UNA RECONSIDERACIÓN DE LA TEORÍA DEL DESARROLLO ECONÓMICO DE DOMAR *

Ragnar Frisch

> Desde el punto de vista de un proceso de etapas sucesivas, la naturaleza de los límites y otras condiciones a ser satisfechas es más importante que la ecuación misma, y por lo que concierne a las condiciones de éstos lo que importa no es *qué* son, sino *dónde* están. D. R. HARTREE.[1]

Evsey D. Domar presentó por primera vez su teoría del desarrollo económico en un artículo de *Econometrica* en abril de 1946. Su teoría es ingeniosa al propio tiempo que simple, pero para entender cabalmente lo que implica, debe observarse con cuidado el significado de los distintos supuestos. En particular debe darse especial atención al papel que juegan las condiciones iniciales. En este sentido he encontrado algunos mal entendidos y por ello creo que puede ser útil dar una exposición precisa de la teoría haciendo consideración explícita de formulaciones alternativas (débiles o fuertes) en los supuestos.

Para usos prácticos es también conveniente definir las fórmulas usadas para las soluciones dinámicas tal como aparecen bajo distintos conjuntos de hipótesis. Esto se hará lo más breve posible.

1. SUPUESTOS FUNDAMENTALES Y SIGNOS EMPLEADOS

K_t es el capital existente en el momento t;
Y_t es el ingreso en el periodo t (aproximadamente el ingreso total) entre t y $t + 1$, o más exactamente la tasa anual del ingreso en el momento t;
P_t es la capacidad productiva, es decir, la posibilidad de producir ingreso en el periodo t; e
I_t es la inversión neta en el periodo t.

El significado concreto de P_t es el de límite superior de Y_t o sea:

$$Y_t \leqslant P_t \qquad \text{(para todo } t\text{)} \tag{1.1}$$

Sin embargo, esta desigualdad no es empleada en la derivación de las fórmulas dinámicas que siguen. En consecuencia, desde un punto de vista formal podemos considerar por el momento a K_t, Y_t, P_t e I_t como las cuatro varia-

* Ragnar Frisch. "A Reconsideration of Domar's Theory of Economic Growth." *Econometrica*, vol. 29, núm. 3, julio de 1961. Traducción al español de Gerardo M. Bueno.

[1] *Numerical Analysis*, Oxford, Inglaterra, 1958, Secciones 7-11.

bles entre las cuales se supondrá existen ciertas relaciones. En primer lugar tendremos: [2]

(1.2) $\dot{K}_t = I_t$ (definición de incremento neto de capital)

Aquí y en lo que sigue un punto sobre la letra indica una derivada con respecto a t.

En segundo lugar suponemos que existe una relación constante entre I_t y el aumento de capacidad. Esto es:

(1.3) $\dot{P}_t = \sigma I_t$ (σ es constante en el tiempo)

σ puede denominarse como productividad de la inversión. Es un promedio para la sociedad como un todo. Finalmente, suponemos que la propensión marginal a ahorrar es constante a través del tiempo. Puede expresarse como sigue:

(1.4) $\dot{I}_t = \alpha \dot{Y}_t,$ (α es constante en el tiempo)

donde α es la propensión marginal a ahorrar, si suponemos que todos los ahorros son utilizados de manera que impliquen un incremento correspondiente del capital. Compárese esto con (1.2).

Las fórmulas (1.2)–(1.4) expresan los tres supuestos fundamentales que se mantienen siempre, independientemente de los casos especiales que se introducen posteriormente. Obsérvese que los supuestos (1.3)–(1.4) conciernen derivadas con respecto al tiempo. Para el caso general no se ha supuesto que P_t mantiene una relación constante a K_t ni que I_t la mantiene con Y_t.

