

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

по дисциплине **Дискретная математика**

Калькулятор «большой» конечной арифметики
Вариант 1

Студент,
группы 5130201/40003

_____ Адиатуллин Т.Р

Доцент

_____ Востров А.В

«____» _____ 2025 г.

Санкт-Петербург, 2026

Содержание

Введение	4
1 Математическое описание	5
1.1 «Малая» и «большая» конечные арифметики	5
1.2 Таблицы операций малой арифметики	6
2 Особенности реализации	7
2.1 Структура проекта	7
2.2 Структуры данных	7
2.2.1 Класс SmallArithmetic	7
2.2.2 Класс BigArithmeticCalc	8
2.3 Класс SmallArithmetic	8
2.3.1 Назначение и структура данных	8
2.3.2 Метод nextSymbol(const string& current)	10
2.3.3 Метод compareSymbols(const string& a, const string& b) .	11
2.3.4 Метод addByHasse(const string& a, const string& b) . .	11
2.3.5 Метод multiplyByHasse(const string& a, const string& b) .	13
2.3.6 Метод subtractByHasse(const string& a, const string& b) .	14
2.3.7 Метод buildAdditionTableWithCarry()	15
2.4 Класс BigArithmeticCalc	16
2.4.1 Назначение и структура данных	16
2.4.2 Метод isNegative(const string& num)	17
2.4.3 Метод removeSign(const string& num)	17
2.4.4 Метод addSign(const string& num, bool negative)	18
2.4.5 Метод isValidNumber(const string& num)	18
2.4.6 Метод isOverflow(const string& num)	19
2.4.7 Метод deleteTrashZeros(const string& num)	20
2.4.8 Метод compareBigUnsigned(const string& a, const string& b)	21
2.4.9 Метод addBigUnsigned(const string& a, const string& b) .	22
2.4.10 Метод subtractBigUnsigned(const string& a, const string& b)	23
2.4.11 Метод multiplyBigUnsigned(const string& a, const string& b)	25
2.4.12 Метод multiplyByDigit(const string& num, const string& digit)	26
2.4.13 Метод divideBigUnsigned(const string& a, const string& b)	28
2.4.14 Метод add(const string& a, const string& b)	29
2.4.15 Метод subtract(const string& a, const string& b)	31
2.4.16 Метод multiply(const string& a, const string& b)	31
2.4.17 Метод divide(const string& a, const string& b)	32
3 Результаты работы программы	34
3.1 Запуск программы	34
3.2 Сценарий 1: Просмотр справки	35

3.2.1	Команда <code>help</code>	35
3.2.2	Команда <code>info</code>	35
3.3	Сценарий 2: Просмотр диаграммы Хассе	36
3.3.1	Команда <code>hasse</code>	36
3.4	Сценарий 3: Операции с большими числами	36
3.4.1	Сложение положительных чисел	36
3.4.2	Сложение с переносами	36
3.4.3	Сложение с отрицательными числами	37
3.4.4	Вычитание положительных чисел	37
3.4.5	Вычитание с заимствованием	37
3.4.6	Умножение положительных чисел	38
3.4.7	Умножение с отрицательными числами	38
3.4.8	Деление положительных чисел	39
3.4.9	Деление с отрицательными числами	39
3.5	Сценарий 4: Обработка ошибок	40
3.5.1	Некорректный формат числа	40
3.5.2	Деление на ноль	40
3.5.3	Переполнение разрядов	40
3.5.4	Неизвестная команда	40
3.6	Выход из программы	41
Заключение		42
Список литературы		44

Введение

Курсовая работа посвящена разработке калькулятора большой конечной арифметики $\langle Z_8; +, * \rangle$ для четырёх арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления. Калькулятор построен на основе малой конечной арифметики, в которой задано правило ”+1” и выполняются свойства коммутативности сложения и умножения, ассоциативности этих операций, дистрибутивности умножения относительно сложения. В системе заданы аддитивная единица «*a*» и мультипликативная единица «*b*», а также выполняется свойство $x \times a = a$ для любого элемента *x*.

Правило ”+1” определяет переход от текущего символа к следующему и задано в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1: Правило ”+1”

<i>x</i>	a	b	c	d	e	f	g	h
<i>x + 1</i>	b	c	e	g	d	h	f	a

1. Математическое описание

1.1. «Малая» и «большая» конечные арифметики

Множество Z вместе с набором операций $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $\varphi_i : Z^{n_i} \rightarrow Z$, где n_i - арность операции φ_i , называется алгебраической структурой, универсальной алгеброй или просто алгеброй.

Коммутативное кольцо с единицей - алгебраическая структура $\langle Z; +, *\rangle$, в которой выполняются следующие аксиомы:

1. Ассоциативность сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Существование нулевого элемента: $\exists 0 \in Z (\forall a \in Z : a + 0 = 0 + a = a)$
3. Существование противоположного элемента: $\forall a \in Z \exists (-a) \in Z : a + (-a) = 0$
4. Коммутативность сложения: $a + b = b + a$
5. Ассоциативность умножения: $(a * b) * c = a * (b * c)$
6. Дистрибутивность: $a * (b + c) = a * b + a * c$
7. Коммутативность умножения: $a * b = b * a$
8. Существование единичного элемента: $\exists 1 \in Z (\forall a \in Z : a * 1 = 1 * a = a)$

«Малая» конечная арифметика - конечное коммутативное кольцо с единицей $\langle Z_8; +, *\rangle$, на котором определены действия вычитания и деления, причём деление определено частично (только для элементов, имеющих мультипликативную инверсию).

В данной работе используется кольцо $Z_8 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ размера $i = 8$, где:

- Нулевой элемент (нейтральный по сложению): a
- Единичный элемент (нейтральный по умножению): b
- Отношение порядка (правило инкремента «+1»):
 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow h$

«Большая» конечная арифметика - конечное коммутативное кольцо с единицей $\langle Z_i^n; +, *\rangle$, элементами которого являются слова длины до n над алфавитом Z_i . Операции определены позиционно с учётом переноса разрядов. Деление определено с остатком.

В данной работе $n = 8$ (максимум 8 разрядов), поэтому итоговая структура имеет вид $\langle Z_8^8; +, *\rangle$.

