

УВОД

Компютърната графика (КГ) е един от дяловете на информатиката, свързани със създаването, съхранението и обработката на визуална информация [1, 5, 17, 21, 30, 46, 100]. Предметът на КГ включва *синтез, анализ и обработка на изображения* [9, 12, 15, 22, 133]. Един от най-важните дялове в КГ е *геометричното моделиране* (ГМ) (Computer Aided Geometric Design) [40, 60, 75, 76, 85, 96, 124]. Основната му задача е намирането на математически методи и алгоритми за представяне и обработване на геометрични фигури с произволни криволинейни граници [8, 61].

Съществуват много математически модели за представяне на криви и повърхнини в ГМ [60, 97], но за практиката те винаги не са достатъчен брой, защото най-често се търсят и избират тези от тях, които отговарят на определени условия. Например: моделите най-лесно да се представят на езика на компютърната система; чрез тях да се задават основните геометрични примитиви; над тях да могат да се прилагат всички геометрични трансформации; да са база за разработване на бързи алгоритми; да позволяват лесно интерактивно моделиране на свободни графични форми и т.н.

Този, наложил се повсеместно, потребителски подход прави задачата за създаване на все по-нови геометрични модели винаги актуална.

От горепосочената гледна точка такива математически модели на криви и повърхнини, които най-широко се използват в съвременните графични системи са Bezier, Spline, B-spline, NURBS [65, 66, 68, 71, 78, 86, 91, 101, 105, 106].

Понастоящем основните очаквания към възможностите на триизмерните (3D) графични системи все повече се насочват към разработване на специфични набори от модели, усъвършенстващи реалистичното представяне на различни обекти и процеси, като: движения, деформации, влияния на странични елементи и ефекти върху обектите и т.н.

Това определи в обхвата на разработката да се разгледат една група от обекти притежаващи специфични и важни свойства и да се предложат полезни модели, по-ефективни алгоритми и техники за тяхното прилагане в 3D графичните системи като *графични примитиви за моделиране*, разширявайки техния *графичен инструментариум*. Това са линиите и повърхнините от втора степен (квадратични обекти), които се представят с общо алгебрично уравнение от втора степен, породено от квадратична форма.

Основна цел на дисертационния труд: Изследване и развитие на моделите на криви и повърхнини от втора степен в геометричното моделиране, които да служат за разработване на графични инструменти за интерактивен дизайн.

За успешно реализиране на така формулираната цел са поставени следните **задачи**:

1. Да се разработят NURBS модели на криви за интерактивно и в реално време моделиране, чрез които да бъдат представени кривите, които се задават с едно общо уравнение от втора степен: елипса, хипербола и парабола.

2. Да се разработят NURBS модели на повърхнини за интерактивно и в реално време моделиране, чрез които да бъдат представени повърхнините, които се задават с едно общо уравнение от втора степен: елипсоид, елиптичен параболоид, хиперболоид, двоен хиперболоид, конус, хиперболичен параболоид, елиптичен цилиндър, параболичен цилиндър и хиперболичен цилиндър.

3. Да се изследват възможностите на съвременните 3D графични системи за разширяване на графичния им инструментариум и да се разработят и внедрят нови графични инструменти, които работят на базата на предложените NURBS

модели на кривите и повърхнините от втора степен, в 3D графична система за моделиране.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертацията се състои от увод, четири глави, заключение и използвана литература.

В първа глава е изследвана обобщена структура на графична система за геометрично моделиране като се набляга на значението и мястото на геометричния модел в нея, както и на процеса на синтезиране на изображения в 3D приложенията. Показано е аналитичното представяне на модели на криви и повърхнини в ГМ, които се явяват база за разработване на предложените в това изследване модели. Това са Безие, В-сплайн и NURBS моделите на криви и повърхнини. Направен е обзорен анализ на съществуващите модели и подходи за построяване на кривите и повърхнините от втора степен в ГМ. На тази основа са формулирани основната *цел* на дисертацията и произтичащите от нея *основни задачи*.

При решаването на поставените задачи по-нататък разработката е разделена на две части. В първата част е разгледано представянето на кривите, а във втората – представянето на повърхнините. В тези две части е разработен NURBS модела на всяка една от квадратичните криви и повърхнини.

Втора глава съдържа аналитичното представяне на кривите чрез параметричните им уравнения. Предложени са модели на NURBS криви, представящи: елипса, парабола и хипербола. При представянето на някои от обектите са приложени авторски подходи. Във формулираните в края на главата изводи са посочени предимствата на разработените модели.

Трета глава съдържа аналитичното представяне на повърхнините чрез параметричните им уравнения. Предложени са модели на NURBS повърхнини, представящи: сфера, елипсоид, елиптичен параболоид, прост хиперболоид, двоен хиперболоид, конус и елиптичен цилиндър, параболичен цилиндър, хиперболичен цилиндър и хиперболичен параболоид. Моделите са разработени на базата на известни подходи за построяване на повърхнини, но приложени за NURBS обекти. Във формулираните в края на главата изводи са посочени предимствата на предложените модели.

Четвърта глава отразява изследването за приложимост на предложените във втора и трета глава NURBS модели на криви и повърхнини в една от широко разпространените 3D графични системи за моделиране Autodesk 3ds Max. Това е направено чрез разработване на специализирани софтуерни модули-добавки (плъгини, от англ. plugins) за това приложение. Направен е сравнителен анализ на работа им и примитивите, които те създават, спрямо съществуващите в системата инструменти и техники за построяването на този род обекти.

В заключението е направено обобщение на резултатите, които са получени. Формулирани са основните резултати в дисертацията. Посочени са някои актуални задачи, които могат да бъдат естествено продължение на това изследване.

Получените резултати са публикувани в седем доклада и една научна статия в периода след 2002 г. От тях един брой е в чужбина.

Дванадесетте специализирани софтуерни модула, които бяха разработени за 3D графичната система за моделиране 3ds Max, са одобрени и приети от Internet портала за високи 3D технологии и приложения *HighEnd3D* и са предоставени за свободно изтегляне и ползване с нетърговски цели.

1. ГЕОМЕТРИЧНОТО МОДЕЛИРАНЕ В КОМПЮТЪРНАТА ГРАФИКА

1.1. Графична система за геометрично моделиране

Графичната система за геометрично моделиране (ГСГМ) има два основни компонента: *приложна програма* (ПП) и *базов графичен пакет* (БГП) [5, 6, 17]. Приложната програма се грижи за създаването на геометричен модел, извършването на операции върху него, както и за организирането му във вид, удобен за визуализиране. Вторият компонент – базов графичен пакет – предоставя набор от технически и програмни средства за визуализация.

Всяка графична ПП отразява спецификата на съответната приложна област, но въпреки различията, всяка от тях извършва три основни дейности: *моделиране*; *описание на модела за БГП*; *интерактивна работа с модела*. Следователно, една от основните задачи при съставянето на ПП е да се избере наборът от обекти и начинът, по който те и връзките между тях да се представят, за да бъдат обработвани от нея. За решаването на тази задача ПП построява и използва *геометричен модел* (ГМ) на обектите. Геометричният модел е компютърното представяне на *формата, разположението, ориентацията и размерите* на обектите на ПП, а *моделирането е процеса на създаване на геометричния модел*. Както всеки друг модел, така и ГМ се създава, за да може върху него ПП да извърши разнообразни анализи и изследвания, вместо това да се прави с обектите от реалния свят. Геометричният модел от своя страна се състои от определен тип обекти, които имат своя метрика, топология, атрибути, неграфични данни и обработващи алгоритми. Средствата за моделиране се предлагат от БГП, а ПП е тази, която създава модела.

1.2. Аналитично представяне на криви линии в ГМ

В ГМ кривите се задават основно по два начина, чрез *общо (неявно) уравнение* и чрез *параметрични уравнения във векторна или в скаларна форма* [13, 17, 27, 33].

При проектирането на една ГСГМ се извършва единно съгласуване на координатните функции. Най-доброто за реализацията е да се ограничи представянето на кривите до клас от функции [91, 5 с.], които отговарят на следните критерии:

- имат не сложно за реализация аналитично задаване и са математически добре дефинирани;
- предоставят възможност за представяне на всички криви, от които се нуждае потребителя на системата;
- лесно, ефикасно и точно се представят чрез програмен език.

1.2.1. Основна форма за представяне на криви

Широко използван клас от функции са *полиномите*. Те са в основата на методите за интерполиране на функции [4, 5, 23, 26]. Въпреки, че полиномите като базис удовлетворяват последните два от посочените по-горе критерии към координатните функции, съществува голямо множество от важни типове криви, които не могат да бъдат точно представени чрез тях.

1.2.2. Криви на Безие

При известни радиус-вектори на $n+1$ характеристични точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в пространството, векторно-параметричното уравнение на кривата на Безие (*Bézier*) (с характеристична начупена линия $M_0M_1M_2 \dots M_n$) [34, 41, 56, 91] е:

$$c: \vec{r} = \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^n M_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1], \quad (1.5)$$

където $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ е i -ят полином на Бернщайн от n -та степен и

където, с цел техническо удобство и следвайки означенията в [17], тук и по-нататък в работата радиус-векторът на точка M_i е означен отново с M_i , което ще се подразбира от контекста на векторните равенства.

1.2.2.1. Рационални криви на Безие

Рационална крива на Безие от n -та степен, зададена с $n+1$ характеристични точки M_i , в нехомогенни координати се задава чрез векторната функция:

$$c: \vec{r} = \beta(t) = \frac{\sum_{i=0}^n M_i w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)} = \sum_{i=0}^n M_i \left\{ \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)} \right\}, \quad t \in [0,1]. \quad (1.8)$$

Тук w_i са реални числа, наричани *теглови коефициенти (тегла)* за съответния полином на Бернщайн (1.8). Коефициентите пред M_i в хомогенното представяне, спрямо фиксираните точки $\{M_i\}$, имат от гледна точка на статиката смисъл на *маси* приложени в тези точки и са наречени от Мьобиус барицентрични координати. Чрез промяната на теглата може да се модифицира линията c при фиксирани характеристични точки.

Кривите състоящи се от само един полиномиален или рационален сегмент са в повечето случаи незадоволителни за целите на моделирането.

Проблем, който съществува в моделирането с криви на Безие, е увеличаването на степента на полинома при увеличаването на характеристичните точки, което прави изчислението й по-сложно [17]. Един метод за намаляването на степента на линията е като тя се раздели на множество от криви на Безие от по-малка степен (например втора или трета). Отделните части на линията се наричат *сегменти*.

1.2.3. В-сплайн криви

В-сплайн кривите се дефинират на базата на така наречените В-сплайн функции, които се явяват частен случай на сплайн функциите.

1.2.3.1. Сплайн криви

Съществуват няколко начина за построяване на сплайн крива, които могат да се видят в [17, 266-271 с.] като най-често се работи със сплайн от трета степен. Сплайн кривите имат някои ограничения, най-важните от които са:

- Не е възможна локална модификация: при промяна една от интерполираните точки целият сплайн трябва да се преизчисли.
- Неприложимост при наличие на вертикални тангенти – това би предизвикало деление на 0.
- Възможна е осцилация при интерполация на точки, принадлежащи на крива с прекъснати втори производни.

Последните два недостатъка се преодоляват донякъде с използването на т.нар. параметрични сплайни.

1.2.3.2. В-сплайн функции

Дефиниция на В-сплайн функция има в [4, 55-62 с.], но в дисертацията се работи с дефиниция за *нормирана* В-сплайн функция по Кокс Де Бор (Cox de Boor) [11].

1.2.3.3. В-сплайн криви

При изследването на В-сплайн кривите се позоваваме главно на Кокс Де Бор (Cox-de Boor) [11], Бабишков Д. Л. [2], Кокс М. Г. (Cox M. G.) [49], както и на литературни източници съдържащи по-обобщена информация: [6, 7, 22, 23, 26, 43].

