Билеты Высшая Математика - 3

Тимур Адиатуллин | telegram, github

Содержание

1 Определение решения ОДУ. Эквивалентные дифференциальные уравнения. Задача Коши для ОДУ n-го порядка.

Определение 1.1

Уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где F — известная функция $n+2$ переменных, x — независимая переменная, а y — функция, которую нужно найти, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка**.

Функция $y(x)$ называется **решением** уравнения.

Определение 1.2

Пусть $F(T) = F(t_1, t_2, \dots, t_{n+2})$ определена и непрерывна на множестве $\Omega \subset R^{n+2}$. Функция $y(x)$, определённая на некотором промежутке (a, b), называется **решением ОДУ** (1), если выполняются условия:

1. $\exists\, y, \dots, y^{(n)}$ на (a, b),
2. $(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in \Omega \quad \forall\, x \in (a, b)$,
3. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Пример

1. $y' = -xy^2$ (здесь $F(t, t_2, t_3) = t_1 t_2^2 + t_3$),
2. $y = \dfrac{2}{x^2}$ $(x \in (-\infty, 0))$ и $y = \dfrac{2}{x^2}$ $(x \in (0, +\infty))$ — разные решения.

Определение 1.3

График решения ОДУ называется **интегральной кривой** этого уравнения.

Определение 1.4

Два алгебраических уравнения $F_1(T) = 0$ и $F_2(T) = 0$ называются **эквивалентными** на множестве $\Omega \subset R^{n+2}$, если множества их решений совпадают.

Соответственно, два ДУ называются эквивалентными на множестве Ω, если на Ω эквивалентны соответствующие им алгебраические уравнения.

Множества решений эквивалентных ДУ совпадают.

Определение 1.5

Задача Коши для ДУ n-го порядка:

Требуется найти решение $y(x)$ ДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad y^{(n)} = y_n,$$

где $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ — заданные значения.

В частности, для ДУ 1-го порядка $F(x, y, y') = 0$ имеем одно условие $y(x_0) = y_0$. То есть, требуется найти интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0).

Задача Коши может иметь или не иметь решение.

2 Общий интеграл ОДУ 1-го порядка.

Определение 2.1

Рассмотрим ДУ 1-го порядка $F(x, y, y') = 0$ (2), где $F(t_1, t_2, t_3)$, $\dfrac{\partial F}{\partial t_2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial t_3}$, непрерывны в области $\Omega \subset R^3$.

Общим интегралом уравнения (2) называется равенство $\Phi(x, y, c) = 0$ (3), где $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области $G \subset R_3$ и обладает свойством: если $y(x)$ непрерывно, дифференцировать равенство (3) по x, то

(при этом получим $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$ (4)), и исключить сиз уравнений (3) и (4) , то получим ДУ, эквивалентное исходному уравнению (2)

Уравнение (2, общий интеграл) называют также дифференциальным уравнением функций, заданных (возможно, неявно) уравнением (3).

Замечание

Не всегда общий интеграл (3) содержит все решения ДУ (2).

Теорема 2.1

Добавим в определение 2.1 требование, чтобы равенство (3) было разрешимо относительно параметра c, то есть, имело вид

$$c = \varphi(x, y) \tag{5}$$

(φ — непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\tilde{G}$)

Тогда, если $y(x)$, определенная на (a, b), и $(x, y(x)) \in \tilde{G}$, $(x, y, y') \in \Omega \, \forall x \in (a, b)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (2), при некотором значении параметра c, то она является решением ДУ (2).

И обратно, любое решение ДУ (2), определенное на (a, b), удовлетворяет равенству (5) при некотором значении c (то есть, в общем интеграле (5) содержатся все решения ДУ).

Определение 2.2

ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, называется нормальным:

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

Теорема 2.2

Существование и единственность решения задачи Коши для нормального
ДУ 1-го порядка (6).

Пусть f, f_y непрерывны в области $G \subset R^2$. Тогда $\forall (x_0, y_0) \in G \; \exists !$ решение $y(x)$ уравнения (6), определенное на некотором промежутке $[x_0 - h, \; x_0 + h]$ и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ (hсвое для каждой точки) ($x_0, \; y_0$ — любая точка G).

То есть, через каждую точку G проходит ровно одна интегральная кривая.

(без доказательства)

3 Уравнение с разделяющимися переменными. Линейное уравнение 1-го порядка. Уравнение в полных дифференциалах.

Некоторые классы нормальных ДУ 1-го порядка.

Рассмотрим нормальное ДУ первого порядка:

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

Другая записи:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

Этот вид объединяет два уравнения:

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{и} \quad x' = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$$

Напоминание: по определению производной

$$\frac{dy}{dx} = y'(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

I. Уравнение с разделяющимися переменными

Пусть дана функция $g(x)f(y)$, где $g(x)f(y)$ непрерывна на $(a, b) \times (c, d) = \Omega$.

1. Рассмотрим область $\Omega^* \subset \Omega$, в которой $g_2(y) \neq 0$.

   $$g_1(x)dx - \left(\frac{1}{g_2(y)}\right) dy = 0 \Leftrightarrow d(G(x) - F(y)) = 0 \Leftrightarrow G(x) - F(y) = \text{const} \quad \text{(всюду в области } \Omega^* \subset \Omega\text{, общий интеграл)}$$

   (Здесь $G(y)$ — некоторая фиксированная первообразная функции $g_1(y)$; Здесь $F(y)$ — некоторая фиксированная первообразная функции $1/g_2(y)$.)

   Если $g_2(y)$ непрерывно дифференцируема, уравнение удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения задачи Коши. Следовательно, через каждую точку Ω^* проходит ровно одна интегральная кривая. Также выполнены требования теоремы 2.1. Следовательно, равенство $G(x) - F(y) = \text{const}$ содержит все решения ДУ в области Ω^*.

2. Если $\exists\, c : g_2(c^*) = 0$, то $y(x) = c^*$ — решение ДУ.

3. Другая запись ДУ с разделяющимися переменными:

   $$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{M_1(x)M_2(y)}{N_1(x)N_2(y)} \\ x' = -\dfrac{N_1(x)N_2(y)}{M_1(x)M_2(y)} \end{cases}$$

   В этом случае, если $\exists\, c^* : N_1(c^*) = 0$, то $x(y) = c^*$ также будет решением ДУ.

   Пример.

   $$y' = \frac{xy}{x+1}$$

   Ответ: $y = \frac{ce^x}{x+1}$ — общий интеграл (содержит все решения).

   Замечания к примеру.

   a. Если бы пример был записан в виде $xydx - (x + 1)\,dy = 0$, то добавилось бы решение $x(y) = -1$.

   b. Найдём решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$.

   Отметим, что в каждой из полуплоскостей $x > -1, x < -1$ выполнены требования теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Следовательно, через каждую точку полуплоскости проходит ровно одна интегральная кривая.

   Обозначим начальные условия: $-2 = c \to c = -2 \to y = \frac{-2e^x}{x+1}$ — особое решение, определенное на $(-1; +\infty)$.

II. Линейное ДУ 1-го порядка

$$y' + p(x)y = g(x), \quad (7), \quad \text{где } p(x) \text{ и } g(x) \text{ непрерывны на } (a,b).$$

$$y' = -p(x)y + g(x).$$

$$f(x,y) = -p(x)y + g(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$$

непрерывны в области $G = (a,b) \times R$. Следовательно, выполнены требования теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Следовательно, через каждую точку области G проходит ровно одна интегральная кривая.

Следовательно, $g(x) = 0$ и $f(x,y) = -p(x)y$.

1. Решим однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$.

   Это уравнение с разделяющимися переменными.

   $$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \quad \ln|y| = \Phi(x) + c_1$$

   (где $\Phi(x)$ - некоторая фиксированная первообразная функции $-p(x)$ на (a,b), c_1 - произвольная постоянная);

   $$|y| = e^{\Phi(x)} \cdot c_2 \quad (\text{где } c_2 = e^{c_1} > 0); \quad y = c_3 \cdot e^{\Phi(x)} \quad (\text{где } c_3 \neq 0);$$

   потеряли решение $y(x) = 0$. Следовательно, общий интеграл $y = c \cdot e^{\Phi(x)}$ (c произвольной постоянной); также называется общим решением однородного линейного уравнения; содержит все решения (так как разрешим относительно параметра c).

