LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LOS PROBLEMAS DE DECISIONES DE PRODUCCIÓN AGRÍCOLA

*Norman Gillmore A.**

El objeto de este trabajo es explicar un método para resolver uno de los problemas económicos más importantes que debe afrontar un agricultor: la decisión de qué producir y en qué cantidad, para obtener el mayor ingreso o la utilidad máxima.

El método que se emplea es el método simplex de programación lineal, que es una técnica que ha tenido un gran desarrollo en los últimos años, en Estados Unidos principalmente. En breves palabras, la programación lineal es un método que tiene por objeto resolver problemas de planeación cuando hay una serie de actividades interdependientes, de manera que pueda obtenerse el máximo beneficio. Mediante la aplicación de esta técnica pueden resolverse problemas como los de encontrar la mezcla óptima de la fórmula de un alimento, al costo mínimo; llegar a la más eficiente distribución de mano de obra o capital en una empresa; o bien conocer cuál sería la distribución óptima del agua de riego en un fundo, etc.

El problema de decisión de producción que se resuelve está basado en datos tomados de la realidad, pero éstos se han simplificado, por razones didácticas.

El estudio consta de tres partes. En la primera se resuelve el problema empleando el método geométrico, mediante el uso de gráficas, con objeto de que el lector se sitúe bien en el problema y pueda determinar cuáles de los recursos que están a la disposición del agricultor limitan más la producción. En la segunda parte, se resuelve el mismo problema, pero empleando el método de programación lineal, que puede seguirse paso a paso por el lector. El único conocimiento necesario es la aritmética elemental.

En la última parte se presenta la solución del problema en forma mecánica, usando una tabla en donde los coeficientes se identifican mediante letras y números.

Un paso esencial, antes de empezar a usar cualquier técnica, consiste en la recolección de los datos. Las cifras (rendimientos, costos de producción, trabajo, necesidades de agua de riego por cultivos, expectativas de precios en la época de la cosecha, etc.), están sujetas a alteraciones debido a la incertidumbre y al riesgo, y para lograr que sean lo más exactas posibles deben basarse en los registros de los últimos años,

* El autor es ayudante de investigación del Centro de Investigaciones Económicas, de la Facultad de Ciencias Económicas, de la Universidad Católica de Chile.

en experimentos controlados de investigaciones realizadas, o bien, en la experiencia.

La lógica de la programación lineal

Supongamos que un agricultor puede producir dos cultivos —maíz y trigo—, en 70 hectáreas de terreno. Su problema consiste en decidir qué cantidad de cada cultivo, o de uno solo, va a producir. Además de las 70 hectáreas de tierra, dispone de las siguientes cantidades fijas de recursos para distribuirlos entre esos dos cultivos: $ 2 500 000 de capital líquido, para la compra de semillas, pago por concepto de mano de obra, cosecha, etc., de los que puede disponer a lo largo del año agrícola, y además de los derechos de agua que le permiten disponer de 57 900 m^3 durante el mes de octubre y de 115 200 m^3 durante el mes de noviembre.[1] Conoce también, gracias a su experiencia y a los registros de los últimos años, cuáles son los rendimientos y los requerimientos diarios de capital y de agua; estos datos los ha agrupado en la forma en que aparecen en la parte I del cuadro 1. Los requerimientos de cada recurso por quintal de producto, que aparecen en la parte II del cuadro 1, se obtuvieron dividiendo el requerimiento por hectárea de cada recurso entre el correspondiente rendimiento. La parte III del cuadro muestra la cantidad máxima de maíz o trigo que puede producirse con cada recurso si *a*) la cantidad total de ese recurso se destina a la producción de uno de los dos cultivos y *b*) si puede disponerse de todos los demás recursos en cantidades ilimitadas (gráficas 1*a* y 1*b*).

Con los datos obtenidos en la parte III del cuadro 1, el agricultor puede trazar la gráfica 1*a*; en el eje horizontal están representadas las cantidades de trigo en quintales y en el eje vertical los quintales de maíz producidos. Uniendo los puntos de máxima producción de cada uno de los recursos en el eje-trigo y en el eje-maíz, se obtienen cuatro líneas rectas. Estas líneas se denominan líneas de "igual-recurso" y cada una de ellas indica todas las combinaciones posibles de maíz y trigo que se pueden producir con un recurso, siempre que pueda disponerse de los demás recursos en forma ilimitada. Así, la cantidad fija de 70 hectáreas de tierra permite producir un máximo de 2 121 quintales de maíz, o 1 750 quintales de trigo, o cualquiera combinación de maíz o trigo que esté situada sobre la recta de "igual-recurso" (tierra, en este caso). De la misma manera, las demás rectas de "igual-recurso" definen las posibilidades de producción de los demás recursos.