1.2.3.4. Параметризация на В-сплайн криви

Съществуват няколко вида В-сплайн криви [17], които се различават по начина на задаване на параметризацията. Тя се определя, както от границите, в които се мени параметърът, така и от стойностите на неговите възли. Възлите биват три вида и във връзка с това сплайните, които се получават, при апроксимацията, могат да се класифицират като: *равномерни периодични, равномерни неперидични и неравномерни*.

1.2.4. NURBS криви

Основните литературни източници на които се базираме в изследването на NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) кривите са [2, 11, 17, 48, 80, 91, 92, 97].

Дефиниция 1.4 NURBS крива c от степен p се дефинира с векторното уравнение:

$$c: \vec{r} = \gamma(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i P_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(t) w_j}, \quad a \leq t \leq b, \quad (1.15)$$

където $\{P_i\}$ са радиус-вектори на характеристичните точки (оформящи *характеристична начупена линия* и *характеристичен полигон*), $\{w_i\}$ са *теглата*, и $\{N_{i,p}(t)\}$ са В-сплайн базисните функции от степен p (ред $p+1$), дефинирани върху *неравномерен възлов вектор*

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}.$$

Обикновено $a=0$, $b=1$, и $w_i > 0$ за всички i . Ако се положи

$$R_{i,p}(t) = \frac{N_{i,p}(t) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(t) w_j} \quad (1.16)$$

това дава възможност уравнение (1.15) да се запише така

$$c: \vec{r} = \gamma(t) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(t) P_i, \quad (1.17)$$

където $\{R_{i,p}(t)\}$ са рационалните базисни функции.

1.3. Аналитично представяне на повърхнини в ГМ

Както кривите така и повърхнините могат да бъдат задавани с *общо уравнение* и чрез *параметрични уравнения* във *векторна* или в *скаларна форма* [13, 27, 33, 34].

1.3.1. Модели на повърхнини

Съществуват основно две техники за представяне на повърхнини в компютърната графика [97, 379-380 с.]. Първата, най-често асоциирана с името на Кунс (Coons) [97, 422-434 с.], създава математическа повърхнина от предварително зададени данни. Неудобство в този случай е, че тези повърхнини не могат интуитивно и интерактивно да се модифицират по отношение на формата им. Втората, най-често свързвана с името на Безие [97, 435-445 с.], създава математическа повърхнина, която свободно може да бъде моделирана.

1.3.2. Повърхнини в Безие-Бернщайн базиса

Повърхнините на Безие (в Безие-Бернщайн базиса) се представят [51,97] като произведение на две функции приложени върху множество $\{P_{i,j}\}$ от характеристични точки в пространството, които много често се наричат *управляващи (контролни) точки* или *контролни върхове*.

1.3.3. В-сплайн повърхнини

При зададени множество P от $m.n$ на брой контролни върхове $P_{i,j}$, $i=0, \dots, m-1$ и $j=0, \dots, n-1$, възлов вектор $U=\{u_0, u_1, \dots, u_{h-1}\}$, възлов вектор $V=\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$, В-сплайн базисните функции $N_{i,p}(u)$ и $N_{j,q}(v)$ от степен съответно p (ред $p+1$) и q (ред $q+1$), като $h=m+p+1$ и $k=n+q+1$, В-сплайн повърхнината се дефинира по следния начин [2, 11, 44, 53, 107]:

$$S: \vec{r} = S(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}. \quad (1.23)$$

Коефициентът на контролен връх $P_{i,j}$ е произведение на двете В-сплайн базисни функции $N_{i,p}(u)$ и $N_{j,q}(v)$ като $N_{i,p}(u)$ може да се фиксира, докато $N_{j,q}(v)$ се променя.

1.3.4. NURBS повърхнини

Тук ще бъде дадена дефиниция на NURBS повърхнина и свойствата, които тези повърхнини притежават. Основните литературни източници на които се базираме са [2, 11, 17, 91, 92, 97].

Дефиниция 1.5 NURBS повърхнина S от степен p в u направление и степен q във v направление се дефинира с уравнението:

$$S: \vec{r} = S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \cdot P_{i,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (1.24)$$

където $\{P_{i,j}\}$ са радиус-векторите на двупосочна *характеристична мрежа*, състояща се от характеристичните точки $P_{i,j}$, наричани още *контролни върхове*, $\{w_{i,j}\}$ са *теглата* на тези контролни върхове, а $\{\{N_{i,p}(u)\}, \{N_{j,q}(v)\}\}$ са нерационалните В-сплайн базисни функции дефинирани върху възловите вектори

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \text{ и } V = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\},$$

където $r = n + p + 1$ и $s = m + q + 1$.

Ако се дефинира

$$R_{i,p,j,q}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}}, \quad (1.25)$$

тогава $\{R_{i,j}(u,v)\}$ се явяват рационални базисни функции и повърхнината може да бъде дадена и с уравнението:

$$S: \vec{r} = S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,p,j,q}(u,v)P_{i,j}. \quad (1.26)$$

1.3.5. Методи за построяване на повърхнини

Съществуват няколко основни метода за построяване на повърхнини в ГМ, което най-често се извършва на базата на една или няколко (криви) линии – *генератори* или *генераторни линии*. Повърхнините, които се получават чрез завъртане на генератора се наричат ротационни; тези, които се получават чрез прокарване на генератора по път – на замитане; тези, които се сглобяват от няколко повърхнини – от парчета; и тези, които се получават чрез замитане на права линия по път – праволинейни.

1.4. Методи за представяне на квадратични криви и повърхнини в геометричното моделиране

Обикновено графичните приложения притежават като примитив за моделиране окръжност, която е афинно-еквивалентна на елипса. Чрез подходяща афинна трансформация на окръжността се получава елипса с предварително зададени полуоси. За получаването на парабола и хипербола обаче, основната техника за построяването им е намирането на сплайн крива от пресичането на кръгов конус с подходяща равнина. По този метод, обаче, е трудно определянето на желаната квадратична крива с точните ѝ параметри. Освен това сплайн кривите притежават някои съществени недостатъци, които са споменати в точка 1.2.3.1 от дисертацията. Най-доброто решение се явява преобразуването на сплайн кривата до NURBS крива. Но това е твърде сложен метод, а и NURBS кривата е с голям брой контролни върхове (фиг. 1.10 от дисертацията).

3D графичните системи, които бяха изследвани, притежават инструменти за създаване на следните квадратични повърхнини: сфера, конус и кръгов цилиндър. В повечето приложения, тези обекти се представят параметрично и не могат да бъдат модифицирани, докато в други (например Autodesk Maya), съществуват техни NURBS примитиви. В приложенията, където не съществуват NURBS примитиви, получените повърхнини трябва да се преобразуват (ако системата разполага с такава възможност) до NURBS повърхнина. Този процес, обаче, е "скъп" по отношение на ресурсите на компютърната система.

1.5. Изводи

От направения обзор в Глава I се налагат следните изводи:

1. Компютърните графични системи за геометрично моделиране се разработват с цел доставяне на набори от софтуерни инструменти предимно за дизайн и

визуализация. Развитието на 3D графичните системи за моделиране налага моделите на криви и повърхнини в ГМ да се развият в посока на създаване на нови графични примитиви с цел разширяване на функционалността на този вид приложения.

2. Най-широко използваните модели на криви и повърхнини в ГМ притежават важни аналитични свойства и геометрични характеристики, които дават възможност за представянето на изключително голямо разнообразие от форми. В-сплайн базисът отговаря напълно на критериите, поставени в раздел 1.2, за клас от координатни функции нужни при представянето на кривите и повърхнините. NURBS кривите и повърхнините позволяват моделиране, включващо и надминаващо възможностите, които предоставят Безие и сплайн моделите. При необходимост обаче, NURBS кривите и повърхнините могат да бъдат еквивалентно преобразувани до Безие и сплайн криви и повърхнини [98, 108].

3. Обзорът показва, че 3D графичните системи за моделиране не притежават инструменти за създаване на NURBS модели на всички квадратични криви и повърхнини като графични примитиви, а само на окръжност – от кривите и на сфера, конус и кръгов цилиндър – от повърхнините.

4. Присъствието на кривите и повърхнините от втора степен в 3D графичните приложения като примитиви за моделиране, би помогнало много по-лесно да бъдат създавани графични модели на обекти, чиито свойства при попадане на светлина, радио вълни, твърди тела и др., са вече известни и изследвани. Поведението на телата след попадането им върху тези повърхнини е предсказуемо или известно. Следователно: 1) при необходимост да се моделират обекти със споменатите свойства на кривите и повърхнините, това ще е възможно и 2) изчислителния процес при симулирането на поведението на обектите, преминаващи или отблъскващи се от тях ще бъде облекчен значително.

5. Моделите на кривите и повърхнините от втора степен трябва да бъдат подходящи за реализиране чрез ефективни алгоритми и създаване на специализирани софтуерни модули-добавки (плъгини) или чрез приложен програмен интерфейс или чрез средствата, предоставени от 3D графичните системи.

6. Представянето на кривите и повърхнините от втора степен е възможно и чрез криви на Безие. Изискването, обаче, кривите и повърхнините да позволяват локална модификация в отделни техни части, налага представянето им чрез съставни криви на Безие. Но моделирането с криви, които се състоят от множество криви, е по-трудно отколкото моделирането само с една крива, а при повърхнините сложността още повече нараства. Направеният обзор показва, че NURBS моделът е изключително подходящ при представянето на криви и повърхнини за моделиране в 3D графичните системи с тази цел (за които се изисква да позволяват локална модификация).

2. ПРЕДСТАВЯНЕ НА КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН ЧРЕЗ NURBS КРИВИ

Определянето на дъга от съответната крива линия (елипса, парабола или хипербола) се прави въз основа на стойностите на параметрите от скалярно-параметричните ѝ уравнения.

2.1. Аналитично представяне на кривите от втора степен

В този раздел е дадено аналитичното представяне на квадратичните криви, базирайки се основно на [33].

2.2 Идеята за представяне на кривите от втора степен чрез NURBS криви

Изложен е подход за представяне на кривите от втора степен чрез NURBS криви, при който се изисква да се знае типа на кривата и параметрите, които я

специфицират в нейните скалярно-параметрични уравнения (СПУ). Ако тя е зададена с параметрите от общото си уравнение, то тогава първо трябва да се извърши канонизиране до канонично уравнение.

Представянето на конично сечение се намира като се определят точно местата на контролните върхове и стойностите на техните тегла в NURBS модела на кривата. Така NURBS кривата може да бъде лесно подразделена, което осигурява възможност за модификация на кривата само в отделни нейни части – *сегменти*. По този начин сегмент от представената в NURBS модела крива може да бъде променян, а останалата част да запазва геометричните свойства и характеристиките на съответната квадратична крива. Това осигурява нови възможности и по-голяма гъвкавост при моделиране на реални обекти, които (или поне част от тях) са във формата на конично сечение.

2.3. Представяне на дъга от елипса чрез NURBS крива

Дъга от елипсата ε може да се специфицира като се зададат начална и крайна стойност на параметъра α от СПУ, а именно $\alpha \in [\alpha_s, \alpha_e]$. Кониките винаги лежат в една равнина (l) и нека $K_l = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ($\vec{e}_1 = \vec{e}_2$) да е локалната дясна декартова координатна система в l на вече канонизираната крива ε . Следователно двойката (\vec{e}_1, \vec{e}_2) задава положителна посока на обхождане на точките в l (фиг. 2.5).

2.3.1. Посока на построяване на дъгата

За скалярно-параметричните уравнения на ε имаме изискване $\alpha \in [0; 2\pi]$, но ние освобождаваме α да варира в диапазона $(-\infty; +\infty)$. Следствието от това е, че когато $|\alpha_s - \alpha_e| > 2\pi$, варирането на α в диапазон $[\alpha_s; \alpha_e]$, където $\alpha_s, \alpha_e \in \mathbb{R}$, ще предизвика (многократно) обхождане на елипсата от радиус-вектора.

