Билеты Теория Графов - 4

Тимур Адиатуллин | telegram, github

Содержание

1 Специальные бинарные отношения. Связь между понятием отношения и понятием графа. Орграфы и бинарные отношения.

Бинарные отношения

Пусть A — непустое множество. **Бинарным отношением** на A называется любое подмножество

$$R \subseteq A \times B.$$

Пару $(a, b) \in R$ принято обозначать как $a\,R\,b$.

Специальные свойства бинарных отношений

- **Рефлексивность:**

$$\forall a \in A:\ (a, a) \in R.$$

- **Антирефлексивность:**

$$\forall a \in A:\ (a, a) \notin R.$$

- **Симметричность:**

$$\forall a, b \in A:\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

- **Антисимметричность:**

$$(a, b) \in R \text{ и } (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

- **Транзитивность:**

$$(a, b) \in R \text{ и } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Основное определение

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E — множество рёбер),

$$G(V, E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V; E\rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq 2^V \ \&\ \forall e \in E\ (|e| = 2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что любое множество E двухэлементных подмножеств множества V определяет симметричное бинарное отношение на множестве V. Поэтому можно считать, что

$$E \subseteq V \times V, \quad E = E^{-1}$$

и трактовать ребро не только как множество $\{v_1, v_2\}$, но и как пару (v_1, v_2).

Число вершин графа G обозначим p, а число рёбер — q:

$$p \stackrel{\text{def}}{=} p(G) \stackrel{\text{def}}{=} |V|, \quad q \stackrel{\text{def}}{=} q(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E|.$$

Если хотят явно упомянуть числовые характеристики графа, то говорят: (p, q)-граф.

Ориентированный граф (орграф)

Если элементами множества E являются упорядоченные пары (т. е. $E \subseteq V \times V$), то граф называется **ориентированным** (или **орграфом**). В этом случае элементы множества V называются **узлами**, а элементы множества E — **дугами**.

Орграфы и свойства отношений

Свойства отношения естественно интерпретируются в терминах орграфов:

- **Рефлексивность** соответствует наличию петли в каждой вершине.
- **Антирефлексивность** означает отсутствие петель.
- **Симметричность** означает, что каждая дуга имеет дугу в обратном направлении.
- **Антисимметричность** означает отсутствие пар противоположных дуг между различными вершинами.
- **Транзитивность** означает: если есть дуги $a \to b$ и $b \to c$, то должна быть дуга $a \to c$.

Соответствие графов и отношений

- Полный граф — универсальное отношение.
- Неорграф — симметричное отношение.
- Дополнение графов — дополнение отношений.
- Изменение всех направлений дуг — обратное отношение.

Итог

Бинарное отношение на множестве A полностью эквивалентно ориентированному графу на том же множестве вершин. Свойства отношения имеют естественные графовые интерпретации, что делает орграфы удобным инструментом для визуализации и анализа отношений.

2 Определение графа. Смежность. Диаграммы. Псевдо-, гипер- и мультиграфы. Виды графов. Связность

Основное определение

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E — множество рёбер),

$$G(V, E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V; E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subseteq 2^V \;\&\; \forall e \in E \; (|e| = 2).$$

Смежность

Пусть v_1, v_2 — вершины, $e = (v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e

7.1.3. Смежность

Пусть v_1, v_2 — вершины, $e = (v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e **инцидентны**, ребро e и вершина v_2 также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными.

Множество вершин, смежных с вершиной v, называется **множеством смежности** (или **окрестностью**) вершины v и обозначается $\Gamma^+(v)$:

$$\Gamma^+(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid (u, v) \in E\}, \quad \Gamma^*(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \Gamma^+(v) + v.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если не оговорено противное, то символ Γ без индекса подразумевает Γ^+, то есть саму вершину в окрестность не включают.

Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \iff v \in \Gamma(u)$. Если $A \subset V$ — множество вершин, то $\Gamma(A)$ — множество всех вершин, смежных с вершинами из A:

$$\Gamma(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in V \mid \exists\, v \in A \; (u \in \Gamma(v))\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

Диаграммы

Обычно граф изображают диаграммой: вершины — точками (или кружками), рёбра — линиями.

