e. B симметричная, следовательно, существует ортогональная матрица Q, такая что:

$$Q^T B Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа B (по теореме 7.5).

Возьмем новый базис $e' = eQ$ (то есть матрица Q – матрица перехода к новому базису e'). Матрица B' квадратичной формы $B(x,x)$ в базисе e' будет диагональной:

$$B' = Q^T B Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Таким образом, квадратичная форма $B(x,x)$ принимает канонический вид в базисе e'.

Следствие

Практический метод приведения квадратичной формы к каноническому виду через ортогональное преобразование базиса (метод собственных векторов):

1) Найти матрицу B квадратичной формы. 2) Определить её собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 3) Найти собственные векторы матрицы B, которые составляют ортогональную матрицу Q. 4) Выполнить ортогональное преобразование базиса: перейти к новому базису $e' = eQ$, в котором квадратичная форма принимает канонический вид.

2.27 Теорема о необходимом и достаточном условии положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

Определение 8.4

Пусть L – линейное пространство, $B(x, x)$ – квадратичная форма, определенная в L.

1) Квадратичная форма $B(x, x)$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если $B(x, x) > 0$ $(B(x, x) < 0)$ для любого ненулевого вектора x из линейного пространства L.

Такие квадратичные формы называются **знакоопределенными**.

2) Квадратичная форма $B(x, x)$ называется **знакопеременной**, если $\exists x, y \in L$ такие, что $B(x, x) > 0$ и $B(y, y) < 0$.

3) Квадратичная форма $B(x, x)$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если $B(x, x) \geq 0$ $(B(x, x) \leq 0)$ $\forall x \in L$,

и существует ненулевой вектор $x^* \in L$: $B(x^*, x^*) = 0$.

Такие квадратичные формы называются **полуопределенными (квазиопределенными)**.

Следствие

Скалярное произведение – это симметричная билинейная форма, причем соответствующая ей квадратичная форма **положительно определена**.

Теорема 8.4

Пусть L — линейное пространство, $B(x, x)$ — квадратичная форма, определенная в L.

1) Квадратичная форма $B(x, x)$ является **положительно (отрицательно) определенной** тогда и только тогда, когда все коэффициенты её канонического вида положительны (отрицательны).

2) Квадратичная форма $B(x, x)$ является **положительно (отрицательно) полуопределенной** тогда и только тогда, когда все коэффициенты её канонического вида неотрицательны (неположительны), и существует хотя бы один коэффициент, равный нулю.

3) Квадратичная форма $B(x, x)$ является **знакопеременной** тогда и только тогда, когда среди коэффициентов её канонического вида есть хотя бы один положительный и хотя бы один отрицательный.

Замечание

Справедливо утверждение (закон инерции квадратичных форм):

Каким бы способом мы ни привели квадратичную форму к каноническому виду, количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов останется неизменным.

2.28 Теорема о существовании треугольного преобразования базиса, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Критерий Сильвестра.

Определения

Определение 8.5: Пусть дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Числа

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = |A|$$

называются **главными (угловыми) минорами** матрицы A.

Определение 8.6

Преобразование базиса e (то есть переход от базиса e к базису f) называется **треугольным**, если матрица этого преобразования (то есть матрица перехода от e к f) **верхняя унитреугольная**.

Теорема 8.5

Пусть L – линейное пространство, $B(x,x)$ – квадратичная форма, определенная в L, $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис L, B - матрица квадратичной формы в базисе e.

Пусть все главные миноры матрицы B, кроме, возможно, последнего ($\Delta_n = |B|$), отличны от нуля.

Тогда существует единственное треугольное преобразование базиса e, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

При этом коэффициенты этого канонического вида связаны с главными минорами матрицы B следующим образом:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \ldots, \quad \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

(Без доказательства.)

Теорема 8.6. Критерий Сильвестра

Пусть L – линейное пространство, $B(x,x)$ – квадратичная форма, определенная в L, $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис L, B - матрица квадратичной формы в базисе e.

Пусть все главные миноры матрицы B, кроме, возможно, последнего ($\Delta_n = |B|$), отличны от нуля. Тогда:

1) Для того, чтобы $B(x,x)$ была положительно определенной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы B были положительными.

2) Для того, чтобы $B(x,x)$ была отрицательно определенной квадратичной формой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы B чередовались, и первый минор Δ_1 был отрицательным.

3 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

3.1 Последовательность точек в R_p. Теорема о покоординатной сходимости.

Определение 1.1. Скалярное произведение и метрика в пространстве R_p

Пусть $X, Y \in R_p$. Будем называть их точками (по аналогии с точками из R, R_2, R_3).
В R_p введено скалярное произведение:

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$$

если $X = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_p)$, то $(X, Y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$.
С помощью скалярного произведения введено расстояние между точками (метрика):

$$r(X, Y) = |Y - X| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_p - x_p)^2}$$

Оно удовлетворяет аксиомам расстояния (метрики):
1) $r(X, Y) \geq 0$; $r(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
2) $r(X, Y) = r(Y, X)$.
3) $r(X, Z) \leq r(X, Y) + r(Y, Z)$
(следует из неравенства треугольника для скалярного произведения:

$$r(X, Z) = |X - Z| = |(X - Y) + (Y - Z)| \leq |X - Y| + |Y - Z| = r(X, Y) + r(Y, Z)$$

).

Определение 1.2. Открытый шар в пространстве R_p

Пусть точка $A \in R_p$ и $\delta > 0$.
Множество

$$D^\delta(A) = \{X \in R_p | r(A, X) < \delta\}$$

называется **открытым шаром** с центром в точке A и радиусом δ.

