PROGRAMACIÓN "LINEAL" O MATEMÁTICA: UN ENFOQUE NO MATEMÁTICO*

Robert Dorfman

(Universidad de California, Berkeley, E.U.A.)

Este trabajo intenta exponer las ideas más importantes de la programación matemática,[1] haciendo caso omiso del aparato algebraico que impide su valoración y aceptación general. Este propósito se logra concentrándose en la representación gráfica del método. Aunque por lo general no es posible llevar los problemas de la programación matemática a las gráficas bidimencionales, las conclusiones que obtendremos serán de validez general y, por supuesto, la representación gráfica de los problemas multidimencionales ocupa ya un lugar de honor en la economía.

El problema formal básico de la economía consiste en asignar los escasos recursos, en tal forma que se maximice la obtención de un fin predeterminado. La formulación más general de este problema —el llamado análisis marginal— ha conducido a conclusiones de gran importancia para la comprensión de diversos problemas sobre la política económica y social. No obstante, es bien sabido que esta forma de análisis no es recomendable en sí misma para los hombres de negocios, en la solución práctica de sus problemas económicos y comerciales. La programación matemática está basada en la reestructuración de este mismo problema de tal modo que está destinada a ser de utilidad para tomar decisiones prácticas en los asuntos económicos y de los negocios. La programación matemática no es otra cosa que una reformulación del problema económico clásico y, su solución, es la tesis principal de su exposición.

La idea de la programación matemática es el concepto de "proceso" o "actividad". El proceso es un método específico para llevar a cabo una tarea económica. Por ejemplo, la elaboración de jabón mediante una fórmula específica es un proceso. También lo es el tejido de una cantidad específica de algodón en bruto en un determinado telar. Se puede satisfacer la función convencional de producción como la fórmula que relaciona los insumos y los productos de todos los procesos mediante los cuales se puede llevar a cabo una tarea determinada.

* El trabajo de Dorfman apareció publicado en *The American Economic Review*, vol. XLIII, diciembre, 1953. Versión al castellano de Óscar Soberón M.

1 Las condiciones de la terminología de las técnicas bajo consideración se encuentran en un estado poco satisfactorio. Frecuentemente, la técnica se llama "programación lineal" a pesar de que las relaciones supuestas no son siempre lineales. A veces se les denomina "análisis de actividades", pero éste no es un nombre muy sugestivo. La característica del método consiste en que se trata de la programación, más bien que del análisis y, de cualquier modo, "análisis de actividades" es un término que no ha sido muy empleado. En esta ocasión trataremos de utilizar el término "programación matemática", con el propósito de que tenga éxito.

Para algunas tareas, por ejemplo la producción de jabón, se dispone de un número infinito de procesos; para otras, por ejemplo el tejido, sólo existe un número finito de procesos. En algunos casos, la planta o industria sólo tendrá a su disposición un solo proceso.

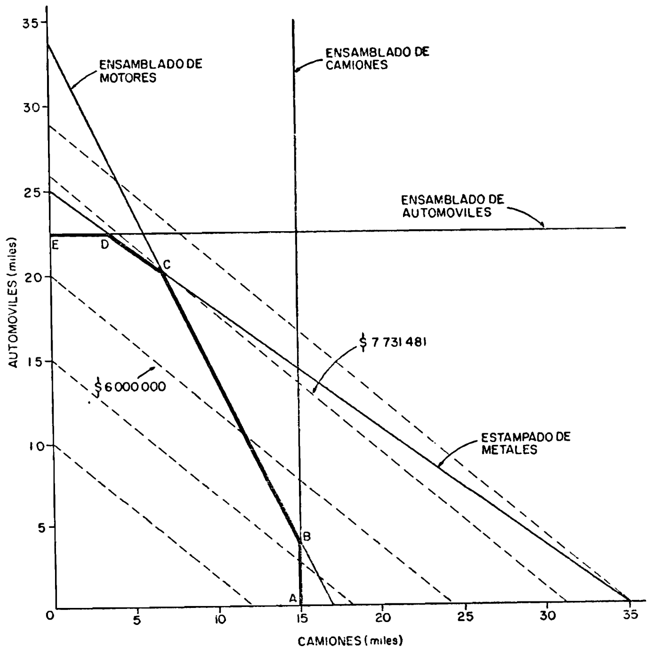
En términos de procesos, las selecciones en la esfera de la producción son simplemente decisiones sobre los procesos que han de usarse y del grado en que deba emplearse cada uno. Los economistas están acostumbrados a pensar en términos de las decisiones con relación a las cantidades de los diversos factores productivos que han de emplearse. Pero la empresa o la industria no puede sustituir el factor *a* por el factor *b*, a menos que haga cierta parte de su trabajo en una forma diferente; es decir, a menos que sustituya el proceso que usa *a* en una proporción relativamente alta, por una que use *b*. Los insumos, por tanto, no pueden cambiarse sin que se cambie la forma de hacer las cosas, y, a menudo, a menos que se lleve a cabo un cambio fundamental. La programación matemática enfoca este aspecto de la elección económica.

El objetivo de la programación matemática consiste en determinar los niveles óptimos de los procesos productivos en determinadas circunstancias. Ello requiere de la reexposición de las relaciones productivas en términos de procesos, y de la reconsideración del efecto de la escasez de los factores en la elección de los métodos de producción. Sin embargo, como antecedente de esta discusión teórica, será útil considerar desde el punto de vista del sentido común un problema simplificado de producción.

I. Un ejemplo de programación matemática

Consideremos una compañía hipotética productora de automóviles que está equipada para la producción de automóviles y camiones. La empresa, pues, puede desempeñar dos tareas económicas, y suponemos que dispone de un solo proceso para llevar a cabo cada una de ellas. Estas dos tareas, la manufactura de automóviles y de camiones, están en competencia al utilizar el equipo de la empresa. Supongamos que la planta está organizada en cuatro departamentos: *1)* estampado de metales; *2)* armado de motores; *3)* armado final de autos; y *4)* armado final de camiones; las materias primas, la mano de obra y todos los otros componentes se encuentran disponibles en el mercado en cantidades virtualmente ilimitadas, a precios constantes.

Por supuesto, la capacidad de cada departamento de la planta está limitada. Suponemos que el departamento de estampado sólo puede entregar estampados suficientes para 25 000 automóviles o 35 000 camiones al mes. En esta forma podemos calcular las combinaciones de estampados para automóviles y camiones que se pueden producir en el departamento. Como el departamento puede terminar 25 000 automóviles al mes, cada automóvil requiere de 1/25 000 ó 0.004 % de su capacidad mensual. En forma similar cada camión requiere de 0.00286 % de su capacidad mensual. Por ejemplo, la producción de 15 000 automóviles requeriría del 60 % de la capacidad de estampado y el 40 % restante sería suficiente para el estampado de 14 000 camiones. La plena capacidad de operación del departamento sería, en esta forma, de 15 000 automóviles y 14 000 camiones. Por supuesto, ésta no sería la única combinación de automóviles y camiones que podrían producirse por el departamento de estampado a capacidad plena. En la gráfica 1 la línea denominada "estampado de metales" representa todas las combinaciones posibles de este tipo.



GRÁFICA 1. Alternativas de una empresa automovilística.

De igual modo, suponemos que el departamento de armado de motores tiene una capacidad mensual de 33 333 motores de automóviles o de 16 667 motores de camiones, o bien alguna combinación de menos motores de automóviles y camiones. En la gráfica 1 se muestran las combinaciones que absorberían la capacidad plena del departamento de ensamblado de motores, mediante la línea "ensamblado de motores". También suponemos que el departamento de ensamblado de motores puede terminar 22 500 automóviles al mes y que el departamento de ensamblado de camiones puede terminar 15 000 camiones. Los límites se representan también en la gráfica 1.

Consideremos que este conjunto de supuestos define dos procesos: la producción de automóviles y la producción de camiones. El proceso de producción de un automóvil rinde, como producto, un automóvil, y absorbe, como insumo, 0.004 % de la capacidad de estampado de metales, 0.003 % de la capacidad de ensamblado de motores, y 0.0044 % de la capacidad de ensamblado de automóviles. En igual forma el proceso de producción de un camión rinde, como producto, un camión, y absorbe, como insumo, 0.00286 % de la capacidad de estampado de metales, 0.006 % de la capacidad de ensamblado de motores, y 0.00667 % de la capacidad de ensamblado de camiones.