Los cálculos aproximados para los Estados Unidos son:

(1.5) $\alpha = 0.12;$

(1.6) $\sigma = 0.30.$

En esta etapa el sistema contiene un grado de libertad. Esto es, si escogemos las condiciones iniciales y la forma a través del tiempo de una de las variables, la evolución del sistema está perfectamente determinada. Sin salirnos del punto de vista perfectamente general adoptado en esta

[2] Domar en su "Caso 2" en *Econometrica* (p. 143) distingue entre la contribución (positiva) a K_t que se origina de la *nueva* inversión y la contribución (negativa) que resulta del hecho que las nuevas inversiones pueden restar trabajo (y otros factores) a otras plantas (p. 140) reduciendo así la capacidad productiva de estas plantas. Todo depende de la forma en que $\dot{K}_t$ e I_t sean definidas. Si el hecho a que se refiere Domar se introduce explícitamente significaría que I_t dejaría de ser equivalente al aumento de K_t por unidad del tiempo y sería, en consecuencia, de una magnitud mayor. En ese caso mi ecuación (1.2) sería remplazada por una de las formas $\dot{K}_t = \gamma I_t$ donde γ es menor que la unidad (o quizá mayor en casos excepcionales). Véase su fórmula (15). Para mí esto sólo introduce una complicación innecesaria en el uso de los símbolos matemáticos. Me parece que uno debía adoptar una definición tal de los mismos que (1.2) sea siempre válida. Esto significa que sólo consideramos lo que Domar denomina "Caso 1" (p. 142). En el presente trabajo se ha procedido de esta manera.

sección, podremos por integración derivar fórmulas que expresen distintas relaciones entre las variables mismas.

Sustituyendo (1.3) en (1.2) e integrando entre 0 y t, se obtiene

$$P_t = \sigma K_t + (P_0 - \sigma K_0) \qquad \text{(siempre)} \tag{1.7}$$

Adviértase que P_t es proporcional a K_t sólo cuando $P_0 = \alpha K_0$. Integrando (1.4) entre 0 y t se llega a

$$I_t = \alpha Y_t + (I_0 - \alpha Y_0) \qquad \text{(siempre)} \tag{1.8}$$

Nótese que I_t es proporcional a Y_t sólo cuando $I_0 = Y_0$. Hemos agregado la palabra "siempre" después de las fórmulas para recordarnos que éstas son válidas independientemente de los casos especiales que son tratados con posterioridad.

Las fórmulas (1.7)-(1.8) son formas alternativas de expresión de los supuestos fundamentales (1.3)-(1.4).

Sustituyendo (1.8) en (1.3), se logra

$$\dot{P}_t = \alpha \sigma Y_t + \sigma(I_0 - \alpha Y_0) \qquad \text{(siempre)} \tag{1.9}$$

Sustituyendo (1.8) en (1.2) se obtiene

$$\dot{K}_t = \alpha Y_t + (I_0 - \alpha Y_0) \qquad \text{(siempre)} \tag{1.10}$$

2. Plena utilización del aumento en capacidad

Para que un aumento en capacidad sea plenamente utilizado se requiere que

$$\dot{Y}_t = \dot{P}_t \quad \text{(utilización plena del aumento en capacidad)} \tag{2.1}$$

Este supuesto se refiere únicamente al *aumento* de capacidad. No significa que Y_t es igual a P_t para toda t. Pero si agregamos el supuesto

$$Y_0 = P_0, \tag{2.2}$$

tendremos entonces que siempre Y_t es igual a P_t. Las fórmulas subsecuentes pueden manejarse con la misma facilidad sin el supuesto (2.2) y resultan mucho más útiles cuando no se hace éste. Podemos examinar entonces cómo evolucionaría la situación a partir de un punto arbitrariamente dado. En consecuencia, utilizaremos sólo (2.1). Esta nueva ecuación hace al sistema determinable. Esto es, podemos ahora descubrir cómo evolucionaría el sistema a partir de condiciones iniciales dadas. Esto se hace según se indica a continuación. Sustituyendo el lado izquierdo de (2.1) para Y_t de (1.4) y en el lado derecho de (2.1) para $\dot{P}_t$ de (1.3) obtenemos la siguiente ecuación diferencial simple para I_t:

$$\dot{I}_t = \alpha \sigma I_t \qquad \text{(bajo utilización plena del aumento)} \tag{2.3}$$

cuya solución es:

(2.4) $\qquad \alpha\sigma t$ $\qquad$ (bajo utilización plena del aumento)

Hemos agregado las palabras "bajo utilización plena del aumento" después de las fórmulas para indicar que siguen siendo válidas cuando se supone una utilización plena de cualquier aumento, es decir, si se adopta (2.1). Sustituyendo (2.4) en (1.3) integrando, se obtiene

$$P_t = P_0 + \frac{I_0}{\alpha}\left(e^{\sigma\alpha t} - 1\right) \tag{2.5}$$ (bajo utilización plena del aumento)

