Familles courantes de distribution

IFT6085-H2014: Modèles Graphiques Probabilistes

Prof: Aaron Courville

Email: aaron.courville@umontreal.ca

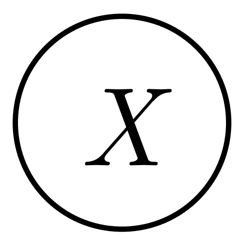
Office: 3253 Pav. Andre Aisenstadt

Modèle statistique

- **Modèle paramétrique** - Définition: Ensemble ou une famille de distributions de probabilité paramétrées par un vecteur $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

$$\mathcal{P}_\Theta = \{p(x;\theta) \mid \theta \in \Theta\}$$

- Nous pouvons penser à ces modèles comme des modèles graphiques simples avec un seul nœud:



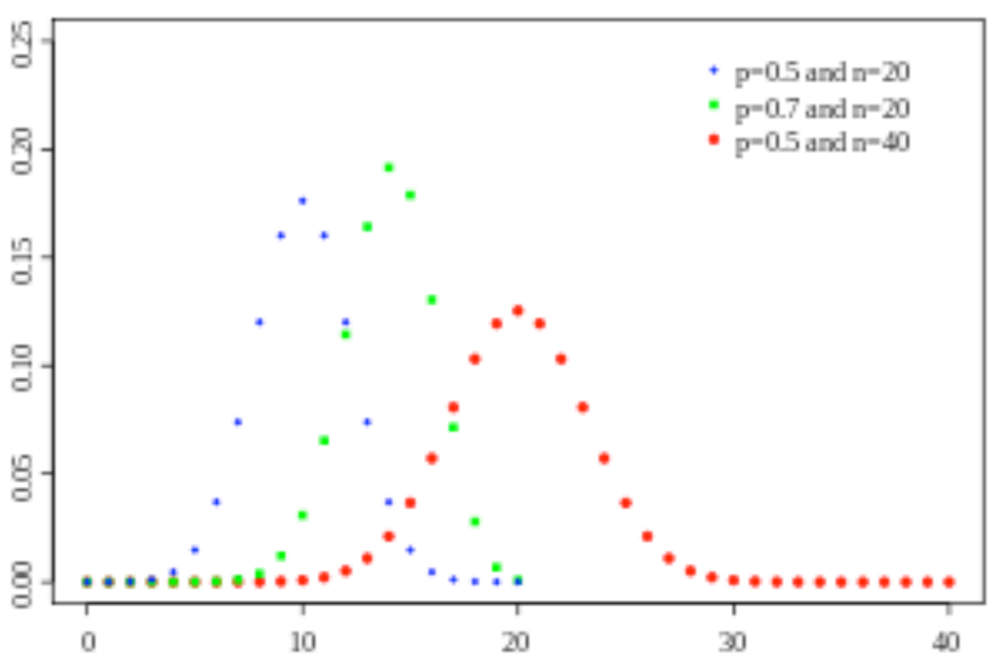
- Dans ces notes, nous passerons en revue quelques modèles de probabilité communes pour différentes sortes de X.

Loi Bernoulli

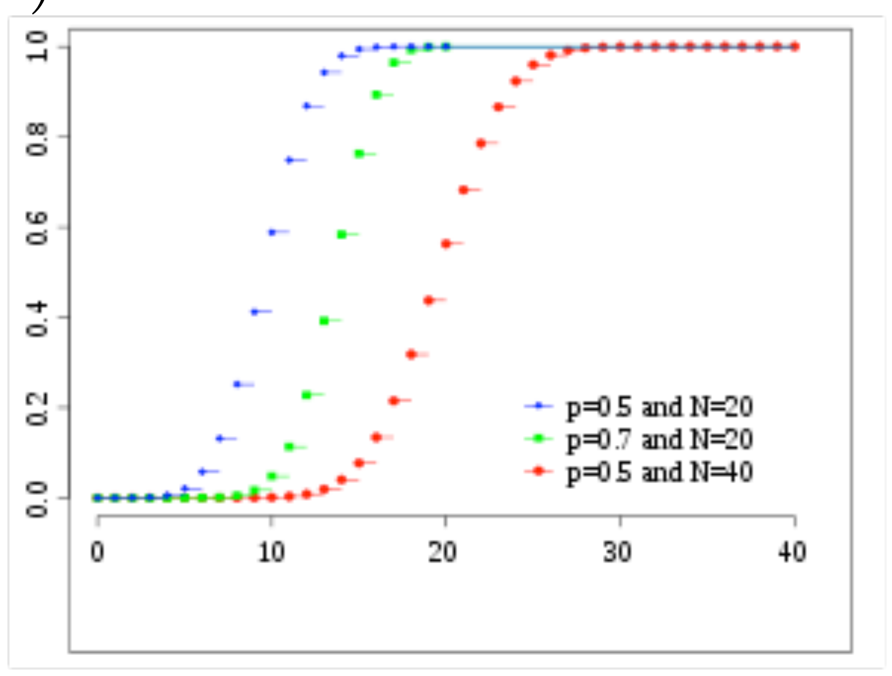
- Loi Bernoulli $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$
  - X est une v.a. binaire: $x \in \{0, 1\}$
  - Le paramètre de modèle: $\theta = p \in \Theta = [0, 1]$
  - Le Bernoulli $\mathrm{p.m.f}(x)$: $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}$
  - Espérance $\mathbb{E}[x] = p$
  - Variance: $\mathrm{Var}[x] = p(1-p)$

- Loi Binomiale: $X \sim \mathrm{B}(n, p)$
  - X est une v.a. discrète: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
  - Les paramètres de modèle: $\theta = (n, p) \in \Theta = \mathbb{Z}_+ \times [0, 1]$
  - Le binomial $\mathrm{p.m.f}(x)$: $f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
  - Espérance: $\mathbb{E}[x] = np$, Variance: $\mathrm{Var}[x] = np(1-p)$

p.m.f.(x):



c.d.f.(x):