2. Будем искать решение неоднородного уравнения в виде $y = e^{F(x)}c(x)$, где $c(x)$ — неизвестная функция.

   Подставим в уравнение (7):

   Так как $y' = e^{\Phi(x)}c(x)\Phi'(x) + e^{\Phi(x)}c'(x) = -p(x)e^{\Phi(x)}c(x) + e^{\Phi(x)}c'(x)$, то

   $$-p(x)e^{\Phi(x)}c(x) + e^{F(x)}c'(x) + p(x)e^{\Phi(x)}c(x) = g(x); \quad c'(x) = e^{-\Phi(x)}g(x);$$

   $$c(x) = F(x) + c^*$$

   (где $F(x)$ — некоторая фиксированная первообразная функция $e^{-\Phi(x)}g(x)$ на (a,b), c^* - произвольная постоянная)

   Следовательно, $y(x) = e^{\Phi(x)}F(x) + e^{\Phi(x)}c^*$ — общий интеграл, также называется общим решением неоднородного линейного уравнения; содержит все решения (так как разрешим относительно параметра c^*).

   Отметим, что первое слагаемое $e^{\Phi(x)}F(x)$ — это частное решение неоднородного уравнения, второе слагаемое $e^{\Phi(x)}c^*$ — это общее решение соответствующего однородного уравнения.

III. Уравнение в полных дифференциалах

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0; \quad P(x,y),\ Q(x,y) \text{ непрерывны в области } D \subset R^2.$$

Это уравнение называется уравнением в полных дифференциалах, если существует непрерывно дифференцируемая в D функция $u(x,y)$: $du = P\,dx + Q\,dy$. в D

В этом случае равенство $u(x,y) = c$ является общим интегралом уравнения, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0$$

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Общий интеграл $u(x,y) = c$ содержит все решения (так как разрешен относительно параметра c).

Определение 2.3

1. Множество $D \subset R^2$ называется связным, если любые две точки из него можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в D.

2. Связное множество $D \subset R^2$ называется односвязным, если любую замкнутую непрерывную кривую в D, как бы она ни была взята, можно стянуть в точку непрерывным образом, не выходя из D.

3. Открытое связное множество называется областью.

Лемма 2.1

Пусть $D \subset R^2$ — односвязная область, и в D существуют и непрерывны $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда, для того, чтобы уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{в} \quad D.$$

4 Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормального ДУ n-го порядка.

Определение 3.1

ДУ n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, называется нормальным.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Теорема 3.1 — Существование и единственность решения задачи Коши для нормального ДУ n-го порядка

Пусть f непрерывна и имеет непрерывные частные производные по 2-й, 3-й, ..., $n+1$-й переменным в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Тогда существует интервал $[x_0 - h, x_0 + h]$ и определённая на нём n раз дифференцируемая функция $y(x)$, которая удовлетворяет уравнению и начальным условиям:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Такая функция единственна (без доказательства).

5 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (ЛДУ). Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Определение 3.2

ДУ вида

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

называется ЛДУ n-го порядка (функции $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$, которые называются коэффициентами уравнения, функция $g(x)$, которая называется правой частью уравнения, непрерывны на промежутке (a, b), и $a_n(x) \neq 0$ на (a, b)).

Разделим обе части уравнения на $a_n(x)$, получим

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (3.1).$$

Теорема 3.2

Пусть $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ и $q(x)$ непрерывны на (a, b). Тогда для любого набора значений $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1})$, где $x_0 \in (a, b)$, $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in R^n$, существует единственное решение $y(x)$ ЛДУ (3.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Замечание

Можно показать, что для ЛДУ каждое решение определено на всём промежутке (a, b) (без доказательства).

6 Линейно зависимые и независимые системы функций. Определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородного ЛДУ. Теорема о свойствах ФСР.

Однородные ЛДУ

Общее выражение однородного линейного дифференциального уравнения порядка n:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{4.1}$$

Замечание

Множество p раз дифференцируемых на (a, b) функций образует бесконечномерное линейное пространство. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор:

$$L(g) = g^{(p)} + \rho_{p-1}(x)g^{(p-1)} + \ldots + \rho_1(x)g' + \rho_0(x)g$$

Уравнение (4.1):

$$L(g) = 0$$

То есть, решения уравнения (4.1) — это функции, на которые действует дифференциальный оператор L порядка p. Покажем, что $\dim\ker L = p$.

Напомним: оператор $L(g)$ линейный, если

$$L(g_1(x) + g_2(x)) = L(g_1) + L(g_2), \quad L(\lambda g) = \lambda L(g)$$

Определение 4.1

1. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, определённые на (a, b), называются **линейно независимыми** на (a, b), если равенство

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) = 0 \quad \text{на } (a, b)$$

возможно только в случае, когда $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

2. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, определённые на (a, b), называются **линейно зависимыми** на (a, b), если существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не все из которых равны нулю, такие, что выполняется равенство

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) = 0 \quad \text{на } (a, b).$$

Следствия.

1. Система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ линейно зависима (ЛЗ) $\iff$ одна из них является линейной комбинацией (ЛК) остальных.

2. Система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ содержит 0, то она линейно зависима.

Определение 4.2.

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, определённые на (a, b), называются *фундаментальной системой решений* (ФСР) уравнения (4.1), если

1) функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ являются решениями уравнения;

2) их количество совпадает с порядком уравнения;

3) $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — линейно независимая (ЛНЗ) система функций.

Определение 4.3

Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ определены на интервале (a, b).

Определим функцию

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Функция $W(x)$, определённая на (a, b), называется **вронскианом** системы функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$.

Теорема 4.1

Пусть все коэффициенты $\rho_{n-1}(x), \ldots, \rho_1(x), \rho_0(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + \rho_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \rho_1(x)y' + \rho_0(x)y = 0 \tag{4.1}$$

непрерывны на интервале (a, b).
Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются решениями этого уравнения.
Следующие три утверждения равносильны:

1. $\{\Phi(x)\}_{x=1}^{n}$ — фундаментальная система решений (ФСР) дифференциального уравнения.
2. Вронскиан системы функций $W(x)$ не равен тождественно нулю на интервале (a, b), то есть

$$\exists\, x \in (a, b) : W(x) \neq 0.$$

3. Вронскиан системы функций $W(x)$ не равен нулю на всём интервале (a, b), то есть

$$W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Следствие

Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения. Тогда:

1. либо вронскиан системы функций $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, что равносильно тому, что $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ — линейно зависимая система функций;
2. либо $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, что равносильно тому, что $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ — линейно независимая система функций.

7 Теорема о существовании ФСР однородного ЛДУ. (Доказательство)

Теорема 4.2

Пусть все коэффициенты $p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{4.1}$$

непрерывны на интервале (a, b).
Тогда существует фундаментальная система решений (ФСР) этого уравнения на (a, b).

Доказательство

Выберем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \ldots \qquad \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Их (задач Коши) n штук, и у каждой существует решение.