Каждому символу сопоставлен индекс (позиционное значение):

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>h</i>
0	1	2	3	4	5	6	7

1.2. Таблицы операций малой арифметики

На рисунках 1 и 2 представлены таблицы операций и переносов для сложения и умножения соответственно

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>g</i>
<i>g</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>f</i>

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>								
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>						
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>f</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>g</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>h</i>	<i>a</i>	<i>b</i>						

Рис. 1: Таблица сложения и таблица переносов для малой арифметики

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>								
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>f</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>h</i>	<i>g</i>
<i>f</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>c</i>
<i>g</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>h</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>b</i>

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>								
<i>b</i>	<i>a</i>							
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>f</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>g</i>
<i>g</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>d</i>
<i>h</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>f</i>

Рис. 2: Таблица умножения и таблица переносов для малой арифметики

2. Особенности реализации

2.1. Структура проекта

Проект имеет следующую структуру:

- `SmallArithmetic.hpp` и `SmallArithmetic.cpp`: содержит реализацию малой конечной арифметики на основе диаграммы Хассе. Класс выполняет операции над однозначными элементами алфавита.
- `BigArithmeticCalc.hpp` и `BigArithmeticCalc.cpp`: содержит реализацию большой конечной арифметики. Класс выполняет операции столбиком над многозначными числами.
- `UI.hpp` и `UI.cpp`: реализуют пользовательский интерфейс, обработку команд и арифметических выражений.
- `config.hpp`: содержит конфигурацию системы - мощность алфавита, правило "+1" и сам алфавит.
- `main.cpp`: точка входа в программу.
- `CMakeLists.txt`: автоматизация сборки проекта.

2.2. Структуры данных

Для реализации конечной арифметики используются два класса: `SmallArithmetic` и `BigArithmeticCalc`.

2.2.1. Класс SmallArithmetic

Класс хранит следующие основные структуры:

- `map<string, string> plusOneRule`: правило перехода к следующему элементу алфавита.
- `vector<string> alphabet`: набор всех элементов алфавита.
- `map<string, string> inverseMap`: таблица обратных элементов для деления.
- `map<tuple<string, string, string>, pair<string, string>> additionTableWithCarry`: таблица сложения с переносом для операций столбиком.
- `vector<vector<string>> addTable, multable, subTable, divTable`: таблицы операций малой арифметики.

- int N: мощность алфавита.
- static const int MAX_DIGITS = 8: максимальное количество разрядов в числах.

2.2.2. Класс BigArithmeticCalc

Класс содержит:

- SmallArithmetic small: объект малой арифметики для выполнения посимвольных операций.

2.3. Класс SmallArithmetic

2.3.1. Назначение и структура данных

Класс SmallArithmetic реализует малую конечную арифметику на заданном алфавите с правилом перехода к следующему элементу (правило "+1"). Все операции выполняются через построение диаграммы Хассе.

```

1 class SmallArithmetic {
2     private:
3         int N;
4         map<string, string> plusOneRule;
5         vector<string> alphabet;
6
7         map<string, string> inverseMap;
8
9         map<tuple<string, string, string>, pair<string, string>>
10        additionTableWithCarry;
11        map<string, string> negationMap;
12
13        vector<vector<string>> addTable;
14        vector<vector<string>> multTable;
15        vector<vector<string>> subTable;
16        vector<vector<string>> divTable;
17
18        string additiveIdentity;
19        string multiplicativeIdentity;
20        string universum;
21        string emptySet;
22
23        static const int MAX_DIGITS = 8;
24
25        string addByHasse(const string& a, const string& b) const;
26        string multiplyByHasse(const string& a, const string& b) const;
27        string subtractByHasse(const string& a, const string& b) const;
28        string divideByHasse(const string& a, const string& b) const;
29
30        optional<string> findMultiplicativeInverse(const string& x);
31        void buildInverseMap();

```

```

31
32     void buildAddTable();
33     void buildMulTable();
34     void buildSubTable();
35     void buildDivTable();
36
37     void buildAdditionTableWithCarry();
38     bool checkCarry(const string& start, const string& steps)
39         const;
40     void buildNegationMap();
41
42     string nextSymbol(const string& current) const;
43     int compareSymbols(const string& a, const string& b) const;
44
45     void printTable(const vector<vector<string>>& table) const;
46
47 public:
48     SmallArithmetic(int n,
49                     const map<string, string>& rule,
50                     const vector<string>& alph,
51                     const string& addId = "a",
52                     const string& mulId = "b");
53
54     const vector<string>& getAlphabet() const;
55     int getN() const;
56
57     const string& getAdditiveIdentity() const;
58     const string& getMultiplicativeIdentity() const;
59     const string& getUniversum() const;
60     const string& getEmptySet() const;
61     int getMaxDigits() const;
62     string getMinNumber() const;
63     string getMaxNumber() const;
64
65     bool isValidElement(const string& elem) const;
66     int compareElems(const string& a, const string& b) const;
67     string nextElem(const string& current) const;
68     pair<string, string> addWithCarry(const string& c1,
69                                         const string& c2,
70                                         const string& carry_in)
71         const;
72     string smallSubtract(const string& a, const string& b) const;
73
74     void printAddTable() const;
75     void printMulTable() const;
76     void printSubTable() const;
77     void printDivTable() const;
78     void printAllTables() const;
79     void printHasseDiagram() const;
80 };

```

Listing 1: Интерфейс класса SmallArithmetic

Ключевые методы

2.3.2. Метод nextSymbol(const string& current)

Назначение: Возвращает следующий элемент алфавита согласно правилу "+1". Используется для обхода диаграммы Хассе при выполнении операций сложения и умножения.

Вход:

- const string& current: Текущий символ алфавита.

Выход:

- string: Следующий символ по правилу "+1".

```
1 string SmallArithmetic::nextSymbol(const string& current) const {
2     auto it = plusOneRule.find(current);
3     if (it == plusOneRule.end()) {
4         throw runtime_error("invalid symbol: " + current);
5     }
6     return it->second;
7 }
```

Listing 2: Реализация nextSymbol()

2.3.3. Метод compareSymbols(const string& a, const string& b)

Назначение: Сравнивает два элемента алфавита, определяя их относительный порядок в диаграмме Хассе.

Вход:

- const string& a: Первый элемент для сравнения.
- const string& b: Второй элемент для сравнения.

Выход:

- int: 0 (если $a = b$), -1 (если $a < b$), 1 (если $a > b$).

```
1 int SmallArithmetic::compareSymbols(const string& a, const string&
2   b) const {
3     if (a == b) return 0;
4
5     string current = additiveIdentity;
6     while (true) {
7       if (current == a) return -1;
8       if (current == b) return 1;
9       current = nextSymbol(current);
10      if (current == additiveIdentity) break;
11    }
12    return 0;
}
```

Listing 3: Реализация compareSymbols()

Алгоритм последовательно проходит по циклу правила "+1", начиная с центрального элемента, и определяет, какой из элементов встречается раньше.

2.3.4. Метод addByHasse(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет сложение двух элементов алфавита путём последовательного применения правила "+1". Результат вычисляется как $a + b = \underbrace{(a + 1) + 1 \dots + 1}_b$.

