Билеты Высшая Математика - 2

Тимур Адиатуллин | telegram, github

Содержание

1 Интегралы

1.1 Определение и свойства первообразной. Теорема о связи первообразных одной функции.

Определение 1.1.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Функция $F(x)$, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$, называется **первообразной** функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если

$$F'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \langle a, b\rangle.$$

На концах промежутка имеем в виду односторонние производные функции $F(x)$.

Следствие.

Если $F(x)$ является первообразной некоторой функции на $\langle a, b\rangle$, то $F(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

Теорема о связи первообразных одной функции

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall\, c \in R \quad F(x) + c$ также первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. 2. Если $\Phi(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то $\exists\, c \in R\colon \Phi(x) = F(x) + c$.

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$. 2. $(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$ на $\langle a, b\rangle$. Следовательно, $\Phi(x) - F(x) = c$ на $\langle a, b\rangle$.

Следствие

Если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то каждая функция семейства функций $\{F(x) + c\} \quad (c \in R)$ является **первообразной**, и других первообразных нет.

1.2 Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательствами).

Определение 1.2

Описанное выше семейство функций $\{F(x)+c\}$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ и обозначается

$$\int f(x)\, dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int 0\, dx = c \tag{1}$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1 \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \tag{3}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \tag{4}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \tag{5}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + c, \quad a > 0 \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c, \quad a \neq 0 \tag{10}$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c \tag{11}$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + c \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + c \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\, dx = \coth x + c \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad a \neq 0 \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + c, \quad \alpha \neq 0 \tag{16}$$

Комментарий

Формулы справедливы на всех промежутках $\langle a, b \rangle$, на которых существуют функции, стоящие под знаком интеграла.

Доказательство

Формулы доказываются непосредственной проверкой того, что производная выражения, стоящего справа, совпадает с подынтегральной функцией.

Проверим формулы (15) и (16):

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}{}' = \frac{1}{4a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2}\frac{(x-a)(x+a)-(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2} \tag{18}$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)^{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)' = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)^{2} 2\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right) = \frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \tag{20}$$

1.3 Интегрирование с помощью замены переменной. Вычисление

Теорема: Простейшие свойства неопределенного интеграла

Пусть $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

Пусть существует $\int f(x)dx$. Тогда

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \text{то есть} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{на} \quad \langle a, b\rangle.$$

Пусть существуют $\int f_1(x)dx$, $\int f_2(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда существует

$$\int (af_1(x) + bf_2(x))dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx \quad \text{на} \quad \langle a, b\rangle.$$

Теорема 1.4: Интегрирование при помощи замены переменной

Пусть существует

$$\int f(t)dt = F(t) + c \quad \text{на } \langle a, b\rangle.$$

Пусть $\varphi(x)$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$. Тогда существует

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c \quad \text{на } \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Теорема 1.5: Интегрирование при помощи замены переменной (подстановка)

Пусть существует

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + c \quad \text{на } \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Пусть $\varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$.
Тогда существует

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \quad \text{на } \langle a, b\rangle.$$

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c \quad (a > 0).$$

1.4 Интегрирование по частям. Вычисление

Теорема 1.6: Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$ и существует

$$\int v(x)du(x).$$

Тогда существует

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Доказательство

Поскольку $d(uv) = u\,dv + v\,du$, то $u\,dv = d(uv) - v\,du$, следовательно, существует $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ на $\langle a, b\rangle$.

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + c.$$

1.5 Интегрирование рациональных дробей.