Sustituyendo además (2.4) en (1.8) tendremos

$$Y_t = Y_0 + \frac{I_0}{\alpha}\left(e^{\sigma\alpha t} - 1\right) \tag{2.6}$$ (bajo utilización plena del aumento)

Finalmente, si se sustituye (2.5) en (1.7) se llega a

$$K_t = K_0 + \frac{I_0}{\alpha\,\sigma}\left(e^{\alpha\sigma t} - 1\right) \tag{2.7}$$ (bajo utilización plena del aumento)

En (2.4)-(2.7) todas las cuatro variables están explícitamente expresadas como funciones en el tiempo. No hay hasta ahora nada en la derivación de ellas que nos impida seleccionar cualesquier valor para las magnitudes iniciales de I_0, P_0, Y_0 y K_0.

Es interesante analizar qué tanto de la capacidad es aprovechada en un momento dado. Tomando la relación (2.6) de (2.5) tendremos

$$\frac{Y_t}{P_t} = \frac{Y_0 + \frac{I_0}{\alpha}\left(e^{\alpha\sigma t} - 1\right)}{P_0 + \frac{I}{\alpha}\left(e^{\alpha\sigma t} - 1\right)} \tag{2.8}$$ (bajo utilización plena del aumento)

Puede verse inmediatamente que si se adopta (2.2) es decir, si la capacidad fuera plenamente aprovechada en la situación inicial (2.8), sería igual a 1 para todo t, lo cual concuerda con las observaciones hechas en relación a (2.2)

De (2.8) podemos ver además que a medida que t tiende a infinito la relación Y_t/P_t se aproxima a 1 independientemente de la situación inicial. En otras palabras si hacemos que los aumentos en capacidad sean plenamente aprovechados nos aproximaremos a una situación en que toda la capacidad es plenamente utilizada.

3. Subutilización de capacidad

Si desechamos la hipótesis (2.1) de plena utilización del aumento de capacidad, podemos enfocar el problema de varias maneras. Una sería regresar a la observación hecha después de (1.5)-(1.6) en el sentido que se puede suponer una evolución arbitraria para una de las variables.

Podríamos, por ejemplo, suponer una evolución exponencial de I_t a una tasa r diferente posiblemente de $\alpha\sigma$. O podríamos remplazar (2.1) por una hipótesis de la forma

(3.1) $$Y_t = \theta P_t \qquad (\theta \text{ es constante en el tiempo})$$

donde la constante θ —coeficiente de aprovechamiento— no es necesariamente igual a 1. Infortunadamente un valor de θ menor que la unidad es lo que mejor describe la situación a largo plazo de países con economía libre (y no inflacionaria).[3]

Resulta que estos dos enfoques conducen al mismo resultado. Domar sigue el primero, pero me parece que el segundo es más natural. Suponer para una de las variables una curva de tipo exponencial en el tiempo sin relacionarla con las propiedades del modelo parece sin duda un poco extraño. Sustituyendo en el lado izquierdo de (3.1) para $\dot{Y}_t$ de (1.4) y en el lado derecho de (3.1) para $\dot{P}_t$ de (1.3) se tiene que

(3.2) $$\dot{I}_t = rI_t \qquad (\text{bajo utilización parcial del aumento})$$

donde r es una constante tal que

(3.3) $$\theta = \frac{r}{\alpha\,\sigma}$$

de (3.2) se sigue que

(3.4) $$I_t = I_0 e^{rt} \qquad (\text{bajo utilización parcial del aumento})$$

Hemos agregado las palabras "bajo utilización parcial del aumento" después de las fórmulas para indicar que son válidas bajo el supuesto hecho en (3.1) donde θ puede ser una fracción propia o impropia; es decir, mayor menor, o igual a la unidad.

En la misma forma que (2.5)-(2.7) se derivan de (2.4) podemos obtener ahora

(3.5) $$P_t = P_0 + \frac{\sigma I_0}{r}(e^{rt} - 1) \qquad (\text{bajo utilización parcial del aumento})$$

(3.6) $$Y_t = Y_0 + \frac{I_0}{\alpha}(e^{rt} - 1) \qquad (\text{bajo utilización parcial del aumento})$$

(3.7) $$K_t = K_0 + \frac{I_0}{r}(e^{rt} - 1) \qquad (\text{bajo utilización parcial del aumento})$$

3 En el corto plazo una política sana deberá tender a $\theta > 1$ cuando α y σ se definen marginalmente y existe capacidad no aprovechada en la situación inicial.

