EL TRIMESTRE ECONÓMICO, vol. LXXV, núm. especial, enero de 2008, pp. 97-124

COMPARABILIDAD PARCIAL CON MEDICIONES CARDINALES Y ELECCIÓN COLECTIVA*

Elvio Accinelli y *Leobardo Plata***

RESUMEN

Según el esquema del resultado de imposibilidad de Arrow, la información proveniente de comparaciones interpersonales no puede ser usada para construir reglas de elección colectiva. Por otro lado, mediante el uso de funciones de utilidad y la comparación de diversos aspectos de las mediciones, entre todos los individuos, se han logrado caracterizar diversas reglas no dictatoriales que, además, se usan empíricamente. En este artículo estudiamos un esquema general para realizar comparaciones interpersonales con utilidades cardinales. Caracterizamos un concepto de comparación parcial que admite, como extremos, los casos de comparaciones totales o su ausencia entre los individuos. Nuestro concepto sirve de base para proponer una clasificación de todos los órdenes de bienestar social, que caracteriza cada uno con supuestos tradicionales y el tipo de comparación interpersonal admitida.

ABSTRACT

Under the framework of Arrow's impossibility theorem, all the information based on interpersonal comparisons is avoided in the construction process of colective

* *Palabras clave*: comparaciones interpersonales, comparaciones parciales, funcionales de bienestar social, ordenes de bienestar social, mediciones cardinales. *Clasificación JEL*: D70, D71, C00, D63. Este trabajo ha sido apoyado financieramente con el proyecto Conacyt 46209 del gobierno de México y por el Fondo de Apoyo a la Investigación C06-FAI-114582 de la UASLP. Los autores agradecen los comentarios de dos dictaminadores anónimos de EL TRIMESTRE ECONÓMICO y se responsabilizan de los posibles errores que aún pudieran existir.

** Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) (correos electrónicos: lplata@uaslp.mx y elvio.accinelli@eco.valsp.mx).

choice rules. However, throught the use of utility functions and the comparison of several measurable aspects, among all individuals, some non dictatorial collective rules have been characterized and they have been used empirically. In this work we study a general framework to make interpersonal comparisons with cardinal utilities. We characterize a partial comparability concept admiting like extremes full comparisons between all the individuals or no one comparison between any pair of individuals. Our concept provides basis to propose a clasification of social welfare orderings, each one can be characterized with standard assumptions and the type of interpesonal comparisons admited.

Introducción

Es muy conocido que la referencia básica para abordar temas sobre decisiones colectivas es Social Choice and Individual Values de Arrow (1951,1963). A partir de esta obra se han desarrollado campos muy especializados con problemas específicos de elección colectiva. La contribución de Sen (1970) ayudó mucho a la expansión y estudio de lo que hoy se conoce como teoría de elección social. El resultado de Arrow ha sido demostrado de muy diversas maneras; todas ellas han contribuido a mirar el problema desde diferentes ángulos. Ha habido una gran repercusión en la ciencia política y en la filosofía moral, además de lo que ha significado para la teoría económica, su campo de origen, la teoría de elección social ha usado intensivamente el método axiomático como sus instrumentos base. El contexto de los problemas de elección colectiva no es único. Hay diversas maneras de modelar el concepto de regla de elección colectiva. Una vez que se fija el conjunto de individuos y el conjunto de las opciones sociales, las reglas son por lo general funciones cuyo dominio es un espacio de características de los agentes implicados. El rango de las funciones contiene los posibles resultados que arroja la regla cuando se aplica en cada punto del dominio. El dominio generalmente se construye con las preferencias de los distintos individuos respecto al conjunto de opciones. También se pueden usar mediciones de las preferencias mediante funciones de utilidad. El rango puede contener órdenes sociales de las opciones, subconjuntos de las mismas o simplemente ser el mismo conjunto. En este ultimo caso hablamos de funciones de decisión social.[1]

[1] Véase en Plata (1998) y Sen (1986) un análisis más amplio.

Consideremos un contexto específico de una familia posible de reglas de lección colectiva. Éste consiste en una definición precisa de opciones, individuos implicados, dominio de las reglas y rango de las mismas. Una vez fijado un contexto de posibles reglas interesa estudiar dos tipos de problemas. Por un lado, interesa investigar si algunas propiedades deseables para las reglas son satisfechas simultáneamente y con qué regla específica. Hay ocasiones en que las propiedades que se imponen resultan incongruentes entre sí, por lo que no hay ninguna regla que las satisfaga, como es el caso del teorema de imposibilidad de Arrow. Por otro lado, si conocemos una regla específica de un cierto contexto, interesa elaborar una formalización de contexto de regla y las propiedades que podrían caracterizar a esta regla.

El contexto del teorema de Arrow contiene un número finito de opciones, de hecho al menos tres de ellas, y un número también finito de individuos. El dominio de las reglas consideradas por Arrow es el conjunto de posibles preferencias racionales (completas y transitivas) que pudieran tener los diferentes individuos respecto al conjunto de opciones. Un elemento de este dominio es un arreglo de n preferencias, una por cada individuo, llamado perfil de preferencias. Las reglas que considera Arrow se conocen como funciones de bienestar social. El rango de estas reglas esta formado también por preferencias completas y transitivas en el conjunto de opciones. Así pues, las funciones de bienestar social asocian una preferencia completa y transitiva con cada posible arreglo de n preferencias completas y transitivas. Dado lo anterior, no es extraño que el problema haya sido conocido como problema de agregación de preferencias.

El esquema de Arrow tiene una base totalmente ordinalista y de no comparabilidad. Ello significa que la regla de elección colectiva sólo puede hacer uso de la información ordinal que contiene cada una de las preferencias individuales. Además, la regla no puede hacer uso de ninguna información que tenga relación con alguna posible comparación de las preferencias de los individuos. Si una opción, x, perjudica mucho a un gran grupo de individuos y otra, y, beneficia poco a unos cuantos, la regla no puede considerar ninguna medición de las pérdidas de unos ni las ganancias de los otros. De este modo, el uso de las reglas de elección colectiva para realizar comparaciones que permitieran posteriores redistribuciones estaría totalmente prohibido con el esquema arrowiano.

Ha habido diversas modificaciones del esquema de Arrow, se han logrado más resultados de imposibilidad y también la caracterización de diversas reglas aplicables en contextos bien especificados. Un panorama de lo anterior puede consultarse en Plata (1998). Una de las líneas para salir de la imposibilidad consiste en la introducción de información cardinal de las preferencias individuales. En el capitulo 8 de Sen (1970) se demuestra que el resultado de imposibilidad se puede todavía replicar con mediciones cardinales y manteniendo la no comparabilidad de las medicines entre los individuos. Sen es el primero en introducir el marco conceptual que establece supuestos de medición y comparación en las funciones de bienestar social. Estos supuestos y su motivación son analizados en la sección I de este artículo. A partir del trabajo de Sen surgen varios resultados que caracterizan diversas funciones de bienestar social con base en la imposición de axiomas de invarianza en las reglas colectivas. En Sen (1977) se genera uno de los primeros intentos por jerarquizar los diferentes tipos de axiomas de invarianza. La imposición de éstos en las reglas colectivas está asociada con una manera de definir perfiles informacionalmente equivalentes. La introducción de utilidades permite la comparación de ganancias (o pérdidas) de utilidad y estas pueden medirse en diferencias o en porcentajes. Estas diferencias o porcentajes se pueden usar para generar indicadores que ayuden a tomar la decisión colectiva.

En el esquema de Arrow esto no se puede hacer, sólo se considera la información del orden y no se permiten comparaciones entre individuos. Dos características que ordenen igual a las opciones deberán tener asociado el mismo orden social. Más precisamente, si consideramos un perfil de utilidades inicial y generamos otro transformando cada una de sus componentes con diferentes funciones crecientes, el nuevo perfil es considerado como equivalente al primero en el esquema de Arrow. Esto significa que Arrow impone unas clases de invarianza demasiado amplias para sus reglas admisibles. La incorporación de mediciones y comparaciones más finas genera clases más pequeñas y abre la posibilidad de que haya reglas no dictatoriales que sean invariantes en las clases pequeñas.

La imposición de axiomas de invarianza en las reglas está vinculada a la definición de particiones del conjunto de perfiles de utilidad. La definición de estas particiones se hace generalmente mediante la definición de un conjunto de transformaciones admisibles para que dos perfiles sean considerados equivalentes. Cuando se trabaja con funciones de utilidad en el dominio de las reglas, éstas son conocidas como funcionales de bienestar social, pues su dominio está formado por vectores de funciones de utilidad. En este caso parece natural identificar una de estas funciones con un orden de bienestar definido en el espacio de vectores numéricos reales. Cuando la funcional aplicada a un perfil diga que una opción x es socialmente preferida a otra y se deberá tener que el vector de utilidades individuales para x debe ser preferido al vector de utilidades individuales para y. La elaboración precisa de esta identificación y los supuestos en los que se basa se conoce como *welfarism theorem* y fue desarrollado por primera vez independientemente por d'Aspremont y Gevers (1977) y Hammond (1979). Aparece también en d'Aspremont (1985).