Вход:

- const string& a: Первое слагаемое.
- const string& b: Второе слагаемое.

Выход:

- string: Результат сложения $a + b$.

```

1 string SmallArithmetic::addByHasse(const string& a, const string&
2 b) const {
3     if (b == additiveIdentity) return a;
4
5     string counter = additiveIdentity;
6     string result = a;
7
8     while (counter != b) {
9         result = nextSymbol(result);
10        counter = nextSymbol(counter);
11    }
12
13 return result;
}

```

Listing 4: Реализация addByHasse()

Алгоритм работает следующим образом:

1. Если второе слагаемое является нейтральным элементом, возвращается первое слагаемое;
2. Инициализируется счётчик нейтральным элементом;
3. В цикле счётчик увеличивается до значения второго слагаемого;
4. Одновременно результат увеличивается на ту же величину;
5. Возвращается итоговое значение.

2.3.5. Метод multiplyByHasse(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет умножение двух элементов алфавита через повторное сложение. Результат вычисляется как $a \times b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$.

Вход:

- const string& a: Множитель.
- const string& b: Множитель.

Выход:

- string: Результат умножения $a \times b$.

```
1 string SmallArithmetic::multiplyByHasse(const string& a, const
2     string& b) const {
3     // специальный случай: a * a = универсум
4     if (a == additiveIdentity && b == additiveIdentity) {
5         return universum;
6     }
7
7     if (a == additiveIdentity || b == additiveIdentity) {
8         return additiveIdentity;
9     }
10
11    string counter = additiveIdentity;
12    string result = additiveIdentity;
13
14    // буквенный счетчик
15    while (counter != b) {
16        result = addByHasse(result, a);
17        counter = nextSymbol(counter);
18    }
19
20    return result;
21 }
```

Listing 5: Реализация multiplyByHasse()

Алгоритм:

1. Обработка краевого случая: произведение двух нейтральных элементов по сложению даёт универсум;
2. Если хотя бы один множитель - нейтральный элемент, результат - нейтральный элемент;
3. Иначе выполняется повторное сложение множимого с самим собой b раз.

2.3.6. Метод subtractByHasse(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет вычитание путём поиска такого элемента c , что $b + c = a$. Реализует обратную операцию к сложению.

Вход:

- const string& a: Уменьшаемое.
- const string& b: Вычитаемое.

Выход:

- string: Результат вычитания $a - b$ или строка ошибки.

```
1 string SmallArithmetic::subtractByHasse(const string& a, const
2     string& b) const {
3     for (const auto& candidate : alphabet) {
4         if (addByHasse(b, candidate) == a) {
5             return candidate;
6         }
7     }
8     return "ERR: with subtract";
}
```

Listing 6: Реализация subtractByHasse()

Алгоритм перебирает все элементы алфавита и проверяет, какой из них при сложении с вычитаемым даёт уменьшаемое.

2.3.7. Метод buildAdditionTableWithCarry()

Назначение: Строит таблицу для сложения с учётом входящего переноса. Таблица используется в большой арифметике при сложении столбиком. Для каждой тройки (a, b, c_{in}) вычисляется пара (sum, c_{out}) .

Вход:

- vector<string> alphabet

Выход:

- map<tuple<string, string, string>, pair<string, string>> additionTableWithCarry - таблица для сложения с учётом входящего переноса.

```
1 void SmallArithmetic::buildAdditionTableWithCarry() {
2     for (const auto& c1 : alphabet) {
3         for (const auto& c2 : alphabet) {
4             for (const auto& carry_in : {additiveIdentity,
5                 multiplicativeIdentity}) {
6                 string sum1 = addByHasse(c1, c2); // сумма без
7                 переноса
8                 string final_sum = addByHasse(sum1, carry_in); // финальная сумма с учетом переноса
9
10                bool carry1 = checkCarry(c1, c2); // проверяем
11                перенос c1 + c2
12                bool carry2 = checkCarry(sum1, carry_in); // проверяем перенос sum1 + carry_in
13
14                string carry_out = (carry1 || carry2) ?
15                multiplicativeIdentity : additiveIdentity; // выставляем перенос
16
17                additionTableWithCarry[make_tuple(c1, c2,
18                    carry_in)] = make_pair(final_sum, carry_out);
19            }
20        }
21    }
22}
```

Listing 7: Реализация buildAdditionTableWithCarry()

Таблица содержит тройки (a, b, c_{in}) и соответствующие им пары (sum, c_{out}) , где:

- a, b - слагаемые разрядов;
- c_{in} - входящий перенос из младшего разряда;
- sum - результат сложения в текущем разряде;
- c_{out} - исходящий перенос в старший разряд.

2.4. Класс BigArithmeticCalc

2.4.1. Назначение и структура данных

Класс BigArithmeticCalc реализует большую конечную арифметику - операции над многозначными числами. Внутри использует класс SmallArithmetic для посимвольных операций.

```
1 class BigArithmeticCalc {
2     private:
3         SmallArithmetic small;
4
5     bool isNegative(const string& num) const;
6     string removeSign(const string& num) const;
7     string addSign(const string& num, bool negative) const;
8
9     bool isValidNumber(const string& num) const;
10
11    string deleteTrashZeros(const string& num) const;
12
13    bool isOverflow(const string& num) const;
14
15    string addBigUnsigned(const string& a, const string& b) const;
16    string subtractBigUnsigned(const string& a, const string& b)
17    const;
18    string multiplyBigUnsigned(const string& a, const string& b)
19    const;
20    pair<string, string> divideBigUnsigned(const string& a, const
21    string& b) const;
22
23    string multiplyByDigit(const string& num, const string& digit)
24    const;
25
26    int compareBigUnsigned(const string& a, const string& b) const;
27
28 public:
29     BigArithmeticCalc(int n,
30                         const map<string, string>& rule,
31                         const vector<string>& alph,
32                         const string& addId = "a",
33                         const string& mulId = "b");
34
35     const vector<string>& getAlphabet() const;
36     string getMinNumber() const;
37     string getMaxNumber() const;
38
39     string add(const string& a, const string& b) const;
40     string multiply(const string& a, const string& b) const;
41     string subtract(const string& a, const string& b) const;
42     string divide(const string& a, const string& b) const;
43
44     void printAddTable() const;
45     void printMulTable() const;
```

```

42     void printSubTable() const;
43     void printDivTable() const;
44     void printAllTables() const;
45     void printInfo() const;
46     void printHasseDiagram() const;
47     void printHelp() const;
48 }

```

Listing 8: Интерфейс класса BigArithmeticCalc

Класс хранит только один объект малой арифметики, через который выполняются все операции с разрядами.

