

DIVERGENCIA DE INTERESES E INFORMATIVIDAD DE LOS MENSAJES EN UN MODELO DE SEÑALIZACIÓN GRATUITA

Un ejemplo*

*Dragan Filipovich***

RESUMEN

En este artículo se estudia una modificación del modelo de señalización gratuita de Crawford y Sobel (1982) en la que el espacio de estados no es un intervalo sino la circunferencia de un círculo.

Se demuestra mediante un ejemplo que, contrario a lo que sucede en Crawford y Sobel, el equilibrio más informativo se alcanza cuando la divergencia de intereses entre el receptor y el emisor es la mayor posible.

ABSTRACT

This note presents a variant of the canonical cheap-talk model of Crawford and Sobel (1982) in which the state space is taken to be the circle instead of the unit interval.

We show by example that in such a setup, contrary to what happens in the canonical model, the most informative equilibrium is reached when the interests of the receiver and the sender are as far apart as they can be.

* *Palabras clave:* señalización gratuita, comunicación. *Clasificación JEL:* D83.

** Centro de Estudios Económicos, El Colegio de México.

INTRODUCCIÓN

Este artículo estudia las condiciones en las cuales un agente que cuenta con información privada (“el emisor”) puede comunicar (“señalizar”) esta información total o parcialmente de manera creíble a un agente desinformado (“el receptor”), quien debe tomar una decisión con base en la información comunicada que lo afectara tanto a él como al agente informado. Si los intereses del emisor y del receptor coincidieran plenamente, la credibilidad de la comunicación estaría garantizada. Sin embargo, cuando los intereses del emisor no coinciden plenamente con los del receptor, el emisor puede tener un incentivo para mentir y manipular la decisión del receptor. Es lógico suponer que el receptor va a tomar en cuenta la posibilidad de que el emisor éste mintiendo a la hora de evaluar cualquier comunicación que éste le haga llegar. El problema central de esta bibliografía es determinar qué información es factible comunicar de manera creíble en estas condiciones.

Los primeros trabajos en esta línea (la contribución seminal es Spence, 1973) se centraron en estudiar situaciones en que los mensajes que el emisor podía hacerle llegar al receptor eran directamente costosos para el emisor. Para garantizar la credibilidad de la comunicación transmitida se suponía que ciertos mensajes eran más costosos que otros y, además, que este diferencial de costos estaba sistemáticamente relacionado con la información con la que contaba el emisor (se suponía una “condición de intersección única”).

Finalmente surgió la pregunta de si se podía garantizar la credibilidad de la comunicación aun en ausencia de mensajes directamente costosos. El primer trabajo en abordar esta pregunta fue Crawford y Sobel (1982). Estos autores demostraron que esto era en principio posible (aunque no sin recurrir a un gran ordenamiento de las preferencias de los emisores en función de su información privada), pero sólo reduciendo la exactitud de la información transmitida. Además demostraron que mientras más divergieran los intereses del receptor de los del emisor, más inexacta debía ser la información comunicada.

El presente artículo estudia el modelo de Crawford y Sobel pero suponiendo un diferente ordenamiento de las preferencias del emisor en función de su información. La modificación consiste en sustituir el intervalo unitario (como representación de la información privada del emisor) por el círculo unitario.¹ Los demás aspectos del modelo se mantienen esencialmente

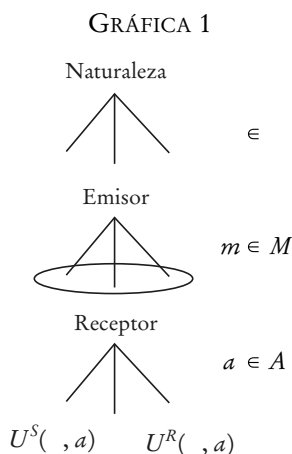
¹ De cierta manera, la relación entre nuestra versión del modelo y la original es análoga a la que existe entre modelos de localización de la línea (*à la* Hotelling, 1924) y sobre el círculo (*à la* Salop, 1979), o

inalterados. En el marco de esta modificación presentamos un ejemplo que sugiere que la relación inversa entre exactitud de la comunicación y grado de divergencia de intereses que encontraron Crawford y Sobel no es robusta a cambios en la estructura de la información privada del emisor. De manera específica, el ejemplo demuestra que el mayor grado de exactitud en la comunicación que se puede alcanzar en esta modificación del modelo de Crawford y Sobel se obtiene precisamente cuando la divergencia entre los intereses del emisor y del receptor es la máxima posible, dada la estructura de la información privada del emisor.