Si se observa la gráfica 1*a* se puede ver que el factor riego sólo es

1 Para simplificar el ejemplo, se considera que durante los otros meses el abastecimiento es suficiente. La mano de obra no es un factor escaso.

relativamente ilimitado en el mes de noviembre,[2] en tanto que los otros factores sí son escasos y limitan la producción. Así, el recurso tierra permite producir un máximo de 2 121 quintales de maíz, aunque podría producirse esa cantidad porque la disponibilidad de agua de riego en el mes de octubre sólo permite la producción de 1 930 quintales de maíz;

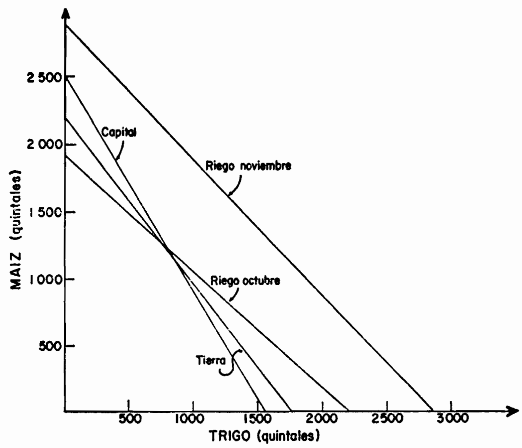
Cuadro 1. Ejemplo del tratamiento de los datos para la programación lineal

	Maíz	*Trigo*
I. Rendimiento por hectárea	30 quintales	25 quintales
Requerimiento por hectárea de:		
Capital ($)	30 000	40 000
Riego en octubre (m³)	900	650
Riego en noviembre (m³)	1 200	850
II. Requerimiento por quintales de: [a]		
Tierra (hectáreas)	0.033	0.040
Capital ($)	1 000	1 600
Riego en octubre (m³)	30	26
Riego en noviembre (m³)	40	34
Precio de mercado ($)	4 500	6 000
III. Producción máxima: [b]		
Tierra (70 hectáreas)	2 121	1 750
Capital ($ 2 500 000)	2 500	1 562
Riego octubre (57 900 m³)	1 930	2 227
Riego noviembre (115 200 m³)	2 880	3 388

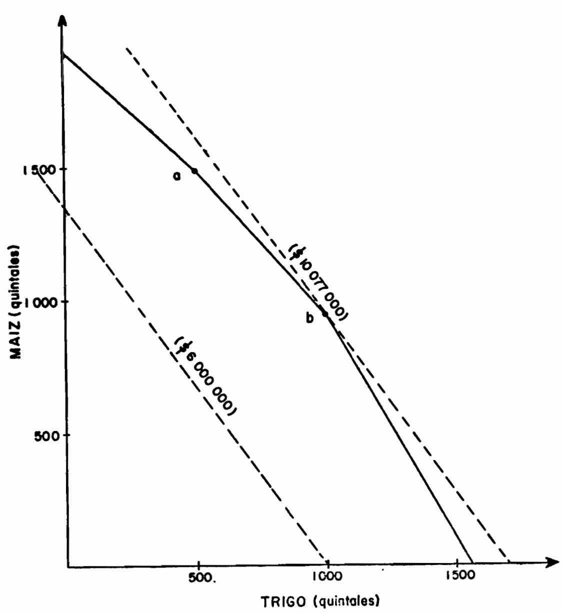
[a] Requerimiento por hectárea dividido por el correspondiente rendimiento por hectárea.
[b] Se obtiene dividiendo el total del recurso por el requerimiento por quintales (coeficiente) correspondiente.

ésta es la cantidad máxima que se puede producir de ese cultivo, por las limitaciones del factor escaso. Aplicando el mismo análisis, puede verse que el capital es el factor más limitante de la producción de trigo; este factor limita la producción a un máximo de 1 562 quintales de trigo. De todo esto se desprende que la intersección de las curvas de "igual recurso", correspondientes a tierra, capital y riego de octubre, definen las posibilidades de producción del agricultor,[3] dando origen a una nueva curva que se conoce con el nombre de "curva de oportunidad" o "curva de posibilidad de producción", que está ampliada en la gráfica 1*b*. Cualquier punto situado por encima de esta curva indica que la producción sería imposible en virtud de las limitaciones impuestas por uno o varios recursos.

[2] Como el factor riego es relativamente ilimitado en este mes podría excluirse de los cálculos.
[3] Existen condiciones de programación lineal, ya que los segmentos de la curva de oportunidad son líneas rectas.