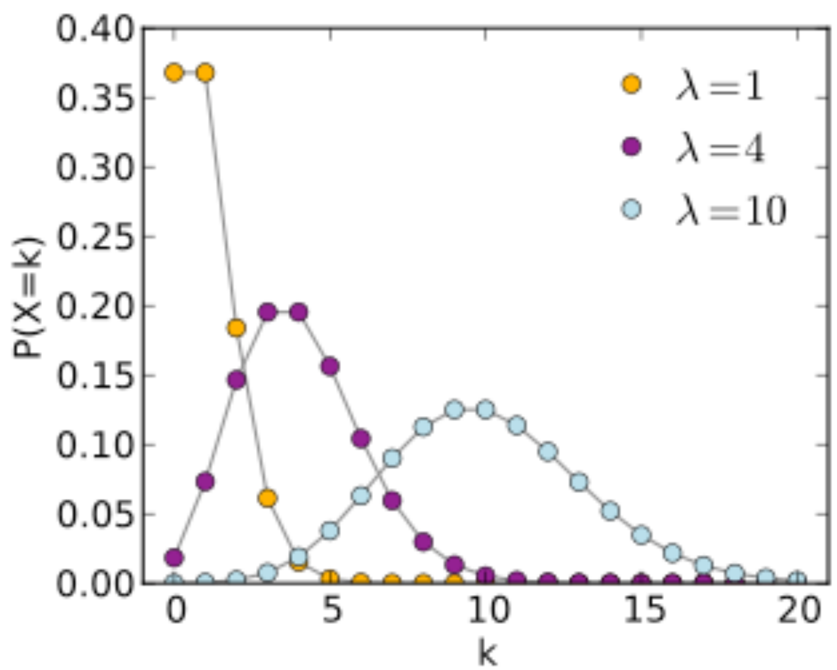
Loi Multinomiale

- Distribution Multinomiale: $X \sim \mathrm{Multinomial}(n, p_1, \ldots, p_K)$
  - X est un **vecteur** aléatoire discrète avec elements $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
    telle que $\sum_{i=1}^{K} x_i = n$
  - Les paramètres de modèle: $\theta = (n, p_1, \ldots, p_K) \in \Theta = \mathbb{R}_+ \times [0,1]^K$
    ou $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$
  - Le multinomial $\mathrm{p.m.f.}(x)$: $f(x; n, p_1, \ldots, p_K) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_K!} p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K}$
  - Espérance:
    $$\mathbb{E}[x_i] = np_i$$
  - Variance:
    $$\mathrm{Var}[x_i] = np_i(1 - p_i), \quad \mathrm{Cov}(x_i, x_j) = -np_ip_j$$

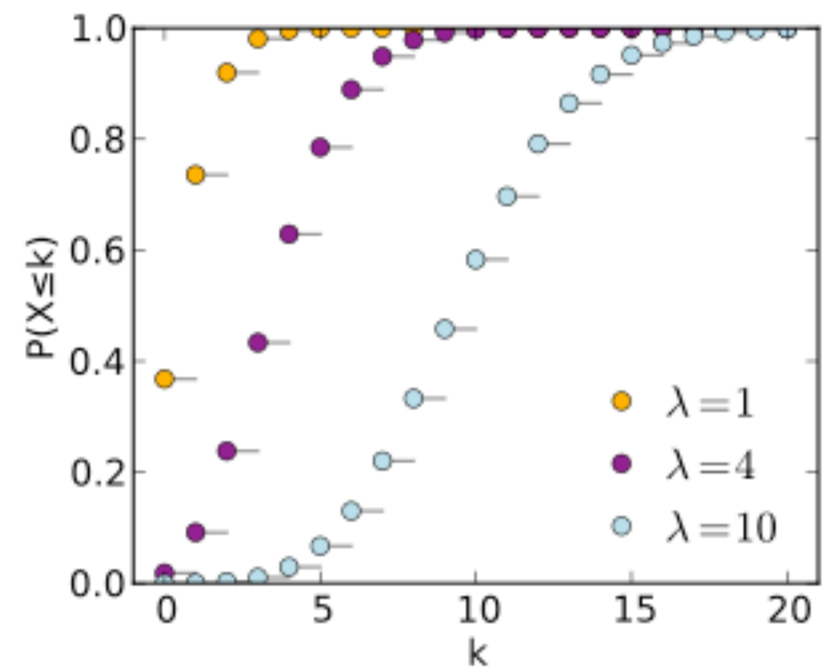
Loi de Poisson

- Distribution de Poisson: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$
  - X est une v.a. discrète: $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - Le paramètre de modèle: $\theta = \lambda \in \Theta = \mathbb{R}_+$
  - Le $\mathrm{p.m.f.}(x)$ de poisson: $f(x;\lambda) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$
  - Espérance: $\mathbb{E}[x] = \lambda$, Variance: $\mathrm{Var}[x] = \lambda$

p.d.f.(x):