Пусть $\varphi_1(x)$ — решение первой задачи Коши, $\varphi_2(x)$ — решение второй задачи Коши, …, $\varphi_n(x)$ — решение n-й задачи Коши. Тогда система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ является фундаментальной системой решений (ФСР), так как

$$W(x) = |E| = 1 \ (\neq 0).$$

8 Определение общего решения ЛДУ n-го порядка. Теорема о связи ФСР и общего решения однородного ЛДУ. (Доказательство)

Определение 4.4

n-параметрическая функция $y(x) = \Psi\langle x, c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle$ называется **общим решением** ЛДУ n-го порядка, если выполняются следующие условия:

1. для любого набора чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функция $y(x)$ является решением уравнения;
2. для любого решения $\tilde{y}(x)$ существуют такие числа $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$, что

$$\tilde{y}(x) = \Psi\langle x, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\rangle.$$

Теорема 4.3

Пусть все коэффициенты $p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{4.1}$$

непрерывны на интервале (a, b).
Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ФСР этого уравнения.
Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство

1. Для любого набора чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, функция $y(x)$ является решением уравнения, так как L — линейный оператор.
2. Пусть $\tilde{y}(x)$ — решение уравнения. Выберем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и вычислим значения:

$$\tilde{y}(x_0) = y_0, \quad \tilde{y}'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = y_0 \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Её определитель $W(x_0) \neq 0$.
Следовательно, существует решение $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*$ этой системы.
Функция

$$z(x) = c_1^*\varphi_1(x) + c_2^*\varphi_2(x) + \ldots + c_n^*\varphi_n(x)$$

является решением однородного ЛДУ (4.1), так как L — линейный оператор.
Функция $z(x)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$z(x_0) = y_0, \quad z'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Следовательно, по теореме единственности, эти решения совпадают, то есть

$$\widetilde{y}(x) = c_1^*\varphi_1(x) + c_2^*\varphi_2(x) + \ldots + c_n^*\varphi_n(x) \quad \text{на } (a, b).$$

Таким образом, для любого решения $\widetilde{y}(x)$ существуют такие числа $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*$, что

$$\widetilde{y}(x) = c_1^*\varphi_1(x) + c_2^*\varphi_2(x) + \ldots + c_n^*\varphi_n(x).$$

Следствие

Фундаментальная система решений (ФСР) является базисом пространства решений однородного линейного дифференциального уравнения (ЛДУ), то есть базисом $\ker L$.
Размерность пространства решений однородного ЛДУ равна n, то есть

$$n = \dim\ker L.$$

9 Комплекснозначные функции действительной переменной. Лемма о комплекснозначном решении однородного ЛДУ.

Определение 5.1

Отображение $y(x) : (a, b) \to C$, сопоставляющее каждой точке промежутка (a, b) некоторое комплексное число, называется **комплекснозначной функцией вещественной переменной**.

Любую такую функцию можно записать в виде:

$$y(x) = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественнозначные функции.

Если $y(x_0) = c + id$, то $u(x_0) = c$, а $v(x_0) = d$.

Теорема 5.1

1. Если $y(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественнозначные функции, то производная комплекснозначной функции имеет вид:

$$y'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

2. Для комплекснозначных функций справедливы все формулы и правила дифференцирования, аналогично вещественным функциям. (Без доказательства)

Лемма 5.1

Функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением ЛД) (5.1) тогда и только тогда, когда функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями ЛДУ (5.1).

11 Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, если известны корни его характеристичекого многочлена.

Определение 5.2

Многочлен

$$D(t) = t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \ldots + p_1 t + p_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (5.1) или оператора L.

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L(y) = 0 \tag{5.1}$$

Теорема 5.2

1. Пусть λ — корень характеристического многочлена $D(t)$ кратности k. Тогда функции

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\lambda x}$$

   являются решениями однородного ЛДУ (5.1).

2. Если $L(x^p e^{\lambda x}) = 0$ при $x = 0$ для $p = 0, 1, \ldots, k-1$, то λ — корень характеристического многочлена $D(t)$ кратности не менее, чем k.

3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — корни характеристического многочлена $D(t)$, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — их кратности, такие что

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

   Тогда функции

$$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, \quad xe^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x},$$

$$\ldots$$

$$e^{\lambda_m x}, \quad xe^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \quad x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}$$

   образуют фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (5.1).

Примеры

1. Уравнение:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$$

   Характеристический многочлен:

$$D(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2 = (t-2)(t-1)(t+1)$$

   Корни: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ — кратность 1.

   ФСР: $e^{2x},\ e^x,\ e^{-x}$

   Общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

2. Уравнение:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

   Характеристический многочлен:

$$D(t) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$$

   Корень: $\lambda = -1$, кратность 2.
   ФСР: $e^{-x},\ xe^{-x}$
   Общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

3. Уравнение:

$$y^{(4)} + 2y'' = 0$$

   Характеристический многочлен:

$$D(t) = t^4 + 2t^2 = t^2(t^2+2)$$

   Корни: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, кратность 1; $\lambda = 0$, кратность 2.
   ФСР: $e^{i\sqrt{2}x},\ e^{-i\sqrt{2}x},\ x,\ x^2$
   Общее решение:

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{2}x} + c_2 e^{-i\sqrt{2}x} + c_3 x + c_4 x^2$$

12 Теорема о построении ФСР однородного ЛДУ с вещественными постоянными коэффициентами, состоящей только из вещественнозначных функций.

Теорема 5.3

Пусть все коэффициенты $p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ уравнения (5.1) вещественны. Тогда существует ФСР этого уравнения, состоящая только из вещественнозначных функций.

13 Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ. (Доказательство)

Неоднородные ЛДУ

Общее неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{6.1}$$

Эквивалентно:

$$L(y) = q(x)$$

где коэффициенты $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ и функция $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b).

Теорема 6.1

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) есть сумма частного решения неоднородного ЛДУ и общего решения соответствующего однородного ЛДУ.

Соответствующее однородное ЛДУ имеет вид:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

Доказательство

Докажем, что

$$y(x) = y_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

где $y_0(x)$ — частное (то есть конкретное) решение неоднородного ЛДУ (6.1), а $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ФСР соответствующего однородного ЛДУ, является общим решением уравнения (6.1).

1. Для любого набора чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, функция $y(x)$ является решением уравнения (6.1), так как:

$$L(y(x)) = L(y_0(x)) + L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)) = q(x) + 0 = q(x)$$

2. Пусть $\tilde{y}(x)$ — решение уравнения (6.1). Рассмотрим функцию:

$$y(x) = \tilde{y}(x) - y_0(x)$$

Тогда:

$$L(y(x)) = L(\tilde{y}(x) - y_0(x)) = L(\tilde{y}(x)) - L(y_0(x)) = q(x) - q(x) = 0$$

Следовательно,

$$y(x) = \tilde{y}(x) - y_0(x)$$

— решение соответствующего однородного ЛДУ.

Следовательно, существуют числа $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$, такие что:

$$y(x) = \tilde{y}(x) - y_0(x) = \tilde{c}_1\varphi_1(x) + \tilde{c}_2\varphi_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\varphi_n(x)$$

Отсюда:

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \tilde{c}_1\varphi_1(x) + \tilde{c}_2\varphi_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\varphi_n(x)$$

То есть для любого решения $\tilde{y}(x)$ существуют числа $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$, такие что:

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \tilde{c}_1\varphi_1(x) + \tilde{c}_2\varphi_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\varphi_n(x)$$

14 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения решения неоднородного ЛДУ.

Неоднородные ЛДУ

Общее неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{6.1}$$

Эквивалентно:

$$L(y) = q(x)$$

где коэффициенты $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ и функция $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b).

Метод вариации постоянных

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного ЛДУ. Будем искать решение неоднородного ЛДУ (6.1) в виде:

$$y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j(x),$$

где $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ — неизвестные функции, которые нужно найти.
Имеем:

$$y'(x) = \sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j(x) + \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j'(x)$$

Наложим условие:

$$\sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j(x) = 0$$

Тогда:

$$y'(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j'(x)$$

Аналогично:

$$y''(x) = \sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j'(x) + \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j''(x)$$

Наложим условие:

$$\sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j'(x) = 0$$

Тогда:

$$y''(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j''(x)$$

Продолжая по аналогии:

$$y^{(3)}(x) = \sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j''(x) + \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j^{(3)}(x)$$

Наложим условие:

$$\sum_{j=1}^n c_j'(x)\varphi_j''(x) = 0$$

Тогда:

$$y^{(3)}(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)\varphi_j^{(3)}(x)$$

...

И, наконец:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} {}_j(x)\varphi_j^{(n)}(x)$$

Наложим условие:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) = 0$$

Тогда:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\varphi_j^{(n)}(x)$$

Подстановка в левую часть уравнения

Подставим в левую часть уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\varphi_j^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) + \ldots$$

$$+p_1(x)\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\varphi_j'(x) + p_0(x)\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\varphi_j(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)L(\varphi_j(x)) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x).$$

(так как $L(\varphi_j(x)) = 0$).