GRÁFICA 1*a*.



GRÁFICA 1*b*.

La gráfica indica además los casos en que los factores son limitantes. Si se decide producir una combinación de productos, como la indicada por el punto *a* de la curva de oportunidad, los recursos que limitan la producción hasta este punto son tierra y riego de octubre; si se fuera a producir la combinación indicada por el punto *b*, los recursos limitantes serían tierra y capital.

El problema reside ahora en encontrar el programa de producción que rinda el máximo beneficio. Hasta el momento el problema se ha observado desde el punto de vista técnico. Ahora debe entrar en juego el concepto económico. Indudablemente el programa óptimo estará determinado por los precios relativos (o razón de precios) del trigo y del maíz. Como puede verse en la parte II del cuadro 1, el precio del quintal de maíz es de $ 4 500 y el de un quintal de trigo es de $ 6 000. La razón de estos precios es de 1.33 (6 000 : 4 500); esto quiere decir que el ingreso bruto que produce un quintal de trigo es equivalente al ingreso que se obtiene de la venta de 1.33 quintales de maíz. Si mediante una línea recta unimos en una gráfica la cantidad de maíz que corresponde a un ingreso de $ 6 000 (1.33 quintales) con la correspondiente cantidad de trigo que representa el mismo ingreso (un quintal), cualquier punto de esa recta representará las combinaciones de trigo y maíz con las que es posible obtener un ingreso de $ 6 000. Si queremos saber qué combinación de estos dos cultivos proporciona un ingreso de $ 6 000 000 se deben unir los puntos correspondientes a 1 000 quintales de trigo y 1 333 quintales de maíz (gráfica 1*b*).[4] De esta manera, con la misma razón de precios existe una infinidad de rectas paralelas cuyas diferencias representan distintos ingresos. A mayor ingreso, más a la derecha y hacia arriba estará la curva de ingreso. Ahora bien, el mayor ingreso que es posible obtener, dadas las posibilidades de producción del agricultor, y por ende el programa de producción más lucrativo, estará determinado por la "curva de oportunidad", de producción (gráfica 1*b*), y por la curva de igual-ingreso que sea tangente a la curva de oportunidad; en este caso, el ingreso total es de 940 quintales de maíz y de 974 quintales de trigo. Para una razón de precios distinta, se tendrá otra recta de "igual-ingreso" que será tangente a la curva de oportunidad en otro punto de ella; si la razón de precios es 1.15 (precio maíz, $ 5 000; precio trigo, $ 5 750), el punto de tangencia será el punto *a* (gráfica 1*b*).

Si la recta de igual ingreso es tangente a uno de los segmentos de la curva de oportunidad, cualquier punto de ese segmento será un programa óptimo.

[4] La ecuación general de la recta de igual ingreso es, en este caso, $Z = 4\,500\ X_1 + 6\,000\ X_2$ Z representa un ingreso cualquiera; X_1 y X_2 son las cantidades de maíz y trigo respectivamente, siendo los coeficientes numéricos los precios respectivos de X_1 y X_2.

El método gráfico no nos dice nada en relación con el volumen utilizado de cada recurso, ni cuales quedan sin uso (por lo menos en forma inmediata).

Si sólo se tienen dos productos, la forma más eficiente para determinar un programa óptimo es el método geométrico; pero cuando se deben tomar decisiones sobre dos o más productos, el método geométrico no es aplicable. En este caso es más eficaz el método de la programación lineal, aunque la base lógica para resolver el problema es la misma.

Determinación del programa óptimo a través de la programación lineal

En este apartado se trata de resolver el mismo problema anterior aunque utilizando el método simplex de programación lineal. Al igual que en el método gráfico, el primer paso consiste en obtener los datos necesarios: cantidad total de recursos disponibles y determinación de necesidades o requerimientos de cada recurso o factor, por unidad de producción (quintales), siguiendo los mismos pasos del caso anterior (véase la parte II del cuadro 1 que se obtuvo con los datos originales de la parte I).

Cuadro 2. Total de recursos limitados y recursos por unidad de cultivo

Recurso	*Cantidad de recursos (P_0)*	*Recursos por unidad de cultivo (quintales)*	
		maíz (P_1)	*trigo (P_2)*
Tierra (hectáreas)	70	0.033	0.040
Capital ($)	2 500 000	1 000	1 600
Riego octubre (m^3)	57 900	30	26
Riego noviembre (m^3)	115 200	40	34

El cuadro 2 indica la cantidad total de recursos limitados de que dispone el agricultor y los recursos necesarios por unidad de cultivo, o coeficientes de los recursos. Por comodidad, se designa P_1 a la actividad maíz y P_2 a la actividad trigo. Las cantidades totales de recursos se indican en la columna P_0.