El uso de comparaciones de diferencias permitió caracterizar versiones de las reglas utilitaristas en trabajos como Deschamps y Gevers (1978), Hammond (1979, 1991), Maskin (1978), Roberts (1980a, b). En los trabajos de Roberts se obtienen importantes resultados permitiendo comparaciones con mediciones tanto cardinales como ordinales. Hay varios trabajos panorámicos que han ido presentando de manera paulatina los resultados logrados. Destacamos d'Aspremont (1985), Sen (1986) y Moulin (1988). Recientemente tenemos a d'Aspremont y Gevers (2002) y Bossert y Weymark (2004). Este último trabajo contiene una excelente presentación de los avances logrados hasta ahora e incluye casi todas las pruebas. En el trabajo de Fleurbaey y Hammond (2004) se analizan ampliamente los fundamentos filosóficos de las comparaciones y las aplicaciones en economía del bienestar.

Hay un aspecto que es importante destacar para los fines de este artículo. Casi toda la bibliografía citada líneas arriba se ha preocupado por casos extremos de comparación interpersonal. En unos casos se admiten axiomas de invarianza que permiten la comparación entre todos los individuos. En los otros casos se prohíben totalmente las mismas: no es posible comparar a ningún par de individuos. De este modo las comparaciones son generalmente totales o nulas. Sen (1970), cap. 7, propone un concepto de comparación parcial. Sin embargo, la propuesta no ha tenido mucho éxito ya que el concepto de comparación parcial de Sen no ha sido muy explotada ni seguido en la bibliografía posterior. La propuesta es también limitada ya que sólo considera transformaciones para comparar diferencias pero sólo entre dos clases muy específicas: la de mediciones cardinales sin comparaciones (CNC) y la de mediciones cardinales con comparación plena de diferencias o unidades (CUC). En estas clases las ordenadas al origen de las transformaciones admitidas pueden variar arbitrariamente. Ello no permite incorporar, por ejemplo, comparaciones de porcentajes. Por otro lado, pareciera natural que ciertas comparaciones sólo se puedan hacer entre un conjunto de individuos pero no entre todos. Ello abre otras posibilidades para estudiar las reglas congruentes con este tipo de comparaciones.

En este artículo abordamos el estudio de comparaciones interpersonales con mediciones de utilidad cardinal. Lo primero que hacemos es presentar una clasificación de todos los tipos de comparación lógicamente posibles. Las comparaciones que se han usado en la bibliografía aparecen de manera natural como casos extremos en nuestra clasificación, que es obtenida mediante el estudio de las posibles particiones del conjunto de perfiles de utilidad. Obtenemos una interesante interpretación y un concepto de comparación parcial muy intuitivo y diferente del Sen. Como segundo paso presentamos algunas caracterizaciones de órdenes de bienestar social congruentes con supuestos tradicionales y algunos supuestos de comparación parcial. Las reglas generadas incluyen nuevamente como casos extremos a las ya conocidas en la bibliografía. No tenemos aún una clasificación completa de todas las reglas.

Khmelnitskaya y Weymark (2000) obtienen algunos de los resultados presentados en la parte final, de caracterización de órdenes de bienestar social. Sin embargo el enfoque de estos autores es diferente del nuestro al menos en dos aspectos. Ellos consideran clases de transformaciones más amplias que las meramente cardinales como hacemos aquí. Un segundo aspecto es que ellos imponen de modo exógeno las transformaciones admisibles mientras que aquí son resultado de nuestra lógica de clasificación algebraica de los supuestos de comparación. Ello nos permite considera tipos de comparación parcial cardinal que no habían aparecido hasta ahora. Khmelnitskaya y Weymark sólo consideran diferentes subgrupos disjuntos de individuos e imponen una clase de transformaciones admisibles en cada grupo. La condición de invarianza se aplica de manera tradicional al producto cartesiano de las transformaciones admisibles en cada grupo. De este modo, en su esquema no aparecen las nuevas clases de comparación que se obtienen del teorema 3 con la pareja de particiones. La sección I presenta el modelo con las definiciones formales de los conceptos y una motivación del problema.

I. Modelo y motivación

El espacio de opciones sociales es denotado por el conjunto X, la sociedad esta formada por n individuos representados en el conjunto N $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un perfil de preferencias es un arreglo $(u_i(\;), \ldots, u_n(\;))$, cada $u_i(\;)$ es una función de X en el conjunto de números reales, denotado por **R**. El conjunto de funciones de utilidad es denotado por $\bigcup$ y el conjunto de características de utilidad es $\bigcup^n$. Para mayor precisión, $\bigcup^n$ es el espacio de perfiles, cada entrada de un perfil representa una medición de la preferencia del individuo correspondiente.

Una regla de elección colectiva asocia una preferencia social, completa y transitiva, con cada posible característica de mediciones de utilidad individual. En nuestro caso las citadas reglas son conocidas como funcionales de bienestar social (FLBS), que no son mas que funciones F con dominio $\bigcup^n$ y recorrido en , en que es el conjunto de preferencias completas y transitivas sobre X. Una funcional de bienestar social, F, genera una preferencia social para cada perfil de preferencias individuales. De este modo se recupera la idea fundamental de que las decisiones sociales dependen en definitiva de las valoraciones que los individuos tienen de las opciones. ¿De qué manera se establece esta correspondencia entre valoraciones individuales y sociales?; esta implícita en la funcional F. Para hacer claro lo anterior analizaremos algunos ejemplos.

1. *Ejemplos de motivación*

Consideremos una sociedad de tres individuos, N $\{1, 2, 3\}$, que enfrentan el conjunto de opciones X $\{x, y, x\}$. Las preferencias de los individuos en este caso son los siguientes ordenamientos de X:

Individuo 1	*Individuo 2*	*Individuo 3*
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Vamos a considerar cuatro posibles perfiles de utilidad, cada uno de ellos representa las mismas preferencias pero con diferentes mediciones, como sigue:

Opción	*Perfil 1*			*Perfil 2*			*Perfil 3*			*Perfil 4*		
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3
x	3	1	2	7	4	7	7	5	11	9	1	4
y	2	3	1	5	8	5	5	11	7	4	9	1
z	1	2	3	3	6	9	3	8	15	1	4	9

A continuación presentamos diversas maneras de obtener ordenamientos colectivos de X. Cada una de ellos se obtendrá con una determinada regla que incorpora hipótesis específicas de la medición y comparación.[2] La aplicación de la regla de mayoría simple, para ordenar cada par de opciones, nos genera un ciclo: x domina a y por mayoría de 1 y 3 contra el 2, y domina a z por mayoría de 1 y 2 contra el 3, z domina a x por mayoría de 2 y 3 contra el 1. Así pues, el ordinalismo y la regla de mayoría simple no nos permiten lograr resultados satisfactorios pues no habría una mejor decisión colectiva.

Si consideramos ahora la llamada la regla de borda se genera un empate. Según esta regla cada opción obtendría 6 puntos al final y todas serían consideras indiferentes. La regla de Borda consiste en asignar primero puntajes en orden descendente a cada opción. La más preferida 3 puntos, le segunda más preferida 2 puntos y la peor 1 punto. De este modo la opción x obtiene 3 puntos del primer agente, 1 punto de segundo agente y 2 puntos del tercer agente, lo cual nos genera los 6 puntos. De manera similar las otras opciones obtienen cada una 6 puntos al final del proceso. Notemos que, implícitamente, esta regla presupone dos propiedades fuertes: la medición de la intensidad de la preferencia de modo que entre cualquier opción y la que le sigue, la diferencia de medición es constante y, además, es la misma entre los individuos. Tenemos pues una misma unidad común comparable entre los individuos y que nos sirve para medir la diferencia de medición entre opciones consecutivas.

Consideremos ahora una regla utilitarista. Mediante esta regla construimos un orden social valorando cada opción según la suma de las utilidades, cada sumando es la utilidad que cada agente otorga a la opción. De este modo la valoración utilitarista de x bajo el perfil U es $W(x;U) = \sum_{i \in N} u_i(x)$. Cuando la valoración de x es mayor o igual a la de y decimos que x es al menos tan preferido socialmente a y. Formalmente se denota esto como sigue,

$$xR_U y \Leftrightarrow \sum_{i \in N} u_i(x) \geq \sum_{i \in N} u_i(y)$$

Notemos que lo anterior se puede rescribir como,

$$xR_U y \Leftrightarrow \sum_{i \in N} (u_i(x) - u_i(y)) \geq 0$$

Cada diferencia $u_i(x) - u_i(y)$ mide la pérdida o ganancia, según sea el caso, del individuo i al pasar de la opción x a la y. Estos números son sumados entre los individuos; ello nos dice que estamos comparando las pérdidas de unos con las ganancias de otros. Esto sólo tiene sentido si suponemos al-

[2] Notemos que las preferencias que hemos construido constituyen una versión de las que se usan para ilustrar la paradoja de Condorcet.

guna unidad común de comparación de las diferencias entre los individuos, además de la posibilidad de comparar diferencias intraindividuales.