Теорема 2.1: Интегрирование правильных рациональных дробей вида $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,d(x-a) = A\ln|x-a| + c. \tag{1}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \int \frac{A}{(x-a)^k}\,d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c \quad (k \neq 1). \tag{2}$$

Теорема 2.2: Интегрирование правильных рациональных дробей вида $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$x^2+px+q = (x+(p/2))^2 + q^*, \quad \text{где} \quad q^* = q - p^2/4 > 0, \quad \text{так как} \quad p^2-4q < 0.$$

Сделаем замену $t = x + (p/2)$, тогда $x = t - (p/2)$ и $dx = dt$.
Следовательно,

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{B(t-(p/2))+C}{(t^2+q^*)^n}dt =$$

$$= \int \frac{Bt}{(t^2+q^*)^n}dt + \int \frac{C^*}{(t^2+q^*)^n}dt, \quad \text{где} \quad C^* = -B(p/2)+C.$$

Разберем, как вычисляются интегралы $\int \frac{t}{(t^2+q^*)^n}dt$ и $\int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt$. После вычисления интегралов следует заменить t на $x+\frac{p}{2}$.

$$\text{a)} \int \frac{t}{(t^2+q^*)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+q^*)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q^*)}{(t^2+q^*)^n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(t^2+q^*)+c, & n=1 \\ \frac{1}{2(1-n)(t^2+q^*)^{1-n}}+c, & n\neq 1 \end{cases}$$

Вычисление интеграла I_n

Рассмотрим интеграл:

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt.$$

Для случая $n=1$:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+q^*}dt = \frac{1}{\sqrt{q^*}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q^*}} + C.$$

Для $n \geq 2$, используем метод интегрирования по частям:

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+q^*)^n}dt = \left[u = (t^2+q^*)^{-n}, \quad dv = dt\right].$$

Тогда:

$$du = -n(t^2+q^*)^{-n-1}2tdt, \quad v = t.$$

$$I_n = \frac{t}{(t^2+q^*)^n} + 2n\left[\int \frac{t^2}{(t^2+q^*)^{n+1}}dt\right].$$

Учитывая, что $t^2 = (t^2+q^*) - q^*$, преобразуем:

$$I_n = \frac{t}{(t^2+q^*)^n} + 2nI_n - 2nq^* I_{n+1}.$$

Получаем рекуррентную формулу:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nq^*}\left[\frac{t}{(t^2+q^*)^n} + (2n-1)I_n\right].$$

Эта формула позволяет вычислять $I_2, I_3, \ldots$ последовательно.

Определение 1.2: Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ этого отрезка:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Определим интегральную сумму:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где ξ_k — произвольные точки в $[x_{k-1}, x_k]$, а $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении λ_τ (ранга разбиения) к нулю, то этот предел называют определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)dx.$$

1.6 Интегральные суммы Римана. Определение определенного интеграла. Теорема об ограниченности функции, интегрируемой на отрезке.

Определение 1.1: Интегральные суммы Римана

1) Говорят, что выбрано разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a, b]$, если выбраны точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n =$ b, такие что:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

Длину i-го отрезка разбиения обозначим Δx_i ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Число $\lambda_\tau = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ называется рангом разбиения τ.

2) Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выберем разбиение τ отрезка $[a, b]$. Выберем в каждом из получившихся отрезков разбиения по точке:

$$\xi_1 \in [x_0, x_1], \quad \xi_2 \in [x_1, x_2], \quad \dots, \quad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Вычислим значение функции $f(x)$ в этих точках и составим интегральную сумму Римана:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

3) Если существует конечный предел I интегральных сумм при стремлении ранга разбиения к нулю, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения τ, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

То есть,

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$$

то есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (\lambda_\tau < \delta \implies |\sigma_\tau - I| < \varepsilon) \, \forall \tau, \forall \{\xi_k\}_{k=0}^{n}$$

Замечания

1) $\lambda_\tau \to 0 \Rightarrow n \to \infty$. Обратное неверно.
2) Геометрический смысл σ_τ для $f(x) \geq 0$.

Определение 1.2

Если существует $\int_a^b f(x)dx$, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и пишут $f(x) \in R([a, b])$ (читается: $f(x)$ принадлежит классу функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$).

Теорема 1.1

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Замечание

Обратное неверно.

Пример

Функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

где Q — множество рациональных чисел.

1.7 Теорема об интегрируемости функции на более узком промежутке, о связи интегралов от f на промежутках [a,b], [a,c], [c,b].