Haciendo $r = \alpha\sigma$ en (3.4)-(3.7) volvemos a (2.4)-(2.7). Esto es equivalente a hacer $\theta = 1$ en (3.1) y (3.3).

Bajo los supuestos hechos en esta sección la relación Y_t a K_t será [4]

$$(3.8) \qquad \frac{Y_t}{K_t} = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{\alpha Y_0 + I_0(e^{rt} - 1)}{rK_0 + I_0(e^{rt} - 1)} \quad \text{(bajo utilización parcial del aumento)}$$

y la relación de Y_t a P_t será

$$(3.9) \qquad \frac{Y_t}{P_t} = \frac{r}{\alpha\sigma} \cdot \frac{\alpha Y_0 + I_0(e^{rt} - 1)}{\frac{r}{\sigma}P_0 + I_0(e^{rt} - 1)} \quad \text{(bajo utilización parcial del aumento)}$$

Si $\alpha Y_0 = rK_0$ la ecuación (3.8) será siempre igual a r/α. Incluso si $\alpha Y_0 \neq rK_0$ tenderá a aproximarse a $r\alpha$ a medida que t se aproxima a infinito.

Si $\alpha\sigma Y_0 = rP_0$ o sea, $Y_0 = \theta P_0$ la ecuación (3.9) será siempre igual a $r/\alpha\sigma$, esto es, a θ. E incluso si $Y_0 \neq P_0$ se aproximará a $r/\alpha\sigma$ a medida que t tiende a infinito.

Las conclusiones anteriores también son válidas si se deshecha (3.1) y se comienza el razonamiento suponiendo para I_t una evolución de la forma (3.4).

Un problema interesante no considerado por Domar es determinar la pérdida total del ingreso entre 0 y t que es causada al mantener la tasa de incremento de la inversión igual a r en lugar de la tasa $\alpha\sigma$ que sería la que asegurara en todo momento el pleno aprovechamiento de aumentos de capacidad. Lo anterior se obtiene integrando (3.6) y (2.6) de 0 a t y comparando los resultados. Esto da

$$(3.10) \qquad \int_0^t (Y_\tau^{pleno} - Y_\tau^{parcial})\,d\tau = \frac{I_0}{\alpha}\left[\frac{e^{\alpha\sigma t} - 1}{\alpha\sigma} - \frac{e^{rt} - 1}{r}\right]$$

donde Y_τ^{pleno} es el valor determinado por (2.6) y $Y_\tau^{parcial}$ es determinado por (3.63).

La diferencia en el lado derecho de (3.10) es positiva cuando $r < \alpha\sigma$ y negativa en el caso contrario ya que la función $(e^z - 1/Z)$ aumenta con Z en el intervalo $Z \geqslant 0$. La misma conclusión puede alcanzarse considerando la tasa anual de pérdida

$$(3.11) \qquad Y_\tau^{pleno} - Y_\tau^{parcial} = \frac{I_0}{\alpha}(e^{\alpha\sigma t} - e^{rt})$$

y observando que esta diferencia —que es el integrado de (3.10)— es positiva si $r < \alpha\sigma$ y negativa en el caso contrario.

[4] Esta fórmula es idéntica a la (10) de Domar en el caso especial $I_0 = \alpha Y_0$. (Compárense las observaciones hechas en relación a (1.8).) A fin de llegar a las conclusiones en que está interesado Domar no hay necesidad de tomar en cuenta este caso especial.

La expresión (3.11) da una representación impresionante de la pérdida anual si r resulta sustancialmente menor que $\alpha\sigma$.

4. Refuerzos innecesarios en los supuestos fundamentales

En las observaciones hechas después de (1.7) y (1.8) se señalaron los dos supuestos especiales para las condiciones iniciales

$$P_0 = \sigma K_0, \tag{4.1}$$

y

$$I_0 = \alpha Y_0, \tag{4.2}$$

Agregando éstos a los dos supuestos fundamentales hechos en (1.3)-(1.4) es equivalente a remplazar (1.3)-(1.4) por los supuesos más vigorosos.