Aunque este artículo se debe leer como un comentario teórico a uno de los resultados de Crawford y Sobel, no descartamos que la modificación del modelo de Crawford y Sobel que estudiamos pueda tener aplicaciones prácticas. En los comentarios finales analizamos algunas de las posibles aplicaciones de esta versión modificada, así como la bibliografía relacionada.

I. EL MODELO

El marco básico es un juego de emisor/receptor. Este juego en forma extensiva es jugado por tres jugadores, la naturaleza (N), el emisor (E) y el receptor (R). La gráfica 1 ilustra el juego.



entre modelos de votación con votantes distribuidos en la línea o votantes distribuidos en el círculo (véase una vista general de estos modelos en por ejemplo Roemer, 2001). En realidad, los vínculos entre los modelos de señalización gratuita y los de localización y de votación son muy estrechos. Así los resultados de este artículo podrían por ejemplo tener aplicación en modelos de votación con votantes distribuidos en círculo, o en modelos de localización en el círculo.

Para empezar, la naturaleza escoge un elemento (“estado”) del conjunto (denominado “espacio de estados”) de acuerdo con una distribución acumulativa F sobre (con densidad $f > 0$). Luego, habiendo observado el estado electo por la naturaleza, el emisor envía un mensaje m del conjunto de mensajes M (“espacio de mensajes”). Tras recibir el mensaje del receptor pero ignorando el estado seleccionado por la naturaleza (consciente, sin embargo, de que la naturaleza selecciona de acuerdo con F), el receptor escoge una acción a en el conjunto A (“espacio de acciones”). Tras esto, las utilidades del receptor U^R , y del emisor U^E , se realizan. Estas utilidades dependerán del estado seleccionado por la naturaleza y la acción seleccionada por el receptor. Sin embargo, no dependen del mensaje enviado. Es en este sentido que la señalización es gratuita. Por tanto, tenemos que $U^R(\theta, a)$ y $U^E(\theta, a)$.

Todo esto es exactamente como en Crawford y Sobel (1982). La modificación clave se refiere al supuesto que sigue:

$$A = M = \text{Círculo } [0, 1]$$

En palabras, suponemos que los espacios de acciones, de mensajes y de estados coinciden y corresponden con la circunferencia del círculo unitario. O sea cada punto de la circunferencia del círculo corresponde a un distinto mensaje, a una distinta acción y a un distinto estado, con excepción de los puntos 0 y 1 que denotan una misma acción/mensaje/estado.

En el modelo de Crawford y Sobel, en contraste, se tiene que

$$A = M = \text{Intervalo } [0, 1]$$

Para simplificar la exposición nos centramos en el caso en que la naturaleza escoge cualquier estado con igual probabilidad, es decir, suponemos que

$$\theta \sim \text{uniforme} (\text{Círculo } [0, 1])$$

Finalmente, suponemos que las utilidades del receptor y del emisor toman una forma muy especial.