Вспомогательные методы

2.4.2. Метод isNegative(const string& num)

Назначение: Проверяет, является ли число отрицательным (начинается ли строка с символа минус).

Вход:

- const string& num: Число для проверки.

Выход:

- bool: true, если число отрицательное, иначе false.

```

1 bool BigArithmeticCalc::isNegative(const string& num) const {
2     return ! num.empty() && num[0] == '-';
3 }

```

Listing 9: Реализация isNegative()

2.4.3. Метод removeSign(const string& num)

Назначение: Удаляет знак минус из начала строки, возвращая абсолютное значение числа.

Вход:

- const string& num: Число (возможно, с минусом).

Выход:

- string: Число без знака.

```

1 string BigArithmeticCalc::removeSign(const string& num) const {
2     if (isNegative(num)) {
3         return num.substr(1);
4     }
5     return num;
6 }

```

Listing 10: Реализация removeSign()

2.4.4. Метод addSign(const string& num, bool negative)

Назначение: Добавляет знак минус к числу, если указан флаг отрицательности. Нейтральный элемент по сложению всегда возвращается без знака.

Вход:

- const string& num: Число без знака.
- bool negative: Флаг отрицательности.

Выход:

- string: Число со знаком (если negative = true) или без знака.

```
1 string BigArithmeticCalc::addSign(const string& num, bool
2   negative) const {
3     if (num == small.getAdditiveIdentity()) return num;
4     return negative ? "-" + num : num;
5 }
```

Listing 11: Реализация addSign()

2.4.5. Метод isValidNumber(const string& num)

Назначение: Проверяет, что все символы числа принадлежат алфавиту системы.

Вход:

- const string& num: Число для проверки.

Выход:

- bool: true, если все символы валидны, иначе false.

```
1 bool BigArithmeticCalc::isValidNumber(const string& num) const {
2   if (num.empty()) return false;
3
4   string unsign_num = removeSign(num);
5
6   for (char c : unsign_num) {
7     if (!small.isValidElement(string(1, c))) return false;
8   }
9   return true;
10 }
```

Listing 12: Реализация isValidNumber()

2.4.6. Метод isOverflow(const string& num)

Назначение: Проверяет, не превышает ли количество разрядов числа максимальное допустимое значение (MAX_DIGITS = 8).

Вход:

- const string& num: Число для проверки.

Выход:

- bool: true, если произошло переполнение, иначе false.

```
1 bool BigArithmeticalCalc::isOverflow(const string& num) const {
2     string unsign_num = removeSign(num);
3     string withoutZeros = deleteTrashZeros(unsign_num);
4     return withoutZeros.length() >
5         static_cast<size_t>(small.getMaxDigits());
```

Listing 13: Реализация isOverflow()

2.4.7. Метод deleteTrashZeros(const string& num)

Назначение: Удаляет ведущие нули из числа. Если число состоит только из нулей, возвращает нейтральный элемент по сложению.

Вход:

- const string& num: Число с возможными ведущими нулями.

Выход:

- string: Число без ведущих нулей.

```
1 string BigArithmeticCalc::deleteTrashZeros(const string& num)
2     const {
3         if (num.empty()) return small.getAdditiveIdentity();
4
5         bool negative = isNegative(num);
6         string unsign_num = removeSign(num);
7
8         size_t firstNonZero = 0;
9         while (firstNonZero < unsign_num.length() &&
10            string(1, unsign_num[firstNonZero]) ==
11            small.getAdditiveIdentity()) {
12                firstNonZero++;
13            }
14
15        if (firstNonZero == unsign_num.length()) {
16            return small.getAdditiveIdentity();
17        }
18
19        string result = unsign_num.substr(firstNonZero);
20
21        return addSign(result, negative);
22    }
```

Listing 14: Реализация deleteTrashZeros()

Алгоритм:

1. Удаляется знак (если есть);
2. Подсчитывается количество ведущих нулей;
3. Если все символы - нули, возвращается нейтральный элемент;
4. Иначе возвращается подстрока без ведущих нулей со знаком (если необходимо).

2.4.8. Метод compareBigUnsigned(const string& a, const string& b)

Назначение: Сравнивает два беззнаковых многозначных числа.

Вход:

- const string& a: Первое число.
- const string& b: Второе число.

Выход:

- int: 0 (если $a = b$), 1 (если $a > b$), -1 (если $a < b$).

```
1 int BigArithmeticCalc::compareBigUnsigned(const string& a, const
2     string& b) const {
3     string na = deleteTrashZeros(a);
4     string nb = deleteTrashZeros(b);
5
5     if (na.length() != nb.length()) {
6         return na.length() > nb.length() ? 1 : -1;
7     }
8
9     for (size_t i = 0; i < na.length(); ++i) {
10        int cmp = small.compareElems(string(1, na[i]), string(1,
11            nb[i]));
12        if (cmp != 0) return cmp;
13    }
14
15    return 0;
}
```

Listing 15: Реализация compareBigUnsigned()

Алгоритм:

1. Нормализация чисел (удаление ведущих нулей);
2. Сравнение по количеству разрядов;
3. При равной длине - посимвольное сравнение слева направо.

Операции большой арифметики

2.4.9. Метод addBigUnsigned(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет сложение двух беззнаковых многозначных чисел столбиком с учётом переноса между разрядами.

Вход:

- const string& a: Первое слагаемое.
- const string& b: Второе слагаемое.

Выход:

- string: Сумма $a + b$ без ведущих нулей.

```
1 string BigArithmeticCalc::addBigUnsigned(const string& a, const
2   string& b) const {
3     if (!isValidNumber(a) || !isValidNumber(b)) {
4       return "ERR: invalid number";
5     }
6
6     string num1 = a;
7     string num2 = b;
8
9     // добавляем нули
10    size_t max_len = max(num1.length(), num2.length());
11    while (num1.length() < max_len) {
12      num1 = small.getAdditiveIdentity() + num1;
13    }
14    while (num2.length() < max_len) {
15      num2 = small.getAdditiveIdentity() + num2;
16    }
17
18    string result;
19    string carry = small.getAdditiveIdentity();
20
21    for (int i = static_cast<int>(max_len) - 1; i >= 0; --i) {
22      string digit1(1, num1[i]);
23      string digit2(1, num2[i]);
24
25      auto res = small.addWithCarry(digit1, digit2, carry);
26      if (res.first == "ERR") {
27        return "ERR: invalid addition";
28      }
29
30      string sum = res.first;
31      carry = res.second;
32
33      result = sum + result;
34    }
35 }
```

```

36     if (carry != small.getAdditiveIdentity()) {
37         result = carry + result;
38     }
39
40     if (isOverflow(result)) {
41         return "ERR: overflow";
42     }
43
44     return deleteTrashZeros(result);
45 }
```

Listing 16: Реализация addBigUnsigned()

Алгоритм выполняет сложение справа налево (от младших разрядов к старшим), используя таблицу additionTableWithCarry для учёта переносов.