$$P_t = \sigma K_t \qquad \text{(para todo } t\text{)} \tag{4.3}$$

$$I_t = \alpha Y_t \qquad \text{(para todo } t\text{)} \tag{4.4}$$

Aún más, si (4.1)-(4.2) se aceptan además de (1.7)-(1.8) (que se desprenden de (1.3)-(1.4) y (1.2)) llegamos inmediatamente a (4.3)-(4.4). Por lo contrario si (4.3)-(4.4) son adoptados se deduce inmediatamente (4.1)-(4.2) y se obtiene (1.3)-(1.4) al diferenciar (4.3)-(4.4) con respecto a t (y usando (1.2)). Domar en sus observaciones hechas bajo 1 y 2 en la página 142 hace los supuestos (4.3)-(4.4).[5] Como se ha visto en las secciones precedentes esto es innecesario. En consecuencia, podemos dejar este tratamiento tal como se ha desarrollado en las secciones 1 a 3. Sin embargo, para no omitir nada indicaremos las simplificaciones que ocurren en las fórmulas cuando se adoptan las hipótesis vigorosas (3.4)-(4.4) al mismo tiempo que se descarta (2.2), pero se mantiene (2.1).

De inmediato se concluye que (1.7)-(1.8) quedan reducidas a (4.3)-(4.4). Las fórmulas (2.4)-(2.5) y (2.7) no varían (excepto por el hecho que I_0 puede remplazarse por αY_0 y P_0 por σK_0, si así conviene) en tanto que (2.6) se reduce a

$$Y_t = Y_0 e^{\alpha\sigma t} \qquad \text{(bajo plena utilización del aumento cuando se adopta 4.2)} \tag{4.5}$$

La ecuación (2.8) puede ahora escribirse

$$\frac{Y_t}{P_t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{P_0}{Y_0} - 1\right) e^{-\alpha\sigma t}} \tag{4.6}$$

(bajo plena utilización del aumento cuando se adopta 4.2)

[5] Podemos extender el racionamiento a su (Caso 1) por las razones mencionadas en la nota 2 de pie de página.

La última fórmula muestra claramente la importancia de la relación entre los valores iniciales Y_0 y P_0, es decir, el grado de aprovechamiento en la situación inicial. En los supuestos hechos hasta ahora dicho grado no ha sido señalado.

Las ecuaciones (3.4)-(3.5) y (3.7) no varían (excepto por el hecho que I_0 puede remplazarse por αY_0 y P_0 por σY_0 si así conviene), en tanto que (3.6) se reduce a

$$Y_t = Y_0 e^{rt} \tag{4.7}$$

(bajo aprovechamiento parcial de los incrementos cuando se adopta (4.2)

La ecuación (3.8) puede ahora escribirse:

$$\frac{Y_t}{K_t} = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\alpha\sigma} \cdot \frac{P_0}{Y_0} - 1 \right) e^{-rt}} \tag{4.8}$$

(bajo el aprovechamiento parcial de los incrementos si se adopta (4.2)

y (3.9) puede escribirse

$$\frac{Y_t}{P_t} = \frac{r}{\alpha\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\alpha\sigma} \cdot \frac{P_0}{Y_t} - 1 \right) e^{-rt}} \tag{4.9}$$

(bajo aprovechamiento parcial de los incrementos si se adopta (4.2)

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) permanecen iguales.

A partir de (4.6) se deducen una vez más las conclusiones señaladas en relación con (2.8).

De (4.8)-(4.9) vemos que si

$$\alpha\sigma Y_0 = rP_0 \tag{4.10}$$

que en virtud de (4.1) es igual a

$$\alpha Y_0 = rK_0 \tag{4.11}$$

las dos relaciones (4.8) y (4.9) serán constantes para todo t. E independientemente de si las condiciones iniciales satisfacen o no (4.10)-(4.11), las relaciones (4.8)-(4.9) se aproximan respectivamente a r/α y $r/\alpha\sigma$ a medida que t tiende a infinito. En la práctica, la rapidez con que se aproximen a una constante dependerá de la medida en que (4.10) y (4.11) sean satisfechas y de la magnitud de r.

Todas estas conclusiones están de acuerdo con las que fueron formuladas en conexión con (3.8) y (3.9). En consecuencia, no se obtiene ninguna ventaja al agregar las condiciones (4.1) y (4.2); es decir, reforzando (1.3) y (1.4) a (4.3) y (4.4).

De manera similar podemos encontrar que el reforzamiento de (2.1) a

$$Y_t = P_t \qquad \text{(para todo } t\text{)} \tag{4.12}$$

no agrega nada esencial al análisis.