Определение 1.3. Окрестность точки

1) Множество $D^\delta(A)$ называется **окрестностью точки** A радиуса δ и обозначается $U^\delta(A)$.
2) Множество $D^\delta(A) \setminus \{A\}$ называется **проколотой окрестностью точки** A радиуса δ и обозначается $\dot{U}^\delta(A)$.

Определение 1.4. Ограниченное множество

Множество $\Omega \subset R^p$ называется **ограниченным**, если существует число $M > 0$:

$$\Omega \subset D_M(0) \Leftrightarrow |\chi| < M, \quad \forall \chi \in \Omega.$$

Определение 1.5. Предел последовательности

Пусть $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек из R^p.
Точка A называется **пределом последовательности**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N: \quad \forall n \geq N \quad |X^{(n)} - A| < \varepsilon.$$

Обозначения:

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)} = A \quad \text{или} \quad X^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} A.$$

Следствие

$$X^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} A \iff r(X^{(n)}, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{то есть}, \quad |X^{(n)} - A| \xrightarrow{n\to\infty} 0).$$

В частности,

$$X^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff |X^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Теорема 1.1 о покоординатной сходимости

Пусть $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек из R_p, $X^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$,

$$A = (a_1, \ldots, a_p).$$

$$X^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} A \iff x_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Доказательство теоремы 1.1

1) Пусть $X^{(n)} \to A$ при $n \to \infty$.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. $\exists N \in N$, такое что $\forall n \geq N$ выполняется:

$$|X^{(n)} - A| < \varepsilon.$$

Тогда:

$$|x_i^{(n)} - a_i| \leq \sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \ldots + (x_i^{(n)} - a_i)^2 + \ldots + (x_p^{(n)} - a_p)^2} = |X^{(n)} - A| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in N$, такое что $\forall n \geq N$:

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \varepsilon.$$

То есть, $x_i^{(n)} \to a_i$ при $n \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, p$.
2) Пусть $x_i^{(n)} \to a_i$ при $n \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, p$.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. $\exists N_i \in N$, такое что $\forall n \geq N_i$:

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Пусть $N = \max\{N_1, \ldots, N_p\}$. Тогда $\forall n \geq N$:

$$|X^{(n)} - A| = \sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \ldots + (x_i^{(n)} - a_i)^2 + \ldots + (x_p^{(n)} - a_p)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{p}} = \varepsilon.$$

Следствие

Справедливы теоремы о пределе суммы (разности) последовательностей.

3.2 Предел функции p переменных. Непрерывность функции p переменных. Теорема Вейерштрасса.

Определение 2.1. Функция

Пусть $\Omega \subset R_p$. Отображение $f : \Omega \to R$ называется **функцией** p вещественных переменных.

Определение 2.2. Предельная точка (точка сгущения)

Пусть $\Omega \subset R_p$. Точка A называется **предельной точкой** (точкой сгущения) множества Ω, если в любой проколотой окрестности точки A содержится хотя бы одна точка из Ω.

Замечания

Точка A является предельной точкой множества Ω тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{A\}$, такая что:

$$X^{(n)} \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Доказательство аналогично случаю R.)

Определение 2.3. Предел функции

Пусть $\Omega \subset R_p$, $f : \Omega \to R$. Пусть точка A является предельной точкой множества Ω.

Число b называется **пределом функции** f в точке A (при $X \to A$), если выполнено одно из двух определений:

1) **По Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad (0 < |X - A| < \delta, \quad X \in \Omega) \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon.$$

Определение предела по Гейне

2) **По Гейне:**

$$\forall \{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{A\} : \quad (X^{(n)} \to A \text{ при } n \to \infty) \Rightarrow (f(X^{(n)}) \to b \text{ при } n \to \infty).$$

Равносильность определений доказывается аналогично случаю R.

Обозначения:

$$\lim_{X \to A} f(X) = b \quad \text{или} \quad f(X) \to_{X \to A} b.$$

Замечание:

Справедливы все теоремы о связи пределов с арифметическими операциями, доказанные для $p = 1$.

Определение 2.4. Непрерывность функции в точке

Пусть $\Omega \subset R^p$, $f : \Omega \to R$. Пусть точка $A \in \Omega$.

Функция f называется непрерывной в точке A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad (X \in U_\delta(A) \cap \Omega \Rightarrow |f(X) - f(A)| < \varepsilon).$$

Равносильные требования:

a) если точка A – предельная точка множества Ω, то $\lim_{X\to A} f(X) = f(A)$,
b) если точка A – изолированная точка множества Ω, то $f(X)$ непрерывна в точке A.

Замечание к определению.

Если точка A – предельная точка множества Ω, то

$$\lim_{X\to A} f(X) = f(A) \iff \lim_{|\Delta X|\to 0} \Delta f = 0 \quad (\text{где} \quad |\Delta X| = |X - A|, \quad \Delta f = f(X) - f(A)).$$

Замечания

Справедливы теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями:

(Сумма, разность, произведение функций, непрерывных в точке A, непрерывны в точке A. Отношение функций, непрерывных в точке A, непрерывно в точке A, если знаменатель не обращается в 0 в точке A).

Примеры

1) Функции $x \pm y$, xy непрерывны в каждой точке R^2; x/y непрерывна в каждой точке R^2, кроме точек вида $(a, 0)$.

2) Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ от p неизвестных непрерывен в каждой точке R^p.

3) Функция

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{P_1(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{P_2(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$$

непрерывна в каждой точке R^p, в которой $P_2(x_1, x_2, \ldots, x_p) \neq 0$.

Определение 2.5

Функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке множества.