Нека α_s определя точка $P_s(x_s, y_s)$ от ε с радиус вектор \vec{r}_s , а α_e определя точка $P_e(x_e, y_e)$ от ε с радиус вектор \vec{r}_e . Знаем (от [33, 22-24 с.]), че векторите \vec{r}_s

и \vec{r}_e са линейно независими $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_e & y_e \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_e & y_e \end{pmatrix} = 2$, и

двойката (\vec{r}_s, \vec{r}_e) е дясна като задава положителна посока на обхождане \Leftrightarrow

$\Delta > 0$ и лява като задава отрицателна посока на обхождане $\Leftrightarrow \Delta < 0$ (фиг. 2.5).

Следователно, ако $\alpha_s < \alpha_e$ - точките от дъгата се обхождат в положителна посока, ако $\alpha_s > \alpha_e$ - в отрицателна посока, а ако $\alpha_s = \alpha_e$ - не съществува дъга. P_s е наречена *начална точка*, P_e - *крайна точка*, α_s - *начален ъгъл* и α_e - *краен ъгъл*.

Определение 2.1 Положителна дъга от ε (фиг. 2.5) ще наричаме кривата получена чрез движението на радиус-вектора \vec{r} в положителна посока от P_s до

P_e когато $\Delta > 0$ за $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$. *Отрицателна дъга* от ε ще наричаме кривата получена чрез движението на радиус-вектора \vec{r} в отрицателна посока от P_s до P_e когато $\Delta < 0$ за $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$.

Задача 2.1 Да се построи дъга от елипса представена чрез NURBS крива. Елипсата да е в каноничен вид спрямо K_l с радиус по $Ox - a$ и радиус по $Oy - b$. Дъгата да се задава със стартов ъгъл α_s и краен ъгъл α_e , на които съответстват точките P_s и P_e от кривата, $\alpha_s, \alpha_e \in \mathbb{R}$. Ако $\alpha_s < \alpha_e$ дъгата да се построява в положителна посока; ако $\alpha_s > \alpha_e$ - дъгата да се построява в отрицателна посока; ако $\alpha_s = \alpha_e$ - не се построява дъга.

2.3.2. Подход за решаване на задача 2.1

Първо се разглежда дъга γ_c от единичната окръжност c определена от α_s и α_e (фиг. 2.5). Намира се представянето ѝ чрез NURBS крива. След това, чрез подходяща афинна трансформация на получената крива се намира представянето на търсената дъга γ_e , която е също определена от α_s и α_e , но принадлежаща на елипсата ε .

2.3.4. Алгоритъм за построяване на дъга γ_e от единичната окръжност c

Дефиниран е алгоритъм, който намира дъга от единичната окръжност c определена от α_s и α_e ($\alpha_s, \alpha_e \in (-\infty; +\infty)$) с условието $\alpha_s < \alpha_e$, т.е. изгражда само положителна дъга. Цялата дъга се разделя на сегменти, всеки от които е най-много 90° .

Дефиниран е алгоритъм за изграждане на цялостна дъга γ_e от c съставена от няколко по-малки сегмента.

Алгоритъм 2.1 ComputeNURBSCircularArc

Вход: α_s (начален ъгъл), α_e (краен ъгъл), $segments$ (брой на сегментите);

Изход: aP (масив от CV), nNP (брой на CV), aK (възлов вектор), nNK (брой на възлите);

Процедура:

- 1.) Определя се броя на дъгите (по-малки от 90°).
- 2.) Ако броят на дъгите е по-голям от 0 то
 - намира се броя на контролните върхове;
 - намират се контролните върхове на всеки сегмент;
 - определя се възловия вектор.
 в противен случай "Край".
- 3.) Край.

2.3.5. Представяне на дъга от елипса чрез дъга от единичната окръжност представена чрез NURBS крива от втора степен

След като е направено представянето на дъгата от единичната окръжност като NURBS крива, е извършва трансформирането ѝ до дъгата от елипсата ε чрез прилагане на трансформация на мащабиране. В резултат получаваме търсената

дъга γ_ε представена като NURBS крива от втора степен. Алгоритъм 2.2 съдържа стъпките на тази процедура.

Алгоритъм 2.2 ComputeNURBSEllipticalArc

Вход: $a, b, \alpha_s, \alpha_e, segments$;

Изход: aP, nNP, aK, nNK ;

Процедура:

- 1.) Определя се посоката на дъгата.
- 2.) Изчислява се NURBS кривата като окръжност с ComputeNURBSCircularArc.
- 3.) Ако е нужно се обръща реда на контролните върхове в NURBS представянето с ReverseOrderOfTheControlPoints.
- 4.) Преобразува се всеки контролен връх от c в контролен връх от ε .
- 5.) Край.

2.4. Представяне на дъга от парабола чрез NURBS крива

Задача 2.2 Да се начертае дъга от парабола π представена като NURBS крива. Параболата да се специфицира с параметрите от нейните СПУ.

Дъга от параболата π се специфицира като се задават начална и крайна стойност на фокалния параметър p , а именно $p \in [p_s, p_e], p \neq 0, p_s, p_e \in \mathbb{R}$.

Нека u_s определя точката $P_s(x_s, y_s)$ от π и u_e определя точката $P_e(x_e, y_e)$ от π (фиг. 2.8 от дисертацията). P_s е наречена *начална точка*, P_e - *крайна точка*, u_s - *начална стойност на параметъра* и u_e - *крайна стойност на параметъра*. Така варирайки параметъра u от u_s до u_e в уравнение (2.6) се получава дъга от π . Нека тази дъга да бъде δ_π .

На базата на тези означения е изказано следното твърдение:

Твърдение 2.1 Графиката на дъгата δ_π от параболата π и NURBS кривата линия γ зададена с уравнение (1.15) за степен $p=2$, възлов вектор

$U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ и контролни върхове $P_s = (u_s^2, 2pu_s)$,

$P_1 = \left(u_e \left((u_e - u_s)^2 (u_e + u_s) - u_e \right), p(u_e - u_s)^2 (u_e + u_s) \right)$, $P_e = (u_e^2, 2pu_e)$ с

тегла $w_0 = w_1 = w_2 = 2p$ са идентични.

Построяването на NURBS кривата на дъга от параболата δ_π следва директно от Твърдение 2.1. Тук обаче възниква въпроса относно построяването на дъга от парабола чрез NURBS крива, но с произволен брой на сегментите с цел възможност за локална модификация. За тази цел е направено подразделяне чрез вмъкване на нови възли във възловия вектор и добавяне на контролни върхове на получената NURBS крива със следния алгоритъм:

Алгоритъм 2.3 SubdivideTheNURBSCurve

Вход: $segments, P$;

Изход: aP, nNP, aK, nNK ;

Процедура:

- 1.) Определят се броя на контролните върхове, броя на възлите и възловия вектор.
- 2.) На базата на броя на сегментите се подразделя NURBS кривата.
- 3.) Край.

2.5. Представяне на дъга от хипербола чрез NURBS крива

Определение 2.2 Дясно крило на хиперболата χ ще наричаме кривата на χ лежаща в I кв. и IV кв. на K_I и ще я бележим с χ_R (*R-right*), а ляво крило на χ ще наричаме кривата на χ лежаща в II кв. и III кв. на K_I и ще я бележим с χ_L (*L-left*) (фиг. 2.9 от дисертацията).

Задача 2.3 Да се начертае дъга от хипербола зададена със специфициращите я параметри от нейните СПУ като тази част от хиперболата да бъде представена като NURBS крива.

Дъгата, която трябва да се начертае, се определя от $a, b > 0$ и варирането на параметъра α в някакъв зададен диапазон $[\alpha_s, \alpha_e]$. По дефиниция:

$\alpha \in [0; 2\pi], \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Това може да бъде записано и така

$\alpha \in \left(\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2} \right) \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$. Следователно $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$

определя χ_R , а $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$ определя χ_L . За да се начертае непрекъсната

дъга от хипербола следва, че $\alpha_s, \alpha_e \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$ или $\alpha_s, \alpha_e \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$.

Имайки предвид това, е направено следното определение:

Определение 2.3 Дъга от χ_R или χ_L ще наричаме кривата получена от варирането на параметъра α в интервала $[\alpha_s; \alpha_e]$ от СПУ на χ , където

$\alpha_s, \alpha_e \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$ или $\alpha_s, \alpha_e \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$, т.е. α определя

непрекъсната крива от χ_R или χ_L . Дъга от χ_R или χ_L ще бележим с β .

Определение 2.4 Дълбочина на т. $M \in \chi_R$ ($M \in \chi_L$) ще наричаме разстоянието, определено от върха A_1 (A_2) на хиперболата и ортогоналната проекция M' на т. M върху абсисната ос Ox . Дълбочината ще бележим с d .

Лема 2.1 Дълбочината на т. M , получена за стойност на параметъра $\alpha = \alpha^*$,

от χ_R или χ_L е $d = \frac{a}{|\cos \alpha^*|} - \text{sign}(\cos \alpha^*) a$.

Определение 2.5 Дълбочинно отместване на т. $M \in \chi_R$ ($M \in \chi_L$) получена за ъгъл $\alpha = \alpha^*$ от СПУ (2.8) на χ , ще наричаме числото

$$d_{\alpha^*} = \frac{a}{\cos \alpha^*} - \text{sign}(\cos \alpha^*) a.$$

Първо е разгледано крилото на хиперболата χ_R .

Твърдение 2.2 За всяка перпендикулярна на абцисната ос права $g_R: x = a + d$, където $d > 0$ следва, че за дъгата от крилото χ_R , стегната от хордата $R_0 R_2$, с краища пресечните точки на g_R и χ_R , съществува нейно точно представяне с рационална крива на Безие β_R от втора степен. Хомогенните координати на характеристичните точки R_0, R_1, R_2 на β_R са:

$$R_0^w = \left(a(a+d), b\sqrt{d^2 + 2ad}, a \right), R_1^w = \left(a^3, 0, (a+d)^2 \right),$$

$$R_2^w = \left(a(a+d), -b\sqrt{d^2 + 2ad}, a \right), \text{ където } d \text{ е дълбочината на т. } R_0 \text{ и } R_2.$$

Заради симетрията на χ относно Oy за представянето на лявото крило χ_L на хиперболата, е формулирано и аналогично доказващото се на Твърдение 2.2

Твърдение 2.3 За всяка перпендикулярна на абцисната ос права $g_L: x = -(a+d)$, където $d > 0$ следва, че за дъгата от крилото χ_L , стегната от хордата $L_0 L_2$, с краища пресечните точки на g_L и χ_L , съществува нейно точно представяне с рационална крива на Безие β_L от втора степен. Хомогенните координати на характеристичните точки L_0, L_1, L_2 на β_L са:

$$L_0^w = \left(-a(a+d), b\sqrt{d^2 + 2ad}, a \right), L_1^w = \left(-a^3, 0, (a+d)^2 \right),$$

$$L_2^w = \left(-a(a+d), -b\sqrt{d^2 + 2ad}, a \right), \text{ където } d \text{ е дълбочината на т. } L_0 \text{ и т. } L_2.$$

Твърдение 2.4 За всяка дъга от χ_R или χ_L , определена от два ъгъла α_s и α_e , където $\cos \alpha_s = \cos \alpha_e$ (следователно: 1) $\alpha_s, \alpha_e \in \chi_R$ или $\alpha_s, \alpha_e \in \chi_L$; 2) $d_{\alpha_s} = d_{\alpha_e}$), и параметрите a и b , съществува представяне чрез рационална крива на Безие β от втора степен с трите характеристични точки в хомогенни координати:

$$M_0^w = (a, p.b.\text{tg} \alpha_s, p), M_1^w = (a.p^2.w_1, 0, w_1 = \text{sign}(p)(1+p^2)-p),$$

$$M_2^w = (a, p.b.\text{tg} \alpha_e, p), \text{ където } p := \cos \alpha_s = \cos \alpha_e.$$

Нека α_s определя точката $P_s(x_s, y_s)$ от χ с радиус-вектор \vec{r}_s и α_e определя точката $P_e(x_e, y_e)$ от χ с радиус-вектор \vec{r}_e . Знае се ([33], 22-24 с.), че

$$1) \text{ векторите } \vec{r}_s \text{ и } \vec{r}_e \text{ са линейно независими} \\ \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_e & y_e \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_e & y_e \end{pmatrix} = 2 \text{ и } 2) \text{ двойката } (\vec{r}_s, \vec{r}_e) \text{ е дясна и}$$

определя положителна посока на обхождане на точките от равнината $\Leftrightarrow \Delta > 0$, и тя е лява и определя отрицателна посока на обхождане на точките от равнината $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

Определени 2.6 Положителна дъга от χ_R или χ_L ще наричаме кривата получена чрез движението на радиус-вектора \vec{r} в положителна посока от P_s до P_e ($P_s, P_e \in \chi_R$ или $P_s, P_e \in \chi_L$) когато $\Delta > 0$ за $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$. Отрицателна дъга от χ_R или χ_L ще наричаме кривата получена чрез движението на радиус-вектора \vec{r} в отрицателна посока от P_s до P_e когато $\Delta < 0$ за $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$.

