EL TRIMESTRE ECONÓMICO, vol. LXXV, núm. especial, enero de 2008, pp. 125-133

BIENESTAR SOCIAL, ÓPTIMOS DE PARETO Y EQUILIBRIOS WALRASIANOS*

Elvio Accinelli, Juan Gabriel Brida, Leobardo Plata y *Martín Puchet***

Resumen

En este artículo analizamos la relación entre óptimos de Pareto y bienestar social. Cada distribución óptima de Pareto está asociada al conjunto de pesos sociales de una función de utilidad social. Toda ponderación posible de los agentes de la economía está asociada con un conjunto no vacío de asignaciones factibles óptimas de Pareto. Modificar el bienestar social asociado a los óptimos de Pareto alcanzables por una economía implica modificar la estructura de pesos sociales. No obstante, dada una distribución de dotaciones iniciales, no toda distribución de pesos sociales tiene asociada una asignación de recursos factible que sea, a su vez, un equilibrio walrasiano. Esta posibilidad depende de la distribución de las dotaciones iniciales. No cualquier distribución forzosamente da como resultado un equilibrio correspondiente al nivel más alto posible de bienestar agregado. ¿Es posible alcanzar este bienestar de manera descentralizada y sin participación de un planeador central? La respuesta es que generalmente necesitaremos de una reasignación de las dotaciones sociales.

* *Palabras clave*: método de Negishi, bienestar social, redistribución de las dotaciones iniciales. *Clasificación JEL*: D60. Esta investigación tiene el apoyo del Conacyt (proyecto núm. 46209) y de la Universidad Libre de Bolzano (proyecto "Dynamical Regimes in Economics: Modelling and Statistical Tools". Los autores agradecen comentarios de A. Mas-Collel y de participantes del Seminario de Teoría Económica de la Universidad Pompeu Fabra, así como las sugerencias de Jaime Sempere y Enrique Casares a versiones anteriores de este texto. Caben los habituales descargos de responsabilidad.

** E. Accinelli y L. Plata, Facultad de Economía de la UASLP (correos electrónicos: elvio.accinelli@eco.uaslp.mx y lplata@uaslp.mx). J. G. Brida, Universidad Libre de Bolzano, Italia (correo electrónico: JuanGabriel.Brida@unibz.it). M. Puchet, Facultad de Economía de la UNAM (correo electrónico: anyul@servidor.unam.mx).

Abstract

In this work we analyze the relation between social welfare, and Pareto optimal allocations. As it is well know, each Pareto optimal allocation has associate a specific vector of social weights (one to each agent of the economy). This vector has associate a specific social utility function (the Negishi function) and then, each Pareto optimal allocation has associate a level of welfare. The concern of this work is to analyze the possibility that the economy reach, in a decentralized way, the maximum possible level of social welfare, considering as given the aggregate amount of its initial resources.

Introducción

En este trabajo analizamos la relación entre bienestar social y asignaciones de recursos óptimas de Pareto. Esta relación se establece mediante la introducción de una función de utilidad social del tipo considerado en Negishi (1960). Cuando las utilidades de los agentes y los recursos totales iniciales están dados, los óptimos de Pareto alcanzables en una economía están en correspondencia con un conjunto de ponderadores de las utilidades individuales. Estos ponderadores son los que hacen posible agregar dichas utilidades de manera que resulte una función específica de utilidad social. Al menos una asignación óptima de Pareto maximiza la función de utilidad social que resulta de ciertos ponderadores y recíprocamente. Así se caracterizan los óptimos de Pareto por medio de los ponderadores y, en consecuencia, se le asocia a cada óptimo de Pareto un nivel de bienestar social. Una primera pregunta a la que respondemos es cuáles son las características de las asignaciones óptimas de Pareto que maximizan el bienestar social. Una segunda pregunta es si es posible que una economía descentralizada alcance este bienestar. Efectivamente esta posibilidad existe siempre que en dicha economía esta asignación sea, además de óptima de Pareto, la que corresponde a las cantidades de un equilibrio walrasiano. Pero los equilibrios walrasianos posibles dependen de la distribución de las dotaciones iniciales y no sólo de la cantidad total de recursos existentes. La asignación de equilibrio walrasiano en la medida que es óptimo de Pareto tiene asociado un determinado conjunto de pesos sociales al que llamamos equilibrio social. Obtener este equilibrio significa que se alcanza un bienestar social por medio de la economía descentralizada.

