UN CAMINO DIRECTO PARA LA OBTENCIÓN DE FÓRMULAS DE NÚMEROS ÍNDICES

Francisco Rostro

(México)

I. La media aritmética y los números índices

La media

La media aritmética lleva este nombre porque se llega a ella a través de un proceso aritmético de naturaleza elemental. En el cálculo del promedio aritmético, es conveniente recordar que se encuentran comprendidas tres magnitudes, esto es

$$af = F \tag{1}$$

donde a representa cada uno de los términos de una serie; f, la frecuencia, ponderación o peso que indica cuántas veces el término se presenta y F es el producto de ambos. Desde un punto de vista diferente, puede considerarse que f representa los términos de la serie, en cuyo caso a significa la frecuencia de ellos. Aritméticamente, a y f tienen la misma calidad de factores o magnitudes de primer orden en comparación con F que pertenece a un orden superior por ser un producto. No hay excepción. Las tres magnitudes aparecen siempre en cualquier proceso de promediación, si bien a veces $f = 1$; en otros casos, $a = 1$ y aun en algunos casos $F = 1$.

Si, por ejemplo, a significa precio y f cantidad, entonces F representa valor. O si a significa salarios y f número de trabajadores entonces F es la nómina para cada grupo de igual salario. O si a representa velocidad y f tiempo, entonces F es distancia recorrida.

La ecuación (1) origina las siguientes:

$$a = F/f \tag{2}$$

$$f = F/a \tag{3}$$

Al parecer estamos bordando sobre lo obvio, pero ya se verá adelante que la clara comprensión de las relaciones entre las tres magnitudes es esencial para el tratamiento de problemas de promediación.

El proceso de promediación

El proceso de promediación (aritmético) consiste en sumar todas las magnitudes de segundo orden y en dividir la suma entre la suma correspondiente a una de las dos series de magnitudes de primer orden para obtener el promeio de la otra serie o entre n para obtener el promedio de la serie de segundo orden. Esto es,

$$\bar{a} = \Sigma F/\Sigma f \tag{4}$$

$$\bar{f} = \Sigma F/\Sigma a \tag{5}$$

$$\bar{F} = \Sigma F/n \tag{6}$$

en donde $\bar{a}$, $\bar{f}$ y $\bar{F}$ representan las medias aritméticas de a, f y F mientras que n es el número de magnitudes comprendidas y Σ es un símbolo que significa "la suma de". Por ejemplo, si a es precio y f cantidad, entonces $\bar{a}$ se obtiene dividiendo la suma de los valores entre la suma de las cantidades; $\bar{f}$ se obtiene dividiendo la suma de los valores entre la suma de los precios y $\bar{F}$ se obtiene dividiendo la suma de los valores entre el número de ellos. Por supuesto, si $f = 1$ [1] entonces la fórmula (4) viene a ser

$$\bar{a} = \Sigma a/n \tag{4b}$$

Por otra parte, cuando $a = 1$, entonces (5) se convierte en

$$\bar{f} = \Sigma f/n \tag{5b}$$

y cuando $F = 1$, entonces

$$\bar{a} = n/\Sigma(1/a) \tag{4c}$$

y

$$\bar{f} = n/\Sigma(1/f) \tag{5c}$$

Los cálculos dependen de los datos

Supóngase que hemos de calcular a. Hay tres casos.

1. Los datos conocidos son las series a y f. Sustituyendo en la ecuación (4) el valor de F dado por la ecuación (1)

$$\bar{a} = \Sigma af/\Sigma f \tag{4d}$$

Esto es, el proceso consiste en multiplicar a por f. Ésta es la fórmula aritmética o "media aritmética".

2. Los datos disponibles son a y F.

Sustituyendo en la fórmula (4) el valor de f dado por la fórmula (3)

1 Esto es, $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = fn = 1$. Puede demostrarse que la misma fórmula (4*b*) es aplicable cuando $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = fn = K$. Lo equivalente puede decirse de las fórmulas (5*b*), (4*c*) y (5*c*).

$$\bar{a} = \Sigma F / \Sigma (F/a) \tag{4e}$$

En este caso el proceso consiste en dividir F entre a para obtener la magnitud desconocida f. Ésta es la fórmula armónica, a menudo llamada "media armónica".

3. Los datos conocidos son f y F. Aplicando directamente la fórmula (4)

$$\bar{a} = \Sigma F / \Sigma f \tag{4}$$

En este caso no son necesarios más cálculos que la división final que también se requiere en las fórmulas (4*d*) y (4*e*). Ésta es la fórmula agregativa, con frecuencia llamada "media agregativa".