2.4.10. Метод subtractBigUnsigned(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет вычитание двух беззнаковых многозначных чисел столбиком с учётом заимствования из старших разрядов. Требует, чтобы $a \geq b$.

Вход:

- const string& a: Уменьшаемое ($a \geq b$).
- const string& b: Вычитаемое.

Выход:

- string: Разность $a - b$ без ведущих нулей.

```

1 string BigArithmeticCalc::subtractBigUnsigned(const string& a,
2     const string& b) const {
3     if (!isValidNumber(a) || !isValidNumber(b)) {
4         return "ERR: invalid number";
5     }
6
6     // сравниваем числа
7     int cmp = compareBigUnsigned(a, b);
8     if (cmp == 0) {
9         return small.getAdditiveIdentity();
10    }
11
12    // определяем большее и меньшее число
13    string larger = (cmp >= 0) ? a : b;
14    string smaller = (cmp >= 0) ? b : a;
15
16    // выравниваем длины
17    size_t max_len = max(larger.length(), smaller.length());
18    while (larger.length() < max_len) {
19        larger = small.getAdditiveIdentity() + larger;
20    }
21    while (smaller.length() < max_len) {
```

```

22         smaller = small.getAdditiveIdentity() + smaller;
23     }
24
25     string result;
26     bool borrow = false; // флаг заема
27
28     // вычитаем справа налево
29     for (int i = static_cast<int>(max_len) - 1; i >= 0; --i) {
30         string current(1, larger[i]);
31         string digit2(1, smaller[i]);
32
33         if (borrow) {
34             if (current == small.getAdditiveIdentity()) {
35                 current = small.getAlphabet().back();
36             } else {
37                 current = small.smallSubtract(current,
38                     small.getMultiplicativeIdentity());
39                 borrow = false;
40             }
41         }
42
43         int cmp_digits = small.compareElems(current, digit2);
44
45         if (cmp_digits >= 0) {
46             string result_digit = small.smallSubtract(current,
47                 digit2);
48             result = result_digit + result;
49         } else {
50             string temp = current; // аналог 10 + a если ( нужен
51             заем)
52             for (int j = 0; j < small.getN(); j++) {
53                 temp = small.nextElement(temp);
54             }
55
56             // теперь вычитаем
57             string result_digit = small.smallSubtract(temp,
58                 digit2);
59             result = result_digit + result;
60             borrow = true; // флаг
61         }
62     }
63     if (borrow) {
64         return "ERR: borrow after subtraction";
65     }
66     return deleteTrashZeros(result);
67 }

```

Listing 17: Реализация subtractBigUnsigned()

Алгоритм:

1. Сравниваем числа, чтобы определить, какое больше, и выравниваем их по длине добавлением ведущих нулей.

2. Вычитаем цифры поразрядно, начиная с младших разрядов, учитывая заем при необходимости.
 3. Если текущая цифра меньше вычитаемой, берем заем у старшего разряда и корректируем результат.
 4. Формируем итоговую строку результата и убираем ведущие нули.

2.4.11. Метод multiplyBigUnsigned(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет умножение двух беззнаковых многозначных чисел столбиком. Число a умножается на каждую цифру числа b , промежуточные результаты сдвигаются и суммируются.

Вход:

- const string& a: Множитель.
 - const string& b: Множитель.

Выход:

- **string**: Произведение $a \times b$ без ведущих нулей.

```
1 string BigArithmeticCalc::multiplyBigUnsigned(const string& a,
2     const string& b) const {
3     if (!isValidNumber(a) || !isValidNumber(b)) {
4         return "ERR: invalid number";
5     }
6
6     if (a == small.getAdditiveIdentity() || b ==
7         small.getAdditiveIdentity()) {
8         return "[" + getMinNumber() + ";" + getMaxNumber() + "]";
9     }
10
11     // умножение столбиком: проходим по каждой цифре множителя
12     справа налево
13     for (int i = b.length() - 1; i >= 0; --i) {
14         string multiplier_digit(1, b[i]);
15
16         if (multiplier_digit != small.getAdditiveIdentity()) {
17             string partial_product = multiplyByDigit(a,
18                 multiplier_digit);
19             if (partial_product.substr(0, 4) == "ERR:") return
20             partial_product;
21
22             // сдвиг влево добавляем ( нули справа )
23             int shift_count = b.length() - 1 - i;
24             for (int j = 0; j < shift_count; j++) {
25                 partial_product += small.getAdditiveIdentity();
26             }
27         }
28     }
29 }
```

```

24     }
25
26     result = addBigUnsigned(result, partial_product);
27     if (result.substr(0, 4) == "ERR:") return result;
28   }
29 }
30
31 return deleteTrashZeros(result);
32 }
```

Listing 18: Реализация multiplyBigUnsigned()

Алгоритм:

1. Умножение числа a на каждую цифру числа b ;
2. Сдвиг промежуточных результатов влево на соответствующее количество разрядов;
3. Суммирование всех промежуточных результатов.

2.4.12. Метод multiplyByDigit(const string& num, const string& digit)

Назначение: Умножает многозначное число на однозначное число (один элемент алфавита). Используется в методе multiplyBigUnsigned.

Вход:

- const string& num: Многозначное число.
- const string& digit: Однозначное число (элемент алфавита).

Выход:

- string: Произведение $num \times digit$.

```

1 string BigArithmeticCalc::multiplyByDigit(const string& num, const
2   string& digit) const {
3   if (digit == small.getAdditiveIdentity()) return
4     small.getAdditiveIdentity();
5   if (digit == small.getMultiplicativeIdentity()) return num;
6
7   string result = small.getAdditiveIdentity();
8   string counter = small.getAdditiveIdentity();
9
10  // умножаем через многократное сложение с буквенным счетчиком
11  while (counter != digit) {
12    result = addBigUnsigned(result, num);
13    if (result.substr(0, 4) == "ERR:") return result;
14    counter = small.nextElement(counter);
15  }
16
17  return result;
```

Listing 19: Реализация multiplyByDigit()

2.4.13. Метод divideBigUnsigned(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет деление двух беззнаковых многозначных чисел "уголком". Возвращает частное и остаток.

Вход:

- const string& a: Делимое.
- const string& b: Делитель ($b \neq 0$).