La alternativa económica a la que se enfrenta esta empresa es la selección del número de automóviles y camiones que han de producirse cada mes, teniendo como límite el hecho de que no podrá utilizar más del 100 % de la capacidad en ningún departamento. Técnicamente, la alternativa consistirá en decidir el nivel en que empleará cada uno de los dos procesos disponibles. Es claro que si se producen únicamente automóviles, sólo podrán terminarse 22 500 al mes y que el ensamblado de automóviles será el verdadero límite. Si se produjeran sólo camiones, se terminaría un máximo de 15 000 unidades al mes, ya que el límite se encuentra en el ensamblado de camiones. La selección de las alternativas que se adopten o bien la combinación de camiones y de automóviles que deban producirse depende de la lucratividad relativa de la manufactura de camiones y de automóviles. En concreto, supongamos que el valor de venta de un automóvil es $ 300 mayor que el costo total de las materias primas, mano de obra y otros costos directos de esta manufactura. En igual forma, que el valor de venta de un camión es $ 250 mayor que el costo directo de su manufactura. En esta forma, el ingreso neto de la planta en cualquier mes es 300 veces el número de automóviles producidos, más 250 veces el número de camiones. Por ejemplo, la producción de 15 000 automóviles y 6 000 camiones darían un ingreso neto de 6 millones de pesos. Pero existen muchas combinaciones de automóviles y camiones que rendirían el mismo ingreso neto; por ejemplo, 10 000 automóviles y 12 000 camiones. En relación con la gráfica 1, todas las combinaciones que permiten obtener un beneficio neto de 6 millones están localizadas en una línea recta, en la línea de la gráfica que señala la cifra de 6 millones. La línea análoga a la que acabamos de mencionar corresponde a cada uno de los posibles ingresos netos. Todas las demás son paralelas, ya que su pendiente sólo depende de la rentabilidad relativa de las dos actividades. Por supuesto, entre mayor sea el ingreso neto la línea recta se encontrará en un nivel más alto. Algunas rectas que representa el ingreso neto se muestran en la gráfica por líneas paralelas punteadas.

El número posible de automóviles y camiones producidos corresponde a un punto de la gráfica y por cada uno de estos puntos pasa una recta del grupo de las líneas de ingreso neto. El ingreso neto llega al máximo cuando el punto correspondiente a un número de automóviles y camiones producidos descansa sobre la línea del ingreso neto más alto posible. En estas condiciones, el efecto de las restricciones de la capacidad limita el campo de selección de los productos que corresponden a los puntos que se encuentran dentro del área limitada por los ejes y por la línea quebrada *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Como los ingresos netos aumentan a medida que los puntos se alejan del origen, sólo será necesario considerar los puntos que descansan sobre la línea quebrada. Así pues, empezando con el punto *a* y moviéndonos a lo largo de la línea quebrada observamos que el límite de la región accesible intercepta las rectas de ingreso más y más altas hasta que se llega al punto *c*. A partir de este punto, el límite baja a lo largo de la escala de rectas de ingreso neto. El punto *c*, por lo tanto, corresponde al ingreso neto más alto que puede obtenerse. En el punto *c* el producto es de 20 370 automóviles y 6 481 camiones, que rinden un ingreso neto de $ 7 731 481 al mes.

El lector se habrá dado cuenta de que la gráfica no introduce ninguna novedad. La línea quebrada, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, indica el número máximo de automóviles que pueden producirse en combinación con cualquier número dado de camiones. A pesar de su forma angular se trata de una curva de oportunidad de producción o curva de transformación, del tipo que dio a conocer Irving Fisher, y la pendiente de la curva en cualquier punto es la relación de sustitución en la producción de automóviles y camiones. El aspecto novedoso es que la curva de oportunidad de producción no tiene una pendiente definida en cinco puntos y que uno de éstos es el punto crítico. Las líneas punteadas de la gráfica equivalen a las rectas de precio convencionales.

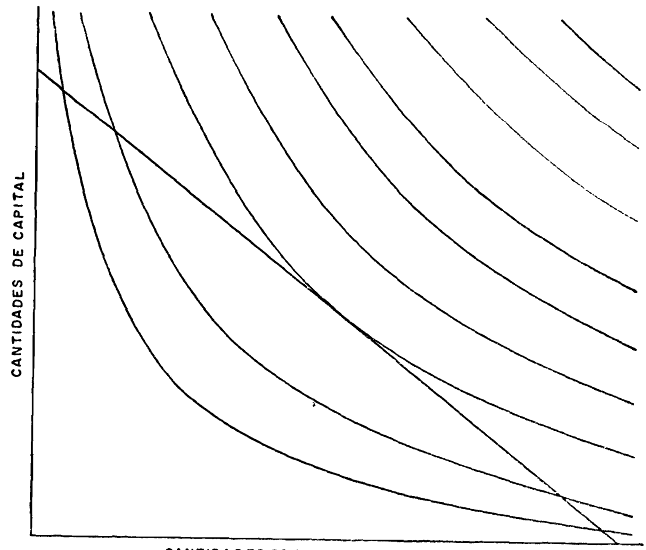
La teoría de la producción señala que las utilidades llegan al máximo en el punto en que la línea del precio es una tangente a la curva de oportunidad de producción. No obstante, como se acaba de indicar, hay cinco puntos en donde nuestra curva de oportunidad de producción no tiene tangente. Así pues, el criterio de tangencia falla en este caso. Por el contrario, encontramos que las utilidades llegan a un máximo en un punto angular en donde la pendiente de la línea de precio no es ni menor a la pendiente de la curva de oportunidad a la izquierda del punto, ni mayor que la pendiente de la curva de oportunidad hacia la derecha.

Así pues, gráficamente, la programación matemática utiliza ángulos en los casos en que la economía emplea curvas. ¿Dónde se encuentra la novedad, desde el punto de vista económico? En el análisis económico convencional se visualizan las relaciones de producción en las que, si existen dos productos, es posible sustituir el uno por el otro con dificultades cada vez crecientes. En la programación matemática se visualiza un sistema de producción en el que, para cualquier producto, habrá ciertos factores limitantes, aunque también existirán otros cuya oferta será muy grande. Así pues, en la gráfica 1, se pueden identificar los factores que limitan efectivamente la producción en cada punto, observando las rectas de limitación en las cuales descansan los puntos. La relación de sustitución entre productos se determina solamente por los factores limitantes y sólo cambia cuando se cambia también la designación de los factores limitantes. En la gráfica se representa un cambio en la designación de los factores limitantes en cada ángulo de la curva de oportunidad.

Volveremos más tarde a este ejemplo, ya que no hemos establecido totalmente su significado. No obstante, estamos ahora en condiciones de desarrollar en términos más generales algunos de los conceptos usados en la programación matemática.

II. El modelo de producción en la programación matemática

El problema clásico en la economía es la utilización óptima de dos factores de producción, llamados convencionalmente capital y trabajo. En el análisis usual, el problema se formula concibiendo a los dos factores como



Gráfica 2. Gráfica de curvas de isocuantas.

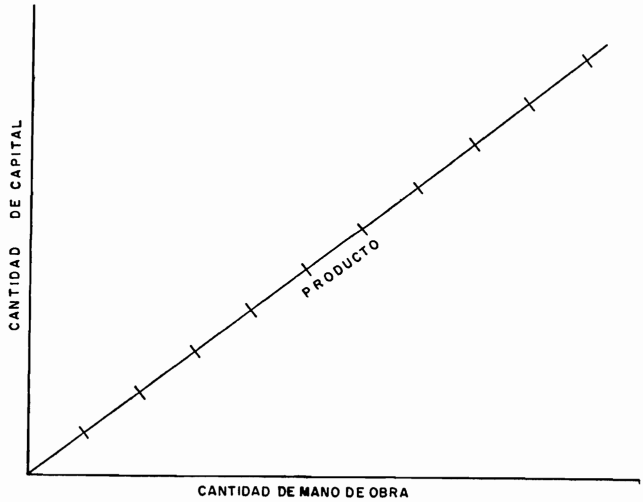
complementarios uno del otro de acuerdo con una función producción que determina la cantidad máxima de un producto que puede obtenerse mediante el uso de cantidades determinadas de los dos factores. Un método conveniente de representar dicha función producción es "la gráfica de curvas de isocuantas", en la forma que se destaca en la gráfica 2. En esta gráfica, que nos es tan familiar, las cantidades de trabajo se representan a lo largo del eje horizontal y las cantidades de capital a lo largo del eje vertical. Cada una de las curvas representadas en la gráfica corresponden a una cantidad determinada de producto, y las curvas más altas corresponden a cantidades cada vez mayores.