La utilidad del emisor esta dada por la función Von Neumann-Morgenstern,

$$U^E(a, \theta) = \min((\theta - a)^2, (1 - |\theta - a|)^2)$$

La utilidad del receptor está dada por la función Von Neumann-Morgens-tern,

$$U^R(a, b) = \min((|b|_1 - a)^2, (1 - |b|_1 - a)^2)$$

En estas dos últimas expresiones b es un escalar en $[0, \frac{1}{2}]$, $|b|_1$ se define como

$$|a|_1 = \begin{cases} a & \text{si } a \leq 1 \\ a - 1 & \text{si no} \end{cases}$$

El parámetro b percibe la divergencia de intereses entre el receptor y el emisor. Esta especificación de las utilidades es la contraparte natural en el círculo unitario de la especificación de preferencias cuadráticas en el intervalo unitario. El operador \min selecciona la distancia mínima, mientras que el operador de valor absoluto renormaliza valores cada vez que el segmento más corto entre dos puntos incluye el origen.

Estas preferencias tienen una interpretación muy sencilla: la “acción ideal” del emisor, o sea, la acción que maximiza la utilidad del emisor dado el estado que selecciona la naturaleza, es precisamente este estado. La acción ideal del receptor, por otra parte, es el estado desplazado por el sesgo b hacia la derecha. En otras palabras, si el estado seleccionado por la naturaleza es, digamos, a , entonces el emisor prefiere acciones lo más cercanas a este estado, mientras que el receptor prefiere acciones lo más cercanas al estado $a + b$, módulo 1.

Aparte de la forma del espacio de estados (el círculo unitario, en vez del intervalo unitario), y los cambios en la especificación de las preferencias que esta reformulación exige, el juego de receptor/emisor coincide en lo sustancial con el juego de Crawford y Sobel. Sin embargo, es válido advertir que los cambios en las preferencias requeridos por la distinta especificación del espacio de estados son importantes: ahora las preferencias ya no son estrictamente cóncavas (aunque aún conservan la propiedad de tener un pico único). Como consecuencia de esto, respuestas mixtas ya no pueden ser excluidas *a priori* (en contraste con lo que sucede en el modelo de Crawford y Sobel).

Finalmente, destacamos una diferencia que desempeñará un papel importante en este artículo: en esta reformulación del modelo de Crawford y Sobel, el sesgo b tiene una cota superior natural, a decir, $1/2$. Mayores valores de este parámetro corresponderían a sesgos menores en la dirección opuesta.

II. EL EQUILIBRIO MÁS INFORMATIVO SE OBTIENE CUANDO EL SESGO ES MAXIMAL

1. *Definición de equilibrio*

El concepto de solución será el de equilibrio bayesiano perfecto débil (para una definición general, véase, por ejemplo, Mas-Colell *et al*, 1995). Procedemos a definir algunos objetos que usaremos en la definición formal de equilibrio para este juego.

Una regla de mensajes es una asociación que va del espacio de estados al espacio de mensajes. Formalmente,

$$: \Omega \rightarrow M$$

Esta asociación describe una estrategia para el emisor.

Una regla de acción es una asociación que va del espacio de mensajes al espacio de distribuciones de probabilidad sobre el espacio de acciones. Formalmente,

$$: M \rightarrow \Delta(A)$$

Esta asociación describe una estrategia para el receptor.

Escribiremos $\pi(a|m)$ para denotar la probabilidad de que la acción $a \in A$, sea seleccionada por el receptor que ha recibido el mensaje $m \in M$, mientras que $\pi(m)$ denotará la distribución asociada con ese mensaje.

El ejemplo que presentaremos tendrá la particularidad de que $\pi^{-1}(m)$ contendrá un número finito de estados (denotamos la cardinalidad de este conjunto por $\# \pi^{-1}(m)$). También, el soporte de $\pi(m)$ será finito. Así que aquí, en vez de presentar una definición general que no usaremos, nos limitaremos a presentar la definición de equilibrio que consideramos razonable para este caso (respecto a por qué consideramos la definición que sigue la más razonable en estas circunstancias, véase el análisis presentado después del ejemplo).