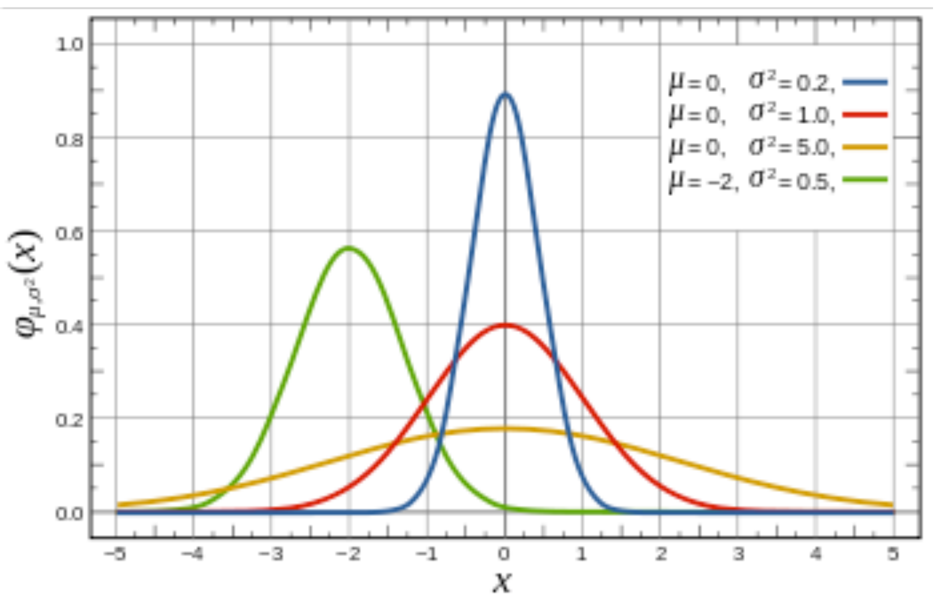
c.d.f.(x):



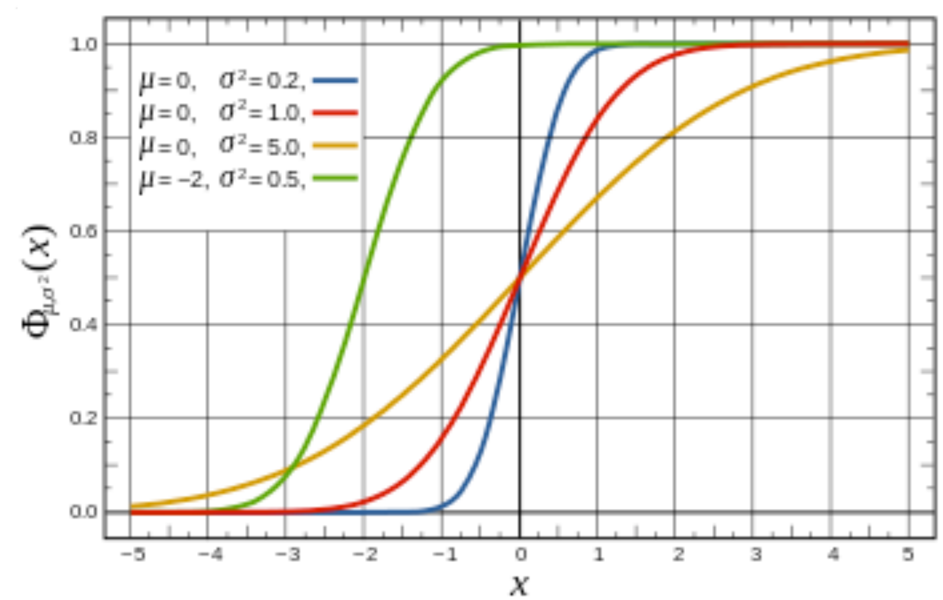
loi Gaussienne (Normale) - cas univariée

- Gaussienne univariée: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - X est un v.a. réelles ($x \in \mathbb{R}$) et $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
  - Le $\mathrm{p.d.f.}(x)$ gaussienne est: $p(x; \mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \mu$, Variance: $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2$

p.d.f.(x):



c.d.f.(x):

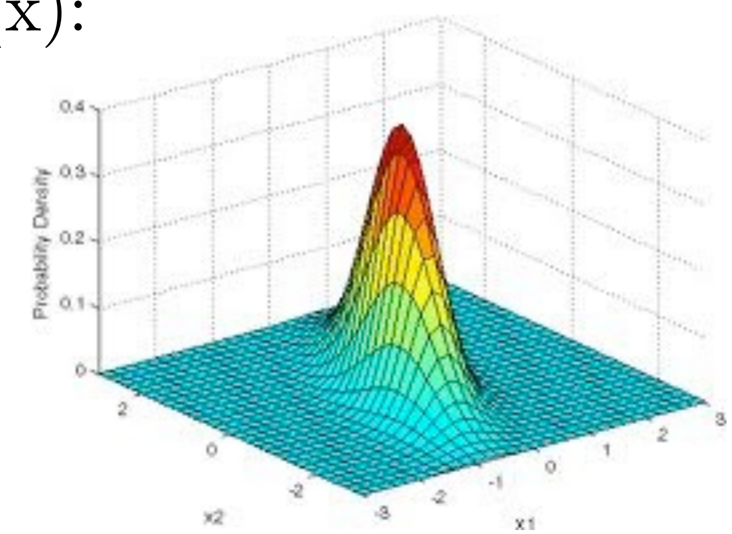


loi Gaussienne (Normale) - cas multivariée

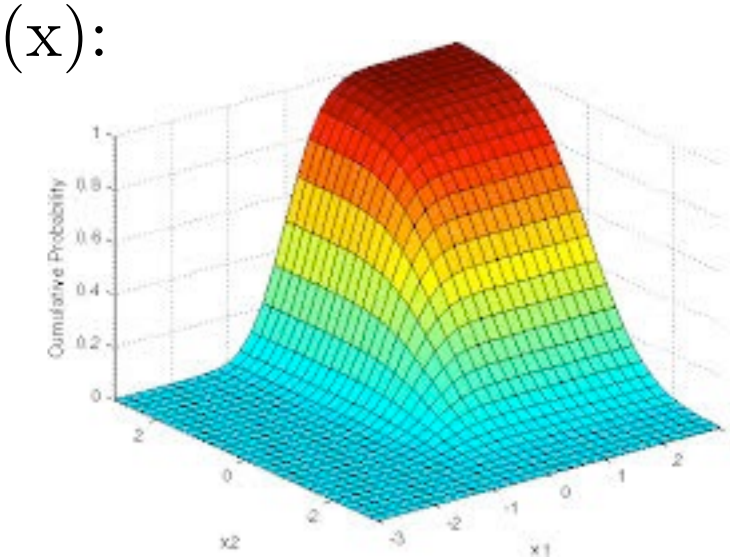
- Gaussienne multivariée: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$
  - X est un **vecteur** aléatoire réelles ($x \in \mathbb{R}^d$) et $\theta = (\mu, \Sigma) \in \Theta = \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_d$ ou $\mathcal{K}_d$ est l'ensemble des matrices d × d définies positives.
  - Gaussienne multivariée $\mathrm{p.d.f.}(x)$:

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

p.d.f.(x):

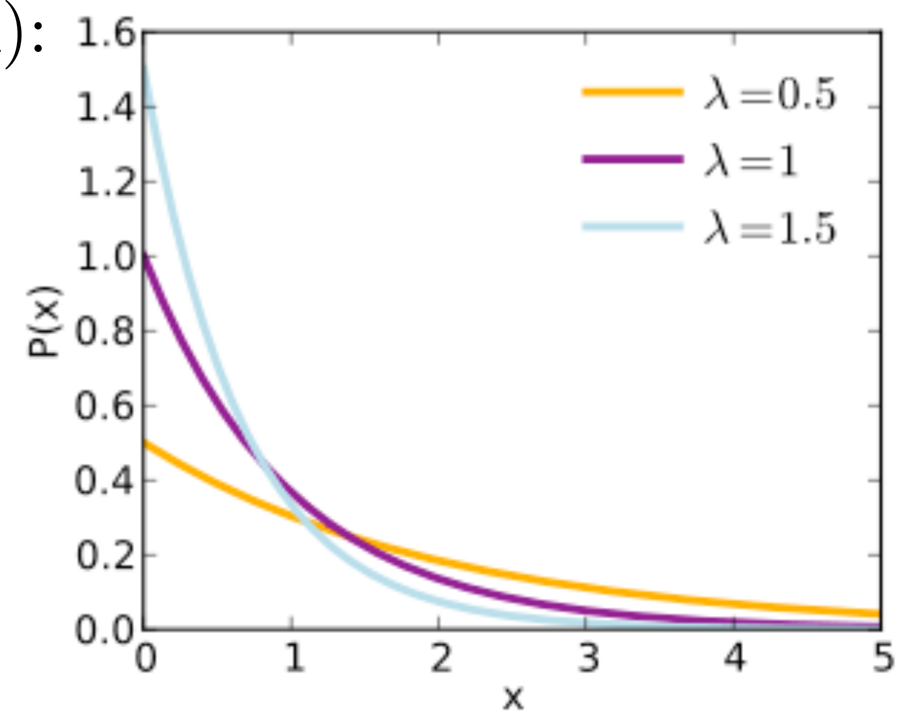


c.d.f.(x):

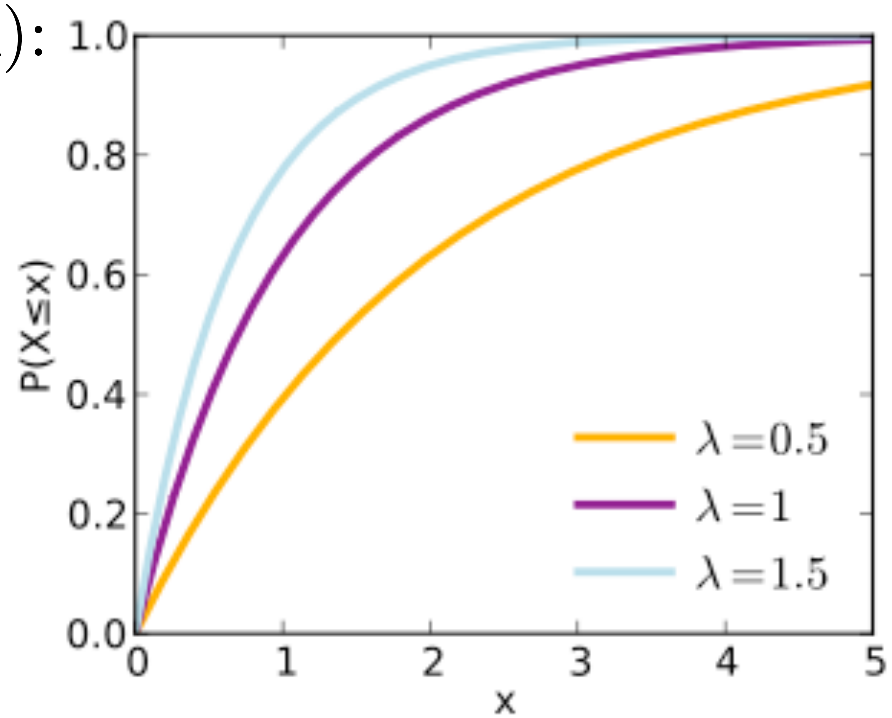


- Loi exponentielle: $X \sim \exp(\lambda)$
  - X est un v.a. réelles avec $x \geq 0$ et $\theta = \lambda \in \Theta = \mathbb{R}_+$ ou λ est le paramètre d'intensité.
  - Le $\text{p.d.f.}(x)$ exponentielle est: $p(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \frac{1}{\lambda}$, Variance: $\text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

p.d.f.(x):



