Квадратичная функция на единичной сфере
Дополнения
Лукашевич Александр
МФТИ 476

1. Постановка задачи

Минимизируем квадратичную функцию с линейной частью на единичной сфере.

$$\underset{x \in S}{min} f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x,$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = 1\}.$$

2. Стационарные точки

Выясним какие точки являются стационарные. Запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + \lambda(\|x\|^2 - 1). \tag{2.1}$$

Используем необходимое условие первого порядка:

$$\nabla L = \begin{pmatrix} Ax + b + 2\lambda x \\ \|x\|^2 - 1 \end{pmatrix} = \vec{0}. \tag{2.2}$$

Отсюда следуует, что стационарные точки удовлетворяют:

$$\begin{gathered} (A + 2\lambda E)x = -b, \\ x \in S. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Теперь займемся вопросом о том, какая стационарная точка дает минимум. Для этого зафиксируем x^*, удовлетворяющий (2.3). Определим множество $Et = Et(x^*) = \{s \in \mathbb{R}^n : (s, 2x^*) = 0\}$. Тогда x^* - точка минимума, если

$$(L_{xx}s, s) = ((A + 2\lambda E)s, s) > 0 \ \forall s \in Et. \tag{2.4}$$

Вспомним, что каждое решение СЛАУ представимо в следующем виде:

$$x = y_0 + y, \tag{2.5}$$

где y_0 - решение однородной системы, а y - какое-либо решение неоднородной.

Рассмотрим y_0 подробнее:

$$\begin{aligned} &(A + 2\lambda E)y_0 = 0 \\ &Ay_0 = -2\lambda y_0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом решение однородной системы - собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению -2λ. Без ограничения общности, будем считать, что это собственный вектор с номером n. Обратимся к (2.4). Поскольку A - симметричный, то существует *ортонормированный базис из собственных векторов* A: $\{h_i\}_{i=1}^n$. Разложим s по собственным векторам: $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$.

$$\begin{aligned}
\Big((A + 2\lambda_n)s, s\Big) &= \left((A + 2\lambda_n)\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i\right) = \\
&= \left(A\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) + 2\lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) + \alpha_n^2 ((A + \underbrace{\lambda_n E)h_n}_{=0}, h_n) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(-2\lambda_i) h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) + 2\lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(-2\lambda_i) h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) + 2\lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i h_i\right) = \\
&= -2\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i^2 (h_i, h_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_i^2 (h_i, h_i) = \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 (h_i, h_i)(\lambda_n - \lambda_i) > 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Для того, чтобы неравенство было верным, $\lambda_n > \lambda_i \ \forall i = 1, \ldots, n-1$.

Таким образом минимумом является решение (2.3), где λ - наименьшее собственное значение A, помимо этого решение складывается из собственного вектора, отвечающего наименьшему собственному значению A и частного решения системы. И, безусловно, вектор должен быть единичным.