Теорема

1) Пусть

$$f(x) \in R([a,b]), [a_1,b_1] \subseteq [a,b] \text{ Тогда } f(x) \in R([a_1,b_1])$$

.

2) Пусть

$$c \in [a,b], f(x) \in R([a,c]), f(x) \in R([c,b])$$

.

Тогда

$$f(x) \in R([a,b]) \text{ и } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(без доказательства)

1.8 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной и ограниченной функции.

Теорема

1) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

$$f(x) \in C([a, b]) \Rightarrow f(x) \in R([a, b]).$$

2) Если $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и непрерывна там всюду, за исключением конечного числа точек, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

3) Если $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

(без доказательства)

1.9 Действия над интегрируемыми функциями.

Теорема 1.4: Действия над интегрируемыми функциями

Если $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$, то:
1) $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R([a,b])$, и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2) $f(x)g(x) \in R([a,b])$.

1.10 Теорема об интегрировании функции, равной нулю всюду, за исключением конечного числа точек, и функции, у которой изменены значения в конечном числе точек.

Теорема 1.5

1) Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a,b]$ и равна нулю всюду, за исключением конечного числа точек. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2) Пусть $g(x) \in R([a,b])$.

Если в конечном числе точек изменить значения функции $g(x)$, то функция останется интегрируемой, и величина интеграла не изменится.

1.11 Свойства определенного интеграла.

Теорема 1.6: Свойства определенного интеграла

1)

$$\int_a^b dx = b - a.$$

2) Пусть a, b, c — три числа, $p = \max\{a, b, c\}$, $q = \min\{a, b, c\}$. Если $f(x) \in R([q, p])$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3) Если $f(x) \in R([a, b])$, то $|f(x)| \in R([a, b])$, и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.12 Неравенства для определенных интегралов.

Теорема 1.7

Пусть $f(x) \in R([a,b])$, $A \leq f(x) \leq B$ на $[a,b]$.
Тогда

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a).$$

Следствия

1) Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (\text{взять } A = 0).$$

2) Пусть $f(x), g(x) \in R([a,b])$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0, \text{ то есть,}$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

3) Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $|f(x)| \leq K$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a)$$

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \Rightarrow \quad -K(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq K(b-a).$$

1.13 Теорема о среднем значении функции на промежутке.

Теорема 1.8: о среднем значении функции на промежутке

Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда существует $x^* \in [a,b]$, такое что:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a).$$

Замечание

Формула

$$\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a)$$

справедлива и при $b < a$ (умножим обе части равенства на -1).

1.14 Непрерывность функции

Определение 1.4

Пусть $f(x) \in R([a,b])$.
Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, определенную на $[a,b]$.
Функция $\Phi(x)$ называется функцией верхнего предела интеграла от $f(x)$.

Теорема 1.9

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$. Тогда для любой точки $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

то есть,

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Поскольку $f(x) \in R([a,b])$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть,

$$\exists K : |f(x)| \leq K \text{ на } [a,b].$$

Тогда

$$\left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq K|x - x_0|.$$

Следовательно,

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leq K|x - x_0| \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0),$$

то есть, $\Phi(x)$ непрерывна в точке x_0.
Поскольку x_0 — произвольная точка отрезка $[a,b]$, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1.10

В каждой точке x промежутка $[a,b]$, в которой $f(x)$ непрерывна, существует $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$, в которой функция непрерывна.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 : (|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

то есть,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon, \quad \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Пусть $|\Delta x| < \delta$. Тогда на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$ функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству.

1) Тогда:

а) Пусть $\Delta x \geq 0$,

$$(f(x_0) - \varepsilon)\Delta x \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)\Delta x;$$

б) Пусть $\Delta x < 0$,

$$(f(x_0) - \varepsilon)(-\Delta x) \leq \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)(-\Delta x).$$

Разделим все части неравенства из пункта а) на Δx, а все части неравенства из пункта б) на $-\Delta x$. Получим:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

что эквивалентно:

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

2) Рассмотрим

$$\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_{a}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_{a}^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

3) Получили, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \quad (|\Delta x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

то есть, существует $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

1.15 Дифференцируемость функции. Формула Ньютона – Лейбница.