Выход:

- pair<string, string>: Пара (частное, остаток).

```
1 pair<string, string> BigArithmeticCalc::divideBigUnsigned(const
2   string& a, const string& b) const {
3     if (!isValidNumber(a) || !isValidNumber(b)) {
4       return {"ERR", "ERR"};
5     }
6
6   // деление на ноль
7   if (b == small.getAdditiveIdentity()) {
8     // 0/0 = [min;max]
9     if (a == small.getAdditiveIdentity()) {
10       return {small.getUniversum(), small.getUniversum()};
11     }
12     return {small.getEmptySet(), small.getEmptySet()};
13   }
14
15   // если делимое равно нулю
16   if (a == small.getAdditiveIdentity()) {
17     return {small.getAdditiveIdentity(),
18           small.getAdditiveIdentity()};
19   }
20
21   string dividend = a;
22   string divisor = b;
23
24   // если делимое меньше делителя
25   if (compareBigUnsigned(dividend, divisor) < 0) {
26     return {small.getAdditiveIdentity(), dividend};
27   }
28
29   // деление в столбик
30   string q_str;
31   string curr_r = small.getAdditiveIdentity();
32
33   // проходим по каждой цифре делимого слева направо
34   for (size_t i = 0; i < dividend.length(); i++) {
35     // добавляем следующую цифру к остатку
36     curr_r = curr_r + string(1, dividend[i]);
37     curr_r = deleteTrashZeros(curr_r);
```

```

37
38     // ищем максимальную цифру частного
39     string q_digit = small.getAdditiveIdentity();
40
41     // пробуем все возможные цифры от 1 до максимальной
42     string test_digit = small.getMultiplicativeIdentity();
43     while (test_digit != small.getAdditiveIdentity()) {
44         string test_product = multiplyByDigit(divisor,
45             test_digit);
46
46         if (compareBigUnsigned(test_product, curr_r) > 0) {
47             break;
48         }
49
50         q_digit = test_digit;
51         test_digit = small.nextElem(test_digit);
52     }
53
54     q_str += q_digit;
55
56     // вычитаем произведение из остатка
57     if (q_digit != small.getAdditiveIdentity()) {
58         string product = multiplyByDigit(divisor, q_digit);
59         curr_r = subtractBigUnsigned(curr_r, product);
60     }
61 }
62
63 string q = deleteTrashZeros(q_str);
64 string r = deleteTrashZeros(curr_r);
65
66 return {q, r};
67 }
```

Listing 20: Реализация divideBigUnsigned()

Алгоритм выполняет деление "уголком", последовательно вычитая делитель из текущего остатка.

Публичные операции с учётом знаков

2.4.14. Метод add(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет сложение двух чисел с учётом знаков. Обрабатывает случаи сложения чисел с одинаковыми и разными знаками.

Вход:

- const string& a: Первое слагаемое.
- const string& b: Второе слагаемое.

Выход:

- string: Сумма $a + b$ со знаком.

```

1 string BigArithmeticCalc::add(const string& a, const string& b)
2     const {
3         bool neg_a = isNegative(a);
4         bool neg_b = isNegative(b);
5
6         string unsign_a = removeSign(a);
7         string unsign_b = removeSign(b);
8
9         // a + b оба ( положительные )
10        if (!neg_a && !neg_b) {
11            return addBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
12        }
13
14        // -a + (-b) = -(a + b)
15        if (neg_a && neg_b) {
16            string sum = addBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
17            if (sum.substr(0, 4) == "ERR:") return sum;
18            return addSign(sum, true);
19        }
20
21        // a + (-b) = a - b
22        if (!neg_a && neg_b) {
23            int cmp = compareBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
24            if (cmp >= 0) {
25                return subtractBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
26            } else {
27                string diff = subtractBigUnsigned(unsign_b, unsign_a);
28                cout << "Debug:" << diff << endl;
29                return addSign(diff, true);
30            }
31        }
32
33        // -a + b = b - a
34        if (neg_a && !neg_b) {
35            int cmp = compareBigUnsigned(unsign_b, unsign_a);
36            if (cmp >= 0) {
37                return subtractBigUnsigned(unsign_b, unsign_a);
38            } else {
39                string diff = subtractBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
40                return addSign(diff, true);
41            }
42        }
43
44        return "ERR: unknown case";
}

```

Listing 21: Реализация add()

Алгоритм:

1. Определяем знаки чисел и отделяем их абсолютные значения.

2. Если оба числа положительные, складываем их напрямую.
3. Если оба числа отрицательные, складываем их абсолютные значения и присваиваем результату знак минус.
4. Если одно число отрицательное, а другое положительное, выполняем вычитание меньшего числа из большего и присваиваем результату знак числа с большим абсолютным значением.
5. Возвращаем ошибку в случае некорректного входа или непредвиденной ситуации.

2.4.15. Метод subtract(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет вычитание двух чисел с учётом знаков. Сводится к сложению с противоположным числом: $a - b = a + (-b)$.

Вход:

- const string& a: Уменьшаемое.
- const string& b: Вычитаемое.

Выход:

- string: Разность $a - b$ со знаком.

```

1 string BigArithmeticCalc::subtract(const string& a, const string&
2   b) const {
3     string neg_b = isNegative(b) ? removeSign(b) : "—" + b;
4     return add(a, neg_b);
}
```

Listing 22: Реализация subtract()

2.4.16. Метод multiply(const string& a, const string& b)

Назначение: Выполняет умножение двух чисел с учётом знаков. Знак результата определяется правилом: $(-) \times (-) = (+)$, $(+) \times (-) = (-)$, $(+) \times (+) = (+)$.

Вход:

- const string& a: Множимое.
- const string& b: Множитель.

Выход:

- string: Произведение $a \times b$ со знаком.

```

1 string BigArithmeticCalc::multiply(const string& a, const string&
2 b) const {
3     bool neg_a = isNegative(a);
4     bool neg_b = isNegative(b);
5
6     string unsign_a = removeSign(a);
7     string unsign_b = removeSign(b);
8
9     string product = multiplyBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
10    if (product.substr(0, 4) == "ERR:") return product;
11
12    // результат отрицательный, если знаки разные
13    bool result_negative = (neg_a != neg_b);
14
15    return addSign(product, result_negative);
}

```

Listing 23: Реализация multiply()

2.4.17. Метод divide(**const string&** a, **const string&** b)

Назначение: Выполняет деление двух чисел с учётом знаков. Возвращает частное и остаток.

Вход:

- **const string&** a: Делимое.
- **const string&** b: Делитель ($b \neq 0$).