Пример. На рис. 7.4 приведён пример диаграммы графа, имеющего четыре вершины и пять рёбер. В этом графе вершины v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_1, v_2 и v_4 смежны, а вершины v_1 и v_3 не смежны. Смежные рёбра: e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4, e_4 и e_1, e_1 и e_5, e_2 и e_5, e_3 и e_5, e_4 и e_5. Несмежные рёбра: e_1 и e_3, e_2 и e_4.

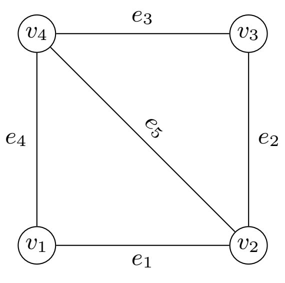

Рис. 1: Диаграмма графа

Типы графов

1. **Псевдограф** — граф с петлями.

2. **Мультиграф** — граф с кратными рёбрами.

3. **Гиперграф** — дуги являются множествами с одним и более элементами.

4. **Нумерованный граф** — если существует функция, отображающая множество вершин или рёбер в множество чисел или символов.

- Если элементом множества E может быть пара одинаковых (не различных) элементов V, то такой элемент называется **петлёй**, а граф — **графом с петлями** (или **псевдографом**).

- Если E является не множеством, а мультимножеством, содержащим некоторые элементы по несколько раз, то такие элементы называются **кратными рёбрами**, а граф — **мультиграфом**.

- Если элементами множества E являются не обязательно двузначные, а любые (непустые) подмножества множества V, то такие элементы называются **гипердугами**, а граф — **гиперграфом**.

- Если задана функция $F : V \to M$ и/или $F : E \to M$, то множество M называется **множеством пометок**, а граф — **помеченным** (или **нагруженным**). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа. Если функция F инъективна, то есть разные вершины (рёбра) имеют разные пометки, то граф называют **нумерованным**.

Специальные графы

- **Тривиальный граф** — состоит из одной вершины.

- **Циклический граф с k вершинами** — обозначается C_k.

- **Полный граф** — содержит все возможные рёбра между вершинами, обозначается K_p.

Число рёбер в полном графе:

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Колёса и двудольные графы

- **Колесо** — граф, обозначаемый W_n.

- **Двудольный граф** — граф, множество вершин V которого можно разбить на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что каждое ребро из E инцидентно вершинам из V_1 и V_2. Множества V_1 и V_2 называются **долями графа**.

Связность графа

Говорят, что две вершины в графе **связаны**, если существует соединяющая их (простая) цепь. Граф, в котором все вершины связны, называется **связным**.

Связность является **эквивалентностью**. Классы эквивалентности по отношению связности — это **компоненты связности** графа:

$$k(G).$$

Граф, состоящий только из вершин, называется **вполне несвязным**.

3 Понятие изоморфизма. Изоморфизм графов (+2 теоремы). Инварианты графа.

Гомоморфизм

Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \psi_1, \ldots, \psi_m \rangle$ — две алгебры одного типа (одинаковые векторы арностей). Если существует функция $f : A \to B$, такая, что

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \quad f(\varphi_i(a_1, \ldots, a_n)) = \psi_i(f(a_1), \ldots, f(a_n)),$$

то говорят, что f — **гомоморфизм** из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Действие гомоморфизма можно изобразить с помощью диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Рис. 2: Коммутативная диаграмма: $f \circ \varphi = \psi \circ f$

Диаграмма называется **коммутативной**, потому что условие гомоморфизма можно переписать с помощью суперпозиции функций:

$$f \circ \varphi = \psi \circ f.$$

Изоморфизм

Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B; \psi_1, \ldots, \psi_m \rangle$ — две алгебры одного типа, и $f : A \to B$ — изоморфизм или гоморфизм с биекцией. Тогда алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны:

$$\mathcal{A}^f \sim \mathcal{B}.$$

Теорема 1. Если $f : A \to B$ — изоморфизм, то $f^{-1} : B \to A$ тоже является изоморфизмом.