Теорема 2.1. Вейерштрасса

Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, ограничена на этом множестве, а также достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

(без доказательства)

Замечание

Замкнутое ограниченное множество компакт.

Лемма 2.1

Пусть $\Omega \subset R^p$; $f : \Omega \to R$. Пусть точка

$$A = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \Omega.$$

Рассмотрим функцию одной переменной

$$f_i(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p), \quad i = 1, ..., p.$$

(Будем называть её i-ой координатной функцией.)

Если f непрерывна в точке A, то f_i непрерывна в точке a_i.

3.3 Дифференцируемость функции p переменных. Дифференцируемость суммы и произведения дифференцируемых функций. (с доказательством)

Определение 3.1

Пусть $\Omega \subset R^p$, $f : \Omega \to R$. Пусть A — внутренняя точка Ω.

Функция f называется **дифференцируемой** в точке A, если её приращение в этой точке можно представить в виде:

$$f(A + \Delta X) - f(A) = (M, \Delta X) + o(\Delta X),$$

где: - $\Delta X \in R^p$ — приращение точки A, такое что $A + \Delta X \in \Omega$; - строка $M \in R^p$ не зависит от ΔX; - $(M, \Delta X)$ — скалярное произведение строк; - $o(\Delta X) \to 0$ при $|\Delta X| \to 0$.

Строку M называют **производной функции** f в точке A и обозначают $f'(A)$ (**$f'(A) \in R^p$**).

Скалярное произведение $(M, \Delta X)$ называют **дифференциалом** f в точке A и обозначают $df(A)$ (**$df(A) \in R$**).

Следствие

Из дифференцируемости f в точке A следует её непрерывность в точке A, так как $\Delta f \to 0$ при $\Delta X \to 0$.

Действительно,

$$|(M, \Delta X)| \leq |M||\Delta X| \to 0, \quad \text{при } \Delta X \to 0.$$

Также,

$$o(\Delta X) = |o(\Delta X)||\Delta X|, \quad \text{и} \quad |o(\Delta X)| \to 0, \quad \text{при } \Delta X \to 0.$$

Теорема 3.1

Пусть f, g — дифференцируемые функции в точке $A \in R^p$. Тогда в точке A справедливы следующие свойства:

1) Существует $(f + g)' = f' + g'$.

2) Существует $(\lambda f)' = \lambda f'$, где λ — константа.

3) Существует $(fg)' = g'f + fg'$, где $f = f(A), g = g(A) \in R$, $f' = f'(A), g' = g'(A) \in R^p$.

Доказательство теоремы 3.1

Рассмотрим $(fg)(A + \Delta X) - (fg)(A)$:

$$(fg)(A + \Delta X) - (fg)(A) = f(A + \Delta X)g(A + \Delta X) - f(A)g(A).$$

Разложим $f(A + \Delta X)$ и $g(A + \Delta X)$:

$$= [f(A) + f'(A, \Delta X) + r_1(\Delta X)][g(A) + g'(A, \Delta X) + r_2(\Delta X)] - f(A)g(A),$$

где $r_1(\Delta X) = o(\Delta X), r_2(\Delta X) = o(\Delta X)$.

Раскрываем скобки:

$$= f(A)g'(A, \Delta X) + g(A)f'(A, \Delta X) + r(\Delta X),$$

где $r(\Delta X)$ содержит все остальные слагаемые.

Если докажем, что $r(\Delta X) = o(\Delta X)$, то

$$(fg)'(A) = f'(A)g(A) + g'(A)f(A).$$

Доказательство свойства $r(\Delta X) = o(\Delta X)$

Рассмотрим выражение:

$$r(\Delta X) = f(A)r_2(\Delta X) + g(A)r_1(\Delta X) + f'(A, \Delta X)g'(A, \Delta X) +$$

$$+ f'(A, \Delta X)r_2(\Delta X) + g'(A, \Delta X)r_1(\Delta X) + r_1(\Delta X)r_2(\Delta X).$$

Слагаемое (1):

$$f(A)\frac{r_2(\Delta X)}{|\Delta X|} \to 0, \text{ так как } \ r_2(\Delta X) = o(\Delta X$$

Слагаемое (2) аналогично.

Слагаемое (3):

$$\frac{|f'(A, \Delta X)g'(A, \Delta X)|}{|\Delta X|} \le |f'(A)||g'(A)||\Delta X| \to 0$$

Слагаемое (4):

$$\frac{|f'(A, \Delta X)r_2(\Delta X)|}{|\Delta X|} \le |f'(A)||\Delta X|\frac{r_2(\Delta X)}{|\Delta X|} \to 0$$

Слагаемое (5) аналогично.

Слагаемое (6):

$$\frac{r_1(\Delta X)r_2(\Delta X)}{|\Delta X|} = \frac{r_1(\Delta X)}{|\Delta X|} \cdot \frac{r_2(\Delta X)}{|\Delta X|} \cdot |\Delta X| \to 0$$

.

Следствие

Аналогичные формулы справедливы для дифференциалов, для доказательства умножим обе части равенств 1), 2), 3) скалярно на ΔX.

В пункте 3) получим:

$$((fg)', \Delta X) = g(f', \Delta X) + f(g', \Delta X) \iff d(fg) = g\,df + f\,dg.$$

3.4 Частные производные функции p переменных. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Пример функции, которая имеет частные производные в точке A, но не дифференцируема в этой точке.

Определение 3.2

Пусть $\Omega \subset R^p$; $f : \Omega \to R$. Пусть точка $A = (a_1, a_2, ..., a_p)$ - внутренняя точка Ω.