Выход:

- **string:** Частное a/b со знаком и остаток.

```

1 string BigArithmeticCalc::divide(const string& a, const string& b)
2 const {
3     bool neg_a = isNegative(a);
4     bool neg_b = isNegative(b);
5
6     string unsign_a = removeSign(a);
7     string unsign_b = removeSign(b);
8
9     auto [q, r] = divideBigUnsigned(unsign_a, unsign_b);
10
11    // обработка специальных случаев
12    if (q == small.getEmptySet() || q == small.getUniversum()) {
13        return "Q: " + q + " | R: " + r;
14    }
15
16    if (q.substr(0, 3) == "ERR") {
17        return q;
}

```

```

17 }
18
19 // если делимое отрицательное, а делитель положительный
20 // то  $-a / b = -(a/b + 1)$ , остаток =  $b - r$ 
21 if (neg_a && !neg_b && r != small.getAdditiveIdentity()) {
22     // добавляем единицу к частному
23     q = addBigUnsigned(q, small.getMultiplicativeIdentity());
24     // вычисляем новый остаток:  $b - r$ 
25     r = subtractBigUnsigned(unsign_b, r);
26     q = addSign(q, true);
27 }
28 // если делимое положительное, а делитель отрицательный
29 // то  $a / (-b) = -(a/b)$ , остаток остается  $r$ 
30 else if (!neg_a && neg_b) {
31     q = addSign(q, true);
32 } else if (neg_a && !neg_b) { //  $-a / b = -(a/b)$  без остатка
33     q = addSign(q, true);
34 }
35 // если оба отрицательные:  $-a / (-b) = a/b$ 
36 else if (neg_a && neg_b) {}
37
38 return "Q: " + q + " | R: " + r;
39 }

```

Listing 24: Реализация divide()

Алгоритм:

1. Вычисляем частное и остаток для абсолютных значений чисел.
2. Корректируем знак частного и остатка в зависимости от знаков делимого и делителя.
3. Возвращаем результат в формате ”Q: <частное> | R: <остаток>”.

3. Результаты работы программы

3.1. Запуск программы

При запуске программа выводит приветственное сообщение и информацию о командах. Пользователь может вводить команды или арифметические выражения.

```
===== Калькулятор БОЛЬШОЙ конечной арифметики Z8 =====

Введите 'help' для справки по командам
Введите 'info' для информации о системе

===== ИНФОРМАЦИЯ О КОНЕЧНОЙ АРИФМЕТИКЕ =====

размерность: Z8
аддитивная единица (0): 'a'
мультипликативная единица (1): 'b'

максимальное количество разрядов: 8
диапазон чисел: [-hhhhhhhh; hhhhhhhh]

специальные правила:
• a * a = [-hhhhhhhh; hhhhhhhh] (универсум)
• число / a = ∅ (пустое множество)
• a / a = [-hhhhhhhh; hhhhhhhh] (диапазон всех чисел)
• переполнение (> 8 разрядов) = ERR: overflow
===== ДИАГРАММА ХАССЕ (правило +1) =====

Отношение порядка элементов Z8:
a => b => c => e => d => g => f => h => a (цикл)

=====
```

Рис. 3: Приветственное сообщение при запуске программы

3.2. Сценарий 1: Просмотр справки

3.2.1. Команда help

При вводе команды `help` программа выводит список всех доступных команд и их описание.

```
===== ПОМОЩЬ =====

доступные команды:

БОЛЬШАЯ АРИФМЕТИКА (до 8 разрядов, с отрицательными):
<число> + <число>      - сложение больших чисел
<число> - <число>      - вычитание больших чисел
<число> * <число>      - умножение больших чисел
<число> / <число>      - деление больших чисел

примечание: отрицательные числа пишутся с '-' (например: -abc)

ИНФОРМАЦИЯ:
info                  - информация об арифметике
hasse                 - диаграмма хассе
tables                - все таблицы операций
add_table             - таблица сложения
mul_table              - таблица умножения
sub_table              - таблица вычитания
div_table              - таблица деления
help                  - эта справка
exit / quit            - выход

примеры:
abd + ghf              - сложение положительных
-abd + ghf             - сложение отрицательного и положительного
hhhhhhhh + b            - переполнение (ERR: overflow)
-c / d                 - деление отрицательного на положительное
a / a                  - результат: [-hhhhhhhh; hhhhhhh]
g / a                  - результат: ø (пустое множество)

особенности деления с остатком:
• при делении -a / b: частное увеличивается на 1, остаток = b - r
• остаток может быть многозначным

=====
```

Рис. 4: Результат выполнения команды `help`

3.2.2. Команда info

При вводе команды `info` программа выводит информацию о конфигурации системы.

```
===== ИНФОРМАЦИЯ О КОНЕЧНОЙ АРИФМЕТИКЕ =====

размерность: Z8
аддитивная единица (0): 'a'
мультипликативная единица (1): 'b'

максимальное количество разрядов: 8
диапазон чисел: [-hhhhhhhh; hhhhhhh]

специальные правила:
• a * a = [-hhhhhhhh; hhhhhhh] (универсум)
• число / a = ø (пустое множество)
• a / a = [-hhhhhhhh; hhhhhhh] (диапазон всех чисел)
• переполнение (> 8 разрядов) = ERR: overflow
```

Рис. 5: Результат выполнения команды `info`

3.3. Сценарий 2: Просмотр диаграммы Хассе

3.3.1. Команда hasse

При вводе команды `hasse` программа выводит диаграмму Хассе - визуальное представление отношения порядка на алфавите.

```
===== ДИАГРАММА ХАССЕ (правило +1) =====  
Отношение порядка элементов Z8:  
a => b => c => e => d => g => f => h => a (цикл)  
=====
```

Рис. 6: Диаграмма Хассе

Диаграмма показывает циклический порядок элементов алфавита. Каждый элемент связан со следующим по правилу "+1".

3.4. Сценарий 3: Операции с большими числами

3.4.1. Сложение положительных чисел

Пользователь вводит выражение для сложения двух положительных чисел.

```
calc> abc + def  
===== Результат большой арифметики =====  
abc + def = dga  
=====
```

Рис. 7: Сложение положительных чисел

Результат вычисляется столбиком с учётом переносов между разрядами.

3.4.2. Сложение с переносами

Пример, демонстрирующий механизм переноса в старшие разряды.

```
calc> hhhh + b  
===== Результат большой арифметики =====  
hhhh + b = baaaa  
=====
```

Рис. 8: Сложение с переносом

При сложении `f + b` происходит переход через границу алфавита, что вызывает перенос в следующий разряд.