Всяка положителна или отрицателна дъга от χ_R или χ_L е непрекъсната.

Обобщена задача: Непрекъсната дъга χ_β от χ да се представи като NURBS крива и да бъде: положителна ако $\Delta > 0$ или отрицателна ако $\Delta < 0$. Дъгата χ_β да се определя чрез a, b, α_s и α_e .

Твърдение 2.5 За всяка дъга χ_β от χ_R или χ_L (фиг. 2.9), определена от два ъгъла α_B и α_L , където $|\alpha_B| > |\alpha_L|$ (B -Bigger, L -Less), и параметрите a и b , съществува точно представяне чрез NURBS крива γ (за степен $p = 2$), възлов вектор $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ и с трите контролни върха в хомогенни координати:

$$\gamma: \begin{cases} M_0^w = (a, b.\sin \alpha_B, \cos \alpha_B) \\ M_0^{0w} = ((1-t^*).a + \text{sign}(\cos \alpha_B).t^*.a.\cos \alpha_B, (1-t^*).b.\sin \alpha_B, w.\cos \alpha_B), \\ M_0^{1w} = (a, b.\sin \alpha_L, \cos \alpha_L) \end{cases}$$

$$\text{където } w = (1-t^*) + t^* \cdot (\text{sign}(p_B)((1/p_B) + p_B) - 1), \quad p_B = \cos \alpha_B, \quad t^* = \frac{p}{1+p},$$

$$p = \sqrt{\frac{|M_0 Q|}{|Q M_2|}}.$$

Построяването на NURBS кривата, която представлява дъгата от хиперболата χ следва директно от Твърдение 2.5. Подразделянето на получената NURBS крива се прави чрез прилагане на Алгоритъм 2.3.

2.6 Изводи

От направените теоретични разработки в Глава II са направени следните изводи:

1. Предложен е един подход за представяне на дъга от елипса чрез NURBS крива от втора степен. Той позволява построяване на дъги за стойности на параметъра α от уравнение (2.4) по-големи от $|360^\circ|$. Подходът е реализиран в Алгоритъм 2.2, който позволява построяване на кривата с отчитане на ориентацията на нейното обхождане и с произволен брой сегменти, предоставящи възможност за локална модификация. Тези резултати бяха докладвани и обсъждани на международната конференция "Автоматика и информатика", София (2005 г.).

2. Реализирано е представяне на дъга от парабола чрез NURBS крива от втора степен, което представяне следва директно от Твърдение 2.1. Предимството на това преставане е, че стойностите на координатите на контролните върхове и техните тегла се пресмятат по формули, т.е. избягва се алгоритмичното изчисляване (както е в методите на Пигъл, на които беше направен анализ в раздел 1.4). Предложен е алгоритъм (Алгоритъм 2.3) за подразделяне на NURBS кривата, предоставящо възможност за локална модификация. Получените резултати бяха докладвани на международната конференция "Автоматика и информатика", София (2005 г.).

3. Дадено е решение на задачата за представяне на дъга от хипербола чрез NURBS крива от втора степен, което представяне следва директно от Твърдение 2.5. Предимството на това преставане е, че стойностите на координатите на контролните върхове и техните тегла се изчисляват по формули, т.е. избягва се алгоритмичното пресмятане (както е в методите на Пигъл). Възможността за локална модификация на кривата се постига чрез прилагането на Алгоритъм 2.3. Подходът за това представяне е докладван на Деветнадесетата международна конференция "SAER", Варна (2005 г.).

4. Всяка една от разгледаните криви (дъги от елипса, парабола и хипербола) е представена чрез NURBS крива от втора степен с уравнение от вида:

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n R_{i,2}(t) P_i, \quad t \in [0;1], \quad (2.19)$$

където P_i са $n+1$ контролни върха, с тегла w_i , възлов вектор

$T = \{0, 0, 0, \tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \dots, \tau_m, \tau_m, 1, 1, 1\}$ и състояща се от $m+1$ на брой сегменти.

При промяна на позицията на контролен връх P_i или стойността на неговото тегло, кривата се променя само за $t \in [t_i, t_{i+3}]$, $i = 0, \dots, n$.

Представянето на кониките с криви от този вид води след себеси всички предимства на NURBS кривите. Освен това, представената по този начин NURBS крива, позволява модифицирането в отделни нейни сегменти да става с изключителна лекота. Представянето на трите типа криви в един и същ модел прави моделирането с тях еднотипно и интуитивно. Това повишава лекотата при работа с тях, следствие от което се повишава и производителността. Предложените NURBS модели на квадратичните криви са докладвани на международната конференция "Doctoral-Students Conference", Гърция (2007 г.) и на международната конференция "UniTech", Габрово (2004 г.).

3. ПРЕДСТАВЯНЕ НА ПОВЪРХНИНТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН ЧРЕЗ NURBS ПОВЪРХНИНИ

За построяването на моделите на повърхнините се използват NURBS моделите на кривите от втора степен, които са разработени във втора глава. Определянето на повърхнината за построяване се прави въз основа на стойности на параметрите от скаларно-параметричните ѝ уравнения.

3.1. Аналитично представяне на повърхнините от втора степен

В този раздел първо са дадени аналитичните представяния на квадратичните повърхнини базирани се основно на [33].

Повърхнините от втора степен включват класовете от ротационни и праволинейни такива. В [33, 172-182 с.] са характеризирани праволинейните и ротационните повърхнини от втора степен. Тук цитираме само двете заключителни теореми:

Теорема 3.1 Реалните, ротационни повърхнини от втора степен с ротационни оси Oz са: сфера (елипсоид при $a = b = c$); елипсоид при $a = b$; параболоид при $a = b$; хиперболоид при $a = b$; двоен хиперболоид при $a = b$; конус при $a = b$; елиптичен цилиндър при $a = b$.

Теорема 3.2 Реалните, праволинейни повърхнини от втора степен са: конус; елиптичен цилиндър; параболичен цилиндър; хиперболичен цилиндър; хиперболоид; хиперболичен параболоид.

След като се изследват сеченията на всяка една от повърхнините с всяка от равнините $\alpha_i: z = t (\parallel Oxy), \beta_p: y = p (\parallel Oxz), \gamma_q: x = q (\parallel Oyz)$,

се прави заключение за това как те разсложават съответната повърхнина. Главната цел е да се открият подходящите генератори (линии, с помощта на които да се изграждат повърхнините). Установено е, че всички повърхнини споменати в Теорема 3.1 и Теорема 3.2, с изключение на хиперболичния параболоид (HP), имат генератори, т.е. могат да бъдат построени чрез ротационно или праволинейно движение на генератор.

Следователно, ако съществуват методи за построяване на ротационна и праволинейна NURBS повърхнина на базата на генератор (NURBS крива), тогава ще е възможно построяването на осемте квадратични повърхнини (частните им случаи) посочени в Теорема 3.1 и Теорема 3.2 като изключение се явява HP .

3.2. Представяне на повърхнините от втора степен чрез биквадратни NURBS повърхнини

Квадратичните повърхнини са изследвани и разделени в три групи по отношение на методите за тяхното представяне чрез NURBS повърхнини:

- елипсоид (E), елиптичен параболоид (P), прост хиперболоид (H), двоен хиперболоид (DH) и конус (C);
- цилиндри: елиптичен цилиндър (EC), параболичен цилиндър (PC) и хиперболичен цилиндър (HC);
- хиперболичен параболоид (HP).

За генератори при построяването на NURBS повърхнините са използвани NURBS моделите на квадратичните криви предложени във втора глава.

Повърхнините се разглеждат в дясна декартова координатна система $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ($K = Oxyz$) с представянията им в каноничен вид и в тази

координатна система се търсят представянията им в NURBS модела.

3.2.1. Представяне на E, P, H, DH и C чрез биквадратни NURBS повърхнини

Общото между тези повърхнини (E , P , H , DH и C) е, че техни частни случаи (E при $a=b$ и $a=b=c$ (сфера (S)); P при $a=b$; H при $a=b$; DH при $a=b$ и C при $a=b$) могат да се построят чрез ротация на генератор. След като се открият генераторите те се представят като NURBS криви.

3.2.1.1. Построяване на ротационна биквадратна NURBS повърхнина

Нека $\gamma(v) = \sum_{j=0}^m R_{j,2}(v)P_j$ да бъде NURBS крива от втора степен дефинирана върху възлов вектор V , която ще се завърта около ос. Избираме $\gamma(v)$ да лежи в Oxz равнината с $n+1$ контролни върхове $P_j(x_j, y_j, z_j)$ с тегла w_j и възлов вектор $V = \{0, 0, 0, v_1, v_1, v_2, v_2, \dots, v_k, v_k, 1, 1, 1\}$. Кривата $\gamma(v)$ се завърта около оста Oz .

Повърхнината, която се получава е отбелязана с $S(u, v)$, тогава $S(u, v)$ трябва да има следните характеристики: 1) за фиксирано \bar{u} , $S(\bar{u}, v)$ е кривата $\gamma(v)$ завъртяна на някакъв ъгъл около Oz оста; 2) за фиксирано \bar{v} , $S(u, \bar{v})$ е дъга от окръжност, която лежи в равнина перпендикулярна на Oz оста и с център на Oz оста.

Възловият вектор U се избира да бъде от вида $U = \{0, 0, 0, u_1, u_1, u_2, u_2, \dots, u_h, u_h, 1, 1, 1\}$ и теглата да са $w_i = \{1, \sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2, \dots, 1, \sqrt{2}/2, 1\}$, за $i = 0, \dots, n$. Теглата $w_i = \sqrt{2}/2$ за $i = 1, 3, \dots, n-1$, защото това е стойността на теглото на междинната характеристична точка при представянето на дъга от окръжност. Тогава търсената повърхнина има формата:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,2}(u, v) P_{i,j}. \quad (3.26)$$

Възловите вектори са U и V . Контролните върхове и теглата им се определят както следва: За $i = 0$, $P_{i,j} = P_{0,j} = P_j$. Контролните върхове $P_{i,j}$ за фиксирано j , всички лежат в равнината $z = z_j$. Теглата са определени чрез произведенията на

w_j с кръговите тегла w_i , т.е. за фиксирано j , $w_{0,j} = w_j$, $w_{1,j} = \sqrt{2}/2 w_j$, $w_{2,j} = w_j$, $w_{3,j} = \sqrt{2}/2 w_j$, $w_{4,j} = w_j, \dots, w_{n-1,j} = \sqrt{2}/2 w_j$, $w_{n,j} = w_j$.