Existe una correspondencia directa entre pesos de equilibrio social y asignaciones óptimas de Pareto de equilibrio walrasiano. Esta relación tiene en su base la distribución de las dotaciones iniciales de la economía. Cualquier intento que se haga para modificar el bienestar social alcanzable mediante una economía descentralizada supone un cambio en estos pesos sociales de equilibrio. Ello sólo puede lograrse mediante una reasignación de los recursos iniciales. Por razones de sencillez expositiva nos restringiremos al caso de economías con un número finito de bienes. Debe observarse que es posible generalizar estas conclusiones a casos de dimensión infinita. También conviene señalar que como los óptimos de Pareto alcanzables están asociados a ciertos pesos sociales, no importa que el cono positivo del espacio en el que se modela la economía tenga interior vacío. Este hecho muestra que, de alguna manera, esta caracterización puede considerarse como una extensión del segundo teorema del bienestar al caso de dimensión infinita.

I. Optimalidad de Pareto y bienestar social

Consideramos una economía con n agentes y l bienes. El espacio de consumo de cada agente es el como positivo de R^l que se denomina R^l. Los agentes representados por $I \quad \{1, \ldots, n\}$ tienen utilidades u_i cuasicóncavas y dotaciones iniciales $w_i \quad R^l$ tales que $\ _{i \ 1}^{n} w_i$ y R^l está dado. Decimos que una asignaciones $x \quad (x_1, \ldots, x_n) \quad R^{ln}$ es factible si y sólo si $\ _{i \ 1}^{n} x_i \quad \ _{i \ 1}^{n} w_i$. Representamos por $\mathcal{F}$ al conjunto de asignaciones factibles. Suponemos además que el bienestar social de la economía está representado por la función:

$$W(x) \qquad \ _{i \ 1}^{n} \ _i u_i(x_i) \tag{1}$$

en la que $x \quad R^{ln}$ es una asignación de recursos factible y $(\ _1, \ldots, \ _n)$ con $\ _i \quad 0$ para $i \quad 1, \ldots, n$ es el vector de pesos sociales que pertenece al simplex de R^n. Éste es:

$$R^n\!: \ _{i \ 1}^{n} \ _i \quad 1 \quad \text{con} \quad 0 \qquad _i \quad 1, \quad i \quad \{1, \ldots, n\} \tag{2}$$

Como es bien conocido si para algún $\quad , x^* \quad (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ con $x_i^* \quad R^l$ resuelve el problema de maximización (Accinelli, 1996) que se expresa como

$$\max_{x \quad \mathcal{F}} W\ (x) \quad \text{con} \tag{3}$$

entonces x^* es un óptimo de Pareto. Recíprocamente si x^* es un óptimo de Pareto entonces existe * tal que x^* resuelve el problema (1) que consiste en maximizar $W_*(x)$ con $x \quad \mathcal{F}$. Denotamos por $x(\ )$ a la asignación de recursos que resuelve el problema (1). De esta manera asociamos a cada asignación de recursos óptima de Pareto x^*, el bienestar correspondiente al valor $W_*(x^*)$.

Obsérvese que el bienestar social alcanzable en una economía no depende de la distribución inicial de los recursos sino sólo de la cantidad total de dotaciones inicialmente existentes.