Según la hipótesis de que la naturaleza selecciona estados siguiendo una distribución uniforme y dada una regla de mensajes π , podemos definir las creencias asociadas con π como sigue

$$f(\cdot | m) = \frac{1}{\# \pi^{-1}(m)} \mathbf{1}_{\pi^{-1}(m)}$$

Definición. Un equilibrio es un par (σ, π) tal que $i)$ para cada

$$(\sigma) \arg \max_m \int_{a \in \text{soporte de } \sigma(m)} U^S(a, \sigma) (a|m) da$$

y ii) para cada $m \in M$, y para cada acción a en el soporte de $\sigma(m)$,

$$a \arg \max_a \int_{\sigma(m)} U^R(a, \sigma) f(\sigma|m) d\sigma$$

Esta es una definición bastante estándar, excepto por detalles.² Un concepto importante en el análisis que sigue es el de equilibrio influyente.

Definición. Un equilibrio es influyente cuando mensajes distintos inducen respuestas distintas, es decir,

$$(\sigma) \neq (\sigma') \implies (\sigma(m)) \neq (\sigma'(m))$$

2. No hay mensajes perfectamente informativos

Antes de presentar el ejemplo que constituye el foco principal de este artículo, presentamos un resultado preliminar muy sencillo pero que es esencial para justificar la interpretación del ejemplo que proponemos:

Proposición 1. Un equilibrio influyente no puede incluir mensajes perfectamente informativos, es decir, un mensaje $m \in M$ tal que $m \in \sigma(m)$ para algún $\sigma \in \Sigma$ es unítono.

Prueba. Supóngase que un mensaje de este tipo se da en un equilibrio. El receptor cuando recibe este mensaje infiere que el estado es σ . Por consiguiente responde tomando la acción $[b]_1$ —la única mejor respuesta a este mensaje—. Pero entonces, el emisor, cuando el estado seleccionado por la naturaleza es $[b]_1$, tiene un incentivo a enviar el mensaje m , a menos que el mensaje $([b]_1)$ (que por hipótesis debe de ser diferente de m) genere también la respuesta $[b]_1$. Esto contradice el supuesto de que el equilibrio es influyente. ■

Un corolario inmediato de este simple resultado es,

Corolario. No hay equilibrios perfectamente informativos, es decir, equilibrios tales que $\sigma(m)$ unítono para todo m tal que $m \in \sigma(m)$.

² Nótese en particular que las creencias fuera de equilibrio pueden siempre ser especificadas de manera que los resultados de un equilibrio como lo acabamos de definir correspondan a un equilibrio de acuerdo con definiciones más tradicionales.

3. El ejemplo

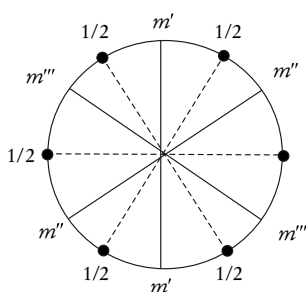
Proposición 2. Para un sesgo $b = \frac{1}{2}$, $[b]_1$ el par (\cdot, \cdot) tal que

$$\begin{aligned} (\cdot) &= \frac{1}{2} \quad (\cdot) = w, \quad \frac{1}{2} \\ & \quad \frac{1}{4} \mid (\cdot) \quad \frac{3}{4} \mid (\cdot) \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

es un equilibrio influyente.

Antes de presentar la prueba de que este par constituye un equilibrio, conviene ilustrar el equilibrio en la gráfica 2.

GRÁFICA 2



Los puntos conectados por líneas continuas de la gráfica 2 representan los estados del mundo en los que se manda el mismo mensaje. O sea, estos estados se encuentran siempre uno opuesto al otro. La respuesta a un determinado mensaje, digamos m , tiene dos acciones en su soporte, que corresponden a los puntos conectados por la línea punteada perpendicular a la línea continua que conecta los estados del mundo en que se manda el mensaje m . Como se observa, las líneas punteadas son perpendiculares a las correspondientes líneas continuas, por tanto, las dos acciones en el soporte de la respuesta se encuentran siempre a una distancia de $1/4$ y $3/4$ respectivamente de cualquiera de los estados del mundo en los que se induce esa respuesta. Nótese que dos mensajes distintos inducen siempre respuestas distintas. En otras palabras, este equilibrio es influyente.