Теорема 2. Отношение изоморфизма на множестве однотипных алгебр является эквивалентностью.

Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ **изоморфны** (обозначается $G_1 \sim G_2$ или $G_1 = G_2$), если существует биекция $h : V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность:

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \iff e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2.$$

Теорема

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности

Теорема 1.

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов.

Теорема 2.

Графы (орграфы) изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

Инварианты

Ну найдете сами

4 Элементы графов: подграфы, валентность, маршруты, цепи, циклы. Метрические характеристики графа. Особенности алгоритмов теории графов

Подграфы

Граф $G'(V', E')$ называется **подграфом** (или **частью**) графа $G(V, E)$ (обозначается $G' \subseteq G$), если

$$V' \subseteq V \quad \& \quad E' \subseteq E.$$

Если $V' = V$, то G' называется **остовным подграфом** графа G.

Если $V' \subset V$, $E' \subset E$ и $(V' \neq V \vee E' \neq E)$, то граф G' называется **собственным подграфом** графа G.

Подграф $G'(V', E')$ называется **правильным подграфом** графа $G(V, E)$, если он содержит все возможные рёбра графа G между вершинами из V':

$$\forall\, u, v \in V' \quad ((u, v) \in E \Rightarrow (u, v) \in E').$$

Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V'.

Замечание.

Иногда подграфами называют только правильные подграфы, а неправильные подграфы называют **изграфами**.

Степень вершины

Количество рёбер, инцидентных вершине v, называется **степенью** (или **валентностью**) вершины v и обозначается $d(v)$:

$$\forall v \in V \quad 0 \leq d(v) \leq p - 1, \qquad d(v) = |\Gamma^{+}(v)|.$$

Таким образом, степень $d(v)$ вершины v совпадает с количеством смежных с ней вершин. Количество вершин, не смежных с v, обозначается $\overline{d}(v)$. Ясно, что:

$$\forall v \in V \quad d(v) + \overline{d}(v) = p - 1.$$

Обозначим минимальную степень вершины графа G через $\delta(G)$, а максимальную — через $\Delta(G)$:

$$\delta(G(V, E)) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{v \in V} d(v), \qquad \Delta(G(V, E)) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v \in V} d(v).$$

Очевидно, что $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ являются **инвариантами** графа.

Если степени всех вершин равны k, то граф называется **регулярным степени** k:

$$\delta(G) = \Delta(G) = k, \qquad \forall v \in V \quad d(v) = k.$$

Степень регулярности обозначается $r(G)$. Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.

Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k,$$

в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём однородные элементы (вершины, рёбра) через один — смежны или совпадают.

Маршруты, цепи, циклы

Если $v_0 = v_k$, то маршрут называется **замкнутым**, иначе — **открытым**.

Если все рёбра различны, то маршрут называется **цепью**. Если все вершины (а значит, и рёбра) различны, то маршрут называется **простой цепью**.

В цепи $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются **концами цепи**. Говорят, что цепь с концами u и v **соединяет вершины** u и v.

Цепь, соединяющая вершины u и v, обозначается $\langle u, v\rangle$. Если нужно указать граф G, которому принадлежит цепь, то добавляют индекс: $\langle u, v\rangle_G$.

Нетрудно показать, что если существует какая-либо цепь, соединяющая вершины u и v, то существует и **простая цепь**, соединяющая эти вершины.

Замкнутая цепь называется **циклом**; **замкнутая простая цепь** называется **простым циклом**.

Число циклов в графе G обозначается $z(G)$. Граф без циклов называется **ациклическим**.

Для орграфов *цепь* называется *путём*, а *цикл* — *контуром*.
Путь в орграфе из узла u в узел v обозначается:

$$\langle \vec{u}, v \rangle.$$

Метрические характеристики графа

Длина маршрута — количество рёбер в нём. Маршрут M имеет длину k тогда и только тогда, когда $|M| = k$.

Расстоянием между вершинами u и v, обозначаемым $d(u, v)$, называется длина кратчайшей цепи $\langle u, v \rangle$, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*:

$$d(u, v) = \min_{\{\langle u,v \rangle\}} |\langle u, v \rangle|.$$

Если цепи нет, расстояние считается бесконечным.