Las medias son diferentes de las fórmulas

Hemos mencionado tres fórmulas diferentes:

Fórmula Aritmética,
Fórmula Armónica,
Fórmula Agregativa;

todas ellas utilizables para la obtención de la *media aritmética.* No hemos hablado ni de media armónica ni de media agregativa. Esto es debido a que no existen tales medidas armónicas ni agregativas que posean congruencia lógica. Tómese por ejemplo

$$a' = \Sigma f / \Sigma (f/a) \tag{7}$$

en donde a' representa la *media armónica.* El cociente f/a (pues f y a son magnitudes del mismo orden) es incongruente.

En efecto, véase la siguiente serie:

Serie A

a	f	f/a
499	1	1/499
500	1	1/500
501	1	1/501
	3	

$$a' = \frac{3}{1/499 + 1/500 + 1/501} = \frac{3}{0.006} = 500$$

Tomemos ahora la siguiente serie:

SERIE B

a	f	f/a
10	1	1/10
500	1	1/500
990	1	1/990
	3	

$$a' = \frac{3}{1/10 + 1/500 + 1/990} = \frac{3}{0.103010} = 29.12$$

¿Cómo es posible que dos series en las cuales el promedio aritmético $\bar{a} = 500$ para cada una tengan dos medias armónicas diferentes? Debe notarse que la dispersión es mayor en la serie B que en la A. El desvío hacia abajo de la media armónica es la serie B en comparación con la media aritmética está, entonces, relacionada con la dispersión.

Puede verse claramente que la media armónica, según se obtiene con la fórmula (7), es una media errónea. En efecto, está subponderada o ponderada con $1/a$ en comparación con la media aritmética.

Si se toma la media aritmética

$$\bar{a} = \Sigma aF/\Sigma F$$

y se introduce en ella la ponderación $1/a$

$$a' = \Sigma af(1/a)/\Sigma f(1/a) = \Sigma f/\Sigma(f/a) \tag{7}$$

La ponderación (o más bien desponderación) $1/a$ introduce un desvío hacia abajo que hace a la media armónica susceptible de cambiar no sólo con la magnitud de los términos sino también con la dispersión. Desde un punto de vista estricto de promediación, dicha media puede considerarse errónea, así como la fórmula (7).

Otro desvío (hacia arriba) puede introducirse en la media usando la fórmula

$$\underline{a} = \Sigma aF/\Sigma F \tag{8}$$

en apariencia comparable a la fórmula ($4d$). Aquí, $\underline{a}$ podría llamarse "antiarmónica" o algo similar. Tomemos un ejemplo

Serie C

a	f	F	aF
499	1	499	249,001
500	1	500	250,000
501	1	501	251,001
		1,500	750,002

$$\underline{a} = \frac{\Sigma aF}{\Sigma F} = \frac{750{,}002}{1{,}500} = 500 + 0.00133$$

Serie D

a	f	F	aF
10	1	10	100
500	1	500	250,000
990	1	990	980,100
		1,500	1.230,200

$$\underline{a} = \frac{aF}{F} = \frac{1.230{,}200}{1{,}500} = 500 + 320.133$$

Si se calcula correctamente la media aritmética es de 500 en ambas series C y D. Si se usa la fórmula (8), mientras mayor sea la dispersión mayor será el desvío hacia arriba. En la serie C el desvío es de 0.0013 mientras que en la serie D, con una dispersión mayor, el desvío es de 320.133. La fórmula (8) está sobreponderada o ponderada con a. En efecto, partiendo de la fórmula (4d)

$$\bar{a} = \Sigma F / \Sigma f$$

e introduciendo en ella el peso a:

$$\underline{a} = \Sigma aF / \Sigma af = \Sigma aF / \Sigma F \qquad (8)$$

Por supuesto, si se despondera (o se pondera con $1/a$), la fórmula (8) da origen a la fórmula (4d). Una promediación estricta debe rechazar la fórmula (8) como errónea.

Fórmulas tales $\Sigma f / \Sigma a$ ó $\Sigma a / \Sigma F$ que conducen a medias agregativas (diferentes de las fórmulas agregativas) son obviamente equívocas.