Следствия

1) Частный случай (теорема Барроу):
Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда $F'(x) = f(x)$ на $[a,b]$.
(То есть, у любой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.)
2) Формула Ньютона-Лейбница:
Пусть $f(x) \in C([a,b])$, $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство

2) Так как $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ также является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, то существует число c:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + c,$$

то есть,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Пусть $x = a$.

$$0 = F(a) + c.$$

Следовательно, $c = -F(a)$. Пусть $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.16 Формулы интегрирования по частям и замены переменных в определенном интеграле.

Теорема 1.11

Пусть $u(x), v(x) \in C^1([a,b])$. Тогда:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

$$(u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)).$$

Теорема 1.12

Пусть $f(x) \in C([a,b])$ (или $f(x) \in C([b,a])$); $\varphi(t) \in C^1[\alpha,\beta]$, причем $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$ (или $\varphi([\alpha,\beta]) = [b,a]$), $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (например, $\varphi(t)$ монотонна на $[\alpha,\beta]$). Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

1.17 Несобственные интегралы II рода: определение, главное значение. Критерий сходимости интеграла II рода от неотрицательной функции.

Определение 2.1

1) Пусть $f(x)$ определена на $(a, b]$ и не ограничена в любой правой полукрестности точки a. Пусть $f(x) \in R([\alpha, b])\ \forall \alpha \in (a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода.

Если существует конечный предел $I = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$, то символу $\int_a^b f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.

2) Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена в любой левой полукрестности точки b. Пусть $f(x) \in R([a, \beta))\ \forall \beta \in [a, b)$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода.

Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx,$$

то символу $\int_a^b f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.

3) Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ всюду, за исключением точки $c \in (a, b)$, и не ограничена в любой окрестности точки c.

Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$ и не содержащем точку c.

$$\int_a^b f(x)dx$$

В этом случае символ $\int_a^b f(x)dx$ также называется несобственным интегралом II рода.

Есть два равносильных способа приписать символу $\int_a^b f(x)dx$ числовое значение: а)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится, если } \int_a^c f(x)dx \text{ и } \int_c^b f(x)dx \text{ сходятся.}$$

б)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0, \delta_2 \to 0} \left(\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \right).$$

Замечание

Если не существует конечный

$$\lim_{\delta_1 \to +0} \left(\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx \right) + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx,$$

но существует конечный

$$\lim_{\delta \to +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right),$$

то этот предел называют **главным значением интеграла**

$$\int_a^b f(x)dx$$

и обозначают **v.p.**

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(то есть,

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right).$$

Лемма 2.1

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

1) Пусть $a' \in (a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^{a'} f(x)dx \text{ сходится и } \int_{a'}^b f(x)dx \text{ сходится}$$

$$(\text{и } \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^b f(x)dx).$$

2) Пусть $c \neq 0$. Тогда

$$\int_a^b cf(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ сходится}$$

$$(\text{и } \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx).$$

Теорема 2.1

Критерий сходимости несобственного интеграла II рода от неотрицательной функции.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \exists K \geq 0 : \int_a^\beta f(x)dx \leq K \quad \forall \beta \in [a, b).$$

Лемма 2.2

Пусть $F(x)$ возрастает на $[a, b)$. Тогда

$$\lim_{x \to b-0} F(x) \text{ конечный } \Leftrightarrow F(x) \text{ ограничена сверху на } [a, b).$$

(без доказательства)

1.18 Первый и второй признаки сравнения. Сходимость интеграла

Теорема 2.2

Первый признак сравнения несобственных интегралов II рода от неотрицательных функций.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x) \geq g(x) \geq 0$ на $[a, b)$. Тогда:

1) Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ тоже сходится.

2) Если $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема 2.3

Второй признак сравнения несобственных интегралов II рода от неотрицательных функций.