Procedemos ahora a demostrar que esta configuración efectivamente constituye un equilibrio.

Prueba. Verificaremos primero la condición ii) de la definición de equili-

brio. En este caso, esto se puede hacer de una forma muy sencilla: basta con considerar uno de los medios círculos definidos por la línea continua que conecta los estados en que se envía un determinado mensaje. Para simplificar la exposición, escogemos el medio círculo que no incluye el origen en su interior. Es fácil verificar que la acción situada exactamente a la misma distancia de ambos estados es una solución al problema

$$\max_{a \in [\frac{1}{2}, a]} \frac{1}{2} U^R(\cdot, a) - \frac{1}{2} U^R(\cdot, \frac{1}{2})$$

Nótese que al formular el problema anterior usamos la especificación de creencias en la definición de equilibrio.

Para comprobar la primera condición basta con aplicar una argumentación similar, observando que, si fijamos una determinada respuesta, el emisor obtiene la utilidad más grande de esa respuesta precisamente cuando el estado del mundo es uno de los dos en los que se envía el mensaje que la genera. ■

Este ejemplo, conjuntamente con la *proposición* 1, demuestra que en esta modificación del modelo de Crawford y Sobel el equilibrio más informativo concebible se alcanza con el mayor sesgo posible ($b = 1/2$). Esto contrasta drásticamente con la conclusión de Crawford y Sobel que establece una relación inversa entre la informatividad del equilibrio y la magnitud del sesgo. Varias observaciones vienen al caso:

- i) Como el lector habrá notado, no hemos definido de manera formal “informatividad”.³ Sin embargo, dada la imposibilidad de mensajes perfectamente informativos, nos resulta difícil pensar en una noción de informatividad que no considere el equilibrio que acabamos de describir como el más informativo posible.
- ii) La definición de equilibrio con la que trabajamos podría parecer *ad hoc*, en el sentido que se han especificado creencias muy precisas para el receptor aun cuando el conjunto de estados en que se envía un mensaje tiene medida 0 (lo que nos impide aplicar la regla de Bayes). Sin embar-

³ El concepto de informatividad de Crawford y Sobel no se puede aplicar en esta modificación. Esto porque su concepto está totalmente adaptado a la forma de sus equilibrios. En todos los equilibrios de Crawford y Sobel el espacio de estados queda dividido en subintervalos en cada uno de los cuales se envía un mensaje distinto. Crawford y Sobel toman como medida de informatividad el número de intervalos en que queda subdividido el espacio de estados. En la modificación del modelo que consideramos se puede demostrar que no existen equilibrios que tomen esta forma.

- go, esta especificación se puede justificar rigurosamente construyendo este tipo de equilibrios como el “límite” de una secuencia de equilibrios (definidos de manera general) en los que los conjuntos de estados en que se envía un mismo mensaje tienen medida positiva (y en los que, por consiguiente, la regla de Bayes sí se aplica).
- iii) La definición de equilibrio está adaptada al caso en el que las respuestas tienen un soporte finito. Se puede demostrar que considerar solamente este tipo de respuestas es sin pérdida de generalidad.
 - iv) En el modelo de Crawford y Sobel es posible construir un equilibrio no influyente en el que todos los conjuntos de estados en los que se envía un mismo mensaje contienen exactamente dos estados (este equilibrio es como sigue: la respuesta es pura, a decir, $1/2$, y el par de estados en los que se envía el mismo mensaje están siempre situados simétricamente en torno de este punto).

CONCLUSIONES

Este artículo se inscribe dentro de la bibliografía dedicada a explorar variaciones del espacio de estados en el modelo seminal de Crawford y Sobel. En esta línea general, se encuentran las contribuciones de Battiglini (2002) y Levy y Razin (2004) que suponen un espacio de estados multidimensional. Tomando también el círculo como espacio de estados, Spector (2002) presenta un resultado que se podría considerar complementario al que se presenta aquí. Este autor demuestra de manera general que, en el círculo, a medida que el sesgo se reduce (es decir, $b \rightarrow 0$), los equilibrios no convergen al equilibrio perfectamente informativo (contrario a lo que sucede en el modelo de Crawford y Sobel; véase Spector, 2000). Finalmente, cabe destacar los modelos que analizan las decisiones de localización en la circunferencia del círculo. Estos modelos son técnicamente cercanos al presente trabajo. La referencia clásica es Salop (1979). Referencias recientes son Barnali *et al* (2004) e Ishida y Matsushima (2004).