Los coeficientes del cuadro 2 indican qué cantidad de recursos se podrían emplear; por ejemplo, se podría utilizar todo un recurso, digamos capital, en la producción de los dos cultivos en cuestión y la cantidad de cada producto obtenido, multiplicado por su coeficiente (1 000 y 1 600, respectivamente), debería ser igual al total del recurso limitado

($ 2 500 000). Pero no se desea establecer un plan en que deban utilizarse totalmente todos los recursos disponibles, porque con un plan de esta índole podría no obtenerse el máximo beneficio, en virtud de que algunos recursos estarían empleados en exceso.

De aquí que se deba establecer un plan: *a*) que utilice los recursos en la producción de uno o varios productos (sólo dos en este caso) o *b*) que no utilice un recurso o que lo utilice sólo en parte. De este modo, el recurso capital tendrá tres usos distintos: *1*) podría utilizarse en la producción de maíz, *2*) en la producción de trigo o *3*) no utilizarse. En la programación lineal, se usa el término "actividad ociosa" para referirse al recurso que no se utiliza.

De acuerdo con lo anterior, se necesitará una "actividad ociosa" para cada uno de los recursos y se empleará el símbolo P_3 para la actividad ociosa de la tierra, P_4 para la actividad ociosa del recurso capital y P_5 y P_6 para la actividad ociosa del agua de riego, de octubre y noviembre, respectivamente. Como se considera como una actividad la no utilización de un recurso, el cuadro 2 debe ampliarse para que aparezcan esas "actividades" en la forma indicada en el cuadro 3. La actividad ociosa de una unidad de capital requiere que no se utilice un peso de capital, y esto no necesita ni tierra ni agua; la no utilización de una unidad de tierra requiere la no utilización de una hectárea de tierra y esto no necesita ni agua ni capital. Por esta razón los coeficientes de las columnas del cuadro 3 que representan las "actividades ociosas" están marcadas con cero.

Con estos antecedentes estamos ya en condiciones de iniciar el estudio de la programación lineal. Los datos del cuadro 3 son los mismos que aparecen en la parte superior del cuadro 4, con la excepción de que se dispone de dos nuevas hileras; la primera, denominada z sirve para denominar el costo de oportunidad.[5]

Cuadro 3

		P_0	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2
Tierra	P_3	70	1	0	0	0	0.033	0.040
Capital	P_4	2 500 000	0	1	0	0	1 000	1 600
Agua octubre	P_5	57 900	0	0	1	0	30	26
Agua noviembre	P_6	115 200	0	0	0	1	40	34

La segunda hilera, cuyo símbolo es $z - c$ se utiliza para determinar el ingreso o costo marginal[6] necesario para producir una unidad adicio-

[5] El costo de oportunidad es la máxima utilidad que puede obtenerse de actividades alternativas.

[6] El ingreso marginal es el incremento del ingreso proveniente de aumentar la producción en una unidad adicional.

nal de un cultivo determinado. La columna R del cuadro 4 se utiliza para encontrar el recurso que limita más la producción de un cultivo.

Cómo encontrar el cultivo que produce mayor ingreso

Es lógico que se deba seleccionar el cultivo que proporcione un ingreso mayor. Para ello se procede como sigue: la hilera z, en la primera parte del cuadro se llena con ceros. Esta línea muestra el costo de oportunidad de la utilización de los recursos de una empresa, y es igual a cero cuando no se produce nada (todos los recursos actúan como "actividades ociosas"). Si se desea encontrar la cantidad de ingreso total que se obtendrá por cada unidad de cultivo, será necesario restar los precios de cada actividad a su correspondiente costo de oportunidad (hilera z). El resultado se coloca en la columna respectiva en la hilera correspondiente al ingreso marginal (hilera $z - c$). Los precios (c) (véase la hilera de la parte superior del cuadro 4) de las actividades ociosas son iguales a cero, ya que uno de los principios de la programación lineal expresa que el recurso no utilizado no tiene costo alguno (precio negativo). Por esta razón los valores de $z - c$ de las actividades ociosas tienen un valor igual a cero. Pero no ocurre lo mismo en el caso de las actividades productivas (maíz y trigo). Para el maíz (P_1) el valor es igual a $0 - 4\,500 = -4\,500$, y para el trigo (P_2) el valor de $z - c$ es $0 - 6\,000 = -6\,000$. Esto quiere decir que cada quintal de maíz que se produzca incrementará el ingreso total en \$ 4 500 y que cada quintal de trigo lo incrementará en \$ 6 000. Como la actividad que produce mayor ingreso es el trigo, ésta será la primera actividad que se considere en la programación lineal. En resumen, la actividad más lucrativa es aquella que tiene un mayor valor negativo $z - c$.