Следовательно $\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) = q(x)$

Система линейных алгебраических уравнений

Получили систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$:

$$\sum_{j=1}^{r} c_j'(x)\varphi_j(x) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} c_j'(x)\varphi_j^{(1)}(x) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} c_j'(x)\varphi_j^{(2)}(x) = 0$$

...

$$\sum_{j=1}^{r} c_j'(x)\varphi_j^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} c_j'(x)\varphi_j^{(n-1)}(x) = q(x)$$

Её определитель $W(x) \neq 0$ на интервале (a, b). Следовательно, существует единственное решение:

$$c_1'(x) = f_1(x), \quad c_2'(x) = f_2(x), \quad \ldots, \quad c_n'(x) = f_n(x),$$

где функции $f_j(x)$ непрерывны на (a, b), так как выражаются через функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и их производные до порядка $n - 1$ (вспомните формулы Крамера).

Следовательно:

$$c_1(x) = F_1(x) + c_1^*, \quad c_2(x) = F_2(x) + c_2^*, \quad \ldots, \quad c_n(x) = F_n(x) + c_n^*,$$

где $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ — некоторые первообразные функции.

Положим $c_1^* = c_2^* = \ldots = c_n^* = 0$, тогда получим конкретные функции $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ и конкретное (то есть частное) решение:

$$y(x) = F_1(x)\varphi_1(x) + F_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + F_n(x)\varphi_n(x)$$

Замечание

Тогда общее решение неоднородного ЛДУ (6.1) будет иметь вид:

$$y(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ — общее решение соответствующего однородного ЛДУ.
Следовательно, если бы мы в выражениях

$$c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + \ldots + c_nF_n(x), \quad c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

принимали произвольные постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то сразу бы получили общее решение неоднородного ЛДУ (6.1).

16 Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений (СЛДУ). Запись в векторной форме. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Определение общего решения.

Определение системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ)

Система (7.2):

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x), \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases} \iff \quad Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} = \{a_{ij}(x)\}_{1 \le i,j \le n} \quad \text{— матрица коэффициентов,}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{— столбец свободных членов или правых частей}$$

Такая система называется **системой линейных дифференциальных уравнений** (СЛДУ). Если $B(x) = 0$, то система называется **однородной**.

Теорема 7.2 о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть $a_{ij}(x), b_j(x)$ непрерывны на $(a, b) \quad (1 \le i, j \le n)$. Тогда для любого набора чисел

$$(x_0, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in (a, b) \times R^n$$

существует единственное решение

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

системы (7.2), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^*, \quad y_2(x_0) = y_2^*, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^*.$$

(Следует из теоремы 7.1)

Замечание

Можно показать, что для СЛДУ все решения определены на всём промежутке (a, b) *(без доказательства)*.

Определение 7.4 общего решения

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, c_1, \ldots, c_n) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x, c_1, \ldots, c_n) \end{cases}$$

n-параметрический набор функций называется **общим решением СЛДУ** n-го порядка, если

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x, c_1, \ldots, c_n) \\ y_2(x, c_1, \ldots, c_n) \\ \vdots \\ y_n(x, c_1, \ldots, c_n) \end{pmatrix}$$

— решение системы, причём выполняются условия:

1. для любого набора чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

2. для любого решения $\widetilde{Y}(x)$ существуют числа $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ такие, что

$$\widetilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x, \widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n) \\ y_2(x, \widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n) \\ \vdots \\ y_n(x, \widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n) \end{pmatrix}.$$

Замечание

Из теоремы 7.2 следует, что в общем решении должно быть ровно n произвольных постоянных.

17 Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно- независимых собственных векторов матрицы системы совпадает с порядком системы.

Общее решение однородной системы ЛДУ при полном наборе собственных векторов

Рассматривается однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$Y'(x) = AY(x), \tag{7.3}$$

где A — постоянная $n \times n$–матрица, $Y(x) \in R^n$.

Напоминания: фундаментальная система, вронскиан

Замечание 7.1.

1. Множество вектор–функций образует линейное пространство.
2. Остаются в силе определения линейной зависимости и независимости систем вектор–функций.
3. Система вектор–функций $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) СЛДУ (**??**), если все $\Phi_k(x)$ являются решениями (**??**), их количество равно порядку системы n, и $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ — линейно независимая система вектор–функций.

Определение 7.5. Пусть

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Phi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

— решения системы (**??**). Тогда определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

называется *вронскианом* этого набора решений.
Теорема 7.3. Пусть $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ — система решений СЛДУ (**??**). Тогда равносильны утверждения:

1. $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ФСР системы (**??**);
2. вронскиан $W(x)$ не равен тождественно нулю на (a, b) (то есть $\exists\, x_0 \in (a, b) : W(x_0) \neq 0$);
3. $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Из теоремы о существовании и единственности (Теорема 7.2) следует, что общее решение однородной системы $Y'(x) = A(x)Y(x)$ содержит ровно n произвольных постоянных.

Формула общего решения при полном наборе собственных векторов

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов

$$v_1, \ldots, v_n \in C^n, \quad Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

(Если все λ_k вещественные и v_k можно выбрать вещественными, работаем в R^n; общий вид в C^n тот же, а вещественное решение строится стандартно через действительную и мнимую части.)
Утверждение. Тогда вектор–функции

$$\Phi_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы (**??**), а общее решение имеет вид

$$Y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} v_n,$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Доказательство

Шаг 1. Каждая $\Phi_k(x)$ — решение.
Рассмотрим

$$\Phi_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k.$$

Тогда

$$\Phi_k'(x) = \lambda_k e^{\lambda_k x} v_k,$$

а

$$A\Phi_k(x) = A(e^{\lambda_k x} v_k) = e^{\lambda_k x} A v_k = e^{\lambda_k x} \lambda_k v_k = \lambda_k e^{\lambda_k x} v_k = \Phi_k'(x).$$

Следовательно, $\Phi_k'(x) = A\Phi_k(x)$, то есть $\Phi_k(x)$ — решение системы (**??**) для каждого $k = 1, \ldots, n$.
Шаг 2. Линейная независимость $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$.
Пусть для некоторого фиксированного x имеем линейную комбинацию

$$\alpha_1 \Phi_1(x) + \alpha_2 \Phi_2(x) + \ldots + \alpha_n \Phi_n(x) = 0,$$

то есть

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n x} v_n = 0.$$

Так как все $e^{\lambda_k x} \neq 0$, можно переписать как

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n = 0, \quad \text{где } \beta_k = \alpha_k e^{\lambda_k x}.$$

Но по предположению $v_1, \ldots, v_n$ — линейно независимая система векторов, значит

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Отсюда $\alpha_k = 0$ для всех k, следовательно, векторы–функции $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ линейно независимы как вектор–функции на любом интервале.

Шаг 3. Фундаментальная система и вронскиан.

Мы получили n решений $\Phi_k(x)$, линейно независимых. По определению 7.1 и замечанию 7.1, система $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$ является фундаментальной системой решений СЛДУ (**??**). По теореме 7.3 вронскиан $W(x)$ этой системы не равен тождественно нулю и, более того, $W(x) \neq 0$ для всех x на рассматриваемом интервале.

Шаг 4. Общий вид решения.

По определению общего решения (Определение 7.4) и теореме о существовании и единственности (Теорема 7.2), для однородной системы порядка n общее решение есть n–параметрическое семейство, получаемое как линейная комбинация фундаментальной системы:

$$Y(x) = c_1 \Phi_1(x) + \ldots + c_n \Phi_n(x),$$

то есть

$$Y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} v_n.$$

Любое решение однородной системы может быть представлено в таком виде (по линейности и свойству ФСР), и разные наборы $(c_1, \ldots, c_n)$ дают различные решения (из линейной независимости $\{\Phi_k\}$).

Это и есть общий вид решения однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно независимых собственных векторов матрицы A совпадает с порядком системы.

18 Общее решение однородной системы ЛДУ в случае, когда количество линейно- независимых собственных векторов матрицы системы меньше порядка системы.