Al aplicar la regla utilitarista en cada uno de los cuatro perfiles notamos que se generan los siguientes ordenamientos:

Perfil	*Puntos por opción*			*Orden social*
	x	y	z	
Perfil 1	6	6	6	$xIyIz$ (todas indiferentes)
Perfil 2	18	18	18	$xIyIz$ (todas indiferentes)
Perfil 3	23	23	26	$zPxIy$ (z domina a x, y)
Perfil 4	14	14	14	$xIyIz$ (todas indiferentes)

Notemos que la regla utilitarista no generó los mismos resultados en los cuatro perfiles. Las preferencias son ordinalmente las mismas en cada caso. Sin embargo la información contenida en cada par de perfiles puede ser la misma o no para la regla utilitarista. Para explicar esto mejor fijemos el perfil 1 como referencia y hagamos cambios en la medición y comparación. Las mediciones presentadas en el perfil 2 se pueden obtener a partir del perfil 1 aplicando las transformaciones afines $_i(t)$ i $2t$ con i 1, 2, 3 respectivamente. Esto significa que las mediciones del perfil 2 se obtienen a partir del perfil 1 con cambios de "cero" o de "origen" en cada medición individual de modo que el "cero" del agente i en el perfil 2 corresponde ahora al nivel i. Por otro lado, hay también un cambio de "unidad" de medición pero es común entre los individuos. En este caso dicha unidad de medición está asociada a la pendiente común de las transformaciones $_i(t)$, que es el número 2. Es muy fácil verificar que el orden social no se altera si usamos el perfil 1, $(u_1(\ ), u_2(\ ), u_3(\ ))$, o el perfil 2, $(1 \quad 2u_1(\ ), 2 \quad 2u_2(\ ), 3 \quad 2u_3(\ ))$, la comparación de las diferencias arroja los mismos resultados pues sólo estamos cambiando la unidad de medición de manera común a pesar de que los 0 de cada quien sean distintos o tengan distinto significado. Este tipo de transformaciones nos sirven para caracterizar el tipo de invarianza al que podemos someter a una regla de tipo utilitarista como la definida líneas arriba. Obsérvese que u_i y $_i(u_i)$ representan las mismas preferencias individuales para cada individuo, a la vez que los perfiles u y (u) generan la misma preferencia social, lo que es particular de este tipo de transformaciones.

No ocurre lo mismo si la transformación esta dada ahora por $_i(t)$ i $(i \quad 1)t$ con i 1, 2, 3 respectivamente. Esta transformación lleva el perfil 1 al perfil 3. Ya no tenemos una unidad común de medición; las diferencias tienen ahora más peso a medida que aumenta el índice con que nombramos a cada individuo. Al comparar por ejemplo z con x en el perfil 3 notamos que los individuos 2 y 3 ganan respectivamente 3 (8-5) y 4 (15-11) al pasar de x a z. Esta ganancia de 7 no se puede compensar con la pérdida de 4 (3-7) del individuo 1, por lo que la opción z es preferible socialmente a la opción x. En el perfil 1 la ganancia neta de 2 y 3 es 2 y se compensa con el 2 de pérdida por el agente 1 con lo que las opciones se declaran socialmente indiferentes. Así pues, el perfil 1 y el perfil 3 no contienen la misma información, de medición y comparación, desde el punto de vista utilitarista, por lo que son tratados de manera diferente. Obsérvese que ahora u_i y $_i(u_i)$ representan las mismas preferencias individuales respecto a X, no obstante, a diferencia del ejemplo anterior, los perfiles u y (u) no generan la misma preferencia social.

Consideremos ahora la transformaciones $_i(t) \quad t^2$, que transforman el perfil 1 en el perfil 4. Estas transformaciones nos permiten continuar con los mismos órdenes en ambos perfiles a nivel individual. Como se hace la misma transformación en todas las utilidades, podemos hacer comparaciones de orden entre los individuos. Cualquier juicio de orden que sea cierto en el perfil 1, aún es cierto en el perfil 4. Sin embargo ya no podemos hacer comparaciones de diferencias pues en este caso desaparece el concepto de unidad de medición. La simetría de las valoraciones en el perfil 1 permite obtener la misma ordenación social para el perfil 4, cuando usamos la regla utilitarista. Sin esta simetría los resultados pueden variar.

Cambiemos ahora de regla de valoración social. Nuestra valoración social ahora es determinada por la regla rawlsiana. Mediante esta regla se otorga el poder de la decisión colectiva al individuo peor situado; se presupone la comparación de posiciones entre los individuos. La definición de la regla es ahora,

$$xR_{\mathrm{U}}y \qquad \min\{u_i(x)/i \quad N\} \quad \min\{u_i(y)/i \quad N\}$$

Al aplicar la regla rawlsiana obtenemos los siguientes resultados para cada perfil:

Perfil	*Puntos por opción*			*Orden social*
	x	*y*	*z*	
Perfil 1	1	1	1	xIyIz (todas indiferentes)
Perfil 2	4	5	3	yPxPz
Perfil 3	5	5	3	xIyPz (z dominada por x, y)
Perfil 4	1	1	1	xIyIz (todas indiferentes)

Vemos que los perfiles 1 y 4 generan los mismos resultados mientras que los perfiles 2 y 3 generan resultados distintos entre ellos y respecto al perfil

1. Lo anterior significa que para la regla rawlsiana los perfiles 1 y 4 contienen la misma información y por tanto generan el mismo orden social con la regla de Rawls. Es decir, con esta regla, según el perfil 1 o el 4, todas las opciones son socialmente indiferentes, a pasar de no existir ningún individuo que sea indiferente según el perfil 1 o el 4. Esta información sólo se refiere a las posiciones de las opciones y a la plena comparabilidad de las mimas entre todos los individuos. Los perfiles 2 y 3 modifican este tipo de información respecto al perfil 1. Cualquiera de las opciones puede aparecer como la peor situada con el nivel 1 y cualquiera de los individuos puede considerarse como peor situado en el perfil 1, de ahí que todas son indiferentes. Sin embargo, con la medición mostrada en el perfil 2 la opción peor situada es la z y corresponde al primer individuo el poder de seleccionarla como la peor socialmente. Notemos que las mediciones presentadas en el perfil 2 han modificado los orígenes o ceros y la modificación ha sido distinta para cada individuo, todo ello respecto al perfil 1. Lo anterior impide que la información pueda usarse para comparar los peores elementos pues se trata de diferentes mediciones en esencia.

2. *Información y perfiles*

Los ejemplos expuestos líneas arriba dan la pauta pera pensar en una posible manera de analizar y clasificar los diferentes tipos de información, de medición-comparación, presentes en el conjunto de posibles perfiles. Cuando asumimos un determinado supuesto de medición-comparación en realidad estamos induciendo una partición en el conjunto de perfiles. Los perfiles que contienen la misma información pertenecen a una misma clase. En este punto aparece una pregunta fundamental: ¿es posible clasificar las particiones del conjunto de perfiles y encontrar una regla colectiva congruente con cada partición? Esta congruencia se refiere a la invarianza de la regla en cada clase de la partición. ¿Hay una única regla que satisface supuestos estándar y es exactamente invariante en cada clase de la partición congruente con la regla? Estas preguntas han sido contestadas parcialmente en el interesante artículo panorámico de Bossert y Weymark (2004) y en una serie de trabajos ya clásicos como d'Aspremont (1985), Roberts (1980a,b), Sen(1986), entre otros. El artículo de Fleurbaey y Hammond (2004) analiza el tema desde un punto de vista amplio que estudia también el significado filosófico de las comparaciones interpersonales. Algunos textos de microeconomía incluyen ya capítulos con estos resultados. Es digno de destacar el capítulo 22 de Mas-Colell *et al* (1995) y el capítulo 6 de Jehle (2001). El enfoque adoptado consiste en considerar ciertos supuestos estándar y varios tipos de hipótesis de medición-comparación. Las comparaciones se introducen imponiendo en las reglas algún requisito de invarianza, definido por medio de ciertos conjuntos de transformaciones de los perfiles que se consideran como equivalentes informacionalmente.

Generalmente los resultados caracterizan las reglas congruentes con los supuestos estándar y cada tipo de invarianza admitida. Cada regla induce naturalmente una partición del conjunto de perfiles. Las consecuencias de imponer requisitos de invarianza en general, no forzosamente definidos con transformaciones de utilidad en los perfiles, son analizadas en Bossert (2000). El artículo presenta relaciones de dualidad entre la invarianza en las funcionales de bienestar social y las propiedades asociadas correspondientes en sus respectivas representaciones: los órdenes de bienestar social. Expliquemos este importante concepto con cierto detalle.