Características de la asignación maximizadora de bienestar

Es claro que si se tiene interés en maximizar el bienestar social lo primero que se deberá considerar son asignaciones de recursos que sean óptimas de Pareto. De otra manera sería posible mejorar el bienestar de por lo menos un agente de la economía y consecuentemente de la sociedad. Supongamos entonces que deseamos encontrar la asignación de recursos óptima de Pareto que maximiza el bienestar social. Se trata entonces de encontrar * y su correspondiente asignación $x^* \quad x(\ ^*)$ tal que $W_*(x(\ ^*) \quad W\, x(\ ),$. Este problema tiene como dual el siguiente:

$$\text{mín}\, W(\ , x^*(\tag{4}$$

Véase el apéndice 1. El problema se resuelve por medio del siguiente teorema:

Teorema 1. Existe una solución * para el problema (4); esta solución tiene asociada la asignación x^* que resuelve el problema de maximizar el bienestar social, es decir $W_*(x(\ ^*)) \quad W(x(\ )),$. Entonces la asignación de recursos $x(\ ^*)$ verifica las igualdades $u_1(x_1(\ ^*)) \ \ldots \ u_n(x_n(\ ^*))$.

La demostración puede verse en el apéndice 2. Ahora bien, ¿es posible que una economía descentralizada alcance este bienestar? La respuesta está en las características de los pesos sociales de equilibrio. La siguiente sección está dedicada a esta pregunta.

II. EQUILIBRIOS WALRASIANOS Y BIENESTAR SOCIAL

Representamos una economía por el conjunto $\mathcal{E} \quad \{R^l, w_i, u_i, I\}$, en el que R^l, w_i y u_i son, como en la sección anterior, el espacio de consumo, las dotaciones iniciales y las utilidades de cada uno de los agentes, e I es un conjunto finito de índices que representa a los agentes de la economía. El primer teorema del bienestar (véase Mas-Colell, Whinston y Green, 1995) afirma que todo equilibrio walrasiano es un óptimo de Pareto. De esta manera una asignación de equilibrio x^* comparte con los óptimos de Pareto la propiedad de tener un $\ ^*$ para el cual x^* maximiza $W(x)$. No obstante, una caracterización completa del equilibrio walrasiano requiere una propiedad adicional. Para establecerla introducimos la función de exceso de utilidad (véase Accinelli, 1996):

$$e_i(x^*(\ ), w) \quad grad[u_i(x_i^*(\ ))]\,(x_i^*(\ ) \quad w_i),\ i \quad 1,2,\dots,n \tag{5}$$

en que $x^*(\ )$ es la asignación factible que maximiza la función $W(x)$. Como fácilmente puede observarse, $x^*(\ )$ es una asignación de equilibrio si y sólo si verifica la condición

$$e(x^*(\ ^*), w) \quad (e_1(x_i^*(\ ^*), w), \dots, e_n(x_n^*(\ ^*), w)) \quad 0 \tag{6}$$

Nótese que las soluciones de (6) dependen de la distribución de las dotaciones iniciales y, en principio, no es cierto que para toda exista una asignación factible $x(\ )$ que sea maximizadora de $W(x)$ y que además satisfaga el sistema de ecuaciones (6). Esto muestra que, en principio, queda descartada la posibilidad de que el que permite obtener los óptimos de Pareto cuyo bienestar asociado es el mayor posible, sea alcanzable de manera descentralizada. La diferencia está en que el equilibrio social depende no sólo de la cantidad agregada de recursos iniciales sino también de su distribución entre los agentes. Por tanto la tarea de quien intente maximizar el bienestar social será distribuir las dotaciones iniciales de modo que los pesos sociales asociados al óptimo de Pareto que corresponden al máximo bienestar social sean aquellos pesos sociales cuya distribución sea, a su vez, la de equilibrio. La posibilidad de alcanzar de manera descentralizada el máximo bienestar social compatible con los recursos existentes es, en definitiva equivalente a la posibilidad de que para todo óptimo de Pareto exista una distribución de las dotaciones iniciales que haga que los pesos correspondientes se revelen como un equilibrio social.