Si se conocen los precios por unidad de trabajo y capital, las combinaciones de trabajo y capital que pueden comprarse por un monto determinado de gastos puede representarse por una recta inclinada como CC'; la pendiente sólo depende de los precios relativos de ambos factores. Inmediatamente surgen dos interpretaciones. Primero, el costo mínimo unitario de producción representado por cualquier isocuanta puede lograrse empleando la combinación de trabajo y capital que corresponde al punto donde la isocuanta es una tangente a la línea del precio. Segundo, la mayor producción que puede obtenerse con un monto determinado de gasto está representado por la isocuanta que es tangente a la recta de precios correspondiente a ese gasto.

Esta gráfica, así como su análisis, descansa en el supuesto de que los dos factores son sustituibles en forma continua uno por el otro, de tal manera que si el volumen de trabajo empleado se reduce en una pequeña proporción, será posible mantener el mismo volumen de producción mediante sólo un *pequeño* incremento de la cantidad de capital empleado. Además, este análisis supone que cada decremento unitario sucesivo de trabajo requerirá de un incremento ligeramente mayor del volumen de capital, si es que ha de mantenerse constante el producto. En otra forma, las isocuantas no tendrán la pendiente necesaria.

Todo lo anterior ya es muy conocido. Sólo lo recordamos porque es necesario elaborar una gráfica análoga que es fundamental para la programación matemática. Sin embargo, veamos primero por qué se considera necesaria una nueva gráfica y un nuevo enfoque del problema.

Es muy probable que el modelo de producción que hemos bosquejado brevemente sea válido para ciertos tipos de producción. No obstante, este modelo está sujeto a serias objeciones para la mayoría de las industrias manufactureras y con mayor razón para aquellas en donde se emplea maquinaria complicada. La maquinaria moderna se caracteriza porque sólo trabaja eficientemente dentro de un limitado margen de velocidades y porque las cantidades de mano de obra, combustibles, materias primas y otros factores que ayudan en su funcionamiento están determinados en forma inflexible por las características técnicas de cada máquina. Además, en un momento determinado sólo se encuentra disponible un pequeño número de diferentes tipos de maquinaria para ejecutar un determinado trabajo. Unos cuantos ejemplos pueden aclarar este tipo de consideraciones. La tierra puede removerse a mano, con palas, con palas mecánicas de diesel o de vapor o con otro tipo de maquinaria pesada. Las palas mecánicas y los otros tipos de maquinaria pesada sólo se producen en una pequeña variedad de modelos, cada uno con características propias con respecto al consumo de combustible por hora, número de operadores y ayudantes que requieren, pies cúbicos de tierra que remueven por hora, etc. Una imprenta puede usar "tipos de caja", monotipos o linotipos. Nuevamente, sólo se dispone de unos cuantos modelos de cada máquina y cada una tiene su propio ritmo de operación, consumo de energía, requerimiento de espacio, y otras características esenciales inalterables. Un solo momento de reflexión nos hará recordar docenas de nuevos ejemplos: prensas, telares, movimiento de carga por ferrocarril o carretera, cálculos estadísticos o contables, refinado de metales, manufactura de metales, etc. Para muchas tareas de carácter económico el número de procesos disponibles es finito, y cada proceso puede considerarse inflexible con respecto a las relaciones que existen entre los insumos de factores y los procesos de productos. Los



Gráfica 3. Un proceso.

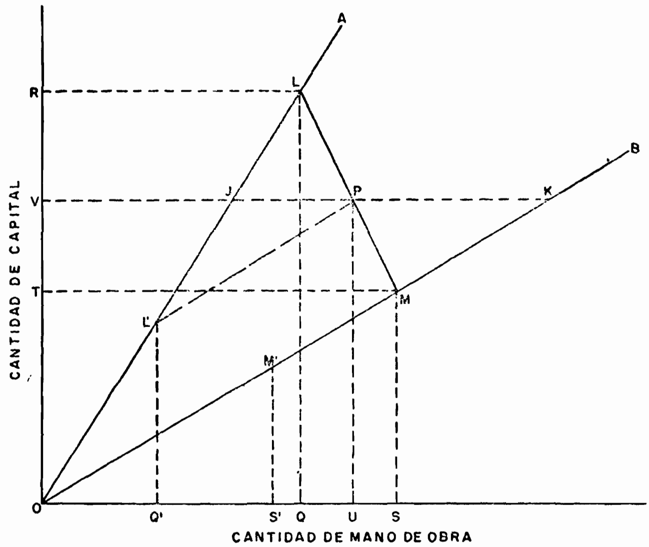
factores no pueden sustituirse uno por otro a menos que se cambien totalmente los niveles de los procesos técnicos que se usan, ya que cada proceso emplea sus factores en relaciones fijas que son características. Por consiguiente, en la programación matemática la sustitución de procesos desempeña un papel análogo a aquel de la sustitución de factores en el análisis convencional.

Desarrollaremos ahora una metodología para el análisis de la sustitución de procesos. Por conveniencia, limitaremos nuestro estudio a los procesos que consumen dos factores —capital y trabajo— y que elaboran un solo producto. La gráfica 3 representa un proceso semejante. En la gráfica 2, el eje horizontal representa las unidades de trabajo y el vertical las unidades de capital. El proceso está representado por la recta OA, trazada a escala en unidades de producto. A cada producto corresponde un volumen de mano de obra que se encuentra localizando la marca correspondiente en la recta, mediante la lectura hacia abajo. La cantidad de capital necesario se encuentra en la misma forma, leyendo hacia la izquierda de la marca en la recta de procesos. En forma similar, a cada cantidad de mano de obra corresponde una cantidad de producto, que se encuentra leyendo hacia arriba, y una cantidad de capital, que se encuentra leyendo horizontalmente desde el punto de producción. Debe observarse que el volumen de capital en esta gráfica es la cantidad usada en un proceso y no el volumen que es propiedad de una unidad económica; es el servicio de capital y no el capital mismo. Así, a pesar de que pueda combinarse una cantidad mayor o menor de trabajo en una máquina dada —empleándola en un número mayor o menor de horas— la relación de capital a insumos de mano de obra, esto es, la relación entre horas-máquina y horas-hombre, se considera tecnológicamente fija.

La gráfica 3 incorpora dos supuestos importantes. El hecho de que la línea OA sea recta implica que la relación entre el insumo de capital y el insumo de trabajo es el mismo para todos los niveles de producción y que está determinada, en realidad, por la pendiente de la recta. El hecho de que los puntos en la recta de producción estén a iguales distancias indica que no existen economías ni deseconomías a escala en el uso del proceso, es decir, que exigirá una estricta proporcionalidad entre la cantidad de producto y la calidad de cualquier insumo. Estos supuestos se justifican simplemente tomando como base la noción del proceso. Si el proceso puede emplearse una sola vez, también podría emplearse dos o más veces en tanto que el abastecimiento de factores lo permita. Dos linotipos con operadores igualmente diestros pueden producir el doble de composición que uno, en el plazo de una hora. Dos telares idénticos pueden entregar el doble de tela de algodón, en un mes, que uno solo. En la medida en que se encuentran disponibles los factores el proceso puede duplicarse. Por supuesto, la medida en que sea económica o no, es otro problema.

Si sólo existe a la disposición un solo proceso para llevar a cabo una tarea determinada, no hay mucho campo para la selección económica. Sin embargo, es frecuente que existan varios procesos. La gráfica 4 representa la situación en la que se dispone de dos procesos; el proceso *A* está indicado por la línea *OA* y el proceso *B* por la recta *OB*. Ya hemos indicado cómo deben interpretarse los puntos situados sobre las líneas *OA* y *OB*. Las escalas mediante las cuales se mide el producto en ambos rayos no son necesariamente las mismas. La escala de cada rayo refleja la productividad de los factores cuando se emplean en el proceso representado por el rayo y no tiene ninguna relación con la escala de producción de ningún otro rayo de proceso. Supongamos ahora que los puntos L y M representan la producción del mismo producto mediante los dos procesos. De este modo LM, la línea recta situada entre ellos, representará una isocuanta y cada punto sobre esta línea corresponderá a una combinación de los procesos A y B que dan lugar al mismo producto ya sea como OL unidades del proceso A o como OM unidades del proceso B.

Para observar este hecho consideremos cualquier punto P sobre la línea LM y tracemos una recta a través de P que sea paralela a OB. Marquemos con L' el punto en donde esta línea se intersecta a OA. Finalmente marquemos el punto M' sobre OB de manera que $OM' = L'P$.