Рассмотрим функцию одной переменной

$$f_i(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p), \quad i = 1, ..., p.$$

(то есть, i-ю координатную функцию).

Если эта функция имеет производную в точке a_i, то эта производная называется **частной производной функции** f по переменной x_i в точке A и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ или $f'_{x_i}(A)$.

То есть,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p)}{\Delta x_i}.$$

Теорема 3.2

Если f дифференцируема в точке A, то существуют все частные производные функции f в точке A, и

$$f'(A) = (f'_{x_1}(A), f'_{x_2}(A), ..., f'_{x_p}(A)).$$

Доказательство

Имеем:

$$f(A + \Delta X) - f(A) = f'(A, \Delta X) + o(\Delta X).$$

Введем обозначения элементов строки $f'(A)$: пусть $f'(A) = (c_1, ..., c_p)$.

Рассмотрим приращение $\Delta X = (0, ..., 0, \Delta x_i, 0, ..., 0)$ (для $i = 1, ..., p$).

Тогда:

$$f(a_1, ..., a_i, ..., a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_i, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p) = c_i \Delta x_i + o(\Delta x_i).$$

Следовательно,

$$\frac{f(a_1, ..., a_i, ..., a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_i, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p)}{\Delta x_i} = c_i + \frac{o(\Delta x_i)}{\Delta x_i}.$$

При $\Delta x_i \to 0$ имеем $f'_{x_i}(A) = c_i$.

Следствие. Выражение дифференциала через частные производные

Так как приращение $\Delta X = (dx_1, ..., dx_p)$, то

$$df(A) = (f'(A), \Delta X) = f'_{x_1}(A)dx_1 + f'_{x_2}(A)dx_2 + \cdots + f'_{x_p}(A)dx_p.$$

Замечание

Обратное неверно: из существования всех частных производных функции f в точке A **не следует** её дифференцируемость в точке A.

Пример

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ в точке $A(0, 0)$.
1) Найдем частные производные функции f в точке A:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

$$f'_y(0,0) = 0.$$

2) Проверим условие дифференцируемости функции в точке A:

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \text{ при } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0).$$

То есть:

$$\sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \text{ при } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0),$$

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} 0.$$

Пусть $\Delta x = \Delta y$, $\Delta x \to 0$. Тогда:

$$\frac{\Delta x^{2/3}}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}|\Delta x|^{1/3}} \text{ не стремится к } 0.$$

Следовательно, f не дифференцируема в точке A.

3.5 Дифференцируемость функции в случае существования и непрерывности частных производных. (с доказательством)

Теорема 3.3

Пусть $\Omega \subset R^p$; $f : \Omega \to R$, A – внутренняя точка Ω.

Пусть в некоторой окрестности $U(A)$ точки A существуют все частные производные функции f, и они непрерывны в точке A. Тогда f дифференцируема в точке A.

Доказательство для $p = 2$

Пусть $A(x_0, y_0)$; приращение $\Delta X = (\Delta x, \Delta y)$ таково, что точка

$$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(A).$$

Рассмотрим $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Используем теорему Лагранжа; $\Theta_1, \Theta_2 \in (0, 1)$.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= f_1'(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_2'(x_0, y_0 + \Theta_2 \Delta y)\Delta y =$$

$$= f_1'(x_0, y_0)\Delta x + f_2'(x_0, y_0)\Delta y + [f_1'(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_1'(x_0, y_0)]\Delta x +$$

$$+ [f_2'(x_0, y_0 + \Theta_2 \Delta y) - f_2'(x_0, y_0)]\Delta y.$$

Осталось доказать, что

$$[f_1'(x_o + \Theta_1 \Delta x, y_o + \Delta y) - f_1'(x_o, y_o)]\Delta x +$$

$$+ [f_2'(x_o, y_o + \Theta_2 \Delta y) - f_2'(x_o, y_o)]\Delta y = o(|\Delta X|) \quad \text{при} \quad \Delta X \to 0.$$

Действительно,

$$\left| \frac{\Delta x}{|\Delta X|} \right| = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta x}{|\Delta X|} \quad \text{ограничено.}$$

Так как

$$f_1'(x_o + \Theta_1 \Delta x, y_o + \Delta y) - f_1'(x_o, y_o) \to 0 \quad \text{при} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0),$$

то

$$[f_1'(x_o + \Theta_1 \Delta x, y_o + \Delta y) - f_1'(x_o, y_o)]\Delta x = o(|\Delta X|).$$

Аналогично,

$$[f_2'(x_o, y_o + \Theta_2 \Delta y) - f_2'(x_o, y_o)]\Delta y = o(|\Delta X|).$$

Замечание

Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функции.

3.6 Производная сложной функции. Частные производные сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

Определение 3.3

Пусть функции $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$ определены на множестве $\Omega \subseteq R^p$.
Пусть функция $g(Y)$ определена на множестве $D \subseteq R^m$, и точка

$$Y = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)) \in D, \quad \forall X \in \Omega.$$

Тогда имеет смысл сложная функция

$$F(X) = g(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)),$$

определенная на Ω.

Теорема 3.4

Пусть имеет смысл сложная функция $F(X) = g(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X))$, определенная на Ω.
Пусть функции $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$ дифференцируемы в точке X_0, а функция $g(Y)$ дифференцируема в точке

$$Y_0 = (f_1(X_0), f_2(X_0), \ldots, f_m(X_0)).$$

Тогда функция $F(X)$ дифференцируема в точке X_0, и

$$F'(X_0) = g'(Y_0) \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}.$$

Где:

$$F'(X_0) \in R_p, \quad g'(Y_0) \in R_m, \quad f_i'(X_0) \in R_p \quad (i = 1, \ldots, m).$$

$$\begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}$$

— матрица размера $m \times p$, обозначим её $f'(X_0)$.