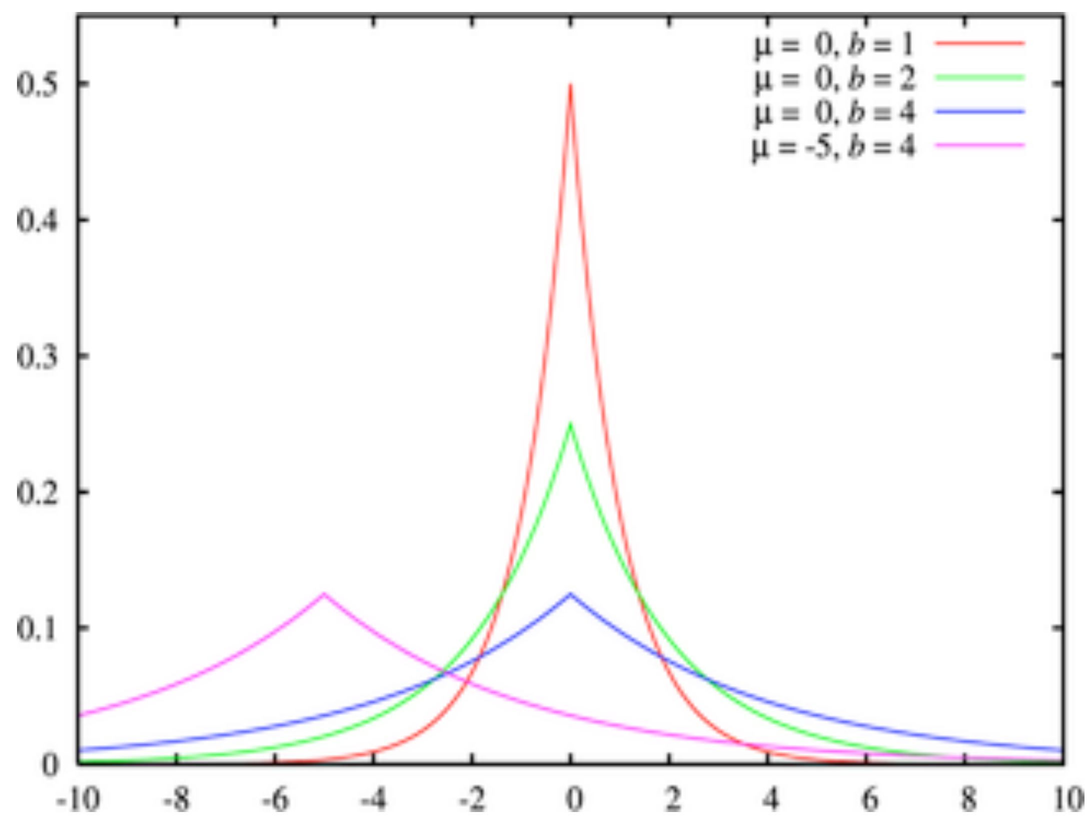
c.d.f.(x):



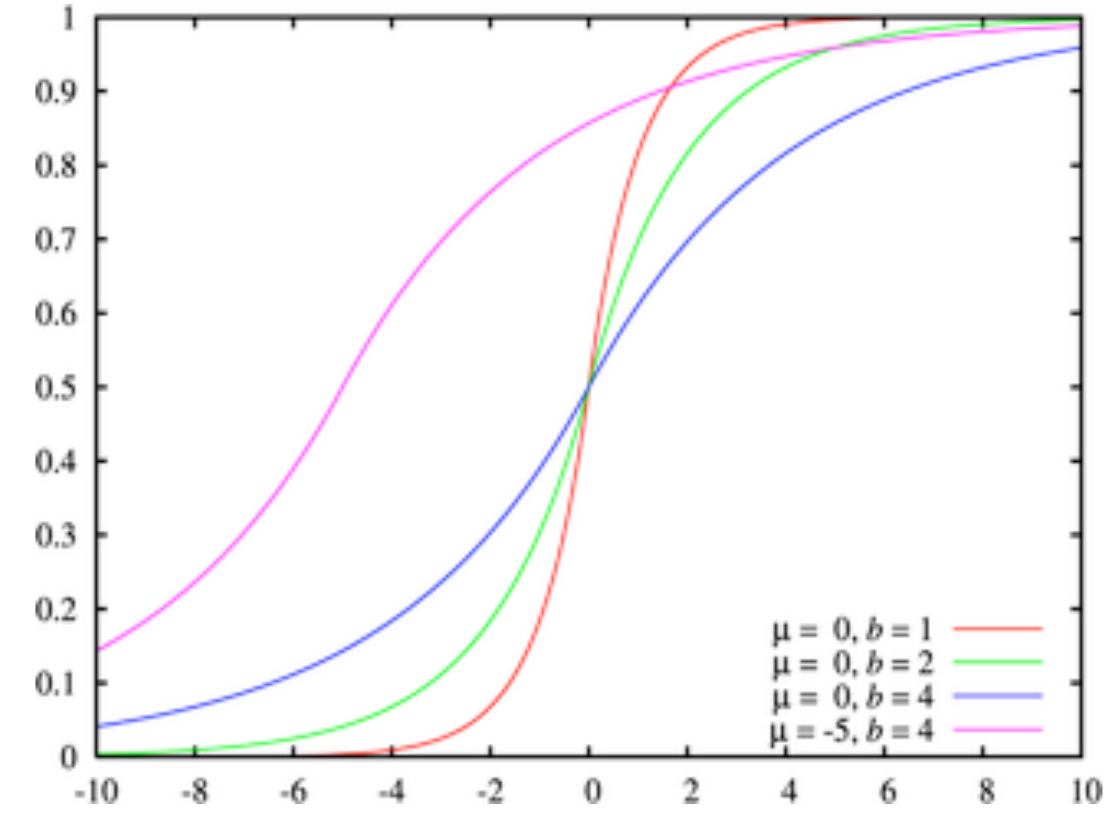
Loi de Laplace

- Distribution de Laplace: $X \sim \mathrm{Laplace}(\mu, b)$
  - X est un v.a. réelles ($x \in \mathbb{R}$) and $\theta = (\mu, b) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
  - The $\mathrm{p.d.f.}(x)$ de Laplace: $p(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \mu$, Variance: $\mathrm{Var}(x) = 2b^2$

p.d.f.(x):