GRÁFICA 4. Dos procesos.

Consideremos ahora el plan de producción que consiste en emplear el proceso A al nivel OL' y el proceso B al nivel OM'.[3] Es fácil observar que este plan de producción emplea OU unidades de mano de obra, en donde U es la coordenada de mano de obra del punto P y OV unidades de capital, en donde V es la coordenada del capital del punto P.[4]

Como las coordenadas del punto P corresponden a las cantidades de factores consumidos por OL' unidades del proceso A y OM' unidades del

[3] La alternativa sería trazar una recta a través del punto P, paralela a OA. Esta línea intersectaría OB en M'. Así pues, podríamos dejar OL' igual $M'P$ sobre OA. Esto nos conduciría exactamente al mismo resultado. La situación es semejante al "paralelogramo de fuerzas" de la física.

[4] Prueba: El proceso A al nivel OL' emplea OQ' unidades de mano de obra. El proceso B al nivel OM' emplea OS' unidades de mano de obra; y juntos emplean $OQ' + OS'$ unidades de mano de obra. Sin embargo, por la construcción, $L'P$ es igual y paralela a OM'. Así pues, $Q'U$ es igual a OS'. Por lo tanto, $OQ' + OS' = OQ' + Q'U = OU$ unidades de mano de obra. El argumento en relación con el capital es semejante.

proceso B, interpretamos P como la representación del plan combinado de producción compuesto por los niveles específicos de los dos procesos. Esta interpretación implica un importante supuesto económico, a saber, que si los dos procesos se emplean en forma simultánea no se interferirán ni mejorarán uno al otro, en tal forma que los insumos y productos resultantes del uso simultáneo de los dos procesos a cualquier nivel puedan encontrarse sumando los insumos y los productos de los procesos individuales.

Para demostrar que P descansa sobre la isocuanta que pasa a través de los puntos L y M sólo queda por demostrar que la suma de los productos que corresponden a los puntos L' y M' es igual al producto correspondiente al punto L o al punto M. Esto se desprende inmediatamente del hecho de que la producción correspondiente a cualquier punto del proceso sobre un rayo de proceso es directamente proporcional a la longitud del rayo hasta ese punto y que los triángulos $LL'P$ y LOM, en la gráfica 4, son semejantes.[5] Así pues, si tenemos dos rectas de procesos como OA y OB y encontramos sobre ellas los puntos L y M que representan la entrega del mismo producto a través de dos procesos diferentes, entonces el segmento de la recta que une los dos puntos de igual-producto, será una isocuanta.

Ahora podemos trazar la programación matemática, análoga a la gráfica familiar de isocuantas. La gráfica 5 es un diagrama de este tipo en que se representan cuatro rectas de procesos. El punto M representa un producto determinado mediante el uso del proceso A y los puntos L, K, J, representan la misma producción mediante los procesos B, C, D, respectivamente. La sucesión de segmentos que unen estos cuatro puntos es la isocuanta para esa misma producción. Es fácil observar que cualquiera otra sucesión de segmentos que sean paralelos respectivamente a los de $MLKJ$, es también una isocuanta. En la gráfica se muestran tres casos. Es instructivo comparar la gráfica 5 con la gráfica 2 y destacar la marcada semejanza que existe tanto en su apariencia como en su interpretación.

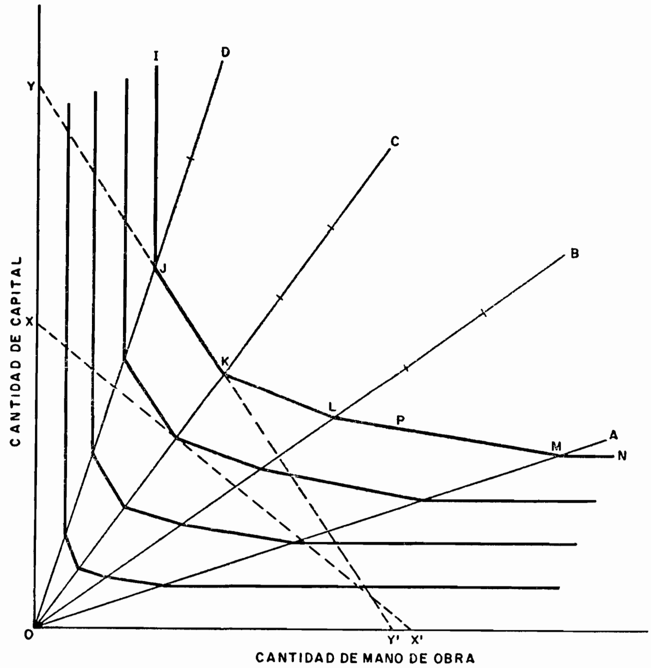
Podríamos trazar las líneas de precios en la gráfica 5 en la misma forma de la gráfica convencional de isocuantas. Las líneas punteadas XX' y YY' representan dos posibles rectas de precios. Consideremos primero XX'. En la forma en que está dibujada esta línea, el producto máximo con un gasto dado puede obtenerse empleando sólo el proceso C, y, por el contrario, el costo mínimo de un producto dado se obtiene también

5 Prueba: Permítasenos que el producto (X) denote el producto correspondiente a cualquier punto, X, en la gráfica. En esta forma, el producto (M')/producto (M) $= OM'/OM$ y el producto (L')/producto (L) $= OL'/OL$. Por hipótesis: el producto (L) $=$ producto (M). Así pues, el producto (M')/producto (L) $= OM'/OM$. Sumando tenemos:

$$\frac{\text{Producto } (M') + \text{Producto } (L')}{\text{Producto } (L)} = \frac{OM'}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'P}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'L}{OL} + \frac{OL'}{OL} = 1.$$

empleando sólo el proceso C. En esta forma por el régimen relativo de precios representado por XX′, el proceso C es el óptimo. La línea de precios YY′ se traza paralelamente al segmento de isocuanta JK. En este caso el proceso C sigue siendo óptimo, pero el proceso D también lo es en la misma forma que lo son cualquier combinación de los dos.

De la consideración de estas dos líneas de precios y de muchas otras, parece evidente que el programa óptimo de producción sólo pueda alcanzarse empleando un solo proceso, y que este proceso depende, por supuesto, de la pendiente de la línea de precio. Debiera destacarse, no obstante, que el criterio convencional de tangencia ya no es aplicable.



Gráfica 5. Cuatro procesos.

De la gráfica 5 se desprende que el plan óptimo desde el punto de vista económico nunca necesita emplear más de un solo proceso para cada uno de sus productos.[6] Esa conclusión es válida para el caso descrito, que suponía que los servicios de los dos factores podían procurarse en cualquier cantidad deseada y a precios relativos constantes. Este supuesto no es aplicable a muchos problemas económicos ni se emplea frecuentemente en la programación matemática. Por lo tanto, debemos considerar ahora las condiciones de la oferta de factores.

6 Recuérdese, sin embargo, que no hemos considerado ni la producción conjunta ni los efectos de las consideraciones del lado de la demanda.

III. La oferta de factores y los costos

En la programación matemática se acostumbra dividir todos los factores de la producción en dos grupos: factores ilimitados, que son los que están disponibles en cualquier cantidad deseada a un costo constante por unidad, y factores escasos o limitados, que pueden obtenerse a un costo constante por unidad hasta una cantidad máxima fija, y que no pueden obtenerse después de este límite. El ejemplo de los automóviles ilustra esta clasificación. En este caso, los cuatro tipos de capacidad se trataron como factores fijos disponibles a un costo variable igual a O; todos los otros factores se agruparon bajo el rubro de costos directos, los que fueron considerados constantes por unidad de producto.

El ejemplo de los automóviles demostró que esta clasificación de los factores es adecuada para expresar el problema de la maximización de una empresa que opera en un mercado de competencia. En el último apartado vimos que cuando todos los factores son ilimitados se puede utilizar esta formulación para encontrar el punto de costo medio mínimo.