Следствия

1) Частные производные сложной функции:

$$F'(X_0) = g'(Y_0) \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(Y_0), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(Y_0) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(Y_0) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(Y_0) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0) \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Теорема 3.4

Пусть имеет смысл сложная функция $F(X) = g(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X))$, определенная на Ω.

Пусть функции $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$ дифференцируемы в точке X_0, а функция $g(Y)$ дифференцируема в точке

$$Y_0 = (f_1(X_0), f_2(X_0), \ldots, f_m(X_0)).$$

Тогда функция $F(X)$ дифференцируема в точке X_0, и

$$F'(X_0) = g'(Y_0) \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}.$$

Где:

$$F'(X_0) \in R_p, \quad g'(Y_0) \in R_m, \quad f_i'(X_0) \in R_p \quad (i = 1, \ldots, m).$$

$$\begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}$$

— матрица размера $m \times p$, обозначим её $f'(X_0)$.

Замечание 3.1

Пусть M, P - строки из R_p. Тогда их скалярное произведение (M, P) совпадает с произведением строки M на столбце P^T, то есть,

$$(M, P) = MP^T.$$

Частные производные сложной функции

$$F'(X_0) = g'(Y_0) \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ \vdots \\ f_m'(X_0) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(Y_0), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(Y_0) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(Y_0) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(Y_0) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0) \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Инвариантность (неизменность) формы 1-го дифференциала

Формула

$$dg(Y_0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(Y_0) dy_1(X_0) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(Y_0) dy_m(X_0)$$

верна и в случае, когда переменные $y_1, \ldots, y_m$ являются функциями:

$$y_i = f_i(X) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

В этом случае

$$Y_0 = (f_1(X_0), f_2(X_0), \dots, f_m(X_0)).$$

3.7 Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

Определение 4.1

1) Пусть f определена на множестве $\Omega \subseteq R^p$, точка A - внутренняя точка Ω.

Пусть $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ в некоторой окрестности точки A (то есть, в окрестности точки A определена функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$). Если $\exists \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\right)$, она называется частной производной второго порядка по переменным x_i, x_k функции f в точке A и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(A)$ или $f''_{x_i x_k}(A)$ (возможно $i = k$, если $i \neq k$, производная называется смешанной).

2) Аналогично определяются частные производные m-го порядка:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^{m_1} \partial x_{i_2}^{m_2} \dots \partial x_{i_k}^{m_k}}(A), \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_k = m).$$

Теорема 4.1

Пусть $f(x, y)$ имеет в окрестности $U(x_0, y_0)$ f''_{xy} и f''_{yx}, и они непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда они равны в точке (x_0, y_0).

Следствие

Пусть $f(x_1, ..., x_p)$ имеет в окрестности $U(A) \subseteq R_p$ все частные производные до k-го порядка включительно, и они непрерывны в точке A.

Пусть $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ и $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ — два набора натуральных чисел из множества $\{1, 2, ..., p\}$, отличающиеся только порядком членов. Тогда

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}}(A) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_k}}(A).$$

Доказательство

От набора ї¨ набору ј¨ожно перейти последовательными перестановками двух соседних производных. При каждом переходе используем доказанную теорему.

3.8 Дифференциалы высших порядков. Отсутствие инвариантности формы у дифференциалов порядка выше первого.

Определение 4.2

Пусть f определена и дифференцируема в окрестности $U(A) \subset R^p$. Рассмотрим $df(X)$, определенный в $U(A)$, как функцию от X (приращение $dX = (dx_1, ..., dx_p)$ считаем фиксированным). Если существует дифференциал этой функции $df(X)$ в точке A, он называется вторым дифференциалом функции f в точке A и обозначается $d^2f(A)$.

Аналогично $d^3f(A) = d(d^2f)(A), \ldots, d^kf(A) = d(d^{k-1}f)(A)$.

Все дифференциалы считаются при одном и том же приращении $dX = (dx_1, ..., dx_p)$.

Теорема 4.2

Пусть $f(X)$ имеет в окрестности $U(A) \subset R^p$ все частные производные до k-го порядка включительно, и они непрерывны в точке A. Тогда

$$\exists\, d^kf(A) = d^kf(A, dX) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p}dx_p\right)^k f(A)$$

(здесь $dX = (dx_1, ..., dx_p)$).

Доказательство для $p = 3$, $\kappa = 2$

В точке A имеем:

$$d^2f = d(df) = d\left(f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + f'_{x_3}dx_3\right).$$

Дифференцируем каждое слагаемое:

$$d^2f = d\left(f'_{x_1}\right)dx_1 + d\left(f'_{x_2}\right)dx_2 + d\left(f'_{x_3}\right)dx_3.$$

Теперь раскрываем дифференциалы:

$$d^2f = \left(f''_{x_1x_1}dx_1 + f''_{x_1x_2}dx_2 + f''_{x_1x_3}dx_3\right)dx_1 +$$

$$+\left(f''_{x_2x_1}dx_1 + f''_{x_2x_2}dx_2 + f''_{x_2x_3}dx_3\right)dx_2 +$$

$$+\left(f''_{x_3x_1}dx_1 + f''_{x_3x_2}dx_2 + f''_{x_3x_3}dx_3\right)dx_3.$$

Группируем слагаемые:

$$d^2f = f''_{x_1x_1}dx_1^2 + f''_{x_2x_2}dx_2^2 + f''_{x_3x_3}dx_3^2 +$$

$$+2f''_{x_1x_2}dx_1dx_2 + 2f''_{x_1x_3}dx_1dx_3 + 2f''_{x_2x_3}dx_2dx_3.$$

Таким образом:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}dx_3\right)^2 f.$$