CONCLUSIONES

La pregunta del comienzo del artículo supone dos respuestas distintas. Una reasignación de las dotaciones iniciales no mejora el bienestar social medido a partir de asiganciones óptima de Pareto, pues en este caso sólo depende de la cantidad total de recursos. Ahora bien, si se quiere alcanzar un bienestar social máximo, es decir el mejor posible, mediante una economía descentralizada, alguien deberá hacer una reasignación de las dotaciones iniciales con la finalidad de alcanzarlo; se trata ahora de equilibrios walrasianos. La posibilidad de alcanzar uno u otro depende ya no sólo de la cantidad total agregada de recursos existente en la economía sino también de su distribución. Quien redistribuye puede ser un planeador central impositivo o bien un gobierno que haya logrado, por medio de un mecanismo de votación o uno de consenso, la aceptación social de la reasignación asociada al máximo bienestar posible. Pero cuál es el mecanismo o la institución pertinente para hacer la redistribución de los recursos existentes que logre el bienestar social máximo es otro asunto.

APÉNDICE 1

El conjunto de las utilidades posibles lo definimos como:

$$U = \{(u_1, \ldots, u_n) \in R^n\text{: existe } x \text{ factible: } u_i \leq u_i(x_i) \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

en el que cada elemento es un perfil de utilidades $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Se puede demostrar que este conjunto, en las condiciones expuestas, es convexo y que UP es la frontera del mismo en la que se ubican las utilidades obtenidas a partir de asignaciones óptimas de Pareto.

Para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ fijo, consideremos el siguiente problema de maximización:

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \tag{7}$$

en que $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ es la función objetivo que depende de los perfiles de utilidades. Este problema es equivalente al siguiente: $\max_{x \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i)$, en que $\mathcal{F}$ es el conjunto de asignaciones factibles (véase Mas-Colell, Whinston y Green, 1995). Adviértase que se intenta maximizar una función cóncava con restricciones convexas. Resolvemos este problema mediante una aplicación del teorema de Fenchel (véase Luenberger, 1969). Consideramos un funcional dual para el problema (7) igual a: $f^{*}(y)$ $\text{ínf}_{u \quad R^n}[uy \quad {}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i]$, en que y es la variable dual y coordenada a coordenada se tiene: $f_i^{*}(y_i)$ $\text{ínf}_{u_i \ 0}[u_i y_i \quad {}_{i}u_i]$. Este problema tiene como única solución u_i 0. También definimos el funcional $g(u)$ 0 para cualquier u R^n y consecuentemente

$$g^{*}(y) \quad \sup_{u \ U} uy \quad \sup_{u \ U} \ {}^{n}_{i \ 1} \ u_i y_i$$

El espacio dual de U queda definido por U^{*} $\{y$: sup uy , u $U\}$. Por dualidad entonces se tiene que:

$$\max_{u \quad U \cap R^n} \{f(u) \quad g(u)\} \qquad \min_{u^{*} \quad U^{*} \cap R^n} \{g^{*}(y) \quad f^{*}(y)\}$$

En nuestro caso el teorema se traduce en que

$$\max_{u \ U} \ {}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i \qquad \min \ {}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i$$

Finalmente cuando resolvemos mín ${}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i(x_i(\ ))$ estamos resolviendo el máximo para u en la frontera de Pareto de ${}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i(\ )$, entendiendo que $u(\ )$ es el vector de utilidades en la frontera de Pareto correspondiente a la ponderación social definida por .

APÉNDICE 2

Ofrecemos la demostración del teorema 1. Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 1. $W(\ , x^{*}(\ ))$ es una función convexa en .