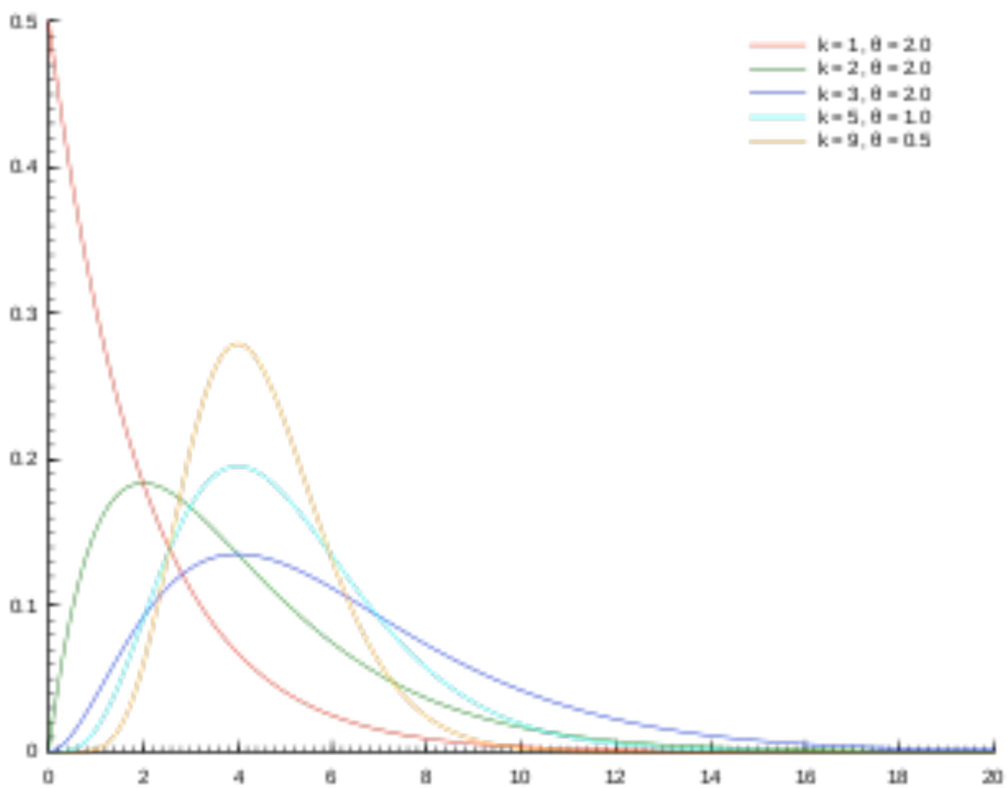


c.d.f.(x):

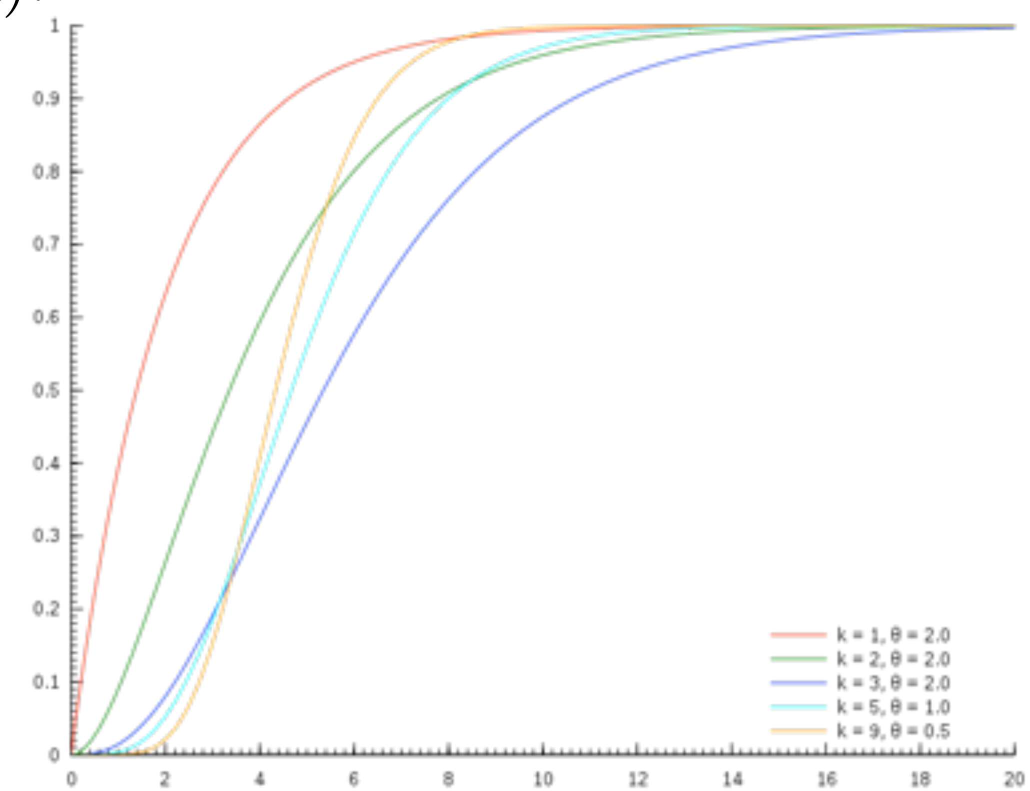


- Loi Gamma: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \equiv \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$
  - X est un v.a. réelles avec $x \geq 0$ et $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou α est le paramètre d'échelle et β est le paramètre d'intensité.
  - Le $\mathrm{p.d.f.}(x)$ Gamma: $$p(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}$, Variance: $\mathrm{Var}(x) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

p.d.f.(x):