Следствие: инвариантность

Дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности формы. Например, если x_1, x_2 не являются независимыми переменными, то:

$$d^2 f(x_1, x_2) = d(df) = d\left(f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2\right) =$$

$$= d\left(f'_{x_1} dx_1\right) + f'_{x_1} d(dx_1) + d\left(f'_{x_2} dx_2\right) + f'_{x_2} d(dx_2) =$$

$$= \left(f''_{x_1 x_1} dx_1 + f''_{x_1 x_2} dx_2\right) dx_1 +$$

$$+ \left(f''_{x_2 x_1} dx_1 + f''_{x_2 x_2} dx_2\right) dx_2 + f'_{x_1} d^2 x_1 + f'_{x_2} d^2 x_2 =$$

$$= f''_{x_1 x_1} dx_1^2 + f''_{x_2 x_2} dx_2^2 + 2 f''_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + f'_{x_1} d^2 x_1 + f'_{x_2} d^2 x_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2\right)^2 f + f'_{x_1} d^2 x_1 + f'_{x_2} d^2 x_2.$$

3.9 Формула Тейлора функции р переменных.

Теорема 4.3. Формула Тейлора

(Напоминание (р=1): пусть $h(t)$ определена в окрестности $U(t) \subset R$ и имеет там $(n+1)$ производную. Тогда $\forall t \in U(t)$ справедливо

$$h(t) = h(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{(k)}(t)}{k!}(t-t)^k + \frac{h^{(n+1)}(t+\Theta\Delta t)}{(n+1)!}(t-t)^{n+1} =$$

$$= h(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k h(t,\Delta t)}{k!} + \frac{d^{(n+1)}h(t+\Theta\Delta t, \Delta t)}{(n+1)!},$$

где приращение $\Delta t = t - t$, $\Theta \in (0,1)$.

Пусть $f(X)$ определена в окрестности $U(X) \subset R_p$ и имеет там все непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда $\forall X \in U(X)$ справедливо

$$f(X) = f(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(X,\Delta X)}{k!} + \frac{d^{(n+1)} f(X+\Theta\Delta X, \Delta X)}{(n+1)!},$$

где приращение $\Delta X = X - X$, $\Theta \in (0,1)$ (без доказательства).

Замечания и следствия

$$d^{n+1} f\left(X_0 + \Theta\Delta X, \Delta X\right)$$

1) $r(X) = \frac{d^{n+1} f(X_0+\Theta\Delta X,\Delta X)}{(n+1)!}$ - остаточный член в форме Лагранжа.

2) Для остаточного члена справедлива формула Пеано: $r(X) = o(|\Delta X|^r)$ при $\Delta X \to 0$.

3) $p = 2$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^n f(x_0,y_0) + o\left(\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^n\right),$$

3.10 Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции одной переменной.

Определение 5.1

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq R$; $F(x, y)$ определена на множестве $\Omega_1 \times \Omega_2$, и для любого $x \in \Omega_1$ существует единственный $y \in \Omega_2$ такой, что $F(x, y) = 0$.

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет на множестве Ω_1 функцию $y = f(x)$ с множеством значений из Ω_2 следующим образом:

каждому $x \in \Omega_1$ сопоставляем $y = f(x)$, где $F(x, f(x)) = 0$.

Такая функция называется **неявно заданной** или **неявной**.

Пример

Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ на множестве $[-1, 1] \times [0, 1]$ определяет функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$, на множестве $[-1, 1] \times [-1, 0]$ определяет функцию $y = -\sqrt{1 - x^2}$,

на множестве $[-1, 1] \times [-1, 1]$ не определяет неявную функцию, так как для любого $x \in [-1, 1]$ существуют два разных $y \in [-1, 1]$ таких, что $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Теорема 5.1 существования и дифференцируемости неявно заданной функции

1) Пусть $F(x, y)$ определена на множестве $[x_o - \Delta, x_o + \Delta] \times [y_o - \tilde{\Delta}, y_o + \tilde{\Delta}]$.
2) $F(x_o, y_o) = 0$.
3) Существуют и непрерывны F'_x, F'_y на $[x_o - \Delta, x_o + \Delta] \times [y_o - \tilde{\Delta}, y_o + \tilde{\Delta}]$.
4) $F'_y(x_o, y_o) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки x_o уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявно непрерывно дифференцируемую функцию $y = f(x)$: $y_o = f(x_o)$.

(без доказательства).

Замечания

1) Требования теоремы не являются необходимыми.
2) Если выполняются условия теоремы, то вычислить $y'(x)$ можно следующим образом:

Функция $y = y(x)$ такая, что $F(x, y(x)) = 0$ для любого x из области определения. Следовательно,

$$\frac{dF}{dx} = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

для любого x из области определения.

Следовательно,

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

3) Если $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то

$$\exists y''(x) = \frac{-(F''_{x^2} + F''_{xy} y')F'_y - F'_x(F''_{xy} + F''_{y^2} y')}{(F'_y)^2}$$

Подставив $y'(x) = -F'_x / F'_y$, получим выражение $y''(x)$ через частные производные 1-го и 2-го порядков функции $F(x, y)$.

Если $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 3-го порядка, то

$$\exists y'''(x)$$

и выражается через частные производные функции $F(x, y)$, и т.д.

4) Для вычисления производных функции $y(x)$ можно использовать дифференциалы.