Según algunos supuestos simplificadores, las funcionales de bienestar social pueden representarse mediante órdenes de bienestar social (OBS)[3] definidos en el espacio euclideano $\mathbf{R}^n$. La razón de ello parece clara pero hay que destacar los detalles con cuidado. Cuando la funcional F asocia un orden social R_U al perfil $U \quad u_1(\ ), \ldots, u_n(\ ))$ y se tiene que según R_U la opción x es socialmente preferida o indiferente a la opción y, lo denotamos como $xR_U y$. La idea es ahora construir un preorden en $\mathbf{R}^n$ a partir de los perfiles y la funcional. Esto podría ser representado mediante la definición de una relación R^*, construida en $\mathbf{R}^n$, diciendo que se tiene $(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ $R^*(u_1(y), \ldots, u_n(y))$ cuando $xR_U y$. Para que esto funcione debemos hacer supuestos que garanticen que R^* está bien definida.

II. Supuestos estándadr sobre las FLBS

Nuestra intención final es lograr una clasificación de los posibles R^* con base en supuestos estándar y las diferentes formas de introducir comparaciones interpersonales.

Condición UT (dominio universal y transitividad). Las reglas colectivas son funciones: $F: \bigcup^n$

[3] Los órdenes de bienestar social (OBS) son conocidos en inglés como *Social Welfare Orderings* (SWO).

Esto significa que las FLBS tienen como dominio a cualquier posible perfil de utilidades y cualquier función de utilidad es admitida para cada individuo en cualquier perfil. Además, el orden social asociado con un perfil dado es siempre una relación completa y transitiva del conjunto de opciones X.

La siguiente condición requiere que, dado cualquier perfil, el orden social asociado por la FLBS es tal que para cualquier par de opciones dadas, dicho orden debe ser independiente de las utilidades presentadas por cualquier otra tercera opción. Si dos perfiles coinciden en la medición de las opciones x, y, el orden social de estas opciones debe coincidir y ser independiente de cómo los agentes miden las otras opciones en cada perfil. Formalmente:

Condición IOI *(independencia de opciones irrelevantes).* $x, y \quad X \quad u, v \quad \bigcup^n$: si $u(x) \quad v(x)$ y $u(y) \quad v(y)$, entonces $xR_u y \quad xR_v y$.

Cuando dos opciones son indiferentes para todos los individuos en un determinado perfil, el orden social asociado a dicho perfil las debe declarar también indiferentes.

Condición PI *(pareto indiferencia).* $x, y \quad X \quad u \quad \bigcup^n$: si $u(x) \quad u(y)$, entonces $xIuy$.

Las condiciones anteriores nos dicen que toda la información requerida para ordenar a un par de opciones x, y está contenida en los vectores de utilidad $u(x)$ y $u(y)$, asociados respectivamente con cada opción. Otro tipo de información de las opciones, como sus características físicas, normativas o los nombres de las mismas, es considerada irrelevante para la ordenación que proponga la FLBS. La siguiente condición conocida como neutralidad de las opciones refleja esto hecho de manera sintética.

Condición NOF *(neutralidad de opciones fuerte).* $x, y, z, w \quad X \quad u, v \quad \bigcup^n$: si $u(x) \quad v(z)$ y $u(y) \quad v(w)$, entonces $xR_u y \quad zR_v w$.

La condición de neutralidad fuerte es caracterizada por las tres primeras condiciones como sigue.

Teorema 1 (d''Aspremont y Gevers, 1977). Si una funcional de bienestar social F satisface las condición UT, entonces F satisface IOI y PI si y sólo si F satisface la condición NOF.

Tenemos ahora si, todo para enunciar el teorema de representación de las FLBS mediante el uso de OBS. Si una funcional de bienestar social, F, satisface las condiciones UT, IOI y PI, hay un único orden de bienestar social, R^*, asociado con F y definido en el espacio euclídeano $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$, en el que se encuentran los vectores de utilidad que miden las opciones del conjunto X. De este modo los vectores de números reales pueden ser usados para ordenar las opciones de X. Dados dos puntos r, s en $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$, podremos decir que r precede a s si y solamente si existe un perfil u y un par de opciones x, y tales que $u(x) \quad r$ y $u(y) \quad s$, de modo que x es socialmente preferido a y cuando la FLBS F se aplica en el perfil u y esto se denota como $u(x)R^*u(y)$. Un orden de vectores de utilidad es conocido como un OBS. Según una hipótesis de continuidad, los OBS pueden ser representados por funciones numéricas W: $\mathbf{R}^{\mathrm{n}} \quad \mathbf{R}$ denominadas funciones de bienestar.

Teorema 2 (d'Aspremont y Gevers, 1977, Hammond, 1979; d'Aspremont, 1985). Si una funcional de bienestar social F satisface la condición UT, entonces F satisface IOI y PI si y solo si existe un único orden de bienestar social R^* en $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ tal que para cualquier par de opciones $x, y \quad X$ y cualquier perfil $u \quad \bigcup^n$, $xR_u y \qquad u(x)R^*u(y)$.

Notemos que de acuerdo con el teorema 1 las condiciones IOI y PI pueden ser sustituidas por la condición NOF de neutralidad fuerte. La neutralidad nos dice, esencialmente, que la construcción de R^* como $u(x)R^*u(y) \qquad xR_u y$ está bien definida. De este modo, podemos estudiar a las FLBS por medio de sus órdenes de bienestar social, R^*, correspondientes. Los supuestos acerca de la comparación-medición se impondrán directamente en los OBS en lugar de en las FLBS.

Nuestro siguiente objetivo será clasificar las diferentes comparaciones interpersonales cuando se asumen mediciones cardinales. Veremos que la clasificación esta asociada con las maneras de introducir particiones en el conjunto de perfiles $\bigcup^n$.

III. Comparaciones parciales con mediciones cardinales

Primero aclaramos el concepto de medición cardinal de las preferencias. Ello significa que la regla social puede usar información proveniente de comparaciones de diferencias de utilidad, entre cualquier par de opciones intraindividuales. Formalmente esto significa que la medición $u_i(\ )$ o la medición $a \quad bu_i(\ )$ con b positivo contienen la misma información cardinal de la preferencia, ordenan igual las opciones y ambas conservan los juicios de comparación de diferencias. El juicio,

$$u_i(x) \quad u_i(y) \quad u_i(z) \quad u_i(w)$$

es totalmente equivalente al juicio,

$$a \quad bu_i(x) \quad a \quad bu_i(y) \quad a \quad bu_i(z) \quad a \quad bu_i(w)$$

Asumiendo la hipótesis de mediciones individuales cardinales, nos interesa ahora clasificar las maneras lógicamente posibles de realizar comparaciones interindividuales usando las mediciones de los diferentes individuos. El problema se complica porque si *ui* puede ser transformada en $a_i \quad b_i u_i$, mientras que u_j puede ser transformada en $a_j \quad b_j u_j$, las comparaciones interpersonales podrían depender de manera decisiva de las mediciones elegidas y provocar ciclos en el orden social. En realidad este es el caso cuando se supone la no comparabilidad cardinal. Cuando se permiten comparaciones de unidades que impongan que todas las b_i sean iguales se logran reglas utilitaristas. Nuestro objetivo es estudiar toda esta gama de posibilidades lógicas entre las posibles maneras de introducir comparaciones interpersonales. Veamos que el problema se reduce a la clasificación de las particiones del conjunto de perfiles utilidades y que cada partición está asociada con unos conjuntos numéricos de vectores de reales que establecen propiedades en las a_i y las b_i.

Hemos dicho que la manera tradicional de imponer requisitos de medición-comparación en una regla social o en el orden de bienestar social asociado a la misma consiste en definir clases de invarianza en el conjunto de perfiles de utilidad. A los perfiles equivalentes en los requisitos de información asumidos se les asigna el mismo orden social. Clasificar los diferentes supuestos de información se puede asociar con la manera de definir particiones en el conjunto de perfiles. Sea $_i$ un conjunto predeterminado de transformaciones a las que pueden someterse las funciones de utilidad o valoraciones del agente *i*. Sea el producto cartesiano de las $_i$. Decimos que $(\ _1, \ldots, \ _n)$ es admisible si y solamente si $_i \quad _i$ para todo $i \quad 1, \ldots, n$. La partición de $\bigcup^n$ inducida por es tal que dos perfiles que contengan la misma -información deben ser tratados de la misma manera por la regla colectiva, se les asigna el mismo orden social para las opciones de X. Ello se expresa mediante los supuestos o axiomas de -invarianza.

Dado un conjunto de transformaciones admisibles y perfiles $u \quad (u_1, \ldots,$

$u_n)$ y v $(v_1, \ldots, v_n)$ en $\bigcup^n$ decimos que los perfiles u y v son - equivalentes si existe tal que v ou con $({}_1, \ldots, {}_n)$ y cada ${}_i$ es una transformación creciente.