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$Y'(x) = AY(x),$$

где A — постоянная матрица порядка n.

Если матрица A имеет **менее n линейно независимых собственных векторов**, то она не диагонализируема и приводится к жордановой форме:

$$A = SJS^{-1},$$

где J — жорданова матрица, состоящая из жордановых блоков

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix},$$

каждый из которых соответствует собственному значению λ_α и имеет размер $k_\alpha \times k_\alpha$.

Для жорданова блока размера k_α фундаментальная система решений имеет вид

$$e^{\lambda_\alpha x} v_{\alpha,0}, \quad e^{\lambda_\alpha x}(x v_{\alpha,0} + v_{\alpha,1}), \quad \ldots, \quad e^{\lambda_\alpha x}\left(\frac{x^{k_\alpha - 1}}{(k_\alpha - 1)!} v_{\alpha,0} + \cdots + v_{\alpha,k_\alpha - 1}\right),$$

где $v_{\alpha,0}, v_{\alpha,1}, \ldots, v_{\alpha,k_\alpha-1}$ — цепочка обобщённых собственных векторов, соответствующая блоку J_α.

Общее решение системы $Y'(x) = AY(x)$ имеет вид

$$Y(x) = \sum_\alpha \sum_{j=0}^{k_\alpha - 1} c_{\alpha j}\, e^{\lambda_\alpha x} P_{\alpha j}(x),$$

где $P_{\alpha j}(x)$ — вектор–многочлены по x степени не выше $k_\alpha - 1$, а $c_{\alpha j}$ — произвольные постоянные.

Всего таких независимых решений n, и они образуют фундаментальную систему решений.

21 Понятие числового ряда. Асимптотическая формула для частичной суммы гармонического ряда.

Определение 1.1

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность.
Символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется **числовым рядом** или **бесконечной суммой**, а a_n — **общим членом ряда**.

Частичной суммой ряда называется сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, равный S, то символу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ приписывается значение S, которое называется **суммой ряда**, а сам ряд называется **сходящимся** (к S).

Если предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечен или не существует, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **расходящимся**.

Лемма 1.1. Асимптотическая формула для частичных сумм гармонического ряда

Рассмотрим гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Его частичная сумма имеет асимптотическое представление:

$$S_n = c + \ln n + \alpha_n,$$

где

$$c = 0{,}5772\ldots$$

— **постоянная Эйлера** (или *константа Эйлера–Маскерони*), а

$$\alpha_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие

Гармонический $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ряд **расходится**, так как

$$S_n = c + \ln n + \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Пример. Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Частичная сумма:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

Так как

$$q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{если } |q| < 1; \qquad q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \text{если } |q| > 1;$$

$$q^n \text{ не имеет предела, если } q = -1,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

сходится к $\dfrac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$, и **расходится** при $|q| \geq 1$.

22 Теоремы о сходящихся рядах (возможность заключать элементы в скобки; сходимость ряда с элементами - линейными комбинациями элементов сходящихся рядов). (с доказательством)

Теорема 1.1 возможность заключать элементы в скобки

Члены сходящегося ряда можно заключать в скобки, то есть:
Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится к S (то есть его сумма равна S). Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \text{где } b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}$$

(то есть члены исходного ряда сгруппированы в блоки $(a_1 + \ldots + a_{n_1}), (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}), \ldots$)
тоже сходится и имеет ту же сумму S:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S.$$

Доказательство

Частичные суммы рядов связаны равенством

$$S_k^{(s)} = S_{n_k}^{(a)}.$$

Следовательно, последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и имеет тот же предел S.

Замечание

Обратное неверно. Например, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Этот ряд можно рассматривать как

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

Если раскроем скобки, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1},$$

который расходится.

Теорема 1.2 сходимость ряда с элементами - линейными комбинациями элементов сходящихся рядов

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится к $S^{(a)}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится к $S^{(b)}$.
Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

сходится, и его сумма равна

$$\alpha S^{(a)} + \beta S^{(b)}.$$

Доказательство

Частичная сумма ряда

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S_n^{(1)} + \beta S_n^{(2)}.$$

Так как $S_n^{(1)} \to S^{(a)}$ и $S_n^{(2)} \to S^{(b)}$ при $n \to \infty$, то

$$S_n^{(3)} \to \alpha S^{(a)} + \beta S^{(b)}.$$

Следствия

1) Постоянный множитель можно выносить за знак суммы ряда, то есть:
Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится к $S^{(a)}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$$

сходится к $\alpha S^{(a)}$.
(Это частный случай Теоремы 1.2 при $\beta = 0$.)

2) Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

расходится при $\beta \neq 0$, так как последовательность

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{\beta} S_n^{(3)} - \frac{\alpha}{\beta} S_n^{(1)}$$

была бы сходящей, если бы сходилась последовательность

$$S_n^{(3)}.$$

23 Остаток ряда. Связь между сходимостью ряда и его остатка. Необходимое условие сходимости ряда.

Определение 1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

Ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \quad (2)$$

называется *остатком ряда* (1) после m-го члена, сумму остатка обозначим r_m.

Теорема 1.3.

Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Следствия

1. Если из ряда изъять (или добавить) конечное число слагаемых, на сходимость это не повлияет.
2. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сумма остатка ряда после m-го члена $r_m \to 0$ при $m \to \infty$, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

   а) если ряд (1) сходится к $S^{(1)}$, то

$$S^{(1)} = S_m^{(1)} + r_m,$$

   так как $S_m^{(1)} \to S^{(1)}$ при $m \to \infty$, то $r_m \to 0$ при $m \to \infty$;

   б) если сумма остатка ряда после m-го члена $r_m \to 0$ при $m \to \infty$, следовательно, сумма остатка ряда после m-го члена существует при всех $m \in N$, и, следовательно, ряд сходится.

Теорема 1.4. Необходимый признак сходимости ряда.

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда его общий член a_n стремится к нулю при $n \to \infty$.

24 Первый и второй признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

Теорема 2.1.

Для того, чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Доказательство.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in N.$$

Обозначим S_n — n-я частичная сумма ряда.

1. $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$. Следовательно, последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает. Если она ограничена сверху, то имеет конечный предел по аксиоме Больцано–Вейерштрасса, то есть ряд сходится.
2. Если ряд сходится, то последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел, а значит, она ограничена (см. 1 семестр).

Теорема 2.2. Признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

Рассмотрим ряды:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \in N.$$

1. **Первый признак сравнения.**
   Пусть $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \in N$. Тогда:
   а) если ряд (1) сходится, то ряд (2) также сходится;
   б) если ряд (2) расходится, то ряд (1) также расходится.
2. **Второй признак сравнения.**
   Пусть $a_n, b_n > 0 \quad \forall n \in N$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

не равный нулю.

(например, $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$).
Тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

Пусть $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}$ — частичные суммы рядов (1) и (2).

1. а) Если ряд (1) сходится, то последовательность частичных сумм $\{S_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. Так как $S_n^{(1)} \geq S_n^{(2)} \quad \forall n \in N$, то последовательность $\{S_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ также ограничена сверху. Следовательно, ряд (2) сходится.
   б) От противного: пусть ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится. Тогда по пункту а) ряд (2) должен сходиться. Противоречие.
2. а) Пусть ряд (2) сходится. Так как существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

то последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то есть существует $M > 0$, такое что

$$\frac{a_n}{b_n} \leq M \quad \forall n \in N.$$

Тогда $a_n \leq M b_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M b_n$ сходится (см. следствие к теореме 1.2), то ряд (1) сходится по первому признаку сравнения.

б) Пусть ряд (1) сходится. Так как существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}},$$

то последовательность $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то есть существует $M > 0$, такое что

$$\frac{b_n}{a_n} \le M \quad \forall n \in N.$$

Тогда $b_n \le Ma_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ma_n$ сходится (см. следствие к теореме 1.2), то ряд (2) сходится по первому признаку сравнения.

25 Признак Даламбера.