3.11 Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданных функций p переменных, заданных системой функциональных уравнений. Приемы вычисления производных . Вычисление первых производных функций y(x), z(x), u(x), заданных неявно системой

Определение 5.2

1) Пусть $\Omega_1 \subset R_p$, $\Omega_2 \subset R$; $F(X, y) = F(x_1, ..., x_p, y)$ определена на множестве $\Omega_1 \times \Omega_2$, и для любого $X \in \Omega_1$ существует единственный $y \in \Omega_2$ такой, что $F(X, y) = 0$.

Тогда уравнение $F(X, y) = 0$ определяет на множестве Ω_1 функцию $y = f(X)$ с множеством значений из Ω_2 следующим образом:

каждому $X \in \Omega_1$ сопоставляем $y = f(X)$, где $F(X, f(X)) = 0$.

Такая функция называется **неявно заданной функцией p переменных**.

Более общий случай

Пусть $\Omega_1 \subseteq R^p$, $\Omega_2 \subseteq R^m$. Пусть на $\Omega_1 \times \Omega_2$ определены m функций

$$F_i(X, Y) = F_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть система

$$\begin{cases} F_1(X, Y) = 0 \\ \vdots \\ F_m(X, Y) = 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

для каждого $X \in \Omega_1$ имеет единственное решение $Y \in \Omega_2$.

Тогда говорят, что система (5.1) задает неявно m функций

$$y_1 = f_1(X), \quad y_2 = f_2(X), \quad \dots, \quad y_m = f_m(X),$$

определенных на множестве Ω_1.

(то есть, каждому $X \in \Omega_1$ сопоставляются $y_1 = f_1(X), y_2 = f_2(X), \dots, y_m = f_m(X)$ такие, что

$$\begin{cases} F_1(X, f_1(X), \dots, f_m(X)) = 0 \\ \vdots \\ F_m(X, f_1(X), \dots, f_m(X)) = 0 \end{cases}$$

).

Теорема 5.2

1) Пусть функции $F_1, F_2, \dots, F_m$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(X^o, Y^o) \in R^{p+m}$.

2) Точка (X^o, Y^o) удовлетворяет системе (5.1).

3) Существуют и непрерывны все частные производные функций $F_1, F_2, \dots, F_m$ в окрестности точки (X^o, Y^o).

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке (X^o, Y^o).

4) Якобиан

Тогда

1) В некоторой окрестности точки (X^o, Y^o) система (5.1) определяет $y_1, y_2, \dots, y_m$ как функции от $x_1, \dots, x_p$: $y_1 = f_1(X), y_2 = f_2(X), \dots, y_m = f_m(X)$.

2) $f_1(X^o) = y_1^o, f_2(X^o) = y_2^o, \ldots, f_m(X^o) = y_m^o$ (где $Y^o = (y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o)$).

3) Функции $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$ непрерывны в некоторой окрестности точки (X^o, Y^o) и имеют непрерывные частные производные по всем переменным в точке (X^o, Y^o).

(без доказательства).

Следствие. Приемы вычисления производных

1) Возьмем частные производные по x_i от обеих частей каждого равенства системы (5.1)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_m}{\partial x_i} \end{cases}$$

Относительно неизвестных $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ имеем СЛАУ, определитель которой

$$\Delta = D(F_1, F_2, \ldots, F_m) = D(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

отличен от нуля в некоторой окрестности точки (x^0, y^0)

(так как якобиан – непрерывная функция, и в точке (x^0, y^0) отличен от нуля).

Следовательно, система имеет единственное решение $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ (j = 1, 2, ..., m), и частные производные $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ непрерывны как отношения непрерывных функций Δ_j и Δ, где знаменатель отличен от нуля.

2) Если существуют и непрерывны все частные производные 2-го порядка функций $F_1, F_2, \ldots, F_m$, то, взяв частную производную по x_k от $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, получим $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_i}$, непрерывную.

Пример вычисления якобиана

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + y + z + u = a \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3 \end{cases}$$

Эта система определяет функции $y = y(x), z = z(x), u = u(x)$.

Вычислим якобиан:

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y, z, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2z & 2u \\ 3y^2 & 3z^2 & 3u^2 \end{vmatrix}$$

Вычисляя определитель:

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix}$$

Преобразуем:

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & u-y \\ 0 & z^2-yz & u^2-yu \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} z-y & u-y \\ z(z-y) & u(u-y) \end{vmatrix} = 6\text{(z - y)(u - y)}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & u \end{vmatrix} = 6\text{(z - y)(u - y)(u - z)}$$

Следовательно, по теореме 5.2, в окрестности каждой точки (x, y, z, u), где $z \neq y, u \neq y, u \neq z$, система определяет y, z, u как функции от x.

Пример решения системы методом Крамера

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + y + z + u = a \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3 \end{cases}$$

Эта система определяет функции $y = y(x), z = z(x), u = u(x)$.
Возьмем производные по x от обеих частей каждого равенства:

$$\begin{cases} 1 + y' + z' + u' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' + 2uu' = 0 \\ 3x^2 + 3y^2y' + 3z^2z' + 3u^2u' = 0 \end{cases}$$

что эквивалентно:

$$\begin{cases} y' + z' + u' = -1 \\ 2yy' + 2zz' + 2uu' = -2x \\ 3y^2y' + 3z^2z' + 3u^2u' = -3x^2 \end{cases}$$

Решим методом Крамера.
Якобиан системы:

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y, z, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2z & 2u \\ 3y^2 & 3z^2 & 3u^2 \end{vmatrix} = 6(z-y)(u-y)(u-z)$$

Вычислим Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2x & 2z & 2u \\ -3x^2 & 3z^2 & 3u^2 \end{vmatrix} = -6(z-x)(u-x)(u-z)$$

Следовательно,

$$y' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)}$$

Выражения для z' и u' вычислите самостоятельно. z

3.12 Определение точек экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования точек экстремума.