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Пусть $f(x), g(x) > 0$ на $[a, b)$, и

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad l \neq 0, l \neq \infty$$

(например, $f(x) \sim g(x)$). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{сходится} \quad \iff \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{сходится.}$$

Примеры

Пусть $p > 0$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x^p}$$

Сходятся при $p < 1$, расходятся при $p \geq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b, & p \neq 1 \\ \ln(x)\Big|_a^b, & p = 1 \end{cases}$$

$$\exists \text{ существует } \lim_{a \to +0} \int_a^b \frac{dx}{x^p} \text{ только при } p < 1$$

Примеры интегралов

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \text{ сходится.}$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x+x^4}} \text{ расходится.}$$

1.19 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов II рода .

Определение 2.2

Рассмотрим интеграл из пункта 2) определения 2.1 (для интегралов из пунктов 1) и 3) аналогично).

Если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют абсолютно **сходящимся**.

Теорема 2.4

Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.
(без доказательства)

Замечание

Обратное неверно.
Если интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, а интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится условно.

1.20 Несобственные интегралы I рода: определение, главное значение. Признаки сходимости. Сходимость интеграла

Определение 3.1

1) Пусть $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$, $f(x) \in R([a, A])$ $\forall A \in (a, +\infty)$.
Символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода.
Если существует конечный предел

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx,$$

то символу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ приписывают значение I, то есть,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл сходится.
Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.
2) Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, b]$, $f(x) \in R([B, b])$ $\forall B \in (-\infty, b)$.
Символ $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода.
Если существует конечный предел

$$I = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)dx,$$

то символу $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ присваивают значение I, то есть,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)dx$$

и говорят, что несобственный интеграл **сходится**.
Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.
3) Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$, $f(x)$ интегрируема на любом отрезке.
В этом случае символ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ также называется несобственным интегралом I рода.
Есть два равносильных способа приписать символу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ числовое значение:

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

где c — произвольная точка из $(-\infty, +\infty)$.
Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty, B \to +\infty} \int_A^B f(x)dx.$$

Замечание

Если не существует конечный

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^B f(x)dx,$$

но существует конечный

$$\lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^B f(x)dx,$$

то этот предел называют **главным значением интеграла**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

и обозначают **v.p.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

$$(\text{то есть, } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{B} f(x)dx).$$

Примеры

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} xdx$$

сходится только в смысле главного значения, и его главное значение равно 0.

$$2) \int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

$$\int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^A, & p \neq 1 \\ (\ln x)\Big|_a^A, & p = 1 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{A\to\infty} \int_{a}^{A} \frac{dx}{x^p} \text{ только при } p > 1.$$

только при $p > 1$.

1.21 Признак Дирихле. Сходимость интеграла при p>0.

Определение 3.2

Рассмотрим интеграл из определения 3.1.

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Если сходится $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то интеграл называют **абсолютно сходящимся**.

Теорема 3.1

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла I рода.
Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$. Пусть:
1) $f(x) \in C([a, +\infty))$ и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$;
2) $g(x) \in C^1([a, +\infty))$, $g(x)$ монотонно убывает на $[a, +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ **сходится**.

Пример

Интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

(при $a > 0, p > 0$) **сходится абсолютно** при $p > 1$, **сходится условно** при $0 < p \leq 1$.

1.22 Площадь криволинейной трапеции. Вычисление площади эллипса с помощью параметризации кривой.

Пример

Найдем площадь эллипса, то есть, фигуры, ограниченной кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введем параметризацию эллипса:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Функции $y_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ - верхняя и нижняя части кривой. Тогда площадь эллипса

$$S = \int_{-a}^{a} (y_1(x) - y_2(x))dx = \int_{-a}^{a} y_1(x)dx - \int_{-a}^{a} y_2(x)dx = [x = x(t), y = y(t)] =$$

$$= \int_{\pi}^{0} y(t)dx(t) - \int_{\pi}^{2\pi} y(t)dx(t) = -\int_{0}^{2\pi} y(t)dx(t) = ab\int_{0}^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt = \pi ab.$$

Замечание

Мы на примере показали справедливость утверждения:

$$\text{Если} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

- уравнение гладкой замкнутой кривой без самопересечений, пробегаемой против часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру площадью S, то

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)dx(t) = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

1.23 Площадь криволинейного сектора.