За построяване на NURBS ротационна повърхнина е разработен

Алгоритъм 3.1 ConstructBiquadraticRevolvedSurface

Вход: N , $arcs$, $nCPs$, $alphas$, $alphae$, seg_rev ;

Изход: P , u_seg , v_seg ;

Процедура:

1.) Определя се ъгъла на ротиране на кривата и се осигурява правилна посока на завъртане.

2.) NURBS кривата се поставя в началния ъгъл.

3.) Конструира се повърхнината като се използва формулата за ротация на точка в пространството около оста Oz и метода за изчисляване на междинните контролни върхове и теглата им на всеки сегмент даден по-горе.

4.) Край.

3.2.1.2. Построяване на NURBS елипсоид-повърхнина (NE-повърхнина)

Задача 3.1 Да се построи повърхнина на елипсоид по зададени стойности на параметрите $a, b, c > 0$ и зададени интервали за u и v като $u \in [u_s, u_e]$, $u_s, u_e \in [-\pi/2; \pi/2]$ и $v \in [v_s, v_e]$, $v_s, v_e \in J \subseteq \mathbb{R}$, представена чрез биквадратна NURBS повърхнина.

За решаването на задачата е приложен алгоритъм 2.1, чрез който се построява дъга от единичната сфера в равнината $Oxz: y=0$ и му подаваме следните стойности на параметрите: $a=b=1$, $\alpha_s = u_s$ и $\alpha_e = u_e$, и с желан брой на подразделяне на NURBS кривата. Получава се генераторната NURBS крива K_N с контролни върхове N_j : $K_N(v) = \sum_{j=0}^m R_{j,2}(v)N_j$.

След това се прилага метода даден в точка 3.2.1.1. (реализиран с Алгоритъм 3.1) за конструирание на NURBS повърхнина чрез ротация на NURBS крива от ъгъл v_s до ъгъл v_e , за се намерят $P_{i,j}$ - контролните върхове на получената чрез

ротирание NURBS повърхнина $E_P(u, v)$. Тази повърхнина е точно парче от единичната сфера представено като биквадратна NURBS повърхнина:

$$E_P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,2}(u, v) P_{i,j}.$$

Накрая се извършва мащабиране на $E_P(u, v)$ с коефициенти на мащабиране

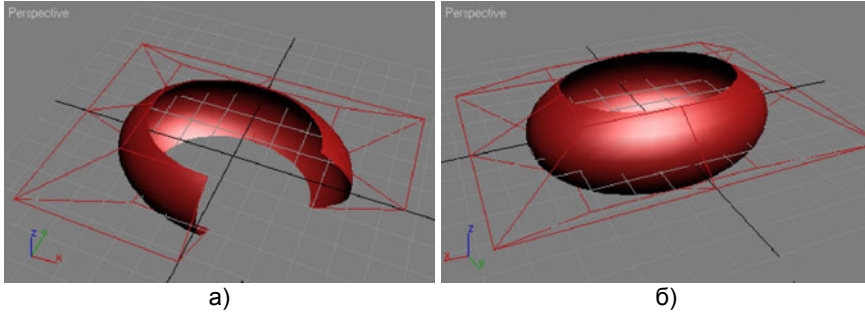
$$a, b, c: Q_{i,j} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P_{i,j}, \text{ за } j = 0, \dots, m. \text{ Получава се биквадратната NURBS}$$

повърхнина $E_Q(u, v)$, чрез която точно се представя E , зададена с параметрите

a, b, c , $u \in [u_s, u_e]$, $u_s, u_e \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и $v \in [v_s, v_e]$, $v_s, v_e \in J \subseteq \mathbb{R}$, където

$$E_Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,2}(u, v) Q_{i,j}. \quad (3.27)$$

На фигура 3.6 могат се видят две NURBS елипсоид-повърхнини (NE-повърхнини) изобразени с характеристичните си мрежи, състоящи се от контролните върхове $Q_{i,j}$.



Фиг. 3.6 а) NE-повърхнина за $a = 40$, $b = 30$, $c = 20$, $u_s = -45^\circ$, $u_e = 45^\circ$; $v_s = 0^\circ$, $v_e = 270^\circ$; б) NE-повърхнина за $a = 40$, $b = 30$, $c = 20$, $u_s = -45^\circ$, $u_e = 45^\circ$; $v_s = 0^\circ$, $v_e = 360^\circ$.

3.2.1.3. Построяване на NURBS параболоид-повърхнина (NP-повърхнина)

Задача 3.2 Да се построи повърхнина на параболоид по зададени стойности на параметрите $a, b > 0$ и зададени интервали за u и v като $u \in [u_s; u_e]$, $u_s, u_e \in J \subseteq \mathbb{R}^+$ и $v \in [v_s; v_e]$, $v_s, v_e \in J \subseteq \mathbb{R}$ (от уравнение (3.17)), представена чрез биквадратна NURBS повърхнина.

Генераторната крива на тази повърхнина аналитично е дадена с уравнение (3.21) от дисертацията. Тя се намира в равнината Oxz и представлява дъга от парабола. Тази крива се представя чрез NURBS крива от втора степен от вида даден с уравнение (2.16) от дисертацията и получена чрез метода даден в раздел 2.4.

При ротационно построяване на биквадратна NURBS повърхнина по метода даден в точка 3.2.2.1. се получава част от повърхнината на параболоид в частния случай когато $a = b$ и определена от параметрите u_s, u_e, v_s, v_e . Нека параболоида при $b = a$ да е $P_{b=a}$. Биквадратната NURBS повърхнина представляваща $P_{b=a}$ е от вида даден в точка 3.2.1.1. (реализиран с Алгоритъм 3.1) изразена с уравнение

$$(3.26) \text{ от дисертацията. Тя е записана така: } P_p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,2}(u, v) P_{i,j}.$$

Тогава параболоида P се получава чрез мащабиране на $P_{b=a}$ с матрица на

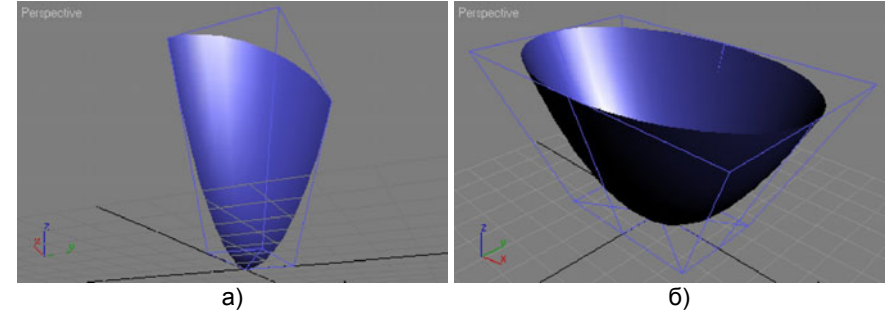
$$\text{трансформация } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}: P = T.P_{b=a} \text{ (аналогично на Лема 3.1). По този}$$

начин е получено и NURBS представянето на P . Получават се контролните върхове $Q_{i,j} = T.P_{i,j}$ на NURBS повърхнината. А уравнението ѝ се задава чрез:

$$P_Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,2}(u, v) Q_{i,j}. \quad (3.28)$$

На фигура 3.7 могат се видят две NURBS параболоид-повърхнини (NP-повърхнини) изобразени с характеристикните си мрежи (състоящи се от

контролните върхове $Q_{i,j}$).



Фиг. 3.7 а) NP-повърхнина за $a = 5$, $b = 3$, $u_s = 0$, $u_e = 10$, $v_s = 0^\circ$, $v_e = 90^\circ$; б) NP-повърхнина за $a = 5$, $b = 3$, $u_s = 0$, $u_e = 10$, $v_s = 0^\circ$, $v_e = 360^\circ$.

*Аналогично на подхода приложен при построяването на NURBS параболоид-повърхнина са получени и NURBS моделите на H , DH и C съответно в точките 3.2.1.4, 3.2.1.5 и 3.2.1.6 от дисертацията.

3.2.2. Представяне на цилиндрите чрез биквадратни NURBS повърхнини

Повърхнините на цилиндрите се определят за построяване чрез параметрите от СПУ за конкретната повърхнина. И трите цилиндъра имат генератори, които се представят чрез NURBS криви чрез моделите предложени в Глава II.

Задача 3.6 Да се построи повърхнина на елиптичен цилиндър (уравнение 3.13 от дисертацията) по зададени стойности на параметрите $a, b > 0$ и зададени интервали за α (от уравнение (3.32) от дисертацията) и t като $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$, $\alpha_s, \alpha_e \in J \subseteq \mathbb{R}$ и $t \in [t_s; t_e]$, $t_s, t_e \in J \subseteq \mathbb{R}$, представена чрез биквадратна NURBS повърхнина (NEC- повърхнина).

Задача 3.7 Да се построи повърхнина на хиперболичен цилиндър (уравнение 3.14 от дисертацията) по зададени стойности на параметрите $a, b > 0$ и зададени интервали за α (от уравнение (3.33) от дисертацията) и t като $\alpha \in [\alpha_s; \alpha_e]$, $\alpha_s, \alpha_e \in J \subseteq \mathbb{R}$ и $t \in [t_s; t_e]$, $t_s, t_e \in J \subseteq \mathbb{R}$, представена чрез биквадратна NURBS повърхнина (NHC- повърхнина).

Задача 3.8 Да се построи повърхнина на параболичен цилиндър (уравнение 3.15 от дисертацията) по зададени стойности на параметрите $p > 0$, $u \in [u_s; u_e]$, $u_s, u_e \in J \subseteq \mathbb{R}$ (от уравнение (3.34) от дисертацията) и $t \in [t_s; t_e]$, $t_s, t_e \in J \subseteq \mathbb{R}$, представена чрез биквадратна NURBS повърхнина (NPC- повърхнина).

Всеки един от генераторите се представя като NURBS крива лежаща в равнината Oxy с $n+1$ контролни върхове $P_i(x_i, y_i, z_i)$ с тегла w_i и възлов вектор $U = \{0, 0, 0, u_1, u_1, u_2, u_2, \dots, u_k, u_k, 1, 1, 1\}$ (следва от Извод 4 направен в раздел 2.6).

За построяването на цилиндрична повърхнина е избран единичен вектор

$\vec{Q} = (0,0,1)$ ако $t_s < t_e$ и $\vec{Q} = (0,0,-1)$ ако $t_s > t_e$, и $d = |t_s - t_e|$. Числото d е наречено *дистанция*. Кривата γ се поставя в начална позиция като $z_i = t_s, i = 0, \dots, n$. $S(u, v)$ е търсената NURBS повърхнина. Тогава S е построена чрез замитане на γ на дистанция d по направление на \vec{Q} . Обозначавайки параметъра за посоката на замитане с v , $0 \leq v \leq 1$, тогава $S(u, v)$ трябва да удовлетворява двете условия:

1) за фиксирано \bar{u} , $S(\bar{u}, v)$ е права линия от $\gamma(\bar{u})$ до $\gamma(\bar{u}) + d\vec{Q}$;

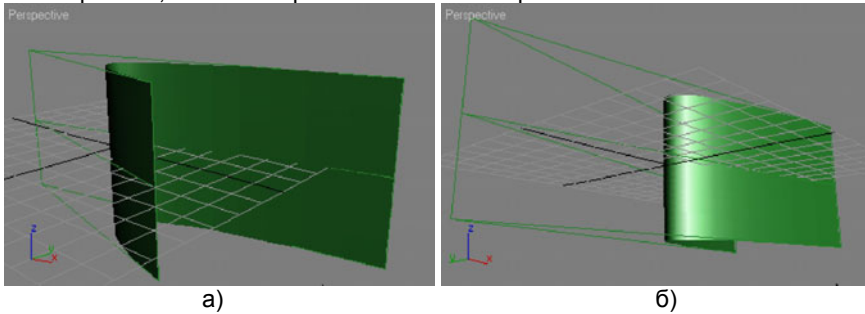
2) за фиксирано \bar{v} , $S(u, \bar{v}) = \gamma(u) + \bar{v}d\vec{Q} = \sum_{i=0}^n R_{i,2} (P_i + \bar{v}d\vec{Q})$.