Определение 6.1

Пусть $\Omega \subseteq R^p$, $f : \Omega \to R$. Пусть A – внутренняя точка Ω.

Точка A называется **точкой максимума** (или **минимума**) функции f, если существует окрестность $U(A) \subseteq \Omega$, такая что

$$f(X) \leq f(A) \quad (\text{или} \quad f(X) \geq f(A)), \quad \forall X \in U(A).$$

Точки максимума и минимума функции f называются **точками экстремума** функции f.

Если неравенства строгие, такие точки называются **точками строгого экстремума** функции f.

Теорема 6.1. Необходимые условия существования экстремума

Пусть A - точка экстремума функции f, и $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$. Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Следствие

Пусть f дифференцируема в точке экстремума A. Тогда $df(A) = 0$.

Теорема 6.2. Достаточные условия существования экстремума

Пусть f определена и имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в некоторой окрестности точки A. Пусть $df(A) = 0$ (такие точки называются стационарными).

Рассмотрим второй дифференциал $d^2 f(A, \Delta x)$:

$$d^2 f(A, \Delta x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(A) dx_p^2 +$$

$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) dx_1 dx_2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{p-1} \partial x_p}(A) dx_{p-1} dx_p.$$

Рассматриваем эту величину как квадратичную форму относительно приращений $dx_1, dx_2, \dots, dx_p$ (здесь $\Delta x = (dx_1, \dots, dx_p)$).

1) Если эта форма положительно (отрицательно) определена, то точка A является точкой строгого минимума (максимума) функции f.

2) Если эта форма знакопеременная, то точка A не является точкой экстремума функции f.

3) Если эта форма полуопределенная, то ничего сказать нельзя.

Замечание

$$d^2 f(A; t\Delta x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) t^2 dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(A) t^2 dx_p^2 +$$

$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) t^2 dx_1 dx_2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{p-1} \partial x_p}(A) t^2 dx_{p-1} dx_p = t^2 d^2 f(A; \Delta x).$$

Значения $d^2 f(A; \Delta x)$ и $d^2 f(A; t\Delta x)$ совпадают по знаку для любого числа t.

3.13 Определение точек условного экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования точек условного экстремума. Пример: найти точки условного экстремума функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ при условии $x + y = 0$, используя метод нахождения точек условного экстремума.

Пример

1) Найдем экстремумы функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 5$ при условии, что переменные x и y связаны соотношением $x + y = 0$.

Отсюда $y = -x$, и $f = 9x^2 + 5$.

f имеет минимум в точке $A(0, 0)$ при условии $x + y = 0$.

2) f имеет максимум в точке $A(0, 0)$ при условии $x - y = 0$ (проверьте самостоятельно).

Такие экстремумы называются **условными**.

Определение 7.1

Пусть $\Omega \subseteq R^p$, $f : \Omega \to R$. Рассматриваем только точки, удовлетворяющие условиям связи:

$$\begin{cases} \varphi_1(X) = 0 \\ \varphi_2(X) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(X) = 0 \end{cases} \qquad (m < p).$$

Пусть A - внутренняя точка множества Ω, удовлетворяющая условиям связи.

Точка A называется **точкой условного максимума (минимума)** функции f, если существует окрестность $\tilde{U}(A) \subseteq \Omega$, такая что:

$$f(X) \leq f(A) \quad (\text{или} \quad f(X) \geq f(A))$$

для всех точек X, которые принадлежат $\tilde{U}(A)$ и удовлетворяют условиям связи.

Если неравенства строгие, такие точки называются **точками строгого условного экстремума** функции f.

Теорема 7.1. Необходимый признак условного экстремума

Пусть $f(X)$ и $\Phi_i(X)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ непрерывно дифференцируемы в точке A, и матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

имеет ранг m в точке A.

Тогда, если A - точка условного экстремума функции f при условиях связи $\Phi_i(X) = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, то существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ такие, что

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}(A) + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., p).$$

Пример 1

Найдем экстремумы функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 5$ при условии, что переменные x и y связаны соотношением $x + y = 0$.

Рассмотрим функцию Лагранжа $F(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 - 9xy + 5 + \lambda(x + y)$.

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9y + \lambda = 0 \\ 3y^2 - 9x + \lambda = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

б). $F''_{xx} = 6x$, $F''_{xy} = -9$, $F''_{yy} = 6y$.

В точке $A(0,0)$ $d^2F(A) = -18dxdy$, где приращения dx и dy связаны соотношением $d\varphi(A, \Delta X) = 0 \Leftrightarrow dx + dy = 0 \Leftrightarrow dy = -dx$.

Следовательно, $d^2F(A) = 18dx^2 > 0 \,\forall\, dx,\ \ 0$.

Следовательно, точка $A(0,0)$ - точка условного минимума функции f при условии $x + y = 0$.

Теорема 7.2. Достаточный признак условного экстремума

Пусть $f(X)$ и $\Phi_i(X)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке A, и матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

имеет ранг m в точке A.

Пусть точка A удовлетворяет необходимому признаку условного экстремума, то есть существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, такие что

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}(A) + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., p).$$

Рассмотрим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2F(A, \Delta X) = d^2f(A, \Delta X) + \lambda_1 d^2\Phi_1(A, \Delta X) + ... + \lambda_m d^2\Phi_m(A, \Delta X).$$

Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то точка A является точкой строгого условного минимума (максимума) функции f.