Condición de -invarianza para F. Decimos que una FLBS, F: $\bigcup^n$, es -invariante si cada vez que u y v son -equivalentes se tiene que $F(u)$ $F(v)$.

Una consideración importante en este punto es que la relación de -equivalencia no es forzosamente una relación de equivalencia en $\bigcup^n$ para cualquier . Lo que puede ocurrir es que falle la transitividad. Para un ejemplo y una análisis más amplio sobre esto puede consultarse Plata (1994). Casi todos los conjuntos de transformaciones que han aparecido en la bibliografía generan relaciones de equivalencia y no hay problema con el requisito de invarianza inducido. Sen (1970) introduce, en el capítulo 7, un concepto de comparabilidad parcial admitiendo conjuntos de transformaciones que no generan relaciones de equivalencia. Ello no sería problema en principio pero la imposición de invarianza con tales conjuntos de transformaciones si lo es. La exigencia de invarianza de una FLBS con transformaciones que no generan partición del conjunto de perfiles puede generar incongruencias. Las clases de perfiles que contienen "la misma información" no son una partición pues se intersectan entre sí. El requisito de -invarianza hace crecer las clases de perfiles que se tenían inicialmente pensadas con . La siguiente proposición establece esto formalmente. Para formularlo necesitamos el concepto de clausura transitiva primero.

Dado un conjunto de transformaciones , no vacío, la clausura transitiva de con la operación de composición de funciones se denota por ^{T} y se define recursivamente del siguiente modo.

$$ {}^T \quad \{ {}^1, {}^2, \ldots, {}^n, \ldots \} $$

en el que

$$ {}^1 \quad \text{y} \quad {}^{n\ 1} \quad {}^n \quad \{\text{so} \ / s \quad , \quad {}^n\} $$

Proposición 1. Sea F: $\bigcup^n$ y un subconjunto no vacío de transformaciones. Si F es -invariante, entonces F es ^{T}-invariante.

Prueba. Sean u, v $\bigcup^n$ tales que v ou para algún ^{T}. Entonces existen un número natural n en N y elementos de tales que v ^{n}o…o ^{2}o ^{1}ou. Consideremos v_1 ${}^1(u)$, v_2 ${}^2(v_1), \ldots, v_n$ ${}^n(v_{n\ 1})$.

Como F es -invariante y cada ^{k} pertenece a se tiene que $F(u)$ $F(v_1), F(v_1)$ $F(v_2),\ldots, F(v_{n\ \ 1})$ $F(v_n)$. La transitividad de la relación de igualdad implica que $F(u)$ $F(v)$ ya que v_n v. Esto concluye la prueba.

Así pues, cuando imponemos la invarianza de una FLBS por medio de un conjunto arbitrario , en realidad la estamos imponiendo en su clausura transitiva ^{T}. Nuestro objetivo es estudiar las particiones del conjunto de perfiles $\bigcup^{n}$ que se definen mediante transformaciones de invarianza. Para evitar el problema aludido, consideramos directamente los conjunto que sí generan relaciones de equivalencia y los caracterizamos a continuación.

Debido a la importancia de las mediciones cardinales, iniciamos el análisis caracterizando los conjuntos admisibles de las mismas y el tipo de comparaciones que pueden inducir por medio de las diferentes particiones del conjunto de perfiles. Para ello, partimos del conjunto universal de todas las posibles transformaciones cardinales admisibles. Este conjunto es bastante conocido en la bibliografía y es denotado por $^{\mathrm{CNC}}$ para referirse la condición de invarianza asociada con la medición cardinal y la no comparabilidad (CNC) y se define como,

$$^{\mathrm{CNC}} \quad \{(\ _1(t),\ldots,\ _n(t)/\ \ i \quad N \quad a_i \quad \mathbf{R} \quad b_i \quad 0:\ \ _i(t) \quad a_i \quad b_i t\}$$

Cada elemento genérico de $^{\mathrm{CNC}}$ es del tipo,

$$(a_1 \quad b_1 t,\ldots, a_i \quad b_i t,\ldots, a_n \quad b_n t,\ldots, a_n \quad b_n t)$$

con cada b_i 0 y *ai* un número real arbitrario. De esta manera es perfectamente posible identificar cada subconjunto de transformaciones admisibles $^{\mathrm{CNC}}$ con un subconjunto de $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ por medio de la relación:

$$(a_1 \quad b_1 t,\ldots, a_n \quad b_n t) \quad ((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n))$$

Dado un conjunto de transformaciones admisibles $^{\mathrm{CNC}}$, denotemos por $\mathbf{R}(\ \ )$ al correspondiente subconjunto de pares de vectores de $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ que lo identifica. Para que la relación de -equivalencia sea realmente una relación de equivalencia en $\bigcup^{n}$ necesitamos que se cumplan tres condiciones sobre :

i)	I_d	(reflexibilidad de la -equivalencia);
ii) Si	entonces ^{1}	(simetría de la -equivalencia);
iii) Si	, entonces o	(transitividad de la -equivalencia).

Los requisitos anteriores son, respectivamente, equivalentes a los siguientes:

i) $(\mathsf{0}, \mathbf{1})$ $\mathbf{R}(\quad)$;
ii) Si $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\quad)$ entonces $(\ \mathbf{ab}^{\ 1}, \mathbf{b}^{\ 1})$ $R(\quad)$;
iii) Si $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\quad)$ y $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ $\mathbf{R}(\quad)$ entonces $((\mathbf{a}\quad \mathbf{bc}, \mathbf{bd})$ $\mathbf{R}(\quad)$.

en que $\mathsf{0}$ es el vector de ceros y 1 es el vector de unos. Si $\mathbf{b}\quad (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{b}^{\ 1}$ $b_1^{\ 1}, \ldots, b_n^{\ 1})$. Si $\mathbf{b}\quad (b_1, \ldots, b_n)$ y $\mathbf{d}\quad (d_1, \ldots, d_n)$ entonces $\mathbf{bd}\quad (b_1 d_1, \ldots, b_n d_n)$. Notemos que el inverso de (o de su equivalente $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) es que se corresponde con $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{\ 1}\quad (\ \mathbf{ab}^{\ 1}, \mathbf{b}^{\ 1})$. De igual modo, la operación de composición se convierte en el producto $(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{d})\quad (\mathbf{a}\quad \mathbf{bc}, \mathbf{bd})$.

Definición 1. Decimos que un subconjunto de transformaciones $\quad^{\mathrm{CNC}}$, induce una partición de $\bigcup^n$ si $\mathbf{R}(\quad)$ satisface las condiciones *i*)-*iii*) enunciadas líneas arriba.

Con objeto de poder admitir que cualquier posible unidad y cualquier posible origen pueda ser transformado o reescalado a cualquier nivel, introducimos también una condición de regularidad exigiendo que $\mathbf{R}(\quad)$ sea un cono convexo con vértice en el origen. Este hecho se refleja mediante la condición:

Condición de convexidad y escala independiente (CEI). Para cada conjunto de transformaciones, , el correspondiente $\mathbf{R}(\quad)$ satisface: *i*) si $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\quad)$, $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ $\mathbf{R}(\quad)$, entonces $(\mathbf{a}\quad \mathbf{c}, \mathbf{b}\quad \mathbf{d})$ $\mathbf{R}(\quad)$; *ii*) si $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\quad)$ y $\quad \mathsf{0}$, entonces $(\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\quad)$.

Lo anterior significa simplemente que las escalas se miden de manera continua, por medio de números reales, y que no hay ninguna restricción en la asignación de la medida, admitiéndose cualquier número entre 0 e infinito. Para enunciar el resultado que caracteriza los conjuntos de transformaciones que sí generan relaciones de equivalencia en el conjunto de perfiles, necesitamos introducir sólo una notación adicional. Dado un conjunto de transformaciones, , nos fijamos en el conjunto de individuos cuya medición admite un 0 absoluto; ello significa que con dichas mediciones podemos comparar ahora cocientes. De ese modo las comparaciones de tasas de crecimiento o de porcentajes son posibles a nivel intraindividual o interindividual según el conjunto de que se trate. El conjunto de individuos que posee mediciones cardinales con 0 absoluto se denota por $N_0(\ )$ y se define como:

$$N_0(\quad) \quad \{h \quad N/a_h \quad 0 \text{ para todo } (\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad \mathbf{R}(\quad)\}$$

Dados el conjunto de individuos $N \quad \{1, 2, \ldots, n\}$, un subconjunto $M \quad N$, un vector $\mathbf{v} \quad \mathbf{R}^n$ y un número real r, denotamos por $(r|M, \mathbf{v}|N \backslash M)$ al vector de $\mathbf{R}^n$ que coincide con $\mathbf{v}$ en los índices correspondientes a $(N \backslash M)$ y que tiene al real r en todas las coordenadas de los índices correspondientes a M. En términos más coloquiales, $(r|M, \mathbf{v}|N \backslash M)$ es igual a $\mathbf{v}$ excepto en las coordenadas que corresponden a M, en cuyas entradas aparece r.