En conclusión, dentro del campo aritmético de cálculo de promedios hay tres fórmulas: aritmética, armónica y agregativa que conducen a un solo promedio: el aritmético. La *media armónica,* así como la *media agre-*

CUADRO 1. *Fórmulas para las medias aritméticas de cada magnitud comprendida según los datos disponibles*

DATOS	$\bar{a}$	$\bar{f}$	$\bar{F}$	$(\overline{1/a})$	$(\overline{1/f})$	$(\overline{1/F})$
a, f	$\dfrac{\Sigma af}{\Sigma f}$	$\dfrac{\Sigma af}{\Sigma a}$	$\dfrac{\Sigma af}{n}$	$\dfrac{\Sigma f}{\Sigma af}$	$\dfrac{\Sigma a}{\Sigma af}$	$\dfrac{n}{\Sigma af}$
a, F	$\dfrac{\Sigma F}{\Sigma \dfrac{F}{a}}$	$\dfrac{\Sigma F}{\Sigma a}$	$\dfrac{\Sigma F}{n}$	$\dfrac{\Sigma \dfrac{F}{a}}{\Sigma F}$	$\dfrac{\Sigma a}{\Sigma F}$	$\dfrac{n}{\Sigma F}$
f, F	$\dfrac{\Sigma F}{\Sigma f}$	$\dfrac{\Sigma F}{\Sigma \dfrac{F}{f}}$	$\dfrac{\Sigma F}{n}$	$\dfrac{\Sigma f}{\Sigma F}$	$\dfrac{\Sigma F}{\Sigma \dfrac{f}{F}}$	$\dfrac{n}{\Sigma F}$

NOTA: No se han considerado datos en forma recíproca tales como $1/a$, $1/f$, $1/F$. El lector puede fácilmente construir una nueva tabla basada en tales posibilidades.

gativa son errores que a veces se cometen debido a la confusión que existe con las fórmulas correspondientes.

No hay elección posible de las operaciones que deben ejecutarse, ya que están determinadas por las relaciones entre las magnitudes (y por los datos disponibles). Cualquier mal entendimiento de esto llevará a resultados equivocados. El error o desvío está relacionado con la dispersión. En el cálculo de números índices se usan a veces fórmulas erróneas y el error no es visible debido a que la dispersión entre los relativos de precios rara vez es grande.

Fórmulas de números índices

De nuevo dentro del campo aritmético, supondremos $Q = 1$ al principio, con objeto de simplificar (Q significa cantidad). Podemos establecer:

$$(P_1/P_0)P_0 = P_1 \tag{10}$$

donde P_1 representa el precio del año de estudio, P_0 el precio del año básico y P_1/P_0 es el relativo de precios. Tanto P_1/P_0 como P_0 son factores y P_1 es su producto; la ecuación (10) es similar a la ecuación (1).

Lo que ahora interesa es el promedio de (P_1/P_0). Por similitud con la fórmula (4), tenemos

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1/\Sigma P_0 \tag{14}$$

pero si hubiésemos de determinar P_0, su fórmula sería

$$\Sigma\bar{P}_0 = \Sigma P_1/\Sigma(P_1P_0) \tag{15}$$

y

$$\bar{P}_1 = \Sigma P_1/n \tag{16}$$

En el caso de que $P_0 = 1$,[2]

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_1/P_0)/n \tag{14b}$$

Igualmente, cuando $P_1 = 1$

$$(\overline{P_1/P_0} = n/\Sigma(P_0/P_1) \tag{14c}$$

y

$$\bar{P}_0 = n/\Sigma(1/P_0) \tag{15c}$$

La fórmula (14) es "agregativa". Como quiera que rara vez $P_0 = 1$, $(P_1/P_0) = 1$ ó $P_1 = 1$, las fórmulas (14*b*) a (15*c*) son inútiles. Si son aplicadas cuando las igualdades a 1 no se cumplen, los procedimientos y los resultados son incorrectos.

Los cálculos según quedan determinados por los datos

Cuando hay que determinar $(\overline{P_1/P_0})$ puede suceder:

1. Los datos conocidos son (P_1/P_0) (ya determinados) y P_0

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_1/P_0)\, P_0/\Sigma P_0 \tag{14d}$$

Puede fácilmente verse que la fórmula (14*d*) es equivalente a la (14).

2. Los datos conocidos son (P_1/P_0) ya calculados y P_1

$$(\overline{P_1/P_0}) = P_1/(P_1 \div P_1/P_0) \tag{15d}$$

3. Los datos son P_0 y P_1

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1/\Sigma P_0 \tag{14}$$

Las tres últimas fórmulas son equivalentes y difieren en forma dependiendo de los datos disponibles. Se ve claramente que los datos más convenientes son P_0 y P_1 si los cálculos han de ser los más simples. Si dichos

[2] O bien $P_0 = K$.