Demostración del lema. Supongamos que las asignaciones factibles, $\bar{x}$ y x están soportadas por y respectivamente. Sea x^c una asignación óptima de Pareto soportada por ^{c} (1) con 0 1. Entonces

$$W(\ ^{c}, x^{*}(\ ^{c})) \quad {}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i(x_i^{*}(\ )) \quad (1 \quad) \ {}^{n}_{i \ 1} \ {}_{i}u_i x_i^{*}(\ )) \quad W(\ \ x^{*}(\ )) \quad (1 \quad)W(\ \ x^{*}(\ )).[\ ]$$

Demostración del teorema: A partir de las condiciones de primer orden para el problema (1) se infiere que:

$$ {}_{i} \ grad u_i(x_i) \quad ; i \quad 1, \ldots, n \tag{8}$$

en que $(\ )$ $(\ _1(\ ), \ldots, \ _l(\ ))$ es el conjunto de los multiplicadores de Langrange y $grad f(x)$ es el gradiente de la función f. Como se sabe que ${}^{n}_{i \ 1} x_i(\ )$ se sigue que:

$$\overset{n}{\underset{i\ 1}{}}\ \frac{x_i(\ )}{h}\quad 0,\quad h\quad \{1,\ldots,n\} \tag{9}$$

en que

$$\frac{x_i}{h}\quad \frac{x_{i1}}{h},\ldots,\frac{x_{il}}{h}$$

Sustituyendo $_n$ 1 $\overset{n\ 1}{\underset{i\ 1}{}}\ _i$ en $x^*(\ )$ y derivando respecto a $_k$ para k 1,…, $(n$ 1) nosotros obtenemos:

$$\frac{d}{d\ _k}W(\ ,x^*(\ ))\quad \overset{n}{\underset{i\ 1}{}}\quad _i\frac{u_i(x_i^*(\ ))}{x_{i1}^*}\overset{l}{\underset{h\ 1}{}}\ \frac{x_{i1}(\ )}{h}\frac{d\ _h}{d\ _k}$$

$$_i\frac{u_i(x_i^*(\ ))}{x_{il}^*}\overset{l}{\underset{h\ 1}{}}\ \frac{x_{il}(\ )}{h}\frac{d\ _h}{d\ _k}\qquad u_k(x_k^*(\ ))\quad u_n(x_n^*(\ ))\frac{d\ _n}{d\ _k}\quad 0,\ k\quad 1,2,\ldots,n\quad 1 \tag{10}$$

en que

$$\frac{d\ _h}{d\ _k}\quad \begin{array}{ll} 1 & \text{si } h\quad k \\ \ 1 & \text{si } h\quad n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \tag{11}$$

Para k 1,…, n. Substituyendo (8) en (10) obtenemos:

$$\frac{d}{d\ _k}W(\ ,x(\ ))\quad \overset{n}{\underset{i\ 1}{}}\overset{l}{\underset{j\ 1}{}}\ _j(\ )\overset{l}{\underset{h\ 1}{}}\ \frac{x_{ij}}{h}\ \frac{_h}{_k}$$

$$u_k(x_k(\ ))\quad u_n(x_n(\ ))\quad 0,\quad k\quad n \tag{12}$$

Usando ahora las igualdades (11) se infiere que:

$$\overset{n}{\underset{i\ 1}{}}\overset{l}{\underset{j\ 1}{}}\ _j(\ )\ \frac{x_{ij}(\ )}{h}\ \frac{x_{ij}(\ )}{n}\qquad u_k(x_k(\ ))\quad u_n(x_n(\ ))\quad 0,\ k\quad 1,\ldots,(n\quad 1) \tag{13}$$

Finalmente, a partir de (9) obtenemos:

$$\frac{d}{d\ _k}W(\ ,x(\ ))\quad u_k(x_k(\ ))\quad u_n(x_n(\ ))\quad 0,\ k\quad 1,\ldots,(n\quad 1) \tag{14}$$

Entonces el bienestar social es maximizado por * que verifica:

$$u_1(x_1^*(\ ^*))\quad \ldots\quad u_n(x_n^*(\ ^*)).[\ ] \tag{15}$$

Referencias bibliográficas

Accinelli, E. (1996), "Some Remarks About Uniqueness of the Equilibrium for Infinite Dimensional Economies", *Estudios Económicos* 21, pp. 315-326.

Luenberger, D. (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons Ltd.

Mas-Colell, A., M. Whinston y J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Negishi, T. (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Metroeconomica* 12, pp. 92-97.