Възможност за локална модификация на получената повърхнина е осигурена чрез подразделяне на $S(\bar{u}, v)$ по направлението v . $S(\bar{u}, v)$ е представена така:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2,j,2}(u, v) P_{i,j}, \quad (3.37)$$

където $V = \{v_0 = 0, 0, 0, v_1, v_1, \dots, v_{h-1}, v_{h-1}, v_h = 1, 1, 1\}$ като h е броят на сегментите, а v_l са избирани така: $f = \frac{1}{h}$, $v_0 = 0$ и $v_{l+1} = v_l + f$, за $l = 0, \dots, h-1$. Контролните върхове са $P_{i,0} = P_i$ и $P_{i,j}$, $j = 1, \dots, m$ определени така $x_{i,j} = x_{i,0}$, $y_{i,j} = y_{i,0}$, $z_{i,j} = z_{i,0} + j \cdot q$, където $q = \frac{d}{2h}$. Теглата са $w_{i,j} = w_i$.

На фигури от 3.13 до 3.15 от дисертацията могат се видят повърхнините на EC , HC и PC представени чрез биквадратни NURBS повърхнини съответно NEC-повърхнини, NHC-повърхнини и NPC-повърхнини.



Фиг. 3.15 а) NPC-повърхнина за $p = 5$, $u_s = -10$, $u_e = 30$, $t_s = -30$, $t_e = 30$;

б) NPC-повърхнина за $p = 5$, $u_s = -30$, $u_e = 30$, $t_s = -30$, $t_e = 30$.

3.2.3. Представяне на хиперболичен параболоид чрез биквадратна NURBS повърхнина

Задача 3.9 Да се построи повърхнина на хиперболичен параболоид по зададени стойности на параметрите $a, b > 0$, представена чрез биквадратна NURBS повърхнина (NHP-повърхнина).

Хиперболичния параболоид е симетрична повърхнина спрямо равнините Oxz и Oyz . Показано е, че ако се фиксира $y = p$ ($HP \cap \beta_p : y = p$), то всички точки от HP с $y = p$ образуват параболите π_p . Поради това се поставя x да се изменя в диапазона $x \in [x_s, x_e]$ и се намират съответните z и точките с тези координати изграждат π_p . Аналогично е показано, че ако се фиксират $x = q$ ($HP \cap \gamma_q : x = q$), то всички точки от HP с $x = q$ образуват параболите π_q . Поради това се поставя y да се изменя в диапазона $y \in [y_s, y_e]$ и се намират съответните z и точките с тези координати изграждат π_q .

Хиперболичният параболоид се ограничава с равнините $HP \cap \gamma_{xs} : x = x_s$, $HP \cap \gamma_{xe} : x = x_e$, $HP \cap \beta_{ys} : y = y_s$, $HP \cap \beta_{ye} : y = y_e$. За да е напълно определена повърхнината на HP , която се построява, и симетрична спрямо Oxz и Oyz , е поставено условието $x_s = -x_e$ и $y_s = -y_e$. HP се построява за $x \in [x_s, x_e]$ и $y \in [y_s, y_e]$. Така повърхнината HP_d от HP (фиг. 3.16), която е получена е изградена от параболични криви в направление по x и по направление на y . От това следва, че HP_d може да се изгради като биквадратна NURBS повърхнина от вида:

$$HP_d(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 R_{i,2,j,2}(u, v) P_{i,j} \quad (3.40)$$

с възлови вектори без вътрешни възли $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ и $V = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$, замествайки направлението x с направлението u , и направлението y с направлението v в NURBS базиса.

Контролните върхове $P_{0,0}, P_{0,2}, P_{2,0}, P_{2,2}$ са получени от поставените ограничителни стойности x_s, x_e, y_s, y_e и z координати изчислени от уравнение (3.18) от дисертацията. Контролните върхове $P_{0,1}, P_{1,0}, P_{1,2}, P_{2,1}$ са намерени като пресечни точки на контурните линии на повърхнината, които са параболите $\pi_{p=y_s}$, $\pi_{p=y_e}$, $\pi_{q=x_s}$, $\pi_{q=x_e}$. Повърхнината на HP преминава през т. $O(0,0,0)$ и поради симетрията на повърхнината HP_d спрямо т. O следва, че HP_d преминава през т. O за $u = v = 1/2$. Тогава контролният връх $P_{1,1}(x_{1,1}, y_{1,1}, z_{1,1})$ е определен от системата $S(1/2, 1/2) = (0, 0, 0)$ с единствени неизвестни $x_{1,1}, y_{1,1}, z_{1,1}$.

Ето резултатите, които са получени за контролните върхове $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2$, които определят повърхнината:

$$P_{00}(x_s, y_s, dx - dy), \quad P_{01}(x_s, 0, dx + dy), \quad P_{02}(x_s, y_e, dx - dy)$$

$$P_{10}(0, y_s, -dx - dy), \quad P_{11}\left(0, 0, -\sum \left(N_{1,2} \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\right), \quad P_{12}(0, y_e, -dx - dy),$$

$$P_{20}(x_e, y_s, dx - dy), \quad P_{21}(x_e, 0, dx + dy), \quad P_{22}(x_e, y_e, dx - dy)$$

където $dx = \frac{x_s^2}{2a^2}$, $dy = \frac{y_s^2}{2b^2}$ и

$$\Sigma = N_{0,2} \cdot (N_{0,2} \cdot z_{00} + N_{1,2} \cdot z_{01} + N_{2,2} \cdot z_{02}) +$$

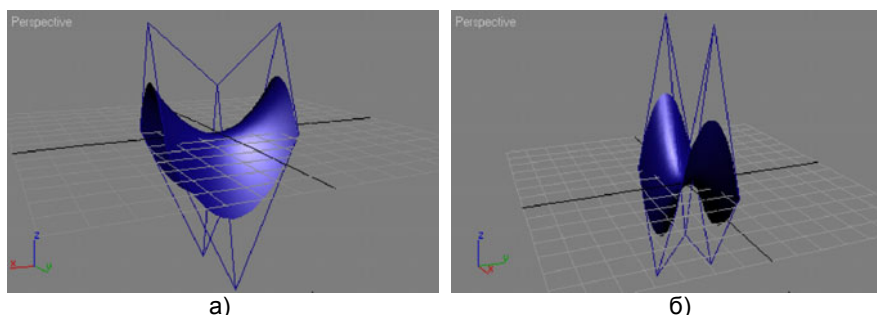
$$N_{1,2} \cdot (N_{0,2} \cdot z_{10} + N_{2,2} \cdot z_{12}) +$$

$$N_{2,2} \cdot (N_{0,2} \cdot z_{20} + N_{1,2} \cdot z_{21} + N_{2,2} \cdot z_{22})$$

Формата на хиперболичния параболоид се определя от коефициентите a и b . Затова той се построява чрез задаване на размери в широчина (W) по направление на Ox и дължина (L) по направление на Oy . Тогава $x_s = -\frac{W}{2}$,

$x_e = \frac{W}{2}$, $y_s = \frac{L}{2}$ и $y_e = -\frac{L}{2}$. Така е построена NURBS хиперболичен параболоид

повърхнина (NHP-повърхнина) чрез задаване на параметрите a , b , W и L . Примери на NHP-повърхнини получени за определени стойности на тези параметри могат да се видят на фигура 3.16.



Фиг. 3.16 а) NHP-повърхнина за $a = 2$, $b = 2$, $W = 50$, $L = 30$;

б) NHP-повърхнина за $a = 2.8$, $b = 2.1$, $W = 47$, $L = 28$.

За да се осигури възможност за локална модификация на NHP се прави подразделяне на повърхнината чрез дадения по-долу подход за подразделяне на биквадратна NURBS повърхнина (реализиран в Алгоритъм 3.2).

3.2.4. Подход за подразделяне на биквадратна NURBS повърхнина без вътрешни възли в U и V

В този подраздел е предложен един подход за подразделяне на NURBS повърхнини. Той е реализиран специално за биквадратни такива без вътрешни възли в U и V и е даден чрез Алгоритъм 3.2. Той подразделя повърхнина на seg на брой подразделяния. Контролните върхове на повърхнината се подават с двумерния масив s_aM . Броя на възлите в направлението се подава с $numKnots_u$. Получените контролни върхове на повърхнината се записват в двумерния масив s_aP , а възловия вектор в едномерния масив s_aU .

Алгоритъм 3.2 SubdivideTheSurfaceOnU

Вход: s_aM , $numKnots_u$, seg ;

Изход: s_aP , s_aU ;

Процедура:

- 1.) Определя се възлови вектор чрез добавяне на кратни възли.
- 2.) Определя се новия брой на контролните върхове в направлението на подразделяне.
- 3.) Осъществява се подразделянето със съответната стойност на кратен възел.
- 4.) Край.

3.3 Изводи

От направените теоретични разработки в Глава III са направени следните изводи:

1. Предвид приетия подход за представяне на повърхнините от втора степен чрез NURBS, те са разделени условно в три групи. За представянето на E , P , H , DH и C (I-ва група) чрез NURBS повърхнини се използват частните им случаи посочени в Теорема 3.1, които преставяват ротационни повърхнини. Първо те се представят в NURBS модела, а след това чрез геометрична трансформация на мащабиране се получават и NURBS моделите на E , P , H , DH и C . За определянето на повърхнините, които трябва да бъдат построени, се използват параметрите им от техните скаларно-параметрични уравнения. Подходите (в съчетание с тези за представяне на генераторите в NURBS модела) позволяват подразделяне на повърхнините на произволен брой сегменти и по двете направления u и v , което дава възможност за локална модификация върху отделни техни части.

2. За получаване на NURBS моделите на E , P , H , DH и C е разработен Алгоритъм 3.1 за построяване на NURBS повърхнина чрез ротиране на генераторна NURBS линия по зададени начален и краен ъгъл. Алгоритъмът е предложен във вариант за построяване на биквадратна повърхнина по дадена NURBS линия от втора степен намираща се в равнината Oxz , която се завърта около оста Oz . Той позволява подразделяне на повърхнината на произволен брой сегменти по направлението на ротиране. Следователно, предоставена е възможност за локална модификация върху отделни нейни части. Това пък от своя страна, дава възможност една част от нея да бъде променена, а останалата част да запазва оригиналната си форма, т.е. да запазва геометричните си свойства. Получените резултати са приети за публикувани в списание "Computer Engineering", София (2008 г.).

3. Даден е подход за представяне на цилиндричните повърхнини EC , HC и PC (II-ра група) чрез биквадратни NURBS повърхнини. Моделите на NURBS повърхнините се получават чрез замитане на генераторната NURBS крива от втора степен. Подходът позволява (в съчетание с подходите за представяне на генераторите в NURBS модела) подразделяне на повърхнините на произволен брой сегменти и по двете направления u и v . Следователно, предоставена е възможност за локална модификация върху отделни части от повърхнините. Също

както при споменатите по-горе повърхнини, така и тук, това дава възможност да бъде променена една част от дадената повърхнина, а останалата част да запазва оригиналната си форма. Резултатите са докладвани на международната конференция "DSC", Гърция (2007 г.).