P_0 y P_1 se conocen, las fórmulas de la (15) en delante deben desecharse por innecesarias.

En los casos *1* y *2* anteriores se supuso que los relativos (P_1/P_0) están ya determinados y aportados como datos. En la práctica éste no es el caso común y más bien se dispone de P_0 y P_1.

En conclusión, cuando $Q = 1$ la fórmula correcta para el cálculo de los números índices es $(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1 \Sigma P_0$ ecuación (14).

Indices ponderados con cantidad

Cuando $Q \neq 1$, multiplicando ambos miembros de la ecuación (10) por Q_0:

$$(P_1/P_0)\ (P_0Q_0) = (P_1Q_0) \tag{31}$$

donde (P_1Q_0) es un producto compuesto de los factores (P_1/P_0) y (P_0Q_0). El símbolo Q_0 representa cantidad del año básico. Si se usa la cantidad del año de estudio Q_1.

$$(P_1/P_0)\ (P_0Q_1) = (P_1Q_1) \tag{32}$$

el número índice de precios se obtiene:

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1Q_0/\Sigma P_0Q_0 \tag{31b}$$

o bien

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1Q_1/\Sigma P_0Q_1 \tag{32b}$$

Si tanto Q_1 como Q_0 son conocidas, su suma puede usarse

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1(Q_0 + Q_1)/\Sigma P_0(Q_0 + Q_1) \tag{33}$$

fórmulas del tipo

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_1/P_0)\ (P_1Q_0)/\Sigma(P_1Q_0)$$

o bien,

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_0Q_0)/\Sigma(P_1/P_0)\ (P_0Q_0)$$

son incongruentes.

No hay mucho campo de elección acerca de las fórmulas para el cálculo de números índices. Los cálculos dependen de los datos disponibles. Si la información puede obtenerse en la forma más conveniente, deben conocerse P_0 y P_1 así como Q_0, Q_1 o ambas. En el caso de $Q = 1$ [3] se recomienda la fórmula (14); de otra manera, las fórmulas (31*b*) a (33) son

[3] O bien $Q = K$.

adecuadas. (La fórmula "ideal" del profesor Fisher es híbrida aritmético-geométrica y, por tanto, no será incluida aquí.)

Relaciones entre fórmulas

Es posible obtener casi cualquier fórmula de números índices partiendo de cualquier otra ponderando (o desponderando). Tómese por ejemplo

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_1/P_0)/n$$

introduciendo la ponderación P_0:

$$(P_1/P_0) = \Sigma P_1/\Sigma P_0$$

si ésta se pondera (o más bien, se despondera) con $1/P_1$

$$(\overline{P_1/P_0}) = n/\Sigma(P_0/P_1)$$

Si esta última se pondera con P_1Q_0

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma P_1Q_0/\Sigma P_0Q_0$$

y así sucesivamente. El diagrama anexo muestra los caminos entre las fórmulas aritméticas. No se consideran casos especiales por ejemplo

$$(\overline{P_1/P_0}) = \Sigma(P_1/P_0)Q_0/\Sigma Q_0$$

en la que

$$P_0 = 1, \quad Q_0 \neq 1.$$

Las flechas muestran la dirección del proceso de ponderación y las ponderaciones están encerradas en círculos. En general las ponderaciones recíprocas como $1/P_0$ tienden a deteriorar las fórmulas mientras que las ponderaciones no recíprocas tienden a mejorarlas. Las fórmulas a la izquierda de la gráfica son imperfectas o utilizables sólo en casos especiales (cuando P, Q ó ambas se suponen $= 1$) mientras que las fórmulas a la derecha son perfectas o de uso general.

II. La media geométrica y los números índices

La media geométrica

El proceso de promediar una serie que se aproxima a una distribución de progresión geométrica requiere de la media geométrica en forma similar a como la media aritmética se recomienda cuando se promedia una serie cuya distribución se aproxima a la de una progresión aritmética.

Como es sabido,

$$\log \underline{a}/ = \Sigma f \log a / \Sigma f \qquad (41)$$

y

$$\log \underline{f}/ = \Sigma a \log f / \Sigma a \qquad (42)$$

donde $\underline{a}/$ representa la media geométrica de a y $\underline{f}/$, la de f. En las fórmulas (41) y (42) se supone que a y f son los datos conocidos. Puede también suceder que los datos no sean siempre a y f. Volviendo a las ecuaciones (1) a (3) pueden suponerse otros casos.