Ambas aplicaciones descansaron en supuestos restrictivos y, además, en supuestos contrarios a los convencionalmente asentados en el estudio de la asignación de los recursos. En el análisis convencional señalamos que a medida que el nivel de producción de la empresa, de la industria o de la economía aumenta, también aumentan los costos unitarios medios después de cierto punto. El incremento en los costos medios es atribuible, en parte, a la operación de la ley de las proporciones variables,[7] que operan cuando aumentan los insumos de algunos de los factores de la producción, aunque no todos. Por lo que se refiere a los efectos de aumentar algunos insumos, aunque no todos, el contraste entre la programación matemática y el análisis marginal es más una cuestión de terminología que un problema de fondo. Una ojeada a la gráfica 4 mostrará cómo se manejan esos cambios en la programación matemática. El punto *J* de la gráfica 4 representa la producción de algún bien, sólo por el uso del proceso A. Si se desea incrementar la producción sin aumentar también el uso del capital, esto puede hacerse moviéndose hacia la derecha a lo largo de la línea punteada *JK*, ya que esta recta intersecta isocuantas sucesivamente más altas. Tal movimiento correspondería al uso creciente del proceso *B* y al empleo decreciente del proceso *A*; y así, indirectamente, a la sustitución de mano de obra por capital. Si suponemos además que el costo unitario de producción es menor para el proceso A que para el *B*, este movimiento también correspondería a un costo medio creciente de producción. Así pues, tanto el análisis marginal como la programación matemática conducen a la misma conclusión cuando se cambian las proporciones de los factores: si el cam-

[7] Véase J. M. Cassels, "On the Law of Variable Proportions", en W. Fellner y B. F. Haley, eds., *Readings in the Theory of Income Distribution* (Philadelphia, 1946), pp. 103-18.

bio se inicia a partir de un punto mínimo de costo, la sustitución conducirá gradualmente a costos unitarios crecientes.

Pero el cambio en las proporciones del insumo es sólo una cara de la medalla, de acuerdo con el análisis convencional. Si la producción ha de aumentarse, puede presentarse alguno de los tres resultados siguientes. Primero, sería posible incrementar el consumo de todos los insumos sin que se incurriera en un cambio en sus precios unitarios. En este caso, tanto la programación matemática como el análisis marginal están de acuerdo en que la producción aumentará sin que cambie la relación entre el volumen de los insumos y aumente el costo medio de producción.[8] Segundo, quizás no sea posible incrementar el uso de algunos de los insumos. Éste es el caso que acabamos de estudiar. De acuerdo con las dos formas de análisis, las relaciones de los insumos cambiarán en este caso y aumentarán los costos unitarios promedios. La única diferencia entre los dos enfoques es que si el costo medio ha de ser representado gráficamente en relación con el producto, el análisis marginal mostrará un panorama en que se observa una curva ligeramente ascendente en tanto que el análisis del especialista en programación matemática mostrará una línea quebrada compuesta de segmentos cada vez más empinados. Tercero, quizás sea posible incrementar el volumen de todos los insumos con la sola desventaja de que aumente el precio unitario o a costa de que se presenten deseconomías de escala. Este tercer caso ocurre en el análisis marginal. Es precisamente el caso que da a las curvas de costos a largo plazo su forma peculiar, aunque la programación matemática no presente un caso semejante.

La diferencia esencial y sustantiva a la que hemos llegado es que el análisis marginal concibe deseconomías técnicas y pecuniarias asociadas con cambios en escala en tanto que la programación matemática no tiene una concepción semejante.[9] Existen muchos problemas económicos importantes en donde los precios de los factores y las productividades no responden a los cambios en escala, o problemas en donde pueden hacerse a un lado tales variaciones. Por ejemplo, una gran parte de las investigaciones sobre la capacidad industrial son de este tipo. En tales estudios tratamos de obtener la producción máxima para una industria, considerando su activo físico como dado y suponiendo que los factores necesarios, junto con el equipo, pueden obtenerse en cantidades determinadas por las características del equipo. Los estudios de las necesidades de mano de obra son de este mismo tipo. En tales estudios consideramos tanto la produc-

[8] Véase F. H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit* (Boston, 1921), p. 98.

[9] Aun dentro de la estructura del análisis marginal el concepto de las deseconomías de escala ha sido criticado tanto en su base teórica como empírica. Los ejemplos de la crítica empírica pueden verse en Committee on Price Determination, Conference on Price Research, *Cost Behavior and Price Policy* (New York, 1943). La crítica teórica más completa puede verse en Piero Sraffa, "The Laws of Returns under Competitive Conditions", *Econ. Journal,* Dic. 1926, XXXVI, 535-50.

ción y el equipo como dados y estimamos la mano de obra necesaria para operar el equipo al nivel que permitirá obtener el producto deseado. Los estudios del empleo en condiciones de ocupación completa caen dentro del mismo esquema. En tales estudios determinamos de antemano la cantidad de cada factor considerando que la ocupación de cada uno de ellos es completa. Más tarde estimamos el producto óptimo susceptible de obtenerse por el uso de los factores, en las cantidades precisas.

Estos ejemplos son suficientes para demostrar que los supuestos asentados en la programación matemática pueden comprender una amplia variedad de importantes problemas económicos. Las aplicaciones más útiles de la programación matemática se relacionan probablemente con los problemas del tipo descrito, es decir, con los problemas que tratan de incrementar el plan óptimo de producción, empleando cantidades específicas de uno o todos los recursos que han de ser utilizados.

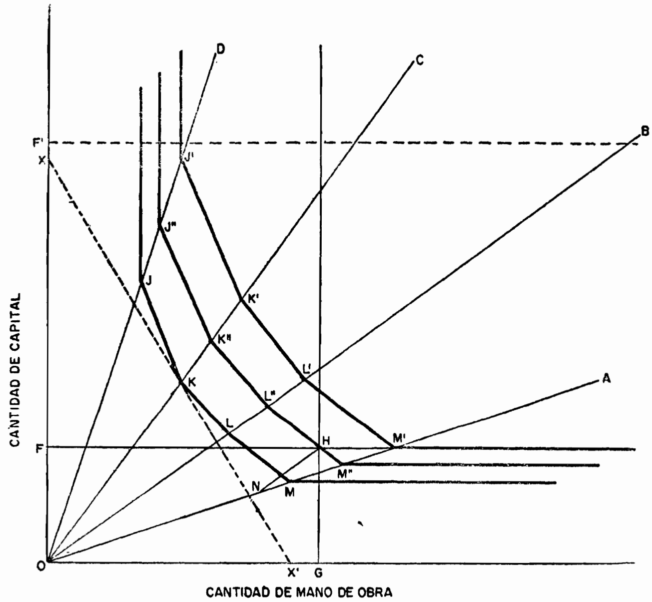
IV. El análisis de la producción con factores limitados

Las gráficas que hemos elaborado se adaptan al análisis de los efectos que trae consigo la oferta limitada de factores. Por supuesto, los límites representan el tema central de la gráfica 1, en donde las cuatro líneas principales representan las limitaciones en los niveles de los procesos que resultan de la escasez de los cuatro factores considerados. No obstante, la gráfica 1 no puede ser empleada cuando se trata de más de dos procesos. Cuando se trata de estos problemas tienen que usarse gráficas semejantes a la 3, 4 y 5.

La gráfica 6 señala la situación representada en la gráfica 5 aunque con algunas cifras adicionales que se explicarán más adelante. *OF* representa la cantidad máxima de capital que puede emplearse y, en consecuencia, muestra una limitación de factores. La línea horizontal que pasa por *F* divide la gráfica en dos partes: todos los puntos por encima de la línea corresponden a programas que requieren de más capital del que está disponible; los puntos que están en la línea y por abajo de ésta, representan los programas que no requieren de un exceso de capital. Esta línea horizontal se denominará recta de limitación de capital. Los puntos situados sobre ésta o por abajo de ella se denominarán "puntos factibles"; los puntos colocados arriba de la recta son los "no factibles".

La unidad económica representada en la gráfica 6 tiene la alternativa para operar en cualquier punto factible. Si su objetivo es la producción máxima escogerá un punto que descanse en la isocuanta más alta posible, es decir, la línea de isocuanta más alta que toque la recta de limitación del capital. Ésta es la isocuanta *J'K'L'M'*, y la producción más alta posible se obtiene mediante el empleo del proceso A.

Desde luego, es probable que el objetivo no sea obtener la máxima producción. Por ejemplo, el objetivo puede ser maximizar el exceso de valor del producto sobre los costos de mano de obra. A los excedentes de este tipo los llamaremos "valores netos". El mismo tipo de gráfica puede ser empleada para la resolución de un valor neto siempre que el valor de cada unidad de producción sea independiente del número de unidades producidas[10] y que el costo de cada unidad de trabajo sea constante en forma similar. Si se encuentran estos supuestos, cada punto en un rayo del proceso corresponderá a cierto producto físico, pero también a un cierto valor del producto, costo de la mano de obra, y valor neto del producto. Además, en cualquier rayo del proceso el valor neto del producto será igual al pro-



GRÁFICA 6. Cuatro procesos con limitaciones.