Теорема 4.2

Площадь криволинейного сектора, то есть, фигуры, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ ((r, φ) - полярные координаты), равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

1.24 Объем прямого кругового цилиндра.

Определение 4.2

Функция $V(T)$, определенная на некотором классе Ω множеств в пространстве, называется **объемом**, если она обладает следующими свойствами:

1) **Монотонность**: $\forall T_1, T_2 \in \Omega : T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow V(T_1) \le V(T_2)$.

2) **Аддитивность**: Если T_1 и T_2 не имеют общих внутренних точек, то $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.

3) **Инвариантность**: Если T_1 можно совместить с T_2 при помощи параллельного переноса и поворота, то $V(T_1) = V(T_2)$.

4) **Нормировка**: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его трех смежных сторон.

Замечание

Множества из Ω называются кубируемыми или измеримыми по Жордану.

Все множества, которые мы рассматриваем, измеримы (без доказательства).

Лемма 4.1

Объём V прямого кругового цилиндра (тела T, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0, z = h$) равен

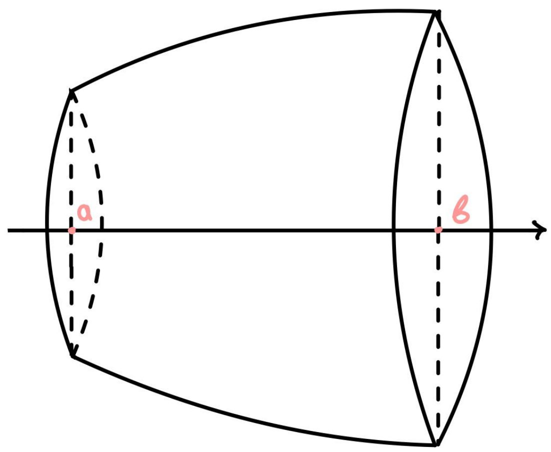
$$V = \pi R^2 h.$$

1.25 Объем тела вращения. Объем тела с известными площадями поперечных сечений. Объем эллипсоида.

Теорема: Объем тела вращения

$$\text{Пусть } f \in C[a,b], \quad f \geq 0 \text{ на } [a,b].$$

Объём V тела T, полученного путём вращения подграфика $y = f(x)$ вокруг оси OX, равен:



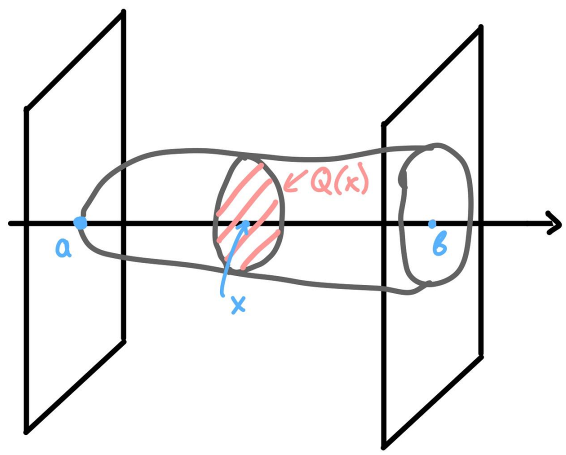
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Объем тела с известными площадями поперечных сечений

Рассмотрим тело T, заключенное между плоскостями $x = a, x = b$.