Теорема 2.3 (Признак Даламбера).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad : \quad a_n > 0 \quad \forall n \in N.$$

1). Если

$$\exists\, q < 1 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad \forall n \in N,$$

то ряд сходится.
2). Если

$$\exists\, q > 1 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \quad \forall n \in N,$$

то ряд расходится.

Доказательство.

1). Пусть

$$\exists\, q < 1 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad \forall n \in N.$$

Тогда

$$a_2 \le qa_1, \quad a_3 \le qa_2 \le q^2 a_1, \quad \dots, \quad a_k \le qa_{k-1} \le q^{k-1} a_1, \dots$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} a_1 = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

сходится как сумма геометрической прогрессии ($q < 1$), следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится по 1-му признаку сравнения.

2). Пусть

$$\exists\, q > 1 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \quad \forall n \in N.$$

Тогда

$$a_2 \ge qa_1, \quad a_3 \ge qa_2 \ge q^2 a_1, \quad \dots, \quad a_k \ge qa_{k-1} \ge q^{k-1} a_1, \dots$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} a_1 = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

расходится как сумма геометрической прогрессии ($q > 1$), следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится по 1-му признаку сравнения.

Теорема 2.4 (Предельный признак Даламбера).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad : \quad a_n > 0 \quad \forall n \in N.$$

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда:

1. если $q < 1$, ряд сходится;
2. если $q > 1$, ряд расходится;
3. если $q = 1$, ничего сказать нельзя.

26 Признак Коши.

Теорема 2.5 (Признак Коши).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

где $a_n > 0 \quad \forall n \in N$.

1. Если $\exists\, q < 1 : \sqrt[n]{a_n} \le q \quad \forall n \in N$, то ряд сходится.
2. Если $\exists\, q > 1 : \sqrt[n]{a_n} \ge q \quad \forall n \in N$, то ряд расходится.

Теорема 2.6 (Предельный признак Коши).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

где $a_n > 0 \quad \forall n \in N$.
Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда:

1. если $q < 1$, ряд сходится;
2. если $q > 1$, ряд расходится;
3. если $q = 1$, ничего сказать нельзя.

(Доказательство аналогично теореме 2.4).

Следствие.

В случае $q > 1$ общий член ряда a_n не стремится к нулю.

27 Интегральный признак сходимости рядов. Сходимость обобщенного гармонического ряда.

Теорема 2.7 (Интегральный признак сходимости ряда).

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1, +\infty)$, причём

$$f(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad f(x) \text{ монотонно убывает на } [1, +\infty).$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Следствия.

1. Утверждение теоремы справедливо и в случае, когда индекс суммирования начинается с $p > 1$; в этом случае нижний предел интеграла также меняется на p.

2. Обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

28 Абсолютно сходящиеся ряды.

Теорема 3.1.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 3.1.

- Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся.
- Если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, но сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

29 Признак Дирихле.

Теорема 3.2 (Признак Дирихле).

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть:
1) Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, то есть

$$\exists L \in R : \left| \sum_{n=1}^{m} b_n \right| \leq L \quad \forall m \in N.$$

2) Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и стремится к нулю:

$$a_n \searrow 0.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

30 Признак Абеля. Признак сходимости знакочередующихся рядов. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

Признак Абеля

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.
2. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Теорема 3.3. Признак Лейбница

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n > 0 \quad \forall n \in N.$$

Если последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и стремится к нулю, то ряд сходится.

Следствия

1. Пусть S — сумма ряда

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n > 0 \quad \forall n \in N.$$

   Тогда

   $$0 \leq S \leq b_1.$$

2. Для остатка $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ справедливо:

   $$|r_m| \leq b_{m+1}, \quad \operatorname{sgn} r_m = (-1)^m.$$

Вывод: при замене суммы ряда лейбницевского типа его частичной суммой возникает погрешность, не превосходящая модуль первого из отброшенных членов и совпадающая с ним по знаку.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$$

Доказательство

1. Рассмотрим частичную сумму:

   $$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}$$

   Перегруппируем:

   $$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}$$

   $$= H_{2n} - H_n, \quad \text{где } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = c + \ln n + \alpha_n, \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   Следовательно:

   $$S_{2n} = (c + \ln 2n + \alpha_{2n}) - (c + \ln n + \alpha_n) = \ln 2 + (\alpha_{2n} - \alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$$

2. Ряд сходится по признаку Лейбница. Пусть S — его сумма. Тогда:

   $$S_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S \quad \Rightarrow \quad S = \ln 2$$

31 Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Определение 3.3

Рассмотрим ряды

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ряд

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{где } c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1,$$

называется произведением рядов (1) и (2).

Теорема 3.4

Пусть ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся абсолютно, и их суммы равны A и B соответственно. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{где } c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1,$$

также сходится абсолютно, и его сумма равна AB.

37 Степенные ряды. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда (с леммой). Теорема о непрерывности суммы степенного ряда на концах интервала сходимости.

Определение 6.1

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in R$, называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Замечание

Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.1}$$

будем рассматривать, так как любой степенной ряд сводится к ряду такого вида заменой $t = x - x_0$.

Лемма 6.1

Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится в точке x_0, то он сходится абсолютно в любой точке x, для которой $|x| < |x_0|$.

Следствие

Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

расходится в точке x_0, то он расходится в любой точке x, такой что $|x| > |x_0|$.

Теорема 6.1

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.1}$$

Существует число $R \in [0, \infty]$, обладающее следующими свойствами:

1. $\forall\, x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно.
2. $\forall\, x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд расходится. '
3. $\forall\, r \in (0, R)$ ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.

Определение 6.2

Промежуток $\langle -R, R \rangle$ называется *промежутком сходимости* степенного ряда (6.1); число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда (6.1).

Замечание

Поведение ряда на концах промежутка сходимости может быть различным.

Следствие 1 к теореме 6.1

Если $|x| > R$, то общий член ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

не стремится к нулю.

Следствие 2 к теореме 6.1

Сумма степенного ряда непрерывна во внутренних точках промежутка сходимости.

Теорема 6.2

Пусть $R \in (0, \infty)$ — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.1}$$

Если ряд сходится в точке R (или $-R$), то его сумма непрерывна в этой точке слева (или справа соответственно).

38 Теорема о дифференцировании и интегрировании суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Связь коэффициентов степенного ряда с производными его суммы.

Теорема 6.3

Пусть R — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.1}$$

и пусть $u(x)$ — его сумма. Тогда:

1. Для всех $x \in (-R, R)$ степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$
сходится к
$$\int_0^x u(t)\,dt.$$

2. Для всех $x \in (-R, R)$ степенной ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
сходится к $u'(x)$.

Следствие

Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать; при этом его радиус сходимости не изменится.

Теорема 6.4

Пусть R — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.1}$$

и пусть $u(x)$ — его сумма. Тогда на интервале $(-R, R)$ функция $u(x)$ имеет производные всех порядков, причём

$$u^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Следствия

1. Для всех $k \in N$:
$$u^{(k)}(0) = k! \cdot a_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{u^{(k)}(0)}{k!}.$$
Если
$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$
то
$$u^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}.$$
Следовательно, коэффициенты степенного ряда полностью определяются значениями функции $u(x)$ и её производных в точке x_0.

2. Если существует разложение функции в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, то это разложение единственно.

39 Ряд Тейлора функции в точке. Пример: показать, что ряд Тейлора функции (посмотреть в списке и написать)

Определение 6.3

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0 и имеет там производные всех порядков. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0 = 0$, то ряд называется *рядом Маклорена*.

Замечание

Очевидно, что ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в точке x_0. Однако он может не сходиться к функции $f(x)$ ни в какой другой точке.

Пример

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Покажем, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в любой окрестности точки 0, однако её ряд Маклорена не сходится к ней ни в одной точке, кроме 0.

41 Разложение в степенные ряды элементарных функций действительной переменной.