Consideremos $\quad ^{\mathrm{CNC}}$ y su correspondiente $\mathbf{R}(\quad) \quad \mathbf{R}^n \quad \mathbf{R}^n$. El conjunto $\mathbf{R}(\quad)$ especifica implícitamente, mediante sus vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, las comparaciones interpersonales admitidas al imponer invarianza con . Estas comparaciones se dan en dos niveles: de diferencias y de cocientes. Esencialmente, especifican entre que subconjuntos de individuos es posible comparar diferencias al interior de los mismos, y también especifican a la vez las comparaciones de diferencias prohibidas entre distintos individuos: las que se pudieran hacer entre individuos pertenecientes a clases diferentes de la partición. De modo análogo, se especifican también las comparaciones completas y entre porcentajes que se pudieran realizar. Esto requiere sin embargo que se haga algún supuesto respecto al 0 de medición admitido en cada grupo de individuos. Más adelante especificamos esto con precisión. Lo interesante es que un conjunto que sí genere partición en el conjunto de perfiles, induce automáticamente dos "particiones" de N. Una de ellas es realmente partición que especifica las comparaciones de diferencias que son admisibles. La otra podría denominarse "cuasipartición" de N, ya que alguno de sus elementos pudiera ser la clase vacía. Esta segunda clase de subconjuntos de N especifica las comparaciones entre porcentajes que son inducidas por . Es claro que cuando una comparación de porcentajes sea posible entre dos individuos, ambos deben tener el mismo 0 absoluto y la misma unidad de medición. Estas particiones se pueden construir directamente analizando la estructura del conjunto $\mathbf{R}(\quad)$ y se pueden definir como sigue.

Definición 2. Consideremos $\quad ^{\mathrm{CNC}}$ y su correspondiente $\mathbf{R}(\quad) \quad \mathbf{R}^n \quad \mathbf{R}^n$. Decimos que $\mathbf{R}(\quad)$ representa una bipartición de comparabilidad parcial cardinal si existen dos colecciones de subconjuntos de N denotados por $(\ _a, \ _b)$ de modo que $\ _a \quad \{N_0(\quad), A_1, \ldots, A_r\}$, $\ _b \quad \{N_1, \ldots, N_k\}$ y se satisface que, *i*) es una partición de N y $_{a}$pa es también una partición de N excepto en el caso en que el conjunto$N_0($ $)$ sea vacío;[4]

ii) Para cualquier (**a, b**) **R**($_p$), A_j $_a$ y N_i $_b$, se tiene que las coordenadas de **a** correspondientes a los índices en A_j son todas idénticas entre sí, y las coordenadas de **b** correspondientes a índices en N_i son también iguales entre ellas;

iii) Para cualquier (**a, b**) **R**( ), A_j $_a$ A_j $N_0($ $)$, N_i $_b$, x real arbitrario y z positivo se tiene que: $((x|A_j, \mathbf{a}|N/A_j),(z|N_i, \mathbf{b}|N/N_i))$ **R**( );

iv $_a$ es más fina que $_b$ en $N \backslash N_0($ $)$: para toda A_j $_a$ con A_j $N_0($ $)$, existe N_i $_b$ tal que A_j N_i.

Las clases de la partición $_b$ nos señalan los conjuntos de individuos en los que es posible realizar comparaciones de diferencias. Podemos comparar diferencias de utilidad entre los miembros de un N_i pero no entre individuos de diferentes clases. Las clases que aparecen en $_a$ pueden ser de dos tipos. Por un lado la clase $N_0($ $)$, que puede ser vacía, nos señala los individuos que tienen definido un 0 común, por lo que podemos realizar comparaciones de cocientes o porcentajes entre sus miembros. Por otro lado, las clases A_j definen grupos de individuos entre los que es posible realizar comparaciones totales al interior de las mismas. Los miembros de una misma clase no tienen forzosamente un 0 absoluto pero pueden ponerse de acuerdo en usar un mismo origen y una misma unidad para realizar sus comparaciones. Los individuos de otra clase A_i pueden hacer también comparaciones totales entre ellos pero poniéndose de acuerdo en otro origen y otra unidad comunes. El requisito *i*) especifica lo anterior.

Notemos que *iv*) exige que la partición de comparaciones de orígenes sea más fina que la partición de comparación de diferencias en la parte de mediciones que no tienen 0 absoluto. Esto nos dice simplemente, que todo grupo en el que se admitan comparaciones totales debe poseer una unidad común de comparación de diferencias, la cual podría tal vez compartir con un grupo mayor. Los elementos del mayor que no pertenecen al grupo comparten la unidad pero no el origen. A manera de ejemplo consideremos una situación en la que hacemos comparaciones entre los individuos de países de la América Latina. Podríamos comparar ganancias de bienestar en dólares en-

[4] $_a$ satisface que la unión de sus elementos es N, cada par de elementos son disjuntos y se admite que alguno de sus elementos pueda ser vacío. Este conjunto particular corresponde a los individuos cuya medición dispone de un 0 fijo.

tre individuos de diferentes países y a la vez admitir que los niveles 0 pueden variar de país a país.

El requisito *ii*) exige una consistencia de igualdad intragrupo, cuando se cambian las mediciones en una comparabilidad parcial. Nos dice que en cada posible transformación de la escala de medición, representada con un $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\mathbf{R}(\ )$, las coordenadas de los individuos de la misma clase, según la partición de 0 o unidades, se transforman siempre de la misma manera entre los miembros del mismo grupo. El *iii*) es un requisito de independencia de escala al interior de cada grupo ya sea para fijar orígenes o unidades, cualquier real es admitido para representar 0 y cualquier positivo se puede usar para representar unidades.

El siguiente resultado caracteriza a los conjuntos de transformaciones cardinales que sí generan particiones del conjunto de perfiles de utilidad. Con la condición de convexidad e independencia de escala, las representaciones de las transformaciones inducen particiones de comparabilidad parcial. La prueba original puede consultarse en Plata (1994).

Teorema 3. Sea $^{\mathrm{CNC}}$ y supongamos que $\mathbf{R}(\ )$ satisface la condición CIE. Entonces, y induce una partición en $\bigcup^n$ si y sólo si $\mathbf{R}(\ )$ representa una bipartición de comparabilidad parcial cardinal.

A continuación ilustramos el resultado mediante dos parejas de particiones de comparabilidad en N, en un caso admisibles y en el otro no admisibles. En el primer caso consideremos la pareja de particiones:

$$_a \quad \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \qquad _b \quad \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\} \qquad \text{con} \qquad N_0(\ ) \quad \{1, 3\}$$

En este caso el elemento genérico definido por es del tipo

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad ((0, b, 0, c), (d, e, e, e)) \qquad N_0(\ ) \quad \{1, 3\}$$

La primera clase de $_1$, que denotamos por $N_0(\ )$ {1, 3}, muestra los índices de los individuos cuyas transformaciones admisibles, según siempre tienen 0 absoluto, como ordenada al origen, en la transformación admisible. Las comparaciones de diferencias pueden hacerse al interior de las clases {1} y {2, 3, 4} pero no entre individuos de diferentes clases. Notemos que los individuos 2 y 4 generan una partición más fina que la clase de comparación de diferencias a la que pertenecen: el conjunto {2, 3, 4}.

Consideremos ahora el caso en que

$$_a \quad \{\{1,3\},\{2,4\}\} \qquad _b \quad \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\} \quad \text{con} \quad N_0(\ ) \quad \{1,3\}$$

En este caso tenemos que el elemento genérico definido por es del tipo

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad ((0,a,0,a),(b,c,c,d)) \quad A_0(\ ) \quad \{1,3\}$$

Si admitimos este conjunto de transformaciones para realizar comparaciones tendríamos incongruencias en la toma de decisiones debido a que no se cumple con el requisito *iv*) de la definición de una bipartición de comparabilidad parcial. El conjunto cuya clase es {2, 4} no constituye una partición más fina que la que tiene como clases {2}, {4}. En concreto, tenemos que el producto (composición para generar transitividad) de dos elementos genéricos es

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad ((0,a \quad ac,0,a \quad ad),(b^2,c^2,c^2,d^2))$$

Notemos que el elemento anterior no pertenece a la clase de transformaciones definida inicialmente en este caso, pues $a_2 \quad a_4$. El requisito de transitividad de la -equivalencia no se satisface.