4. Предложен е подход за представяне на *HP* (III-та група) чрез биквадратна NURBS повърхнина. Друг подход за това не беше открит в литературните източници. Повърхнината, която се построява, се дефинира чрез параметрите a и b от скаларно-параметричните уравнения и още два допълнителни, които определят височина и дължина на повърхнината. След подразделяне (например, прилагайки Алгоритъм 3.2) на повърхнината по двете направления u и v , става възможна локалната модификация върху отделни нейни части. Също както при споменатите по-горе повърхнини, така и тук, това дава възможност една част да бъде променена, а останалата - да запазва геометричните си свойства. Предложеният NURBS модел на *HP* е докладван на юбилейната конференция на Русенския университет "Ангел Кънчев" (2005 г.).

5. Предложен е алгоритъм (Алгоритъм 3.2), който реализира подход за подразделяне (на произволен брой сегменти) на биквадратна NURBS повърхнина дефинирана върху възлови вектори без вътрешни възли. Това дава възможност повърхнините, за които са предложени модели тук, да бъдат подразделяни на повече сегменти, ако е необходимо. Така дизайнерът, работещ с една от тези повърхнини, може свободно да определя нивото на гъвкавост в моделирането.

4. ПРИЛАГАНЕ НА NURBS МОДЕЛИТЕ НА КРИВИТЕ И ПОВЪРХНИНТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН В 3D ГРАФИЧНАТА СИСТЕМА ЗА МОДЕЛИРАНЕ AUTODESK 3DS MAX

Ефективността, надеждността и функционалността на предложените в Глава II и Глава III алгоритми и модели могат да бъдат показани и оценени на практика само ако те бъдат приложени в една 3D графична система за дизайн. Това е направено чрез разработването на надграждащи модули за конкретно приложение. Направен е анализ на тяхната работа и на графичните примитиви, които те създават.

4.1. Възможности за функционално разширяване на 3D графичните системи за моделиране

В този раздел са изследвани инструментите (SDK, API и SL), чрез които е възможно функционалното разширяване на 3D графичните системи за дизайн.

4.2. Избор на 3D графична система за моделиране притежаваща средства за функционално разширяване

В този раздел са поставени изисквания към графичната система, в която трябва да се приложат новите NURBS модели. Разгледан е сравнителен анализ на 3D графичните системи за моделиране. Избрана е графичната система Autodesk 3ds Max като са изтъкнати основните ѝ преимущества.

4.3. Разработване на специализираните софтуерни модули (CCM)

В началото на раздела са поставени изисквания към основните характеристики, които трябва да притежават софтуерните модули, представляващи нови графични примитиви в системата.

4.3.1. Избор на софтуерен инструментариум

Тук е обоснован избора на MaxScript като инструментариум за разработка на софтуерните модули (плъгини, от англ. plugins) за 3ds Max.

4.3.2. Графичен потребителски интерфейс на CCM

В този подраздел са разгледани особеностите при разработката на графичния потребителски интерфейс на плъгините.

4.3.3. Функции създаващи новите NURBS модели в CCM

За създаването на NURBS моделите в CCM е написан набор от функции. Те са разделени условно на две групи. Първата се състои от функциите, които определят основните контролни върхове, възловите вектори и всички контролни върхове на кривата или повърхнината. Втората група се състои от функциите, които по получените вече данни за кривата или повърхнината създават NURBS обекта в сцената. Имената на функциите и тяхното предназначение в конкретния модул са дадени в таблици.

4.3.4. Интерактивно създаване на NURBS обектите

Плъгините разполагат с механизъм за получаване на данни от мишката, така че с нейна помощ се задават стойности на някои от параметрите. Тук са разгледани особеностите на този процес.

4.3.5. Създаване на NURBS обектите в различните изгледи

3ds Max предоставя седем основни изгледа на координатното пространство в което се моделира. Това налага създаване на NURBS кривите и повърхнините да става във всеки един от тях. Това е осъществено чрез определяне в кой изглед потребителя работи в момента и иска там да бъде създаден обекта. След това CCM построява кривата или повърхнината в избрания изглед като координатната система на обектите се взема по правилото: оста x е надясно в изгледа, оста y е нагоре в изгледа и оста z сочи напред от изгледа (сочи към потребителя). На фигури 4.6 и 4.7 от дисертацията могат да се видят примери на построяване на повърхнина в различни изгледи на системата.

4.3.6. Допустими стойности на параметрите на CCM

Стойностите на параметрите, чрез които се определят дъгите и повърхнините, се ограничават от допустимите стойности дадени със скаларно-параметричните им уравнения. В реализацията на NURBS моделите и при реалното построяване на кривите и повърхнините чрез тях, са дефинирани допустимите стойности, за които CCM работят коректно и обектите се построяват точно. Интервалите от допустими стойности на параметрите на графичните инструменти са дадени в таблици.

4.4 Повдигане на степента на NURBS кривите и повърхнините

Разнообразните приложения на NURBS кривите и повърхнините налагат използването им с различни степени на базисните им функции. NURBS моделите, които се предлагат в Глава II и Глава III са криви от втора степен и биквадратни повърхнини. Те могат да бъдат повдигнати до по-горна степен без това да ги промени геометрично или параметрично [92, 189 с.].

4.5. Сравнителен анализ и демонстрация на работата на CCM

В Глава I, раздел 1.5 са дадени съществуващи методи за построяване на квадратичните криви и повърхнини чрез NURBS криви и повърхнини. Прилагането на повечето от тези техники в 3ds Max е възможно. Тук е направен сравнителен анализ на работата на тези методи и работата на разработените нови графични инструменти. Това се изразява както в анализ на работата им, така и в анализ на резултата, който се получава. Основните характеристики, които се следят са:

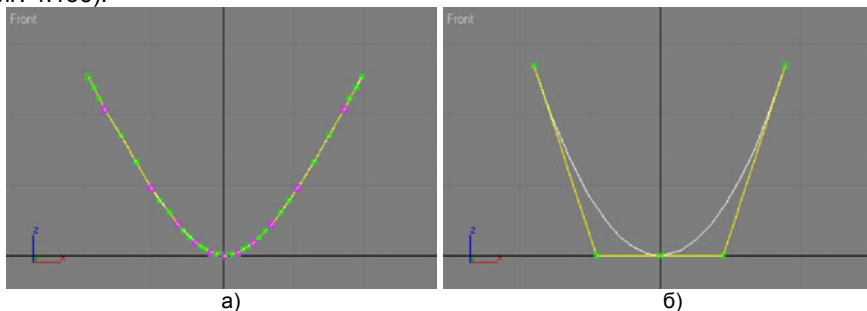
- брой на стъпките при конструиране;
- време за конструиране;
- възможност за локална модификация;
- брой на контролните върхове;
- ниво на визуализация (само за повърхнините).

За всяка от разглежданите криви и повърхнини са разгледани възможните подходи за построяване с наличните средства в 3ds Max. След което е демонстрирано построяването на NURBS кривата или повърхнината от CCM работещ със съответния NURBS модел.

Пример 1:

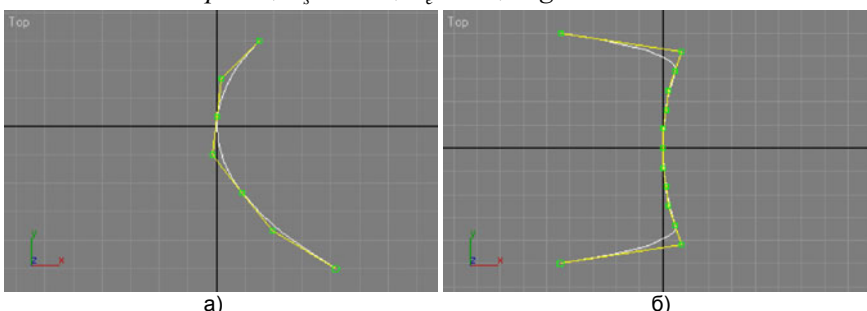
За получаване на дъга от парабола трябва да се следва подхода за намиране на конично сечение с тази форма. Получената сплайн крива може да се преобразува до NURBS крива. Реалният резултат (фиг. 4.12а) се получава за 3 стъпки при конструирането и за време около 75 секунди. Тя е NURBS крива с 37 контролни върхове.

На фигура 4.12б е показана еквивалентна крива, създадена от CCM NURBS Parabolical Arc за 1 стъпка, за време 5 секунди (15 пъти по-бързо от посочения по-горе метод) и подразделена на 2 сегмента, т.е. 5 контролни върха (около 7 пъти по-малко). Освен това CCM може да построява дъги за различни стойности на u_s и u_e (фиг. 4.13а), а също така те могат да бъдат локално модифицирани с лекота (фиг. 4.13б).



Фиг. 4.12 а) Парабола получена чрез сечение и преобразувана в NURBS; б) NURBS парабола построена с плъгина NURBS Parabolical Arc за стойностите:

$$p = 6, u_s = -18, u_e = 18, \text{segments} = 2.$$



Фиг. 4.13 NURBS парабола създадена с плъгина NURBS Parabolical Arc за стойностите: а) $p = 30, u_s = -50, u_e = 30, \text{segments} = 3$;

б) $p = 100, u_s = -50, u_e = 50, \text{segments} = 6$ и е локално модифицирана.

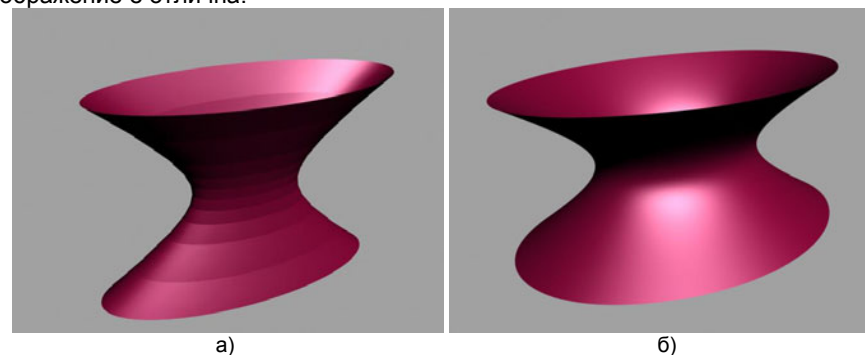
Пример 2:

В 3ds Max построяването на хиперboloид като NURBS повърхнина може да се извърши след като бъде получена сплайн дъга от хипербола (по начина споменат

в подраздел 4.4.3.) и се действа аналогично на подхода за построяването на поараboloида от подраздел 4.4.5.

Резултатът се получава за 6 стъпки при конструирането и за време около 240 секунди. NURBS повърхнината е бикубична, с 4864 контролни върхове. На рендерираното изображение (фиг. 4.21а) се вижда, че тя не е достатъчно гладка. Поради огромния брой на контролните върхове моделирането с тази повърхнина е много трудно.

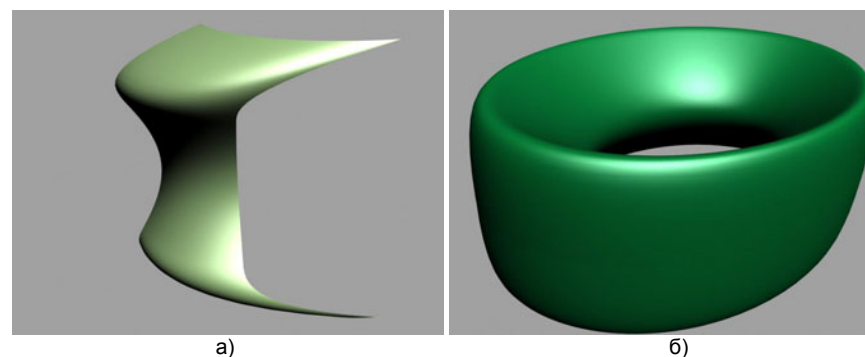
На фигура 4.21б е показана еквивалентна бикубична NURBS повърхнина създадена от CCM NURBS Hyperboloid за 1 стъпка и за време 5 секунди (48 пъти по-бързо от метода посочен по-горе). Ако повърхнината се създаде като биквадратна без допълнително подразделяне, контролните върхове, които я определят, ще са 27 (около 180 пъти по-малко). На фигура 4.21б се вижда, че повърхнината е достатъчно гладка, т.е. визуализацията ѝ в рендерираното изображение е отлична.



