МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа технологий искусственного интеллекта

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Теория автоматического управления
Расчетное задание №1

Студент,
группы 5130201/40003 (группа №4) ________________ Адиатуллин Т. Р.

Преподаватель ________________ Суханов А. А.

«_____»________________ 2025 г.

Санкт-Петербург, 2025, осенний семестр

Расчетное задание: 1

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 3i \end{pmatrix}$, где i номер в списке

A^{-1}, λ, X - ? + Проверка

б) $\ddot{x} + k^2 x = a \sin \omega t$; $i \% 2 = 1$
1) $\omega \neq k$ $\quad a \cos \omega t$; $i \% 2 = 0$ | НУ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \vartheta_0$

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $|A| = 1\cdot3-2\cdot2=-1$; $|A|\neq 0$ 2

1) A^{-1}

$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\tilde{A}$; $\tilde{A}=C^{T}$

Построим матрицу C, при помощи миноров:

$M_{11}=3;\ M_{12}=2;\ M_{21}=2;\ M_{22}=1$

$C_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

$C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$C_{11}=1\cdot3;\ C_{12}=-2;\ C_{21}=-2;\ C_{22}=1$

$\tilde{A}=C^{T}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$

Проверка: $AA^{-1}=E$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ +

$e_{11}=1\cdot(-3)+2\cdot2=1$ $e_{21}=2\cdot(-3)+3\cdot2=0$

$e_{12}=1\cdot2+2\cdot(-1)=0$ $e_{22}=2\cdot2+3\cdot(-1)=1$

2) Найдем собственные числа λ и собственные векторы X.

$AX=\lambda X;\ (A-\lambda E)X=0;\ |A-\lambda E|=0$

$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0;$ $(1-\lambda)(3-\lambda)-4=0$

$3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2-4\lambda-1=0$

$D=4^2-4\cdot(-1)=16+4=20$

$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}\Longrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=2-\sqrt{5}\\ \lambda_2=2+\sqrt{5}\end{array}\right.$

$AX_i=\lambda_i X_i$; $X_i=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a+2b\\ 2a+3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i a\\ \lambda_1\cdot b\end{pmatrix}$ $\begin{cases}a+2b=\lambda_i a\\ 2a+3b=\lambda_i b\end{cases}$

$$\begin{cases} a(1-\lambda_i)+2b=0 \\ 2a+(3-\lambda_i)b=0 \end{cases} \qquad a=-\frac{(3-\lambda_i)b}{2}$$

$$X_i=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3-\lambda_i)b}{2} \\ b \end{pmatrix};\ X_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3-\lambda_1)b}{2} \\ b \end{pmatrix} \overset{\exists b=2}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3-2+\sqrt{5})2}{2} \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3-\lambda_2)b}{2} \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3-2-\sqrt{5})2}{2} \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка собственных векторов:

$AX_1=\lambda_1 X_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}=(2-\sqrt{5})\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5}+4 \\ -2-2\sqrt{5}+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-\sqrt{5})(-1-\sqrt{5}) \\ 2(2-\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-2\sqrt{5}+\sqrt{5}+5 \\ 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix}\ (+)$$

$AX_2=\lambda_2 X_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}=(2+\sqrt{5})\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5}+4 \\ -2+2\sqrt{5}+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}) \\ 2(2+\sqrt{5}) \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 4+2\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 4+2\sqrt{5} \end{pmatrix}\ (+)$$

Проверка:

1) $\operatorname{trace} A=4;\ \lambda_1+\lambda_2=2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}=4;\ (+)$

2) $\det A=-1;\ \lambda_1\cdot\lambda_2=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=2^2-(\sqrt{5})^2=4-5=-1\ (+)$

Итог. ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ \begin{matrix} \lambda_1=2-\sqrt{5} \\ \lambda_2=2+\sqrt{5} \end{matrix}\quad X_1=\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix};\ X_2=\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

б) $\ddot{x} + k^2 x = a \sin \omega t$ | НУ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \vartheta_0$ 4

1) $\omega \neq k$

I – реш. одн. ур

$x^*: \ddot{x} + k^2 x = 0$

$x^* = e^{\lambda t}$; $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \Big| \cdot \frac{1}{e^{\lambda t}}$ т.к $e^{\lambda t} \neq 0$

$\lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm ik$

$x_1 = e^{ikt}$; $x_2 = e^{-ikt}$

$x^* = \sum C_i e^{\lambda_i t}$; $x^* = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt}$

$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$

$x^* = C_1 \cos kt + C_1 i \sin kt + C_2 \cos kt - C_2 i \sin kt$

$x^* = (C_1 + C_2) \cos kt + i (C_1 - C_2) \sin kt$

$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

II – реш. частн. сл. неоднород.

а) $\omega \neq k$

$x_ч = x^{**}$

$x^{**}: A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = x_ч$

$\ddot{x}_ч = (-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t))' = -A\omega^2 \cos(\omega t) -$

$- B\omega^2 \sin(\omega t)$

$-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + k^2 A \cos(\omega t) + k^2 B \sin(\omega t) =$

$= a \sin(\omega t)$

$(k^2 - \omega^2) A \cos(\omega t) + (k^2 - \omega^2) B \sin(\omega t) = a \sin(\omega t)$

$\Rightarrow (k^2 - \omega^2) A = 0$ $\quad A = 0$

$(k^2 - \omega^2) B = a$ $\quad B = \frac{a}{k^2 - \omega^2}$; $k^2 \neq \omega^2$

$x_ч = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$

III общее решение

$$x = x^{*} + x^{**}$$

$$x = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{a}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t)$$

Задача Коши:

1) $x(0) = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) + \frac{a}{k^2-\omega^2}\sin(0) = x_0$

$C_1 = x_0$

2) $\dot{x}(0) = v_0$

$$\dot{x}(t) = -C_1 k\sin(kt) + C_2 k\sin(kt) + \frac{a\omega}{k^2-\omega^2}\cos\omega t$$

$$\dot{x}(0) = -C_1 k\cdot 0 + C_2 k\cdot 1 + \frac{a\omega}{k^2-\omega^2} = v_0$$

$$C_2 = \frac{v_0 - \frac{a\omega}{k^2-\omega^2}}{k} = \frac{v_0(k^2-\omega^2) - a\omega}{k(k^2-\omega^2)}$$

Итоговый ответ:

$$x(t) = x_0\cos(kt) + \frac{v_0(k^2-\omega^2)-a\omega}{k(k^2-\omega^2)} + \frac{a}{k^2-\omega^2}\cdot\sin(\omega t)$$