IV. Algunos OBS con comparabilidad parcial y cardinalidad

En esta sección presentamos finalmente algunos resultados de caracterización de OBS usando comparaciones parciales y supuestos tradicionales. Recordemos que dado un conjunto de transformaciones , de modo que la relación de -equivalencia sea una relación de equivalencia, el conjunto de perfiles $\bigcup^n$ y una FLBS denotada por F, la condición de la -invarianza de F induce ya cierta estructura en su correspondiente orden de bienestar social R^*. Cuando un perfil $u \quad \bigcup^n$ es transformado en $v \quad (u)$ con , la invarianza nos asegura que para cualquier par de opciones $x, y \quad X$, se debe tener que:

$$xR_u y \qquad \text{si y sólo si} \qquad xR_v y$$

El teorema 2 asegura entonces que

$$u(x)R^*u(y) \qquad \text{si y sólo si} \qquad v(x)R^*v(y)$$

De este modo, cualquier requisito de invarianza hecho sobre F, puede imponerse directamente en el orden de bienestar social R^*.

Definición 3. Un orden de bienestar social R^* en $\mathbf{R}^n$ satisface invarianza con respecto a si cada vez que $u, v, u\ , v\ $ están en $\mathbf{R}^n$, $u \quad (v), v \quad (v)$ para algún , entonces uR^*v si y sólo si $u\ R^*v\ $.

Cuando un OBS R^* satisface invarianza con respecto a , diremos simplemente que R^* satisface -invarianza. Notemos que esta condición nos dice que si y u, v $\mathbf{R}^n$, se tiene que

$$uR^*v \qquad \text{si y sólo si} \qquad (u)R^* \ (u)$$

Del mismo modo los axiomas o requisitos de una FLBS F pueden imponerse también directamente en su correspondiente OBS R^*. Un orden de bienestar social R^* se compone, de la manera usual, por su parte estricta P^* y por su parte de indiferencia I^*, de modo que R^* P^* I^*.

Definición 4. Consideremos un OBS R^* con sus correspondientes partes P^*, I^* de preferencia estricta y de indiferencia respectivamente. Decimos que, R^* satisface Pareto débil si para cada u, v $\mathbf{R}^n$:

$$\text{Si} \quad i \quad N(u_i \quad v_i), \qquad \text{entonces} \qquad uP^*v.$$

R^* satisface Pareto fuerte si para cada u, v $\mathbf{R}^n$:

i) Si i $N(u_i$ $v_i)$, entonces uI^*v, y

ii) Si i $N(u_i$ $v_i)$ con al menos una desigualdad estricta, entonces uP^*v.

R^* satisface anonimidad si para cada u $\mathbf{R}^n$, y para cada permutación p: N N se tiene que

$$uI^*(u_{P(1)}, \ldots, u_{P(n)})$$

R^* satisface continuidad si para cada u $\mathbf{R}^n$, los conjuntos $\{v$ $\mathbf{R}^n/vR^*u\}$ y $\{v$ $\mathbf{R}^n/uR^*v\}$ son cerrados en $\mathbf{R}^n$

Esta condición de continuidad se usa de manera habitual en teoría del consumidor; se impone en las preferencias para garantizar existencia de funciones de utilidad. En nuestro caso sirve para obtener representaciones numéricas de los OBS en el sentido tradicional de que uR^*v $W(u)$ $W(u)$, en que W es la representación numérica de R^*. Hay una condición más débil de continuidad que logra una representación débil en el sentido de que sólo garantiza $W(u)$ $W(u)$ uP^*v (véase Roberts, 1980b, p. 424).[5] El debilitamiento permite a Roberts hacer un interesante análisis de la importancia de la información no meramente numérico utilitarista en la decisión colectiva.

[5] La condición es denominada por Roberts *shift invariance*. Consúltese también Bossert y Weymark (2004), p. 1109.

A continuación proporcionamos algunos resultados de caracterización de OBS usando comparaciones cardinales parciales. Cada uno de ellos caracteriza una familia de órdenes de bienestar social. Los casos extremos se han caracterizado en la bibliografía y nos apoyamos en dichas caracterizaciones para presentar las generalizaciones usando comparaciones parciales. El argumento central es muy similar en cada resultado. La imposición de la invarianza permite generar la forma funcional de la representación para un caso extremo de la invarianza admitida, en el que las mediciones entre grupos coinciden. Una vez que se tiene la representación numérica, el propio requisito de comparación parcial hace que sólo un subgrupo tenga el poder y decida como una oligarquía respecto a los demás.

Con el fin especificar la notación usada en el siguiente teorema convengamos lo siguiente. Sea S es un subconjunto de N $\{1, 2, ..., n\}$; supongamos que la cardinalidad de S es denotada por s. Sean u, v dos vectores de $\mathbf{R}^n$. Denotaremos por $_S$ y $_S$ a las medias aritméticas de las coordenadas de u y v, respectivamente, que corresponden a los índices de S. Los vectores $(\ _S)$ y $(\ _S)$ pertenecen a $\mathbf{R}^s$ y cada una de sus s coordenadas coincide con las citadas medias aritméticas. Estos vectores pertenecen a la diagonal de $\mathbf{R}^s$.

Teorema 4. Sea R^* un OBS sobre $\mathbf{R}^n$. R^* satisface las condiciones de Pareto débil, continuidad y la -invarianza con las comparaciones parciales correspondientes a $_a$ $\{\ , N_1, ..., N_k\}$, $_b\{N_1, ..., N_k\}$ si y sólo si existen S N, en que S es alguno de los N_i y una función g_S con dominio $\mathbf{R}^s$, homogénea de grado uno y tal que para cada u, v $\mathbf{R}^n$: uR^*v si y sólo si $_S$ $g_S(u_S\ \ (\ _S))$ $_S$ $g_S(v_S\ \ (\ _S)$.

Demostración. La condición de -invarianza de R^* con las comparaciones $_a$ $\{\ , N_1, ..., N_k\}$, $_b\{N_1, ..., N_k\}$ implica la -invarianza de R^* con $\{\ , N\}$, $_b\{N\}$, el caso de la comparabilidad cardinal completa CFC. Por el teorema 4 de Roberts (1980b), p.430, se garantiza la existencia de una función homogénea de grado 1, g, con dominio $\mathbf{R}^n$ de modo que el orden de bienestar social está representado numéricamente por $W(u)$ $g(u(\ ))$, con las convenciones de notación hechas antes del enunciado de este teorema. Veamos ahora que la invarianza de R^* con $_a$ y $_b$ obliga a que la coalición del poder no sea N sino sólo alguno de los N_i. Dados W, una coalición N_i y un vector u de $\mathbf{R}^n$, construimos $W_{Ni}(u)$ como W aplicado al vector que tiene constantes e iguales a 1 en los índices de elementos del complemento de N_i y que tiene a las coordenadas u_i en los lugares correspondientes a los índices en N_i. Dada la homogeneidad de W podemos pensar realmente a W_{Ni} como una función con dominio $\mathbf{R}^s$, en el que s es la cardinalidad de N_i. De hecho el argumento funciona si en lugar de 1 en las coordenadas fuera de N_i ponemos cualquier constante. Ello equivale a construir W_{Ni} a partir de W tornando esta última neutral en las coordenadas del complemento de N_i. Sabemos que $W(u)$ $g(u(\ ))$ y que por tanto para cualquier u, v $\mathbf{R}^n$: uR^*v si y sólo si $g(u\ (\ ))$ $g(\ (\ ))$. Probemos primero que existe algún N_i tal que para cualquier u, v $\mathbf{R}^n$:

$$uR^*v \qquad \text{si y sólo si} \qquad W_{Ni}(u) \quad W_{Ni}(v) \tag{1}$$

Procedemos para ello por reducción al absurdo. Demos un N_i arbitrario y supongamos que existen u, v $\mathbf{R}^n$ que hacen falso lo afirmado en (1). Consideremos una transformación $(\ _1, \ldots, \ _n)$ en tal que para cada j N, $_j(t)$ a_j $b_j t$, en que a_j 0, b_j 1 para j N_i y a_j 1, b_j G para j N_i con G suficientemente grande. Ahora bien, si ocurre que uR^*v y $W_{Ni}(u)$ $W_{Ni}(v)$, entonces la representación W de R^* asegura que $W(u)$ $W(v)$. El requisito de invarianza nos asegura que $(u)R^*$ (v) por lo que $W(\ (u))$ $W(\ (v))$. Ello implicaría que $W_{Ni}(u)$ $W_{Ni}(v)$ lo cual sería una contradicción. Si por otra parte llegara a ocurrir que $W_{Ni}(u)$ $W_{Ni}(v)$ y que no (uR^*v), se tendría que $vP^n u$ con lo cual $W(u)$ $W(v)$. La invarianza nos asegura que $(v)P^*$ (u) por lo que $W(\ (v))$ $W(\ (u))$. De este modo $W_{Ni}(v)$ $W_{Ni}(u)$, lo cual sería también una contradicción.

Veamos ahora que N_i es única. Supongamos que tenemos N_i y N_j distintas que satisfacen (1). Consideremos u, v $\mathbf{R}^n$ tales que u_h v_h para h N_i y u_h v_h para h N_j. Tenemos entonces que $W_{Ni}(u)$ $W_{Ni}(v)$ y que $W_{Nj}(u)$ $W_{Nj}(v)$. Usando transformaciones similares a las anteriores podemos observar que tendríamos que uP^*v y vP^*u. Como esto es imposible concluimos que N_i es única.