Como se dijo en la Introducción, este artículo se debe leer como un comentario teórico. Sin embargo, la modificación se considera que pudiera tener aplicaciones prácticas. Por ejemplo, un modelo de localización en el círculo en el que un consultor de bienes raíces anuncia la localización exacta en la circunferencia de un lago de un complejo comercial en el que el ha invertido (la decisión de localización se asumiría irreversible a estas alturas).

Con base en ese anuncio, un fraccionador residencial como receptor podría decidir donde situar un nuevo fraccionamiento. Bien pudiera ser que el fraccionador desee situar su proyecto cerca, pero no demasiado cerca, del nuevo complejo, mientras que el constructor del complejo prefiera que el fraccionamiento se sitúe lo más cerca posible del complejo.

Otra fuente de ejemplos podría ser los modelos de votación. Un político puede tener una posición ideológica que no coincide exactamente con las de sus representados y puede intentar manipular el voto de éstos manejando información privilegiada respecto al significado ideológico de las opciones a votación. No me parece impensable que las preferencias ideológicas puedan estar mejor representadas por puntos en la circunferencia de un círculo que por puntos en un intervalo (“los extremos se tocan” se dice a menudo en política).

Ejemplos como estos sugieren que no se debe tomar la especificación del espacio de estados en Crawford y Sobel como la obvia o normal. Naturalmente, el ejemplo específico que se presenta aquí difícilmente basta para analizar de manera satisfactoria estas situaciones. Una caracterización más completa de los equilibrios sería necesaria. Sin embargo, me parece que el ejemplo basta para mostrar que conclusiones importantes del análisis de este tipo de modelos no son robustas a la especificación del espacio de estados, y que, de hecho, con ciertas especificaciones se pueden revertir completamente las conclusiones que se obtienen con otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Crawford, V., y J. Sobel (1982), “Strategic Information Transmission”, *Econometrica*, 50, pp.1431-1452.
- Barnali, G., Fu-Chuan Lai, Debashis Pal, Jyotirmoy Sarkar y Chia-Ming Yu (2004), “Where to Locate in a Circular City?”, *Regional Science and Urban Economics*, 22, pp. 759-782.
- Battiglini, M. (2002), “Multiple Referrals and Multidimensional Cheap Talk”, *Econometrica*, 70, pp. 1379-1401.
- Hotelling, H. (1924), “Stability in Competition”, *Economic Journal*, 39, pp. 41-57.
- Ishida, J., y N. Matsushima (2004), “A Noncooperative Analysis of a Circular City Model”, *Regional Science and Urban Economics*, 34, pp. 575-589.
- Levy, G., y R. Razin (2004), “Multidimensional Cheap Talk”, CEPR Discussion Paper 4393.
- Mas Colell, A., M.D. Whinston y Jerry Green (1995), *Microeconomic Theory*, Nueva York, Oxford, Oxford University Press.

- Roemer, J. (2001), *Political Competition: Theory and Applications*, Cambridge y Londres, Harvard University Press.
- Salop, S. (1979), "Monopolistic Competition with Outside Goods", *Bell Journal of Economics*, 10, pp. 141-156.
- Spector, D. (2000), "Pure Communication Between Agents with Close Preferences", *Economic Letters*, 66, pp. 171-178.
- (2002), "Failure of Communication Despite Close Preferences", *Economic Letters*, 74, pp. 283-289.
- Spence, M. (1973), "Job Market Signalling", *Quarterly Journal of Economics*, 87, pp. 355-374.