Al decidir que la actividad trigo (P_2) debe considerarse primero en los cálculos, el paso siguiente consiste en determinar cuáles son los recursos que limitan más la producción de trigo. La columna R de la derecha, indica la cantidad máxima de trigo que puede producirse, en relación con cada recurso en particular, en caso de que se disponga de los otros recursos en cantidades ilimitadas.

El cálculo de R se obtiene dividiendo la cantidad total de cada recurso (columna P_0) entre su respectivo coeficiente (columna $P_2 =$ trigo), en la misma forma que se hizo en la parte III del cuadro 1. Como para producir un quintal de trigo se necesitan 0.040 hectáreas, el total de 70 hectáreas producirán 1 750 quintales ($70 \div 0.040$); \$ 2 500 000 de capital producirán 1 562 quintales ($2\,500\,000 : 1\,600$), etc. De la observación de la columna R se desprende que el factor que limita más la producción es el capital, en virtud de que sólo permite producir 1 562 quintales de trigo. No podríamos producir una cantidad mayor puesto que no poseemos más capital.

Con estos datos podemos construir la segunda sección o matriz. Se debe eliminar el recurso capital, ya que éste fue empleado por completo en la producción de trigo y debe reemplazarse por el cultivo en el que se utilizó. De esta manera, la hilera P_4 se elimina de la matriz y se reemplaza por la nueva fila P_2 (trigo).

Las cifras de la nueva etapa o matriz, se computan de la anterior y sirven para *a)* determinar la cantidad de recursos sobrantes, después de producir la cantidad máxima de trigo que permite el recurso más limitado (1 562 quintales) y *b)* para determinar la cantidad de ingreso total que se obtiene de esa producción (1 562 quintales $\times$ \$ 6 000 = \$ 9 372 000).

La primera hilera que debe obtenerse es la nueva fila P_2 (trigo). Para ello se divide cada cantidad de la línea $P4$ de la matriz anterior entre la cantidad correspondiente a la intersección de la línea P_4 con la columna P_2 (1 600); los resultados de estas divisiones forman la nueva hilera P_2 (trigo); si se divide 2 500 000 entre 1 600 el resultado es 1 562, que representa el total de la producción de trigo que se considera en el nuevo programa y se coloca en la nueva hilera P_2 y en la columna P_0 en la columna P_3 tendremos 0 : 1 600 = 0; en P_4, 1 : 1 600 = 0.000 625; en P_5, 0 : 1 600 = 0 y lo mismo para P_6; en P_1 el coeficiente será 1 000 : 1 600 = 0.625 000 y en P_2 será 1 600 : 1 600 = 1.

Una vez obtenida la hilera P_2 es posible completar los espacios en blanco de las demás columnas. La columna P_0 se completa en la siguiente forma: la cantidad de trigo que se va a producir son 1 562 quintales (intersección de fila P_2 y columna P_0). Cada quintal de trigo necesita 0.04 hectáreas de tierra (intersección de fila P_3 y columna P_2, en la primera matriz), luego, la cantidad de tierra que se necesita para producir 1 562 quintales de trigo son 62.48 hectáreas (1 562 $\times$ 0.04) y la tierra que permanecerá ociosa será igual a la cantidad total de tierra disponible (70 hectáreas) menos la utilizada en la producción de trigo (62.48 hectáreas), lo que da un total de 7.52 hectáreas. Esta cifra se coloca en el nuevo espacio correspondiente a tierra en la columna P_0 de la segunda matriz. Utilizando el mismo método, el agua de riego de octubre será de 17 288 m^3 (57 900 — 1 562 $\times$ 26 = 17 288) y el agua sobrante en noviembre será 69 092 m^3 (115 200 — 1 562 $\times$ 34 = 69 092). En esta misma forma pueden calcularse todos los espacios en blanco de las columnas restantes.

En síntesis, las operaciones por realizar son las siguientes: *1)* Buscar el espacio de la matriz anterior que tenga la misma posición del espacio que se va a llenar. 2) A la cifra de ese espacio se resta *a)* la cifra de la misma columna que se encuentre en la nueva hilera que se ha introducido, y *b)* la cifra que aparece en la columna de la actividad considerada en la programación y que corresponda a la misma hilera de la cantidad encontrada en *1)*. Procediendo en la misma forma se obtienen los resultados de las columnas restantes.