Фиг. 4.21 а) Хиперboloид получен чрез сечение, ротационно построяване и преобразуване в NURBS; б) NURBS хиперboloид създаден с плъгина NURBS Hyperboloid за стойностите: $a = 40, b = 30, c = 20, \alpha_s = 300^\circ, \alpha_e = 60^\circ$

$$\beta_s = 0^\circ, \beta_e = 360^\circ, \text{segments}(U, V) = 4.$$

На фигура 4.22 са показани две рендерирани изображения на а) биквадратен и б) бикубичен NURBS хиперboloид, които са локално модифицирани.

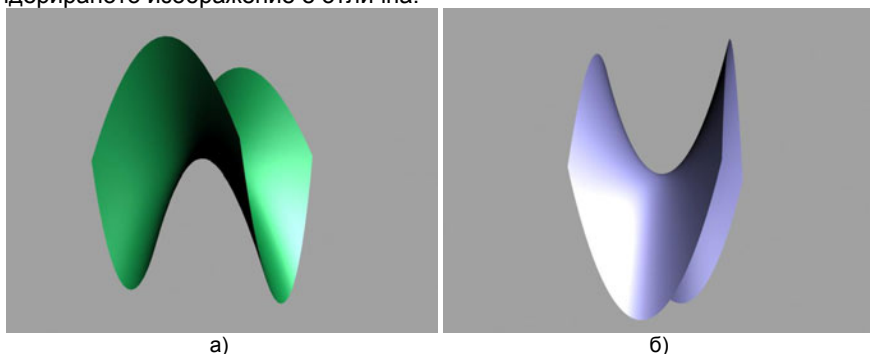


Фиг. 4.22 NURBS хиперboloиди създадени с плъгина NURBS Hyperboloid за стойностите: а) $a = 40$, $b = 40$, $c = 40$, $\alpha_s = 300^\circ$, $\alpha_e = 60^\circ$, $\beta_s = 0^\circ$, $\beta_e = 75^\circ$, $segments(U,V) = 4$; б) $a = 40$, $b = 30$, $c = 20$, $\alpha_s = 295^\circ$, $\alpha_e = 65^\circ$, $\beta_s = 0^\circ$, $\beta_e = 360^\circ$, $segments(U,V) = 8$.

Пример 3:

За построяването на хиперболичен параболоид в 3ds Max не беше открит инструмент или доказан подход.

На фигура 4.31 са показани две рендерирани изображения на един биквадратен и един бикубичен NURBS хиперболичен параболоид, които са създадени с плъгина NURBS Hyperbolic Paraboloid. Визуализацията им в рендерираното изображение е отлична.



Фиг. 4.31 NURBS хиперболични параболоиди създадени с плъгина NURBS Hyperbolic Paraboloid за стойностите:

а) $a = 3$, $b = 2$, $W = 50$, $L = 30$; $segments(U,V) = 1$;

б) $a = 2$, $b = 2$, $W = 50$, $L = 30$; $segments(U,V) = 4$.

4.6. Изводи

От направеното прилагане на NURBS моделите (предложени в Глава II и Глава III) на кривите и повърхнините от втора степен в 3D графичната система за моделиране 3ds Max, са направени следните изводи:

1. Изследвани са възможностите, с които 3D графичните системи за моделиране разполагат за функционално разширяване. Следствие от това е избрана една от тях (Autodesk 3ds Max) за прилагането на NURBS моделите на квадратичните криви и повърхнини. Тя отговаря на всички изисквания поставени към системата в началото на раздел 4.3. Следователно, това е подходяща 3D графична система за прилагане на предложените в Глава II и Глава III NURBS модели на криви и повърхнини.

2. Разработени са 12 специализирани софтуерни модула за 3ds Max. Основните етапи в този процес са: разработването на графичния потребителски интерфейс на CCM, написване на функциите създаващи новите NURBS модели и прилагане на техники за интерактивно създаване. Това позволява реалното тестване на NURBS моделите в системата и запознаване с резултатите, които се получават.

3. Предвидени са: възможността за създаване в различните изгледи на системата, нуждата от ограничаване на допустимите стойности в параметричното задаване на кривите и повърхнините и възможността за повдигане на степента на кривите и повърхнините. Това прави CCM да работят в 3D графичната система по

същия начин както и вградените примитиви. След инсталирането им в графичното приложение те се интегрират и работят по същия начин, по който и вградените графични инструменти. А поради това, че те са написани на MaxScript, то стават съвместими с всички версии на програмата от четвърта и по-нови.

4. Направен е сравнителен анализ на работата на CCM в системата и на резултатите, които се получават, по предварително зададени критерии, подобни на посочените в началото на раздел 4.5. Анализът между досега познати техники и предложените в този труд модели и подходи, показва много добри резултати в полза на новите модели в създаването, визуализацията и моделирането на обектите.

5. Представените в тази дисертация модели, алгоритми и специализирани софтуерни модули позволяват кривите и повърхнините да се създават:

- с брой на стъпките – 1, а при другите подходи – 3 - за кривите, и 5 и 6 - за повърхнините;
- в реално време – за около 5 секунди, което е от 9 до 48 пъти по-бързо от другите подходи;
- с отлична възможност за локална модификация;
- с минимален брой на контролните върхове 3 - за кривите и 9 - за повърхнините, а при другите подходи от 31 до 73 - за кривите и от 256 до 4864 (и повече) - за повърхнините;
- с отлична визуализация при рендериране (за повърхнините).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертационния труд е направено представяне на квадратичните криви и повърхнини чрез NURBS апарата за целите на ГМ.

Теоретичните разработки бяха разделени на две части. В първата част е включено представянето на кривите (Глава II), а във втората част – представянето на повърхнините (Глава III). В тези две части е разработен NURBS модела на всяка от квадратичните криви и повърхнини. Моделите са разработени така, че NURBS кривата или повърхнината да се построява след като квадратичната крива или повърхнина е зададена със стойности за параметрите от скаларно-параметричните ѝ уравнения. Предложените NURBS модели на криви и повърхнини предоставят отлични възможности за локална модификация на формата.

От изключително значение бе да се приложат (Глава IV) получените NURBS модели в една 3D графична система за моделиране (например, Autodesk 3ds Max) като специализирани софтуерни модули, които представляват нови графични примитиви в системата, разширявайки нейния графичен инструментариум. Това позволи да се направи сравнителен анализ между съществуващи подходи (за построяване на разглежданите криви и повърхнини) в системата и предложените тук инструменти.

НАУЧНИ И НАУЧНО-ПРИЛОЖНИ ПРИНОСИ

Поставените в първа глава от дисертацията задачи са решени, в резултат на което са постигнати следните **научни и научно-приложни приноси**:

1. Изследвана е методологията за създаване на специализирани софтуерни модули-добавки в триизмерните графични системи и е определен единен подход за алгоритмична реализация на плъгина за моделиране.

2. Разработени са NURBS модели на криви от втора степен, с чиято помощ се построяват дъги от елипса, парабола и хипербола в положителна и отрицателна посока спрямо дефинираната координатна система. Те са реализирани в

зависимост от стойностите на параметрите от скаларно-параметричното задаване на кривите.

- Дъгите от елипса се построяват за стойности по-малки, равни и по-големи от $|360^\circ|$, което разширява приложните области на моделите.
 - Представянето на дъги от параболи и хиперболи следва директно от доказани твърдения, в които са изведени формули за стойностите на координатите на контролните върхове и техните тегла на NURBS кривите.
 - Предложен е алгоритъм за подразделяне на NURBS кривите според дефинирани критерии и нуждите на приложенията.
3. Разработени са NURBS модели на повърхнините от втора степен: елипсоид, елиптичен параболоид, прост хиперболоид, двоен хиперболоид, конус, елиптичен цилиндър, параболичен цилиндър, хиперболичен цилиндър и хиперболичен параболоид. За получаването на повърхнините се използват генераторни NURBS криви от втора степен (елиптични, параболични и хиперболични) и индивидуален подход за представяне на хиперболичния параболоид. Подразделени са по двете си направления, което дава възможност за локална модификация.
- Разработен и внедрен е алгоритъм за построяване на ротационни биквадратни NURBS повърхнини-парчета, които се построяват за стойности на ъгъла на завъртане по-малки, равни и по-големи от $|360^\circ|$.
 - Разработен е алгоритъм за подразделяне на биквадратна NURBS повърхнина на зададен брой сегменти.
4. На база на създадените NURBS модели на криви и повърхнини са разработени дванадесет специализирани софтуерни модули за 3D графичната система за моделиране Autodesk 3ds Max. Те са одобрени и приети от Интернет портала за високи 3D технологии и приложения *HighEnd3D*.

ПУБЛИКАЦИИ ВЪВ ВРЪЗКА С ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1. Петков Емилиан. *Развитие на NURBS модели на квадратични повърхнини за 3D графичните системи*. Статията е приета за публикуване в списание "Computer Engineering", София. 2008.
2. Petkov Emiliyan. *Three Quadratic Surfaces As Design Tools For 3D Graphic Systems*, South East European Research Centre by the University of Sheffield: International conference "Doctoral-Students Conference'2007", Thessaloniki, Greece, 2007.
3. Petkov Emiliyan, Liuben Cekov. *A B-spline Model of a Hyperbolic Paraboloid for Graphics Systems*, Anniversary Conference 60 Years University of Russe 'Angel Kanchev' 2005, Russe, 2005.
4. Petkov Emiliyan, Liuben Cekov. *One Method for Representing an Arc of Hyperbola by A NURBS Curve*. 19th International Conference SAER-2005, St. Konstantin Resort, Varna, 2005.
5. Petkov Emiliyan, Liuben Cekov. *A Software Design Tool for Constructing Arcs of Parabola in Graphics Systems*, International conference "Automatics and informatics'05", Sofia, 2005.
6. Petkov Emiliyan, Liuben Cekov. *One Method for Representing an Arc of Ellipse by a NURBS Curve*, International conference "Automatics and informatics'05", Sofia, 2005.
7. Петков Емилиан, Любен Цеков. *NURBS коники – програмен модел*. Международна научна конференция UniTech'04, Габрово, 2004.
8. Petkov Emiliyan. *Computer modelling of surfaces*. International conference of computer systems and technologies "CompSysTech'2002", Sofia. 2002.

АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Голяма част от резултатите в дисертацията са докладвани и обсъдени на семинар по математически основи на информатиката, организиран от секция "Математически основи на информатиката" към ИМИ – БАН и направление "Математика и информатика" - ВТУ.

Дванадесетте плъгина, които са разработени на базата на предложените NURBS модели са групирани в два инсталационни пакета. Те са одобрени и приети от Интернет портала за високи 3D технологии и приложения *HighEnd3D* и са достъпни за изтегляне както следва: *NURBS Conical Arcs 1.4* - <http://www.highend3d.com/f/4368.html>, *NURBS Quadratic Surfaces 1.2* - <http://www.highend3d.com/f/4369.html>.

Специализираните софтуерни модули са придружени с инсталационни файлове и инструкции за инсталиране. Всеки плъгин разполага с указание за експлоатация, което е достъпно по всяко време от графичния му потребителски интерфейс. Двата пакета от плъгини са достъпни за изтегляне в Интернет от 11.10.2007 г. Във форумите на Интернет страниците на пакетите от плъгини до сега не са постъпили забележки за възникнали проблеми при използването на предоставените инструменти от повече от 1900 официално регистрирани потребители за *NURBS Conical Arcs* и повече от 3100 – за *NURBS Quadratic Surfaces*.

Положителен отзив има и от реалните приложения на плъгините в работата на фирма "Монблан дизайн" ЕООД, гр. Варна (вж. Служебната бележка приложена към документите).