

Вопросы к экзамену по высшей математике (на оценку 3). III семестр.
Лектор доц. Ульянова Н. С.

1. Определение решения ОДУ. Эквивалентные дифференциальные уравнения. Задача Коши для ОДУ n-го порядка.
4. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормального ДУ n-го порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (ЛДУ). Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
6. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородного ЛДУ. Теорема о свойствах ФСР.
7. Теорема о существовании ФСР однородного ЛДУ.
8. Определение общего решения ЛДУ n-го порядка. Теорема о связи ФСР и общего решения однородного ЛДУ.
9. Комплекснозначные функции действительной переменной. Лемма о комплекснозначном решении однородного ЛДУ.
11. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, если известны корни его характеристического многочлена.
12. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с вещественными постоянными коэффициентами, состоящей только из вещественнонозначных функций.
13. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ.
14. Метод вариаций произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения решения неоднородного ЛДУ.
16. Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений (СЛДУ). Запись в векторной форме. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Определение общего решения.
17. Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно-независимых собственных векторов матрицы системы совпадает с порядком системы.
18. Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно-независимых собственных векторов матрицы системы меньше порядка системы.
21. Понятие числового ряда. Асимптотическая формула для частичной суммы гармонического ряда.
22. Теоремы о сходящихся рядах (возможность заключать элементы в скобки; сходимость ряда с элементами - линейными комбинациями элементов сходящихся рядов).
23. Остаток ряда. Связь между сходимостью ряда и его остатка. Необходимое условие сходимости ряда.
24. Первый и второй признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.
25. Признак Даламбера.
26. Признак Коши.
27. Интегральный признак сходимости рядов. Сходимость обобщенного гармонического ряда.
28. Абсолютно сходящиеся ряды.
29. Признак Дирихле.
30. Признак Абеля. Признак сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
31. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.
37. Степенные ряды. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда (с леммой).
Теорема о непрерывности суммы степенного ряда на концах интервала сходимости.
38. Теорема о дифференциировании и интегрировании суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Связь коэффициентов степенного ряда с производными его суммы.
39. Ряд Тейлора функции в точке. Пример: показать, что ряд Тейлора функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точке 0 сходится к значению $f(x)$ только при $x=0$.

41. Разложение в степенные ряды элементарных функций действительной переменной.
42. Предел последовательности с комплексными членами. Сходимость последовательностей действительных и мнимых частей.
43. Сумма ряда с комплексными членами, ее связь с суммой рядов действительных и мнимых частей. Связь сходимости и абсолютной сходимости.
44. Степенной ряд с комплексными членами, его круг сходимости.
45. Функция e^z при $z \in \mathbb{C}$. Доказательство свойства $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
46. Функции $\cos z, \sin z$ при $z \in \mathbb{C}$, их связь с комплексной экспонентой. Следствия.

51. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для его коэффициентов. Свойства ряда Фурье, вытекающие из полноты тригонометрической системы функций.
52. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$ функции. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье 2π -периодической кусочно-дифференцируемой функции.
53. Замечание о 21-периодических функциях.
55. Определение площади плоской фигуры. Необходимое и достаточное условие измеримости плоской фигуры. Следствие.
56. Площадь кривой. Следствие.
57. Основные свойства площади.
58. Определение двойного интеграла.
59. Сведение двойного интеграла к повторному.

Требуется знать доказательства из вопросов 7,8,13,17,22,24,25,39,44.