Para determinar los valores de la hilera del costo de oportunidad (símbolo z), se multiplica cada uno de los valores de la nueva hilera P_2 (trigo) por el precio del trigo ($ 6 000, parte superior del cuadro y también a la izquierda de P_0), y los resultados se colocan en la línea z. Una vez obtenida la hilera del costo de oportunidad, el paso siguiente consiste en completar la hilera del ingreso marginal (símbolo $z - c$). Para ello se resta el precio (c) de cada actividad, a cada uno de los costos de oportunidad (z) que correspondan a esas actividades.

Después de obtener el primer programa óptimo, en la forma descrita anteriormente, se puede calcular el plan óptimo siguiente. Si observamos los valores de la línea $z - c$, podrá apreciarse que todavía disponemos de una cantidad negativa (— 750), que corresponde a la actividad o empresa maíz (P_1). Esto significa que por cada quintal de maíz que se produzca, el ingreso total se incrementará en $ 750. Por lo tanto, la actividad maíz debe incluirse en el nuevo programa. Al estimar los valores de la nueva columna R, se observa que el factor más limitante es el recurso tierra (P_3), que restringe la producción de maíz a 940 quintales. La nueva matriz se computa en la misma forma anterior, reemplazando el recurso tierra (P_3) por la nueva hilera maíz (P_1); más tarde se calculan las hileras z, y $z - c$. Se observará finalmente que no existen valores negativos en la última hilera. Así, hemos obtenido el programa óptimo final que proporciona el ingreso total máximo.

La nueva columna P_0 nos proporciona los detalles del plan final. La cantidad P_1 (maíz) es 940; esto quiere decir que produciremos 940 quintales de maíz. El valor de P_2 (trigo) indica que debemos producir 974.5 quintales de trigo y la cifra correspondiente a P_5 quiere decir que del total de 57 900 m^3 de agua disponible en octubre, 4 636 no serán ocupados; finalmente, el valor de P_6, indica que no serán utilizados 51 467 m^3 de agua durante noviembre.

El valor de z y de $z - c$ señala un ingreso bruto de $ 10 077 000. Ésta es la utilidad máxima que puede obtener el agricultor en función de los recursos fijos que posee.

Los valores de las demás columnas indican las posibilidades de incrementar los ingresos, en caso de que pueda disponerse de una mayor cantidad de recursos. Así, en la columna P_3, el valor de $z_3 - c_3$ indica que si se pudiera disponer de una hectárea adicional de tierra, los ingresos aumentarían en \$ 93 750; los coeficientes[7] nos dicen que la producción de maíz aumentaría en 125 quintales, y la de trigo disminuiría en 78 125 quintales, además de que sería necesario utilizar 1 718.75 m³ de agua durante el mes de octubre y 2 343.75 m³ durante noviembre.

Del mismo modo, en P_4 el valor de $z_4 - c_4$ (1.4055), indica que por cada unidad adicional de capital que pueda obtenerse, los ingresos brutos aumentarán \$ 1.4055, como consecuencia del aumento de la producción de trigo (0.0026 quintales), de la disminución de la producción de maíz (0.031 quintales) y de la no utilización de 0.0267 m³ de agua durante octubre y de 0.0373 m³ durante noviembre

El ingreso o utilidad neta, puede obtenerse estimando la diferencia entre el ingreso neto y el costo total de los cultivos; es decir, el total de quintales de cada cultivo, multiplicado por el costo por quintal. Este resultado se habría podido obtener directamente, si en lugar de utilizar los precios de mercado se hubiese empleado la utilidad neta por quintal.

Resumen

La síntesis de los pagos que deben seguirse para encontrar el programa óptimo a partir de los datos de la matriz superior del cuadro 4, son los siguientes:

1) Localizar la mayor cifra negativa de la hilera $z - c$, para determinar la actividad productiva más lucrativa; ésta se debe introducir en la nueva matriz.

2) Dividir cada recurso disponible de la columna P_0, por el respectivo coeficiente de la columna que representa la actividad seleccionada en *1)*; los resultados se registran en la columna R. El valor más pequeño indica el recurso limitante de la producción que debe utilizarse en su totalidad en la producción de la actividad seleccionada.

3) Reemplazar la hilera representativa del recurso más escaso, por la nueva hilera que representa la actividad productiva seleccionada. Se completan las columnas con base en esta nueva hilera.

4) Multiplicar cada cifra de la hilera que representa la actividad productiva (o las diversas hileras en caso de que se trate de varias actividades) por el precio de la actividad respectiva. Los resultados se registran en la hilera z.