1. Экспонента

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{на } (-\infty, \infty), \quad \text{так как}$$

а) частичные суммы ряда Тейлора $S_n(x) = T_n(x)$, где

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

— многочлен Тейлора; **б)** $\forall x \in (-\infty, \infty) \quad \exists H > 0 : x \in [-H, H]$,

$$|(e^x)^{(n)}| = |e^x| \le e^H \quad \forall x \in [-H, H], \quad \text{следовательно,} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{на } [-H, H],$$

$$\text{следовательно,} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

2. Косинус

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{на } (-\infty, \infty),$$

так как

а) частичные суммы ряда Тейлора $S_n(x) = T_n(x)$, где

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{– многочлен Тейлора;}$$

б)

$$\forall x \in (-\infty, \infty) \quad \exists H > 0 : x \in [-H, H],$$

$$|(\cos x)^{(n)}| = |\cos(x + \frac{\pi}{2} n)| \le 1 \quad \forall x \in [-H, H], \quad \text{следовательно,}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{на } [-H, H], \quad \text{следовательно,}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

3. Синус

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{на } (-\infty, \infty), \quad \text{так как}$$

а) частичные суммы ряда Тейлора $S_n(x) = T_n(x)$, где

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

— многочлен Тейлора; **б)**

$$\forall x \in (-\infty, \infty) \quad \exists H > 0 : x \in [-H, H],$$

$$|(\sin x)^{(n)}| = |\sin(x + \frac{\pi}{2} n)| \le 1 \quad \forall x \in [-H, H], \quad \text{следовательно,}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{на } [-H, H], \quad \text{следовательно,}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

4. Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

5.Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

6. Биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad \text{на } (-1,1), \quad \text{так как}$$

а) частичные суммы ряда Тейлора $S_n(x) = T_n(x)$, где

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{– многочлен Тейлора;}$$

б) без доказательства.

7. Логарифм

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{на } (-1,1]$$

42 Предел последовательности с комплексными членами. Сходимость последовательностей действительных и мнимых частей.

Определение 7.1.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad (a \in C) \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in N : \forall n \geq N\ |z_n - a| < \varepsilon.$$

Замечания.

1).

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \iff \quad |z_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\text{в частности,} \quad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \iff \quad |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2).

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \Rightarrow \quad |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a| \quad (\text{так как } ||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|).$$

Обратное неверно.

3). По определению

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \iff \quad |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

43 Сумма ряда с комплексными членами, ее связь с суммой рядов действительных и мнимых частей. Связь сходимости и абсолютной сходимости.

44 Степенной ряд с комплексными членами, его круг сходимости.

Определение 7.3.

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $z_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in C$, называется степенным рядом с комплексными членами. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Теорема 7.3.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

$\exists\ R \in [0, \infty]$:

1). $\forall z \in C :\ |z| < R$ ряд сходится абсолютно.

2). $\forall z \in C :\ |z| > R$ ряд расходится.

Доказательство.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z|^n.$$

Это степенной ряд с вещественными членами.

По теореме 6.1 $\quad \exists\ R \in [0, \infty]$:

1). $\forall z :\ |z| < R$ ряд сходится абсолютно.

2). $\forall z :\ |z| > R$ ряд расходится (так как по следствию к теореме 6.1 $|a_n||z|^n$ не стремится к нулю, и по замечанию 1) к определению 7.1 $a_n z^n$ не стремится к нулю).

Определение 7.4.

Множество

$$D_R = \{z \in C \mid |z| < R\}$$

называется кругом сходимости степенного ряда,

R — радиус сходимости.

45 Функция e^z и далее переписать из списка

Определение 8.1.

Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
Ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$
сходится $\forall z \in C$, так как ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
сходится абсолютно

$\forall x \in R$, и
$$\forall z \in R \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$
Назовем сумму этого ряда $S(z)$ значением функции e^z $\forall z \in C$

(мы продолжили функцию e^x с действительной оси на всю комплексную плоскость).

Теорема 8.1.

Осталось справедливым свойство экспоненты
$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Доказательство.

Напоминание:

Теорема 3.4.

Пусть ряды
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
сходятся абсолютно, и их суммы есть A и B. Тогда ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$
где
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$
также сходится абсолютно, и его сумма равна AB.

Имеем
$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}.$$
Тогда
$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$
где
$$c_n = \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1 z_2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{z_1^2 z_2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{z_1^p z_2^{n-p}}{p!(n-p)!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{n!} \left(z_2^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} z_1 z_2^{n-1} + \dots + \frac{n!}{p!(n-p)!} z_1^p z_2^{n-p} + \dots + z_1^n \right) = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}.$$
Следовательно,
$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}.$$

46 Функция $cos(z), sin(z)$ дальше переписать из списка

Определение 8.2.

1). Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ряд сходится абсолютно $\forall z \in C$, так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

сходится абсолютно $\forall x \in R$, и

$$\forall z \in R \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

Назовем сумму этого ряда $S(z)$ значением функции $\cos z\ \ \forall z \in C$
(мы продолжили функцию $\cos x$ с действительной оси на всю комплексную плоскость).

2). Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ряд сходится абсолютно $\forall z \in C$, так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

сходится абсолютно $\forall x \in R$, и

$$\forall z \in R \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z.$$

Назовем сумму этого ряда $S(z)$ значением функции $\sin z\ \ \forall z \in C$
(мы продолжили функцию $\sin x$ с действительной оси на всю комплексную плоскость).

Замечание 8.1.

Справедлива теорема: если существует продолжение бесконечно дифференцируемой функции с действительной оси на комплексную плоскость с сохранением свойства бесконечной дифференцируемости, то такое продолжение единственно. (Такое продолжение называется аналитическим).

Построенные нами продолжения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ бесконечно дифференцируемы как суммы степенных рядов. Следовательно, построенные нами продолжения — это единственно возможные аналитические продолжения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ с действительной оси на комплексную плоскость).

Замечание 8.2.

$$\text{Функция } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{сохранила свойство нечетности.}$$

$$\text{Функция } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{сохранила свойство четности.}$$

Теорема 8.2.

$$\forall z \in C$$

1).

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,$$

2).

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

3).

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Следствия.

1).
$$e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y),\quad \forall x,y\in R.$$

2).
$$e^{z}\ \text{имеет период}\ T=2\pi i,$$
так как
$$e^{z+2\pi i}=e^{z}e^{2\pi i}=e^{z}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{z}.$$

3).
$$\cos z\ \text{и}\ \sin z\ \text{имеют период}\ 2\pi,$$
так как
$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{iz+2\pi i}+e^{-iz-2\pi i}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z;$$
$$\sin(z+2\pi)=\frac{e^{iz+2\pi i}-e^{-iz-2\pi i}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

4). Остаются в силе формула
$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$
и другие тригонометрические формулы
$$\left(\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\right.$$
$$\left.=-\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{4}+\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}=1\right)$$

5).
$$\operatorname{sh}(iz)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\sin z,\quad \sin(iz)=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\operatorname{sh} z,$$
$$\operatorname{ch}(iz)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z,\quad \cos(iz)=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\operatorname{ch} z.$$

6). Исчезло свойство ограниченности функций $\sin z$ и $\cos z$, например,
$$\cos(ix)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,\quad (x\in R).$$

Определение 8.3.

Пусть $z\in C\setminus\{0\}$. $w\in C$ называется логарифмом z, если
$$z=e^{w}.$$

Теорема 8.3.

Пусть $z\in C\setminus\{0\}$.
$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z.$$

Определение 8.4.

По определению
$$z^{w}=e^{\,w\operatorname{Ln} z}.$$

Примеры.

1).
$$\operatorname{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=i\pi(2k+1),\quad (k\in Z).$$

2).
$$(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}(-1)}=e^{i\sqrt{2}\pi(2k+1)},\quad (k\in Z).$$

51 Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для его коэффициентов. Свойства ряда Фурье, вытекающие из полноты тригонометрической системы функций.

Определение 10.1.

Рассмотрим пространство $L_2([-\pi,\pi])$.

$$e = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

— ортонормированная система функций в $L_2([-\pi,\pi])$.

Сопоставим каждой функции $f \in L_2([-\pi,\pi])$ ряд Фурье этой функции по системе e, который называется тригонометрическим и записывается следующим образом

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

Лемма 10.1.

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье имеют вид

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad (n \in N).$$

Теорема 10.1.