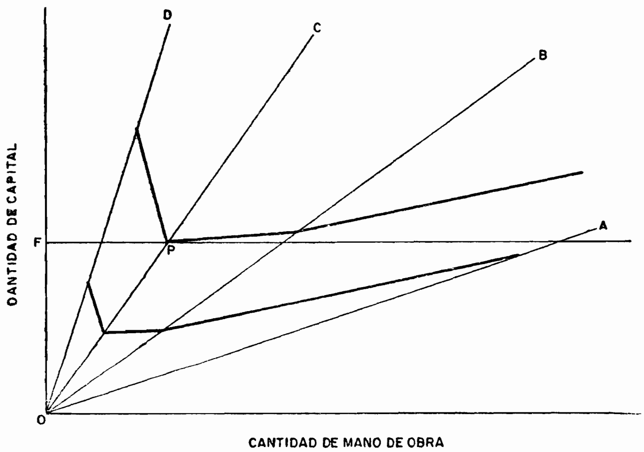
ducto físico multiplicado por el valor neto de cada unidad y, por eso, será proporcional al producto físico. Por lo tanto, podemos utilizar una gráfica semejante a la 6, aunque en este caso nos referimos al valor neto en lugar de la producción física, medido a lo largo de los rayos del proceso y mostramos una línea de isovalor en lugar de isocuantas. Esto es lo que se ha hecho en la gráfica 7, en la cual el valor neto máximo que es susceptible de obtenerse es el que corresponde al contorno de la línea de isovalor en el punto *P*, y se obtiene empleando el proceso *C*.

Debe subrayarse que tanto en las gráficas 6 como 7 el programa óptimo consistió en un solo proceso; que los cambios en el volumen de capital disponible no afectarían la designación del proceso óptimo aunque cam-

[10] Éste es un supuesto particularmente incómodo. Lo empleamos aquí para explicar el método en su forma menos complicada.

biarían su nivel, y que las líneas de precios que eran decisivas en la gráfica 1 no desempeñaron ningún papel importante en este caso.

La siguiente complicación, que será la última que consideremos, ocurre cuando suponemos que ambos factores tienen una oferta limitada. La gráfica 6 representa esta situación si se representa la línea vertical que pasa por el punto G en tal forma que indique una limitación de mano de obra. Por supuesto, el volumen disponible de mano de obra se representa por la longitud OG. Así pues, los puntos comprendidos dentro del rectángulo *OFGH* representan los programas que pueden llevarse adelante, ya que no requieren más que de la oferta disponible de cada uno de los factores. Éste es el rectángulo de los programas factibles. La mayor producción susceptible de obtenerse es la que corresponde a la isocuanta más alta que toca el rectángulo de los programas factibles. Ésta es la isocuanta *J″K″L″M″*, y además, como la isocuanta toca el rectángulo en el punto *H*, esta letra



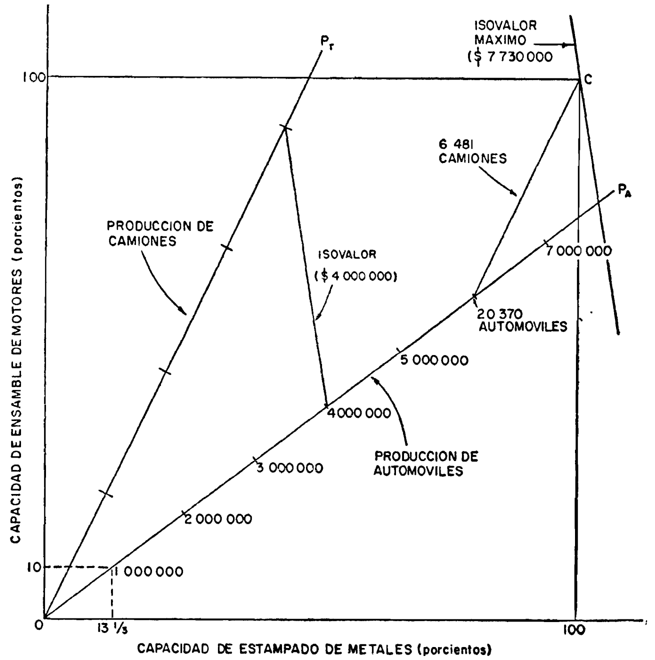
Gráfica 7. Cuatro procesos con líneas de isovalor.

representa el programa mediante el cual puede obtenerse la producción máxima.

Esta solución difiere de las anteriores en que el punto de solución no se encuentra en ningún rayo del proceso sino entre los rayos que representan los procesos *A* y *B*. Ya hemos visto que el punto semejante al *H* representa el empleo del proceso A al nivel *ON* y el proceso *B* al nivel *NH*.

Deben subrayarse dos observaciones con respecto a esta solución. Primero: con las rectas de limitación de factores así trazadas, la producción máxima requiere de dos procesos. Si las rectas de limitación de factores hubiesen sido trazadas para que intersectaran exactamente en uno de los rayos del proceso se habría requerido de un solo proceso. Si las rectas de limitación de factores hubieran cruzado a la izquierda del proceso D o a la derecha del proceso A, el plan de maximización de la producción hubiera requerido de un solo proceso. Pero cualquiera que sea la forma en que se tracen las líneas de limitación, se requieren cuanto más de dos procesos para maximizar la producción. Hemos llegado a una generalización importante: la producción máxima puede obtenerse siempre mediante el empleo de un número de procesos que no exceda al número de factores de oferta limitada, si este número es mayor que cero. Las conclusiones que obtuvimos de las gráficas 6 y 7 están de acuerdo con esta regla, y éste es uno de los teoremas básicos de la programación matemática.

Segundo: aunque cuanto más se requiere de dos procesos para obtener la producción máxima, la determinación de alguno de éstos depende



GRÁFICA 8. Ejemplo de un plan óptimo en la producción de automóviles.

de la ubicación de los límites de los factores. Como hemos visto, los procesos empleados para obtener el máximo producto fueron los procesos *A* y *B*. Si se dispusiera de algo más de capital, representado por la cantidad *OF′*, los procesos maximizadores hubieran sido los procesos *C* y *D*. Si dos factores son limitados, es la relación entre sus efectos en vez de las ofertas absolutas de cualquiera de los dos, lo que determina el proceso en la programación óptima. Esto contrasta con el caso en el que sólo un factor es limitado. Así como las consideraciones que determinan el conjunto óptimo de procesos son más complicadas cuando dos factores están limitados, con tres o más factores limitados las condiciones óptimas se hacen aún más complicadas y superan los límites de la intuición. Realmente es ésta la *raison d'être* del formidable método de la programación matemática.

Podemos concretar ahora estas consideraciones aplicándolas al ejemplo de los automóviles. Refiriéndola a la gráfica 1, observamos que el punto óptimo de producción C, toca las rectas de limitación del armado de motores y del estampado de metales, aunque esté situado por debajo de los límites para el armado de automóviles y del ensamblado de camiones. Las limitaciones de capacidad de armado de automóviles y camiones son inefectivas y pueden pasarse por alto. La situación en términos de los dos tipos limitantes de capacidad se muestran en la gráfica 8.

En la gráfica 8 el rayo P_a representa el proceso de la producción de automóviles y P_t el proceso de la producción de camiones. Estos dos procesos se pueden operar en cualquier combinación de niveles que no requieran el uso de más del 100 % de la capacidad de estampado de metales, o del armado de motores. En esta forma, el rectángulo de la gráfica es la zona de los programas factibles de producción. El programa óptimo de producción es aquel que está situado en la zona que corresponde a la más alta utilidad neta posible.[11] Por esto será útil trazar rectas de isobeneficio, como lo hicimos en la gráfica 7. Para hacerlo, consideraremos primero la producción de automóviles. Cada punto en P_a corresponde a la producción de un número determinado de automóviles al mes. Supongamos, por ejemplo, que la escala es tal que el punto *L* representa la producción de 3 333 automóviles al mes. Debe recordarse que cada automóvil ofrece un beneficio neto de $ 300.00. Por lo tanto, 3 333 automóviles ofrecerán un ingreso de $ 1 000 000. Por consiguiente, el punto *L* corresponde a un beneficio de $ 1 000 000 así como a una producción de 3 333 automóviles al mes. Como la producción de 3 333 automóviles requiere del 13 ½ % de la capacidad de estampado de metales y del 10 % de la capacidad de ensamblado de motores, las coordenadas del punto de beneficio neto de $ 1 000 000 en el punto P_a se establecen de inmediato. Por un razonamiento similar, el punto cuya coordenada representa el 26 ²/₃ % de la capacidad de estampado de metales y el 20 % de la capacidad de armado de motores es el punto de beneficio neto de $ 2 000 000 en P_a. De la misma manera se puede trazar el rayo entero y graduar las escalas en términos de beneficio neto; así mismo para P_t, el rayo de la producción de camiones. La gráfica se completa uniendo los puntos de $ 4 000 000 en las dos rectas del proceso con el propósito de mostrar la dirección de las rectas de isobeneficio.