5) Obtener los valores de la hilera $z - c$. A cada valor de la hilera z, se resta el precio respectivo (c), de la columna a que pertenece. Se

[7] Los coeficientes no son sino "razones de transformación".

Cuadro 4. Ejemplo de programación lineal basado en los datos del cuadro 3

Total de recursos usados o cultivos producidos	*Símbolo*	*Producción o recursos sobrantes*	RECURSOS POR UNIDAD DE PRODUCCIÓN						
			Tierra	*Capital*	*Agua Oct.*	*Agua Nov.*	*Maíz*	*Trigo*	
			Precio (C) por unidad de producción o actividad						
			0	*0*	*0*	*0*	*4 500*	*6 000*	
		P0	*P'3*	*P'4*	*P'5*	*P'6*	*P1*	**P2**	**R**
0 Tierra	P'3	70	1	0	0	0	.033000	.040000	1 750
0 Capital	P'4	2 500 000	0	1	0	0	1 000	1 600	1 562
0 Agua octubre	P'5	57 900	0	0	1	0	30	26	2 227
0 Agua noviembre	P'6	115 200	0	0	0	1	40	34	3 388
Costo de oportunidad	Z	0	0	0	0	0	0	0	
Ingreso marginal	Z — C	0	0	0	0	0	— 4 500	— 6 000	
0 Tierra	P'3	7.52	1	—.000025	0	0	.008000	0	940
6 000 Trigo	P'2	1 562	0	—.000625	0	0	.625000	1	2 499
0 Agua octubre	P'5	17 288	0	—.016250	1	0	13.750000	0	1 257
0 Agua noviembre	P'6	62 092	0	—.021250	0	1	18.750000	0	3 684
Costo de oportunidad	Z	9 372 000	0	3.750000	0	0	3 750	6 000	
Ingreso marginal	Z — C	9 372 000	0	3.750000	0	0	— 750	0	
4 500 Maíz	P1	940	125	—.003125	0	0	1	0	
6 000 Trigo	P2	974.5	— 78 125	—.002578	0	0	0	1	
0 Agua octubre	P'5	4 363	— 1 718 75	—.026719	1	0	0	0	
0 Agua noviembre	P'6	51 467	— 2 343 75	.037344	0	1	0	0	
Costo de oportunidad	Z	10 077 000	93 750	1.4055	0	0	4.500	6 000	
Ingreso marginal	Z — C		93 750	1.4055	0	0	0	0	

Cuadro 5. (Para ser llenado con datos semejantes a los de los cuadros 1, 2 y 3)

							C_1	C_2	C_3	C_4	
		A	B	C	D	E	F	G	H	J	
		P'_0	P'_5	P'_6	P'_7	P'_8	P_1	P_2	P_3	P_4	R
1	P5	A1	B1	C1	D1	E1	F1	G1	H1	J1	A1/J1
2	P6	A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2	J2	A2/J2
3	P7	A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3	J3	A3/J3
4	P8	A4	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4	J4	A4/J4
5	z										
6	z — c						$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	$-C_4$	

Nota: Los precios C_1, C_2, C_3 y C_4 corresponden a las actividades productivas. Los valores de las otras columnas son iguales a cero. La hilera *z* tiene valores ceros en la primera matriz. Se supone que en la columna *R*, A3/J3 es más pequeño que los demás, por lo que *P7* es el recurso más limitado. **La actividad P_4 es la más ventajosa suponiendo que — C_4 es el valor negativo mayor.**

7	P5	A1 — (A9)J1	B1 — (B9)J1	C1 — (C9)J1	D1 — (D9)J1	E1 — (E9)J1	F1 — (F9)J1	G1 — (G9)J1	H1 — (H9)J1	J1 — (J9)J1	A7/H7
8	P6	A2 — (A9)J2	B2 — (B9)J2	C2 — (C9)J2	D2 — (D9)J2	E2 — (E9)J2	F2 — (F9)J2	G2 — (G9)J2	H2 — (H9)J2	J2 — (J9)J2	A8/H8
.9	P4	A3/J3	B3/J3	C3/J3	D3/J3	E3/J3	F3/J3	G3/J3	H3/J3	J3/J3	A9/H9
10	P8	A4 — (A9)J4	B4 — (B9)J4	C4 — (C9)J4	D4 — (D9)J4	E4 — (E9)J4	F4 — (F9)J4	G4 — (G9)J4	H4 — (H9)J4	J4 — (J9)J4	A10/H10
11	z	C_4(A9)	C_4(B9)	C_4(C9)	C_4(D9)	C_4(E9)	C_4(F9)	C_4(G9)	C_4(H9)	C_4(J9)	
12	z — c	A11	B11	C11	D11	E11	F11 — C1	G11 — C2	H11 — C3	J11 — C4	