3.4.3. Сложение с отрицательными числами

Пример сложения чисел с разными знаками.

```
calc> abc + -abc
=====
Результат большой арифметики =====
abc + -abc = a
=====

calc> -def + bcd
=====
Результат большой арифметики =====
-def + bcd = -ebc
=====

calc> -bcd + def
=====
Результат большой арифметики =====
-bcd + def = ebc
=====
```

Рис. 9: Сложение с отрицательными числами

Программа правильно обрабатывает случаи:

- Сложение противоположных чисел (результат - нейтральный элемент)
- Сложение чисел с разными знаками (вычитание модулей)

3.4.4. Вычитание положительных чисел

```
calc> def - abc
=====
Результат большой арифметики =====
def - abc = dcd
=====

calc> abc - def
=====
Результат большой арифметики =====
abc - def = -dcd
=====
```

Рис. 10: Вычитание положительных чисел

При вычитании меньшего из большего результат положительный, при вычитании большего из меньшего - отрицательный.

3.4.5. Вычитание с заимствованием

Пример, демонстрирующий механизм заимствования из старших разрядов.

```
calc> baaa - hh  
===== Результат большой арифметики =====  
baaa - hh = b  
=====
```

Рис. 11: Вычитание с заимствованием

При вычитании $a - b$ происходит заимствование из старшего разряда.

3.4.6. Умножение положительных чисел

```
calc> abc * h  
===== Результат большой арифметики =====  
abc * h = baf  
=====  
  
calc> bc * de  
===== Результат большой арифметики =====  
bc * de = gef  
=====
```

Рис. 12: Умножение положительных чисел

Умножение выполняется столбиком с промежуточным суммированием.

3.4.7. Умножение с отрицательными числами

```
calc> -bc * de  
===== Результат большой арифметики =====  
-bc * de = -gef  
=====  
  
calc> -abc * -h  
===== Результат большой арифметики =====  
-abc * -h = baf  
=====  
  
calc> abc * -h  
===== Результат большой арифметики =====  
abc * -h = -baf  
=====
```

Рис. 13: Умножение с отрицательными числами

Знак результата определяется правилом:

$$\bullet + \times + = +$$

$$\bullet - \times - = +$$

$$\bullet + \times - = -$$

$$\bullet - \times + = -$$

3.4.8. Деление положительных чисел

```
calc> gef / bc
=====
Результат большой арифметики =====
gef / bc = Q: de | R: a
=====

calc> abcd / ef
=====
Результат большой арифметики =====
abcd / ef = Q: c | R: ea
=====
```

Рис. 14: Деление положительных чисел

Деление выполняется ”уголком” с получением целой части.

3.4.9. Деление с отрицательными числами

```
calc> -gef / bc
=====
Результат большой арифметики =====
-gef / bc = Q: -de | R: a
=====

calc> gef / -bc
=====
Результат большой арифметики =====
gef / -bc = Q: -de | R: a
=====

calc> -gef / -bc
=====
Результат большой арифметики =====
-gef / -bc = Q: de | R: a
=====
```

Рис. 15: Деление с отрицательными числами

3.5. Сценарий 4: Обработка ошибок

3.5.1. Некорректный формат числа

При вводе числа, содержащего символы вне алфавита, программа выводит сообщение об ошибке.

```
calc> abx / f
=====
Результат большой арифметики =====
abx / f = ERR
=====
```

Рис. 16: Ошибка: некорректный формат числа

Символ x не принадлежит алфавиту системы.

3.5.2. Деление на ноль

При попытке деления на нейтральный элемент по сложению (аналог нуля) программа выводит ошибку.

```
calc> abc / a
=====
Результат большой арифметики =====
abc / a = Q: ø | R: ø
=====
```

Рис. 17: Ошибка: деление на ноль

3.5.3. Переполнение разрядов

При превышении максимального количества разрядов (MAX_DIGITS = 8) программа выводит ошибку переполнения.

```
calc> hhhhhhhhhhh * hh
=====
Результат большой арифметики =====
hhhhhhhhhhhh * hh = ERR: overflow
=====
```

Рис. 18: Ошибка: переполнение

Результат операции превышает 8 разрядов, что не допускается системой.

3.5.4. Неизвестная команда

При вводе неизвестной команды программа выводит сообщение об ошибке.

```
calc> home  
Ошибка: неверный формат команды. Введите 'help' для справки
```

Рис. 19: Ошибка: неизвестная команда

3.6. Выход из программы

При вводе команды `exit` или `quit` программа завершает работу с прощальным сообщением.

```
calc> home  
Ошибка: неверный формат команды. Введите 'help' для справки
```

Рис. 20: Завершение работы программы

Заключение

В ходе курсовой работы был разработан калькулятор большой конечной арифметики $\langle Z_8^8; +, * \rangle$ с поддержкой восьми разрядов. Калькулятор выполняет четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление над многозначными числами в заданной системе счисления.

Основные результаты

В программной части была реализована малая конечная арифметика с операциями над однозначными элементами через диаграмму Хассе. Построены таблицы операций малой арифметики для сложения, умножения. Для выполнения операций столбиком создана таблица сложения с переносом.

На основе малой арифметики реализована большая арифметика с операциями над многозначными числами до восьми разрядов. Добавлена поддержка отрицательных чисел с корректной обработкой знаков при выполнении всех операций.

Разработана система команд для просмотра информации о системе, диаграммы Хассе. Реализована обработка ошибок, включая деление на ноль, переполнение разрядов и некорректный формат чисел.

Реализованные алгоритмы показали корректность работы для различных входных данных.

Достоинства реализации

Достоинством программы является модульная архитектура: малая арифметика работает с однозначными элементами, а большая арифметика использует её для операций столбиком. Код разделён по файлам, каждый из которых отвечает за свою часть функционала.

Использование предвычисленных таблиц операций делает вычисления эффективными: все операции малой арифметики вычисляются один раз при инициализации, а затем используются для быстрого доступа к значениям. Это позволяет избежать повторных вычислений при работе с многозначными числами.

Недостатки реализации

Конфигурация системы (алфавит, правило "+1", нейтральные элементы) задаётся в файле `config.hpp` и требует перекомпиляции при изменении. Пользователь не может менять параметры во время работы программы.

Также программа ограничена восьмью разрядами, что не позволяет работать с очень большими числами. При превышении лимита возникает ошибка переполнения.

Возможности масштабирования и улучшения

Все операции выполняются через консольный интерфейс. Визуализация таблиц и диаграммы Хассе была бы удобнее через GUI при помощи фреймворка Qt.

Можно добавить возможность загружать конфигурацию из файла, чтобы пользователь мог менять алфавит и правило "+1" без повторной компиляции программы.

Список литературы

- [1] Сайт кафедры с учебными материалами по курсу «*Дискретная математика*». Ссылка: <https://tema.spbstu.ru/dismath/> (Дата обращения: 21.10.2025).
- [2] Новиков Ф.А. *Дискретная математика*. Учебник. Ссылка на PDF: <https://stugum.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/03/novikov.pdf> (Дата обращения: 21.10.2025).