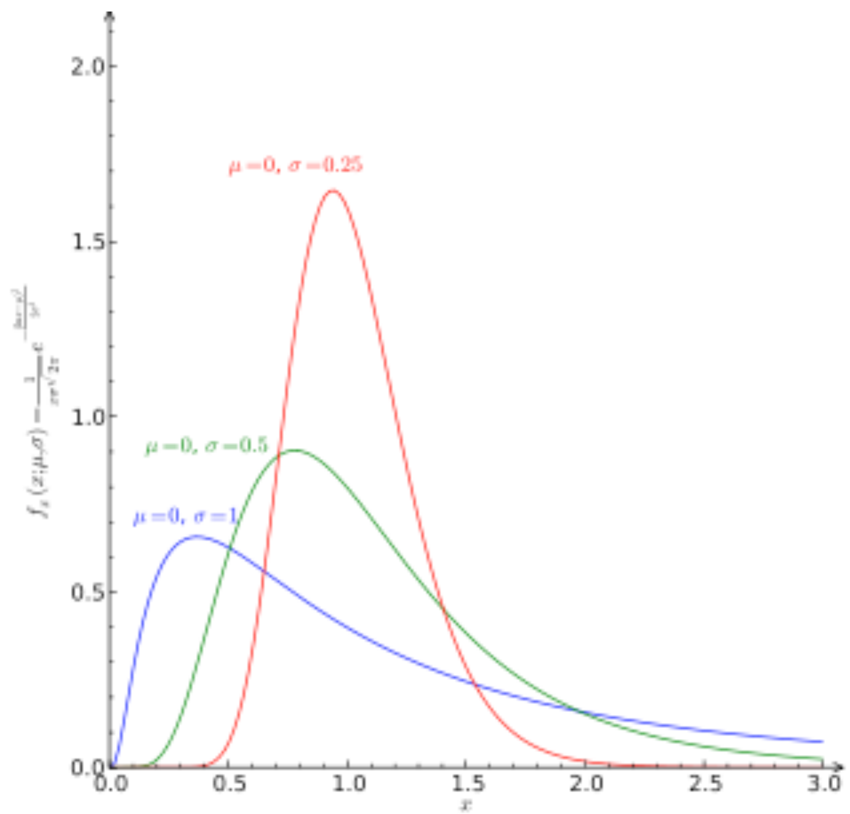
c.d.f.(x):



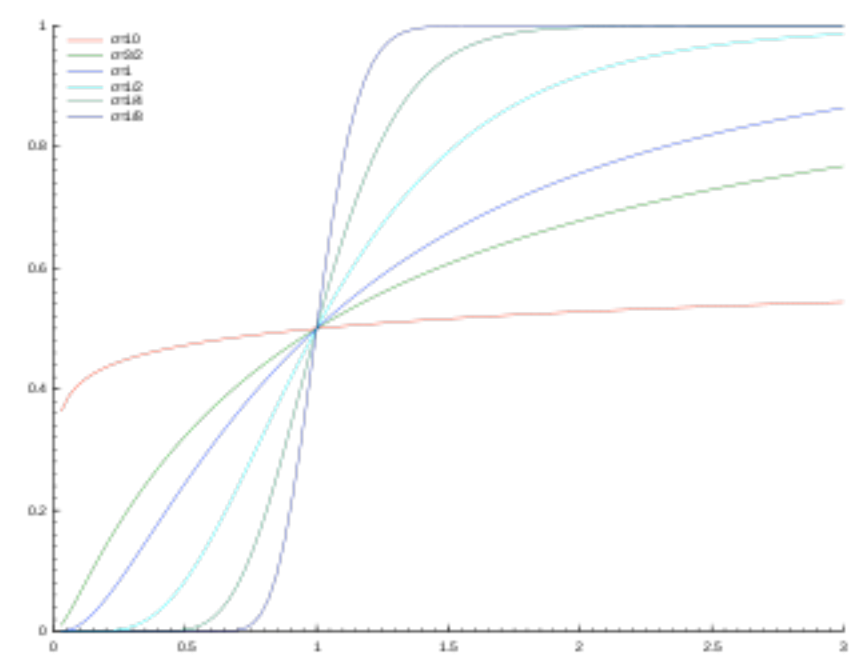
Loi log-normale

- Distribution log-normale: $X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - X est un v.a. réelles avec $x > 0$ et $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
  - Le $\mathrm{p.d.f.}(x)$ log-normal est: $p(x; \mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \exp\left(\mu + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$
  - Variance: $\mathrm{Var}(x) = \left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right] \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)$

p.d.f.(x):