11 Como puede suponerse que el objetivo de la empresa es obtener el máximo de beneficio y no la producción física máxima, podemos considerar la producción de automóviles y camiones como dos procesos alternativos para obtener un beneficio y no como dos procesos con productos diferentes.

El programa óptimo está situado en el punto C, donde se intersectan los dos límites de la capacidad, porque C descansa en la recta más alta de isobeneficio que toca la zona de lo factible. Pasando por el punto C hemos trazado una recta paralela a la línea de producción de camiones y tocando la recta de la producción de automóviles en el punto D. De acuerdo con nuestro razonamiento anterior, la longitud OD representa el beneficio neto para la producción de automóviles en el programa óptimo y la longitud DC representa el beneficio neto para los camiones. Si la longitud de estas líneas se considera a escala, el resultado, por supuesto, será igual al que se había encontrado anteriormente.

V. La imputación de valores a los factores

Acabamos de subrayar que el campo principal de aplicación de la programación matemática se relaciona con los problemas en donde la oferta de uno o más factores de la producción está limitada absolutamente. Tales escaseces son la génesis del valor en el análisis convencional, y generan también valores en la programación matemática. De hecho, en el análisis convencional la determinación de los productos y de los precios no son sino dos aspectos del mismo problema, el problema de la asignación óptima de los recursos escasos. Lo mismo es verdad en relación con la programación matemática.

Anteriormente hemos tratado a los precios sólo como datos que permiten determinar los costos directos de los procesos y el valor neto del producto. Pero no obstante los factores que limitan la producción también tienen valores, aunque no les hemos asignado precios hasta este momento. En este apartado observaremos que la solución de un problema de programación matemática asigna valores en forma implícita a los factores limitantes de la producción. Aún más, el problema implícito de los precios puede resolverse directamente y, cuando esto ocurre, constituye una solución al problema de la asignación óptima.

Consideremos el ejemplo de los automóviles y preguntémonos: ¿Cuánto vale para la empresa una unidad (1 %) de cada uno de los tipos de capacidad? La forma de aproximarse a la respuesta es similar, en esencia, al ya conocido análisis marginal. Con respecto a cada tipo de capacidad, calculamos en cuánto aumentarían las utilidades máximas si se agregara una unidad adicional, o en cuánto decrecerían si se suprimiera una unidad. Puesto que existe un exceso de capacidad en el armado de automóviles, ni la adición ni la substracción de una unidad de este tipo afectarían el programa óptimo de las utilidades netas máximas. De aquí que el valor de este tipo de análisis sea nulo. Tanto el análisis como el resultado para el armado de camiones es idéntico.

Así pues, encontramos que estos dos tipos de capacidad son bienes de los que puede disponerse con toda libertad. Esto no implica que no valga la pena que exista una línea de armado de automóviles, de la misma manera que, para tomar el ejemplo clásico, el hecho de que pueda disponerse del aire con toda libertad no significa que podamos prescindir de él. Sólo significa que no vale la pena aumentar el tipo de capacidad a ningún precio y que algunas unidades de este tipo pueden desecharse sin ninguna pérdida. La evaluación de los otros tipos de capacidad no es tan trivial. En la gráfica 9 se han puesto a escala los posibles valores en porciento de la capacidad de armado de motores en el eje horizontal y los valores en porciento de la capacidad del estampado se han puesto a escala a lo largo del eje vertical. Consideremos ahora cualquier par posible de valores: digamos, por ejemplo, que la capacidad de armado de motores tiene un valor de \$ 20 000 por unidad y que el estampado vale \$ 40 000. Este supuesto se representa en la gráfica por el punto A. Aplicando estos valores a las primeras cifras, los valores de la capacidad requerida para producir un automóvil son los siguientes: $(0.004 \times \$40\,000) + (0.003 \times \$20\,000) = 220$, cifra que está muy por abajo del valor de producción de un automóvil, o sean \$ 300.[12] De la misma manera, si la capacidad de ensamblado de motores vale \$ 60 000 porciento de capacidad y la capacidad del estampado se valúa en \$ 30 000 por unidad (punto *B*), el costo de los recursos escasos requeridos para producir un automóvil será exactamente igual al valor del producto. Efectivamente, ésta no es la única combinación de valores de los recursos que absorberán precisamente el valor del producto cuando los recursos se emplean en la producción de automóviles. En esta gráfica, la línea de la producción de automóviles, que pasa a través del punto B, es el localizado en todas esas combinaciones de valores. Se ha trazado también una línea similar para la producción de camiones, para representar todas las combinaciones de valores de los recursos para los cuales el valor total de los recursos empleados en producir camiones es igual al valor del producto. La intersección de estas dos líneas es evidentemente el único par de valores de los recursos para los cuales el costo marginal del recurso de producir un automóvil adicional es igual al valor neto de un automóvil, y lo mismo puede afirmarse en relación a los camiones. El par de valores puede encontrarse por medio de la representación gráfica, o bien, con mayor precisión, mediante el álgebra. Se observa que el 1 % de la capacidad de ensamblado de motores vale \$ 9 259 y 1 % de la capacidad del estampado de metales vale \$ 68 056.

A cada par de los valores para los dos tipos de capacidad corresponde un valor para toda la planta. Así al par de valores representado por el punto A corresponde un valor de la planta de $(100 \times \$20\,000) + (100 \times \$40\,000) = \$6\,000\,000$. Éste no es el único par de valores de los recur-

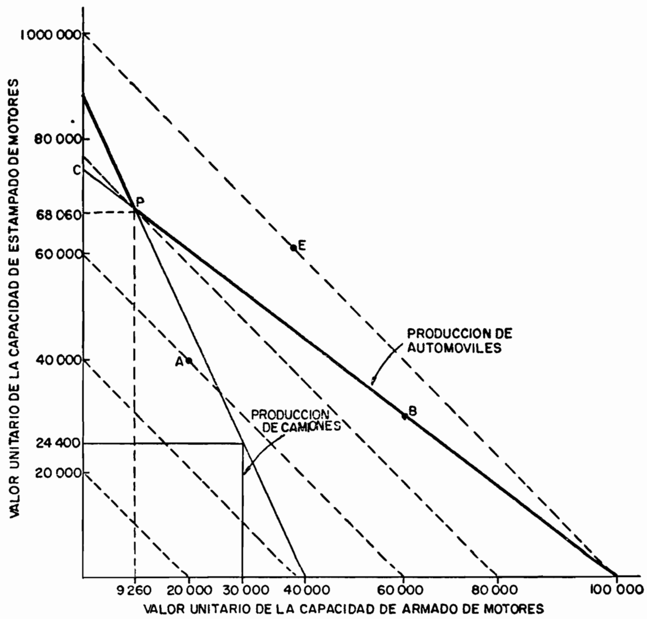
12 Estos valores unitarios son también valores marginales, ya que los costos de producción son constantes.

sos que pueden dar un valor total de $ 6 000 000 para la planta. En realidad, cualquier par de valores de los recursos sobre la línea punteada a través de A corresponde al mismo valor total de la planta (en esta etapa la gráfica 9 debería ser muy semejante a la gráfica 1). Hemos trazado varias rectas punteadas paralelas a la que acabamos de describir, correspondiendo cada una a un valor total específico de la planta. La línea punteada que pasa a través de la intersección de las dos líneas de producción tienen un interés particular. Ya sea a través de la medición o por cualquier otro método, puede encontrarse que esta línea corresponde a una planta con valor de $ 7 731 500, el cual, como podemos recordar, era el beneficio neto máximo que podía alcanzarse.