El supuesto de comparación parcial del teorema 4 se representa mediante la pareja de particiones $_a$ $\{\ , N_1, \ldots, N_k\}$, $_b\{N_1, \ldots, N_k\}$. El elemento genérico de las transformaciones admisibles está dado por el vector $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $(a_{N1}, a_{N2}, \ldots, a_{Nk}), (b_{N1}, b_{N2}, \ldots, b_{Nk}))$. Ello significa que se pueden hacer todo tipo de comparaciones cardinales al interior de cada uno de los N_i pero no entre individuos pertenecientes a grupos distintos. No hay un 0 común para ninguno de los grupos. La forma funcional obtenida permite generar medidas de desigualdad tipo índice de Gini (véase Bossert y Weymark, 2004).

Consideramos ahora el caso en que el supuesto de comparación parcial está reflejado por $_a$ $\{N\}$, $_b$ $\{N_1, \ldots, N_k\}$. En este caso el elemento genérico de las transformaciones admisibles esta dado por el vector (**a, b**) ((0, 0, ..., 0), $(b_{N1}, b_{N2}, \ldots, b_{Nk})$). Ello significa que se pueden hacer comparaciones de tasas porcentuales al interior de cada uno de los N_i pero no entre individuos pertenecientes a grupos distintos. Hay también un 0 común para todos los individuos. Un caso particular admitido por este tipo de comparaciones ocurre cuando los elementos de **b** son todos iguales, lo cual se conoce en la bibliografía como comparaciones totales de cocientes (RTS).

Teorema 5. Sea R^* un OBS sobre $\mathbf{R}^n$. R^* satisface las condiciones de Pareto débil, continuidad y la -invarianza con las comparaciones parciales correspondientes a $_a$ $\{N\}$, $_b$ $\{N_1, \ldots, N_k\}$ si y sólo si existen S N, en que S es alguno de los N_i y una función homotética W_S con dominio $\mathbf{R}^s$, creciente en todos sus argumentos y tal que para cada u, v $\mathbf{R}^n$: uR^*v si y sólo si $W_S(u_S)$ $W_S(v_S)$.

Demostración. La -invarianza de R^* con las comparaciones $_b$ $\{N_1, \ldots, N_k\}$ implica la -invarianza de R^* con $_a$ $\{N\}$, $_b$ $\{N\}$, el caso de la comparabilidad RTS. Por el teorema 5 de Roberts (1980b), p. 431, se garantiza la existencia de una función homotética W con dominio $\mathbf{R}^n$ y las propiedad requerida. Ahora se aplica a W el mismo tipo de argumento que en el teorema anterior y se obtiene el W_S de este resultado.

A continuación presentamos otros dos resultados que permiten obtener reglas de tipo utilitarista usando comparaciones parciales de unidades de medición.

Teorema 6. Sea R^* un OBS en $\mathbf{R}^n$. R^* satisface las condiciones de Pareto débil, continuidad y la -invarianza con las comparaciones parciales correspondientes a $_a$ $\{\ ,\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, $_b$ $\{N_1, \ldots, N_k\}$ si y sólo si existen S N, siendo S alguno de los N_i y números reales no negativos $a_1, \ldots, a_n$ tales que para cada u, v $\mathbf{R}^n$: uR^*v si y sólo si $_{i\ S} a_i u_i$ $_{i\ S} a_i v_i$.

Demostración. La -invarianza de R^* con las comparaciones $_a$ $\{\ ,\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, $_b$ $\{N_1, \ldots, N_k\}$ implica la -invarianza de R^* con $_a$ $\{\ ,\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, $_b$ $\{N\}$, el caso de la comparabilidad CUC. Por el teorema 2 de Roberts (1980b), p. 429, se garantiza la existencia de reales no negativos $a_1, \ldots, a_n$ con la propiedad requerida. Se aplica el mismo tipo de argumento que en los teorema anteriores y se obtiene el resultado.

Obtenemos finalmente una versión del resultado anterior incorporando una versión adaptada al caso de la condición usual de anonimidad.

Definición 5. Sea $P\colon N \quad N$ una permutación de N y $\quad \{N_1, \dots, N_k\}$ una partición de N. Decimos que P respeta la partición si $P[N_i] \quad N_i$.

Consideremos R^* un OBS sobre $\mathbf{R}^n$, P una permutación de N que respeta la partición Decimos que R^* satisface -anonimidad si para cada $u \quad \mathbf{R}^n$: $uI^*(u_{P(1)}, \dots, u_{P(n)})$.

Teorema 7. Sea R^* un OBS en $\mathbf{R}^n$. R^* satisface las condiciones de Pareto débil, continuidad y la -invarianza con las comparaciones parciales correspondientes a $_a \quad \{ \quad ,\{1\}, \dots ,\{n\}\}, \quad _b \quad \{N_1, \dots, N_k\}$ y la condición de $_b$-anonimidad si y sólo si existe $S \quad N$, siendo S alguno de los N_i y tal que para cada $u, v \quad \mathbf{R}^n$: uR^*v si y sólo si $_{i \ S} u_i \quad _{i \ S} v_i$.

Referencias bibliográficas

Arrow, K. (1951,1963), *Social Choice and Individual Values*, Nueva York, Wiley and Sons.

Barberá, S., P. Hamond y Ch. Seidl (comps.) (2004), *Handbook of Utility Theory*, Kluwer Academic Publishers.

Bossert,W. (2000), "Welfarism and Information Invariance", *Social Choice and Welfare*, 17, pp. 321-336.

____, y J. A. Weymark (2004), "Utility in Social Choice", S. Barberá, P. Hamond y Ch. Seidl (comps.), *Handbook of Utility Theory*, vol 2, Kluwer Academic Publishers.

d'Aspremont, C. (1985). "Axioms for Social Welfare Orderings", L. Hurwicz, D. Schmeidler y H. Sonnenschein (comps.), *Social Goals and Social Organization, Essays in Memory of Elisha Pazner*, Nueva York, Cambridge University Press.

____, y L. Gevers (1977), "Equity and the Informational Basis of Collective Choice", *Review of Economic Studies*, 44, pp. 199-209.

____, ____ (2002), "Social Welfare Functionals and Interpersonal Comparability", K. L. Arrow, A. K. Sen y K. Suzumura (comps.), *Handbook of Social Choice and Welfare*, vol. 1, Amsterdam, North Holland.

Deschamps, R., y L. Gevers (1978), "Leximin and Utilitarian Rules: A Joint Characterization", *Journal of Economic Theory*, 17, pp. 143-163.

Fleurbaey, M., y P. J. Hammond (2004), "Interpersonally Comparable Utility", S. Barberá, P. Hamond y Ch. Seidl (comps.), *Handbook of Utility Theory*, vol 2, Kluwer Academic Publishers.

Hammond, P. J. (1979), "Equity in Two Person Situation: Some Consequences", *Econometrica* 47, pp. 1127-1135.

____ (1991), "Interpersonal Comparisons of Utility: Why and How They are and Should be Made", J. Elster y J. E. Roemer (comps), *Interpersonal Comparisons of Well-Being*, Cambridge, Cambridge University Press.

Jehle, G. A., y P. J. Reny (2001), *Advanced Economy Theory*, Addison Wesley.

Khmelnitskaya, A. B., y J. A. Weymark (2000), "Social Choice with Independent Subgroup Utility Scales", *Social Choice and Welfare* 17, pp. 739-748.

Mas-Colell, A., M. Whinston y J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Maskin, E. (1978), "A Theory on Utilitarianism", *Review of Economic Studies*, 45, pp. 93-96.

Moulin, Herve (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge, Cambridge, University Press.

Plata, Leobardo (1994), "Agregación con comparabilidad parcial e invarianza de las representaciones de las preferencias", tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

____ (1998), "Un panorama de resultados y problemas abiertos en la teoría de la elección social", Barceinas *et al* (comps.), *Tópicos en economía matemática y econometría*, UNAM-UAM.

____ (1999), "Amartya Sen y la economía del bienestar", *Estudios Económicos*, vol. 14, núm. 1, pp. 3-31.

Roberts, K. W. S. (1980a), "Possibility Theorem with Interpersonally Comparable Welfare Levels", *Review of Economic Studies* 47 (2), pp. 409-420.

____ (1980b), "Interpersonal Comparability and Social Choice Theory", *Review of Economic Studies* 47 (2), pp. 421-439.

Sen, A. K. (1970), *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco, Holden Day.

____ (1977), "On Weights and Measures: Informational Constraints in Social Welfare Analysis", *Econometrica* 45, pp. 1539-1572.

____ (1986), "Social Choice Theory", K. J. Arrow y M. D. Intrilligator (comps.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 3, North Holland.