Primer caso. Los datos conocidos son a y F. Entonces,

$$\log \underline{a}/ = \Sigma(F/a) \log a / \Sigma(F/a) \qquad (43)$$

y

$$\log \underline{f}/ = \Sigma a \log (F/a) / \Sigma a \qquad (44)$$

La fórmula (43) responde al mismo propósito que la fórmula armónica. Esto es, la (43) puede ser considerada como una fórmula armónico-geométrica.

Segundo caso. Los datos conocidos son f y F. Entonces,

$$\log \underline{a}/ = \Sigma f \log (F/f) / \Sigma f \qquad (45)$$

y

$$\log \underline{f}/ = \Sigma(F/f) \log f / \Sigma(F/f) \qquad (46)$$

La fórmula (45) toma el lugar de la agregativa según los datos disponibles.

Cuadro 2. *Promedios geométricos de cada magnitud comprendida según los datos disponibles*

Datos conocidos	$\underline{a}/$	$\underline{f}/$
a, f	$\log \underline{a}/ = \Sigma f \log a$	$\log \underline{f}/ = \Sigma a \log f / \Sigma a$
a, F	$\log \underline{a}/ = \Sigma(F/a) \log a / \Sigma(F/a)$	$\log \underline{f}/ = \Sigma a \log (F/f) \Sigma a$
f, F	$\log \underline{a}/ = \Sigma f \log (F/f) / \Sigma f$	$\log \underline{f}/ = \Sigma(F/f) \log f / \Sigma(F/f)$

Datos conocidos	$\underline{F}/$
a, f	$\log \underline{F}/ = \Sigma \log (af)/n$
a, F	$\log \underline{F}/ = \Sigma \log F/n$
f, F	$\log \underline{F}/ = \Sigma \log F/n$

Puede construirse una tabla que incluya las diferentes posibilidades de datos disponibles así como los promedios para cada magnitud comprendida. Véase el cuadro 2 en la página anterior.

El índice geométrico

Una serie de relativos rara vez tiene una distribución geométrica y, por tanto, la media geométrica no es a menudo aplicable. Sin embargo, pueden obtenerse fórmulas geométricas. Sabemos que

$$(P_1/P_0)\ (P_0Q_0) = (P_1Q_0)$$

y

$$(P_1/P_0)\ (P_0Q_1) = (P_1Q_1)$$

luego

$$\log (P_1/P_0)/ = \Sigma(P_0Q_0) \log (P_1/P_0)/\Sigma(P_0Q_0) \qquad (47)$$

o bien

$$\log (P_1/P_0)/ = \Sigma(P_0Q_1) \log (P_1/P_0)/\Sigma(P_0Q_1) \qquad (48)$$

Las fórmulas (47) y (48) son iguales que la (43) adaptada. La fórmula (45) podría adaptarse también, pero no se hará, pues el supuesto de datos preelaborados es más bien irrealista.

Fórmulas híbridas

La fórmula "ideal" del profesor Fisher, esto es

$$\log (P_1/P_0)/ = \frac{\log (\Sigma P_1Q_0/\Sigma P_0Q_0) + \log (\Sigma P_1Q_1/\Sigma P_0Q_1)}{2}$$

es híbrida porque es la *media geométrica* de dos índices previamente calculados a través de la *media aritmética*. Pueden crearse otras fórmulas híbridas tales como

$$(P_1/P_0)/ = \Sigma P_1\sqrt{Q_0Q_1}/\Sigma P_0\sqrt{Q_0Q_1}$$

que es la media aritmética de los relativos ponderada con el promedio geométrico de las cantidades.

III. CONCLUSIÓN

Los índices geométricos deben ser descartados por inaplicables a series de relativos que rara vez se aproximan a la distribución de una progresión geométrica. Otros promedios como la moda y la mediana también deben ser descartados por incuantitativos. En consecuencia, el único promedio aceptable es el aritmético al cual puede llegarse por tres fórmulas o procesos diferentes: aritmética, armónica y agregativa, dependiendo de los datos disponibles. Es erróneo usar fórmulas rudimentarias en las que hay los supuestos de que $P = 1$, $Q = 1$ o ambas cosas a la vez. Más bien deben usarse fórmulas en que $P \neq 1$ y $Q \neq 1$. La única elección con respecto a fórmulas es si ha de usarse Q_0 ó Q_1 (o ambas) y si se ha de elegir una fórmula puramente aritmética o una híbrida.

DIAGRAMA A. *Relaciones entre fórmulas de números índices*