Пусть $Q(x)$ - фигура, полученная при сечении тела плоскостью $x = const, (x \in [a,b])$

Пусть $Q(x)$ - фигура, полученная при сечении тела плоскостью $\forall x \in [a,b]$ и функция $S(x) = S(Q(x))$ непрерывна на $[a,b]$.



$$\text{Тогда } V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Объем элипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

В сечении элипсоида пл-тью $x=x_0$ имеем эллимсоида пл-тью

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2} \iff \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\right]^2}=1$$

$$\Rightarrow \text{площадь сечения } S(x_0)=\pi b_1 c_1=\pi bc\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow V=\int_{-a}^{a} S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi bc\left[(a-\frac{a^3}{3a^2})-(-a+\frac{a^3}{3a^2})\right]=\pi bc\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc$$

Следствие

Обьем шара радиуса $R\,(a=b=c=R)$, есть $\frac{4}{3}\pi R^3$

1.26 Длина кривой, заданной параметрически. Следствия. Вычисление длины окружности.

Определение:

Рассмотрим кривую, заданную параметрически

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C([\alpha, \beta])$$

(кривая - совокупность точек плоскости с координатами $(\varphi(t), \psi(t))$ где $t \in [\alpha, \beta]$)

Если точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ ссовпадает с точкой $A(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, то кривая называется **замкнутой**

Кривая называется **гладкой**, если φ и ψ имеют непрерывные производные, которые не обращаются одновременно в **ноль**

Определение:

Рассмотрим кривую (1). Пусть $\tau = \{t\}_{k=0}^{n}$ - некоторое разбиение $[\alpha, \beta]$.

Составим:

$$l(r) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

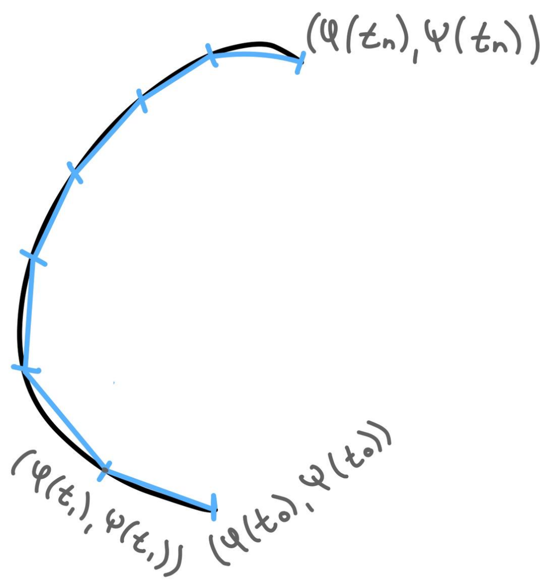
- длина ломаной с вершинами в точках $(\varphi(t_k), \psi(t_k)), (k = 0, 1, \ldots, n)$

Длина кривой назовем:

$$l = \sup_{\tau \in T} l(\tau)$$

(здесь T - набор всевозможных разбиений $[\alpha, \beta]$)

Если l конечно, то кривая называется спрямляемой.

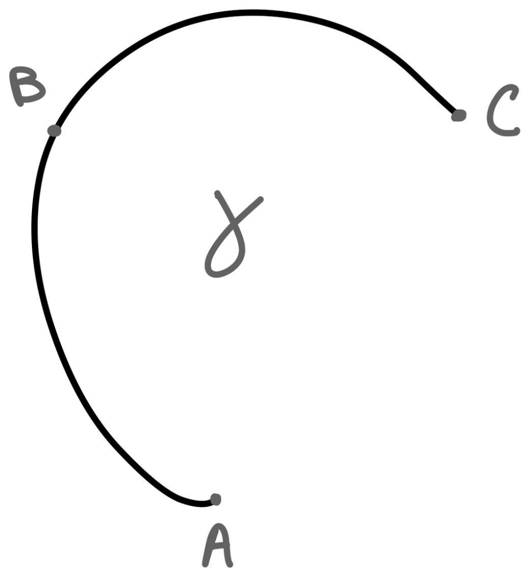


Замечания. (без доказательства)

1) Всякая гладкая кривая допускает **параметризацию**.

2) Длина криво обладжает свойством **аддитивности**.

Т.е, если l_1 - длина кривой γ между точками A и B, l_2 - длина кривой между точками B и , то $l = l_1 + l_2$ - длина кривой γ между точками A и



2 Алгебра

2.1 Группы, кольца, поля.