Квадратичная функция на единичной сфере
Дополнения

Лукашевич Александр
МФТИ 476

1. Сходимость метода

Покажем, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \underset{0 \le \gamma \le \gamma_3}{sup} \|E + \gamma A\|, \tag{1.1}$$

Где γ_3 - максимальное значение γ, которое допустимо для опитмального шага алгоритма (см в другом pdf, где определяются промежутки выпуклости функции $F(\gamma)$).

Напомним вид метода:

$$x^{k+1} = P_S(x^k - \gamma A x^k) = \frac{x^k - \gamma A x^k}{\|x^k - \gamma A x^k\|}, \tag{1.2}$$

S - единичная сфера,

$$\gamma_k = \underset{\gamma \ge 0}{argmin}\ \frac{1}{2} \left(\frac{x^k - \gamma A x^k}{\|x^k - \gamma A x^k\|} \right)^T A \frac{x^k - \gamma A x^k}{\|x^k - \gamma A x^k\|} \tag{1.3}$$

Пусть x^* - стационарная точка. Тогда для нее верно, что

$$(\nabla f(x^*), x - x^*) = (Ax^*, x - x^*)\ \forall x \in S. \tag{1.4}$$

Это условие эквивалентно следующему:

$$x^* = P_S(x^* - \gamma A x^*)\ \forall \gamma > 0. \tag{1.5}$$

Действительно, исходя из геометрического смысла: (1.4) эквивалентно тому, что

$S \cap Q = \{x \in \mathbb{R}^n : (\nabla f(x^*), x - x^*) < 0\} = \emptyset$. То есть множество направление локального убывания не пересекается с множеством S. Допустим, что $x^* \in riS$ (относительная внутренность). В таком случае $\nabla f(x^*) = 0$ и $x^* = P_S(x^* - \gamma \nabla f(x^*)) = P_S(x^*) = x^*$. Пусть $x^* \in clS \setminus riS$. Предположим, что утверждение неверно. Тогда $\exists y \in S : y \ne x^*$ и $y = P_S(x^* - \gamma \nabla f(x^*)$. Тогда $(\nabla f(x^*), y - x^*) = (\nabla f(x^*), P_S(x^* - \gamma \nabla f(x^*) - x^*) \overset{(*)}{<} (\nabla f(x^*), x^* - \gamma \nabla f(x^*) - x^*) = -\gamma(\nabla f(x^*), \nabla f(x^*)) < 0$. Неравенство при использовании липшицевости $(*)$ строгое, в силу структуры множества Q. Это означает, что $y \in Q$, то есть $y \notin S$ - противоречие.

Итак, воспользуемся (1.5):

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| = \|P_S(x^k - \gamma_k A x^k) - P_S(x^* - \gamma_k A x^k)\| \le \\ \le \|x^k - \gamma_k A x^k - x^* + \gamma_k A x^k\| = \|(E + \gamma_k A)(x^k - x^*)\| \le \\ \le \|x^k - x^*\| \cdot \|E + \gamma_k A\| \le \|x^k - x^*\| \cdot q. \end{aligned}$$

Таким образом $\|x^k - x^*\| \le \|x^0 - x^*\| q^k$, $q = \underset{0 \le \gamma \le \gamma_3}{sup} \|E + \gamma A\|$.