Система функций

$$e = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

является полной в $L_2([-\pi,\pi])$, если рассматривать интеграл как интеграл Лебега.

(без доказательства)

Замечание.

Множество функций, интегрируемых по Лебегу, шире, чем множество функций, интегрируемых по Риману.

Например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q, \end{cases}$$

не интегрируема по Риману, но существует интеграл Лебега от этой функции по любому отрезку и равен нулю.

Все функции, интегрируемые по Риману, интегрируемы по Лебегу, и значения этих интегралов совпадают.

Следствия к теореме 10.1.

Выполняются все утверждения предыдущего параграфа:

1). $\forall f \in L_2([-\pi,\pi])$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к f по норме пространства $L_2([-\pi,\pi])$, то есть

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(f - S_n \right)^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где S_n — частичная сумма ряда Фурье.

Такая сходимость называется сходимостью в среднем, или сходимостью в смысле среднего квадратичного.

Сходимость в среднем не имеет ничего общего с поточечной сходимостью. Существует пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в бесконечном количестве точек из $[-\pi,\pi]$.

Геометрический смысл: площадь заштрихованной области стремится к нулю при

$$n \to \infty.$$

2). $\forall\, f \in L_2([-\pi,\pi])$ выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big).$$

$$\text{(Равенство Парсеваля } \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(f,e_n)^2\text{)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \left(\frac{a_0\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((\sqrt{\pi}a_n)^2 + (\sqrt{\pi}b_n)^2\big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big).$$

3).

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

4). Если у двух функций из $L_2([-\pi,\pi])$ все коэффициенты тригонометрического ряда Фурье совпадают, то эти функции равны в смысле пространства $L_2([-\pi,\pi])$, то есть принадлежат одному классу.

52 Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-дифференцируемой на [-π, π] функции. Теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье 2π-периодической кусочно-дифференцируемой функции.

Определение 10.2.

Пусть f — кусочно–непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$, то есть, имеет конечное число точек разрыва первого рода на $[-\pi, \pi]$.

Если

1) в каждой точке, где f непрерывна, существуют либо f', либо f'_+ и f'_-;

2) в каждой точке x_0 разрыва f существуют производные

а) левая для f, переопределенной в точке x_0 значением $f(x_0 - 0)$,

б) правая для f, переопределенной в точке x_0 значением $f(x_0 + 0)$;

то такие функции называются кусочно–дифференцируемыми.

Теорема 10.2.

Тригонометрический ряд Фурье кусочно–дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$ функции f сходится к ней в каждой точке из $[-\pi, \pi]$, где f непрерывна.

В каждой точке x_0 разрыва функции f ряд Фурье сходится к

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

(без доказательства)

Теорема 10.3.

Пусть f — 2π–периодичная кусочно–дифференцируемая функция (то есть, удовлетворяет определению 10.2 на $[-\pi, \pi]$). Тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится к ней в каждой точке, где f непрерывна.

В каждой точке x_0 разрыва функции f ряд Фурье сходится к

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Лемма 10.2.

Пусть f имеет период T. Тогда $\forall\, a$

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{T+a} f(x)\,dx.$$

(то есть, интегралы от f по любому промежутку длиной в период совпадают).

53 Замечание о 2l-периодических функциях.

Все утверждения этого параграфа переносятся на $L_2([-l,l])$.
Пусть $f \in L_2([-l,l])$. Тогда

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \qquad (n \in N).$$

55 Определение площади плоской фигуры. Необходимое и достаточное условие измеримости плоской фигуры. Следствие.

Определение

Рассмотрим множество $A \subset R^2$. Обозначим через $\rho(a, b)$ расстояние между точками a и b множества A. **Диаметром множества** A называется

$$d(A) = \sup_{a,b \in A} \rho(a, b).$$

Пусть F — ограниченное связное множество из R^2. Множество F называется **плоской фигурой**.

Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры P, целиком лежащие внутри F

$$P \subset F \setminus \partial F,$$

и назовем их **вложенными**.

Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры Q, целиком содержащие F

$$F \subset Q \setminus \partial Q,$$

и назовем их **объемлющими**.

Площади $S(P)$ вложенных фигур P ограничены сверху, а площади $S(Q)$ объемлющих фигур Q ограничены снизу.

Следовательно, существует

$$\sup_{P \subset F} S(P),$$

которую обозначим через $S_*(F)$ и назовем **внутренней площадью** фигуры F, а также существует

$$\inf_{Q \supset F} S(Q),$$

которую обозначим через $S^*(F)$ и назовем **внешней площадью** фигуры F.

Очевидно, что

$$S_*(F) \leq S^*(F).$$

Если

$$S_*(F) = S^*(F),$$

то это значение обозначим через $S(F)$ и назовем **площадью фигуры** F.

Если площадь $S(F)$ существует, то фигура F называется **квадрируемой** или **измеримой**.

Теорема (необходимое и достаточное условие квадрируемости)

Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P, Q : \quad S(Q) - S(P) < \varepsilon.$$

Следствие

Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда ее граница ∂F имеет меру ноль, то есть

$$S(\partial F) = 0.$$

56 Площадь кривой. Следствие.

Лемма 1.1

1. Кривая, определяемая уравнением
$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$
где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет меру ноль.

2. Кривая, определяемая уравнением
$$x = g(y), \quad y \in [c, d],$$
где функция $g(y)$ непрерывна на $[c, d]$, имеет меру ноль.

Следствие

Каждое множество, граница которого представима в виде конечного числа непрерывных кривых, задаваемых уравнениями вида
$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = g(y),$$
квадрируемо.

57 Основные свойства площади

Теорема 1.2.

Основные свойства площади.
Для площадей квадрируемых фигур справедливы следующие свойства.
Пусть F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры.

1. **Монотонность:** если $F_1 \subset F_2$, то
$$S(F_1) \leq S(F_2).$$

2. **Аддитивность:** если F_1 и F_2 не имеют общих внутренних точек, то
$$S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2).$$

3. **Инвариантность:** если F_1 и F_2 можно совместить при помощи параллельного переноса и поворота, то
$$S(F_1) = S(F_2).$$

4. Пересечение, объединение и разность квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.

58 Определение двойного интеграла.

Определение 2.1

Пусть множество $G \subset R^2$ квадрируемо. Пусть функция $f(x, y)$ определена и ограничена на G.
Разобьем множество G на конечное число квадрируемых частей

$$G_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

не имеющих общих внутренних точек, и составим сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta S_k,$$

где ΔS_k — площадь множества G_k, а (ξ_k, η_k) — некоторая точка из G_k.
Такая сумма называется **интегральной суммой Римана**, соответствующей разбиению

$$\tau = \{G_k\}_{k=1}^{n}$$

множества G.

Определение 2.2

1. Число

   $$\lambda_\tau = \max\{d(G_1), d(G_2), \ldots, d(G_n)\}$$

   называется **рангом разбиения** τ.

2. Если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении ранга разбиения к нулю, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения τ, ни от выбора точек (ξ_k, η_k), то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по множеству G и обозначается

   $$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

То есть,

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau,$$

что эквивалентно условию:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \big(\lambda_\tau < \delta \Rightarrow |\sigma_\tau - I| < \varepsilon\big)$$

для любого разбиения τ и любого выбора точек $(\xi_k, \eta_k) \in G_k$.

59 Сведение двойного интеграла к повторному.

Случай прямоугольной области

Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема на прямоугольнике

$$D = [a, b] \times [c, d].$$

Тогда для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$Y(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

и функция $Y(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Имеет место равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Аналогично, для любого $y \in [c, d]$ существует интеграл

$$X(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

и выполняется

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Следовательно,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Случай криволинейной области

Пусть область G ограничена кривыми

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x),$$

где $y_1(x) \le y_2(x)$ на $[a, b]$, и прямыми

$$x = a, \quad x = b.$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема на G. Тогда для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$Y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

и функция $Y(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Имеет место равенство

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

Аналогично, если область G ограничена кривыми

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y),$$

где $x_1(y) \le x_2(y)$ на $[c, d]$, и прямыми

$$y = c, \quad y = d,$$

то

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy.$$