Ярус — множество вершин на расстоянии n от вершины v.

Диаметр графа — длина самой длинной геодезической цепи:

$$D(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v).$$

Эксцентриситет $e(v)$ вершины v в связном графе — максимальное расстояние от v до других вершин.

Радиус графа $R(G)$ — наименьший эксцентриситет:

$$R(G) = \min_{v \in V} e(v).$$

Вершина называется *центральной*, если её эксцентриситет совпадает с радиусом. Множество центральных вершин называется *центром графа*.

5 Способы задания графа. Представление графов в ЭВМ. Обходы графов.

6 Операции над графами: локальные, алгебраические.

7 Упорядочение дуг и вершин орграфа. Алгоритм Фалкерсона.

8 Выявление маршрутов с заданным количеством ребер. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла. Волновые алгоритмы.

9 Связность: компоненты связности, точки сочленения. Вершинная и реберная связность (мосты и блоки, меры связности).

10 Теорема Менгера (с доказательством). Непересекающиеся цепи и разделяющие множества. Варианты теоремы Менгера. Теорема Холла.

11 Нахождение кратчайших путеtй: алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана-Форда.

12 Нахождение кратчайших путей: алгоритм Флойда-Уоршалла. Алгоритм нахождения максимального пути.

13 Потоки в сетях: определение потока, разрезы. Теорема Форда и Фалкерсона. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Коммуникационные сети.

14 Эвристические алгоритмы. Алгоритм A*. Метод ветвей и границ

15 Поток минимальной стоимости. Алгоритм определения потока минимальной стоимости

16 Транспортная задача. Алгоритмы Диница и Кинга. Задачи многокритериальной оптимизации.

17 Связность в орграфах (сильная, односторонняя и слабая связность, компоненты сильной связности). Алгоритм выделения компонент сильной связности.

18 Деревья. Свободные деревья. Основные свойства деревьев (с доказательствами). Код Прюфера.

19 Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Свойства ордерева. Эквивалентное определение ордерева. Упорядоченные деревья.

20 Представление деревьев в ЭВМ. Обходы бинарных деревьев. Алгоритм симметричного обхода бинарного дерева

21 Деревья сортировки. Ассоциативная память, способы реализации ассоциативной памяти. Алгоритм поиска в дереве сортировки.

22 Выровненные, заполненные и полные деревья. Сбалансированные деревья. Алгоритм бинарного (двоичного) поиска.

23 Информационные деревья. А- и В-деревья. Красно-черные деревья.

24 Кратчайший остов. Алгоритм построения остова экстремального веса. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима. Алгоритм Борувки. Число остовов в связном обыкновенном графе. Задача Штейнера

25 Фундаментальные циклы и разрезы. Фундаментальная система циклов и циклический ранг. Фундаментальная система разрезов и коцикличеcкий ранг. Подпространства циклов и коциклов

26 Эйлеровы циклы. Эйлеровы графы. Алгоритм Флери. Оценка числа эйлеровых графов.

27 Гамильтоновы циклы. Теорема Дирака. Задача коммивояжера.

28 Гиперграфы. Двойственные гиперграфы. Циклы и реализации.

29 Задачи маршрутизации. VRP. Классификация. Методы решения задач VRP.

30 Независимые и покрывающие множества вершин и ребер. Теорема о связи чисел независимости и покрытий

31 Построение независимых множеств вершин. Поиск с возвратами. Улучшенный перебор. Доминирующие множества. Доминирование и независимость. Задача о наименьшем покрытии.

32 Ядро графа. Алгоритм Магу. Спектры графов.

33 Разметка графа. Грациозная, счастливая разметки. Раскраска графа. Примеры задач. Хроматическое число. Алгоритмы раскрашивания. Двойственный граф

34 Планарность. Укладка графов. Эйлерова характеристика. Теорема о пяти красках.

35 Элементы сетевого планирования: критические пути, работы, резервы. Линейные графики. Алгоритм сетевого планирования