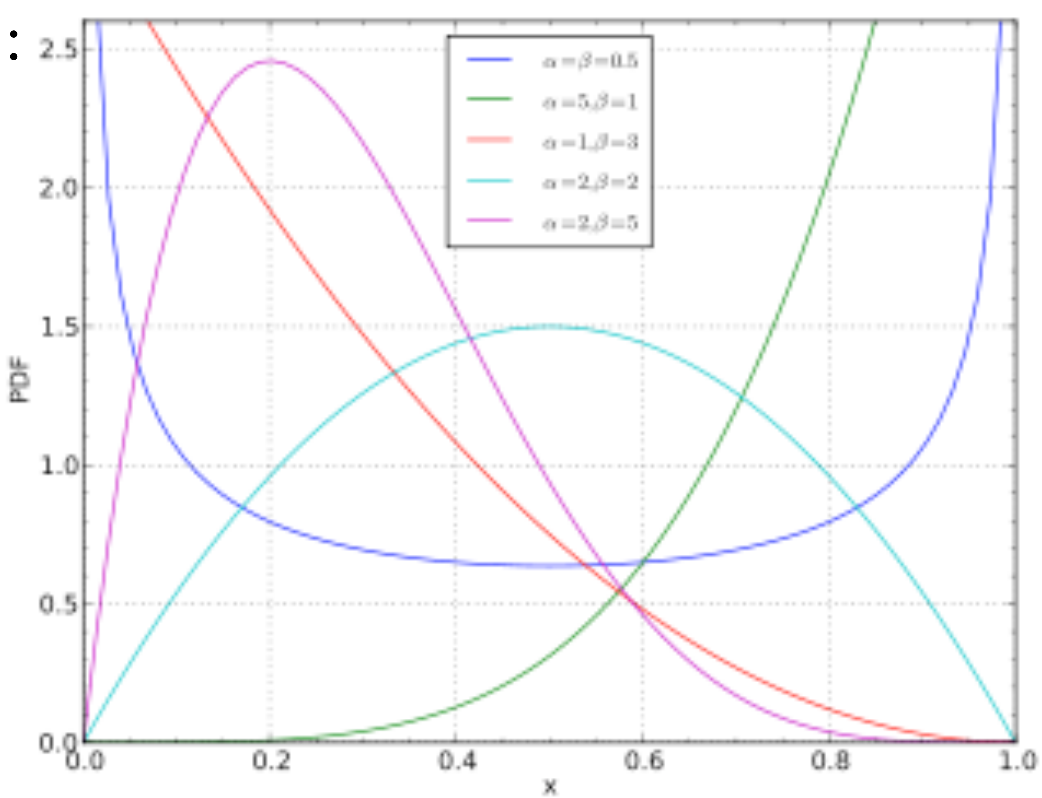
c.d.f.(x):



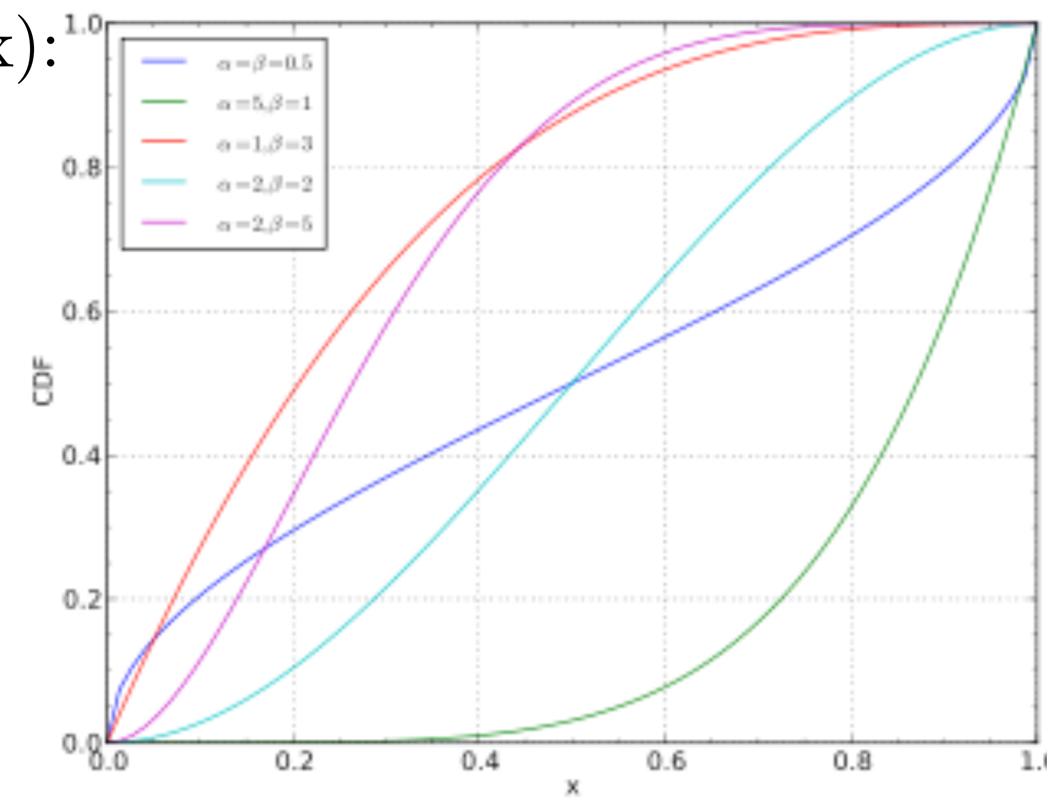
Loi Bêta

- Distribution Bêta: $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$
  - X est un v.a. réelles avec $0 \leq x \leq 1$ et $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ou α and β sont des paramètre de “shape”
  - The Bêta $\text{p.d.f.}(x)$ is: $p(x; \alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$
  - Espérance: $\mathbb{E}(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, Variance: $\text{Var}(x) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

p.d.f.(x):



c.d.f.(x):



Loi de Dirichlet

- Loi de Dirichlet: $X \sim \mathrm{Dir}(\alpha)$
  - X est un **vecteur** aleatoire avec elements $0 \leq x_i \leq 1$ et $\sum x_i = 1$.
  - $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K) \in \Theta = \mathbb{R}_+^K$ ou α_i sont des paramètre de concentration
  - Le Dirichlet p.d.f.(x): $$p(x;\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_{i=1}^K \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i - 1}, \text{ where } \alpha_0 = \sum_{i=1}^K \alpha_i$$
  - Espérance: $\mathbb{E}[x_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}$
  - Variance: $\mathrm{Var}[x_i] = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}$