

Вопросы к экзамену по высшей математике III семестр.
Лектор доц. Ульянова Н. С.

1. Определение решения ОДУ. Эквивалентные дифференциальные уравнения. Задача Коши для ОДУ n-го порядка.
2. Общий интеграл ОДУ 1-го порядка.
3. Уравнение с разделяющимися переменными. Линейное уравнение 1-го порядка. Уравнение в полных дифференциалах.
4. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормального ДУ n-го порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (ЛДУ). Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
6. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородного ЛДУ. Теорема о свойствах ФСР.
7. Теорема о существовании ФСР однородного ЛДУ.
8. Определение общего решения ЛДУ n-го порядка. Теорема о связи ФСР и общего решения однородного ЛДУ.
9. Комплекснозначные функции действительной переменной. Лемма о комплекснозначном решении однородного ЛДУ.
10. Доказательство формулы для $L(e^{\lambda x} f(x))$, где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
11. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, если известны корни его характеристического многочлена.
12. Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с вещественными постоянными коэффициентами, состоящей только из вещественнозначных функций.
13. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ.
14. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения решения неоднородного ЛДУ.
15. Нормальные системы дифференциальных уравнений (СДУ). Запись системы в векторной форме. Определение решения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальных систем.
16. Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений (СЛДУ). Запись в векторной форме. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Определение общего решения.
17. Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно-независимых собственных векторов матрицы системы совпадает с порядком системы.
18. Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно-независимых собственных векторов матрицы системы меньше порядка системы.
19. Построение вещественнозначной ФСР однородной СЛДУ в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные числа. Пример:

$$\begin{cases} y'_1 = 4y_1 - y_2 \\ y'_2 = 5y_1 + 2y_2 \end{cases} .$$

20. Общее решение неоднородной СЛДУ. Метод Лагранжа нахождения решений неоднородных СЛДУ.
21. Понятие числового ряда. Асимптотическая формула для частичной суммы гармонического ряда.
22. Теоремы о сходящихся рядах (возможность заключать элементы в скобки; сходимость ряда с элементами – линейными комбинациями элементов сходящихся рядов).
23. Остаток ряда. Связь между сходимостью ряда и его остатка. Необходимое условие сходимости ряда.
24. Первый и второй признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.
25. Признак Даламбера.
26. Признак Коши.
27. Интегральный признак сходимости рядов. Сходимость обобщенного гармонического ряда.
28. Абсолютно сходящиеся ряды.
29. Признак Дирихле.
30. Признак Абеля. Признак сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
31. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.
32. Определение предела функциональной последовательности и суммы функционального ряда. Равномерная сходимость.
33. Признаки Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

34. Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности и суммы равномерно сходящегося ряда.
35. Теорема об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.
36. Теорема о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.
37. Степенные ряды. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда (с леммой).
- Теорема о непрерывности суммы степенного ряда на концах интервала сходимости.
38. Теорема о дифференцировании и интегрировании суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Связь коэффициентов степенного ряда с производными его суммы.
39. Ряд Тейлора функции в точке. Пример: показать, что ряд Тейлора функции
- $$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
- в точке 0 сходится к значению $f(x)$ только при $x=0$.
40. Теорема о достаточных условиях сходимости ряда Тейлора некоторой функции к самой этой функции на промежутке.
41. Разложение в степенные ряды элементарных функций действительной переменной.
42. Предел последовательности с комплексными членами. Сходимость последовательностей действительных и мнимых частей.
43. Сумма ряда с комплексными членами, ее связь с суммой рядов действительных и мнимых частей. Связь сходимости и абсолютной сходимости.
44. Степенной ряд с комплексными членами, его круг сходимости.
45. Функция e^z при $z \in \mathbb{C}$. Доказательство свойства $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
46. Функции $\cos z, \sin z$ при $z \in \mathbb{C}$, их связь с комплексной экспонентой. Следствия.
47. Коэффициенты Фурье, свойство минимальности, неравенство Бесселя.
48. Определение полной системы элементов в пространстве. Связь полноты ортонормированной системы и сходимости ряда Фурье любого элемента к нему по норме пространства. Следствия: равенство Парсеваля и др.
49. Определение функционального пространства $L_2([a,b])$.
50. Пример ортонормированной системы в $L_2(-\pi, \pi)$.
51. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для его коэффициентов. Свойства ряда Фурье, вытекающие из полноты тригонометрической системы функций.
52. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$ функции. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье 2π-периодической кусочно-дифференцируемой функции.
53. Замечание о 2π-периодических функциях.
54. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.
55. Определение площади плоской фигуры. Необходимое и достаточное условие измеримости плоской фигуры. Следствие.
56. Площадь кривой. Следствие.
57. Основные свойства площади.
58. Определение двойного интеграла.
59. Сведение двойного интеграла к повторному.
60. Площадь в криволинейных координатах.
61. Замена переменных в двойном интеграле.
62. Объем пространственного тела. Определение и свойства тройного интеграла.
63. Вычисление $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ в случае, когда T – цилиндрическое тело. Следствия.