Comprobación: **A11 debe ser igual a la suma de los productos *B11* A1 + *C11* A2 + *D11* A3 + *E11* A4.**
Nota: *P3* tiene mayor valor negativo (*z — c*). En la columna *R*, *A7/H7* es el menor **valor de todos los cocientes. Luego, debe producirse *P3* y *P5* debe ocuparse totalmente en la producción de *P3*.**

13	P3	A7/H7	B7/H7	C7/H7	D7/H7	E7/H7	F7/H7	G7/H7	H7/H7	J7/H7	A13/F13
14	P6	A8 — (A13)H8	B8 — (B13)H8	C8 — (C13)H8	D8 — (D13)H8	E8 — (E13)H8	F8 — (F13)H8	G8 — (G13)H8	H8 — (H13)H8	J8 — (J13)H	A14/F14
15	P4	A9 — (A13)H9	B9 — (B13)H9	C9 — (C13)H9	D9 — (D13)H9	E9 — (E13)H9	F9 — (F13)H9	G9 — (G13)H9	H9 — (H13)H9	J9 — (J13)H	A15/F15
16	P8	A10 — (A13)H10	B10 — (B13)H10	C10 — (C13)H10	D10 — (D13)H10	E10 — (E13)H10	F10 — (F13)H10	G10 — (G13)H10	H10 — (H13)H10	J10 — (J13)H	A16/F16
17	z	C_3(A13) + C_4(A15)	C_3(B13) + C_4(B15)	C_3(C13) + C_4(C15)	C_3(D13) + C_4(D15)	C_3(E13) + C_4(E15)	C_3(F13) + C_4(F15)	C_3(G13) + C_4(G15)	C_3(H13) + C_4(H15)	C_3(J13) + C_4(J15)	
18	z — c	A17	B17	C17	D17	E17	F17 — c1	G17 — c2	H17 — c3	J17 — c4	

Comprobación: A17 = *B17* A1 + *C17* A2 + *D17* A3 + *E17* A4.
Nota: **Todos los valores de línea *z — c* son positivos, es decir, se ha llegado al programa más lucrativo. Las cifras en *P0* indican *a*) los recursos que se han utilizado y *b*) las cantidades producidas. *z — c* en la columna P_0 indica el ingreso o utilidad total.**

obtiene el programa óptimo cuando todos los valores de $z - c$ son positivos. Cuando se tienen valores negativos es necesario estimar las nuevas matrices hasta obtener valores positivos en la hilera de ingreso marginal $(z - c.)$

Cálculo mecánico de la programación lineal

El cuadro 5 indica las instrucciones mecánicas que deben seguirse para resolver cualquier problema "de máximos" utilizando la programación lineal. Cada rectángulo o espacio se identifica con un número que está colocado a la izquierda del cuadro y por una letra mayúscula que está colocada en la parte superior del mismo. El ejemplo supone cuatro actividades productivas (P_1 a P_4) y "cuatro actividades ociosas" (P_5 a P_8). Los precios para las actividades productivas son c_1, c_2, c_3 y c_4 y se encuentran en la parte superior del cuadro. La primera parte del cuadro debe obtenerse en la misma forma apuntada para los cuadros 1, 2 y 3. Después que se ha completado la primera sección se procede a la estimación de las secciones siguientes.

El rectángulo o espacio A_7 de la segunda sección se obtiene mediante la resta del producto de A_9 por J_1, menos el espacio A_1.

B_9 se obtiene dividiendo B_3 entre la cifra correspondiente a J_3. A_{11} es igual al precio C_4 (para P_4) multiplicado por el espacio A_9. La cantidad A_{12} es igual a A_{11} (las actividades ociosas tienen un valor igual a cero). La cantidad F_{12} es igual a F_{11} menos el precio C_1.

BIBLIOGRAFÍA

James N. Boles. "Linear programming and Farm Management Analysis", en *Journal of Farm Economics,* febrero de 1955, p. 1.

Enrique Cansado. *Programación lineal,* Santiago, Chile. Centro Interamericano de Enseñanza de Estadística Económica y Financiera.

A. Charnes. *An Introduction to Linear Programming.* New York, John Wiley Sons, Inc., 1952, capítulo XI, *Conclusión.*

Earl O. Heady. "Simplified Presentation of Linear Programming Technique", en *Journal of Farm Economics,* diciembre de 1954, p. 1035.

C. West Churchman. *Introduction to Operations Research.* New York, John Wiley Sons. Inc., 1957, capítulo 11, *Linear Programming.*