Consideremos ahora las implicaciones de asignar valores a los dos factores limitantes desde un punto de vista ligeramente diferente. Hemos visto que tan pronto como se le asignan valores unitarios a los factores, se le ha asignado un valor total a la planta. Podemos hacer que el valor total de la planta sea tan pequeño como queramos simplemente asignando valores suficientemente bajos a los diferentes factores. Pero si los valores asignados son demasiado bajos, obtendremos el resultado poco satisfactorio de que algunos procesos den lugar a excedentes no imputados. Por esto, podemos tratar de buscar el más bajo valor total que puede ser asignado a la planta y no tener aún un proceso que nos dé un excedente no imputado. En el caso de los automóviles, ese valor es de $ 7 731 500. En el proceso de encontrar el valor aceptable más bajo para la planta encontramos valores específicos para las unidades que deben asignársele a cada uno de los recursos. En este ejemplo hay dos procesos y cuatro recursos limitados. Resulta que sólo dos de los recursos son efectivamente limitantes y que existe una oferta relativamente amplia de todos los otros. En general, las características de la solución a un problema de programación dependen de la relación que exista entre el número de recursos limitados y el número de procesos que se tomen en consideración. Si, como en el caso presente, el número de recursos limitados excede al número de procesos, resultará normalmente que alguno de los recursos tendrá valores imputados iguales a cero y que un cierto número de recursos con valores imputados positivos serán iguales al número de procesos.[13] Si el número de recursos limitados es igual al número de procesos, todos los recursos tendrán valores positivos imputados. Finalmente, si el número de procesos excede al número de recursos limitados, no serán usados algunos de los procesos en el programa óptimo. Esta situación, que es la común y corriente, se ilustró en la gráfica 6. En este caso, el total de los valores imputados de los recursos absorbidos será igual al beneficio neto en algunos de los procesos y lo excederá en otros. El número de procesos para los cuales el

[13] Nos servimos de la palabra "generalmente" porque en algunas circunstancias especiales el número de recursos con valores positivos imputados puede exceder al número de procesos.

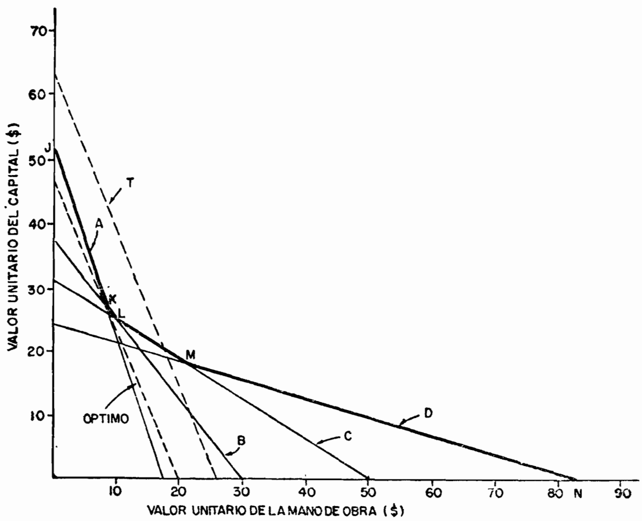
valor imputado de los recursos absorbidos es igual al beneficio neto será exactamente igual al número de recursos limitados y de procesos para los cuales se mantiene la igualdad; éstos son los que aparecen en los niveles positivos del programa óptimo. En resumen, la determinación del valor mínimo aceptable para la planta es lo mismo que para la determinación del programa óptimo de producción. El problema de la programación y el problema de la valuación no sólo están íntimamente relacionados sino que son esencialmente un mismo problema.



GRÁFICA 9. Ejemplo de automóviles con valores implícitos.

La afirmación anterior puede confirmarse mediante la comparación de las gráficas 1 y 9. Cada gráfica tiene dos ejes y dos rectas diagonales limitantes. No obstante, las rectas limitantes de la gráfica 9 se refieren a los mismos procesos que los ejes en la gráfica 1, y los ejes en la gráfica 9 se refieren a los mismos recursos que las rectas diagonales limitantes de la gráfica 1. Aún más, al servirnos de la gráfica 1 buscamos el beneficio neto correspondiente a la línea pendiente más alta tocada por la recta limitante; al servirnos de la gráfica 9 buscamos el valor agregado correspondiente a la recta punteada más baja que tiene cualquiera de los puntos fuera de la línea limitante, o que esté sobre ésta; a final de cuentas, los resultados son los mismos. Las dos gráficas y los problemas que ellas representan, para expresarlo formalmente, son una dualidad.

La característica de dualidad es una propiedad de mucha utilidad para la solución de los problemas de la programación matemática. La forma más simple de observar este hecho es subrayar que cuando nos enfrentamos a un problema de programación matemática tenemos la opción de resolver el problema directo o el problema dual; es decir, el que sea más sencillo. Cualquiera que sea el camino que sigamos los resultados serán los mismos. Podemos ahora servirnos de esta característica para generalizar un tanto nuestra discusión. Hasta ahora, cuando nos hemos ocupado de más de dos procesos, hemos tenido que hacer uso de gráficas relativamente complicadas, como la 6, porque las gráficas que son directamente representativas, como la 1, no tienen suficientes ejes para representar los niveles de los procesos. Ahora podemos emplear los diagramas indicados en la gráfica 9 para representar los problemas que tiene cualquier número de procesos, en tanto que no comprendan más de dos factores escasos. La grá-



Gráfica 10. El problema de valuación con cuatro procesos.

fica 10 nos muestra un diagrama para cuatro procesos; en realidad, esta gráfica ha sido obtenida de la gráfica 6. En la gráfica 10, la línea A representa todos los pares de valores de los factores, de tal manera que el proceso A no conducirá ni a una pérdida ni a una utilidad. Las líneas *B*, *C* y *D* deben interpretarse en forma similar. La línea punteada *T* es un "foco" en el que el valor total de la mano de obra y el capital disponible para la empresa (o industria) es constante. Su posición no es de importancia para el análisis; su pendiente, que es simplemente la relación que existe entre la cantidad disponible de mano de obra y la de capital, es todo lo que debe interesarnos. La línea quebrada *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, divide la gráfica en dos zonas. Todos los puntos que están sobre o por arrriba de ella representan pares de valores de recursos en los cuales ningún proceso puede dar lugar a un excedente no imputado. Llamémosla zona aceptable. Para cada punto situado por abajo de esa línea quebrada existe cuando menos un proceso que tiene un excedente no imputado. Ésta es la zona inaceptable. Entonces, tratemos de encontrar aquel punto dentro de la zona aceptable que corresponde al valor agregado más bajo de la planta. Por supuesto, este punto nos dará un conjunto de valores de recursos que harán la utilidad contable de la empresa tan grande como sea posible, sin dar lugar a ningún ingreso no imputado. El punto que llena estos requisitos es K y se ha trazado una línea punteada paralela a T, a través de él para indicar el valor agregado mínimo aceptable para la planta.

En el punto K los procesos A y B rinden utilidades iguales a cero, y los procesos C y D conducen a pérdidas. De aquí que los procesos A y B sean los que deban emplearse. Éste fue, exactamente, el mismo resultado encontrado en la gráfica 6. Desde luego, este diagrama no nos indica los niveles en los que debe emplearse A y B, de la misma manera que la gráfica 6 no nos indicaba las valuaciones que debían asignarse a los dos recursos. Pero la localización de los niveles, después de que se han seleccionado los procesos, es un problema relativamente trivial. Sólo es necesario encontrar los niveles que emplean totalmente a aquellos recursos que no están a la disposición con toda libertad. Esto puede lograrse algebraicamente o a través de un diagrama como el de la gráfica 8.

VI. Aplicaciones

En la primera parte de este trabajo afirmamos que el motivo principal de la programación matemática era la necesidad de disponer de un método de análisis que condujera por sí mismo a la solución práctica de los problemas diarios que encaran los negocios y la economía en general. Inmediatamente después nos ocupamos de un problema altamente artificial y en seguida de un estudio extenso de las relaciones abstractas y formales. A esta altura es necesario sentar las bases para indicar que la programación matemática es un método de análisis práctico.

La principal simplificación que se logra con la programación matemática es la sustitución del concepto de función-producción por el concepto de proceso. El proceso es una unidad de actividad que puede observarse fácilmente y las constantes empíricas que lo caracterizan pueden estimarse sin que sea necesario un análisis muy elaborado. Además, en muchas industrias la estructura de la producción corresponde a la operación de una sucesión de procesos, en la forma en que los hemos concebido. Muchas de las decisiones que se toman en la industria —parar un grupo de máquinas o trabajar turnos extras— corresponden a nuestro concepto de seleccionar el nivel de operación de un proceso. En suma, la programación matemática se diseña con base en la verdadera estructura de la producción, con la esperanza de que en esta forma comprenda sólo las constantes susceptibles de observar y controlar directamente.

¿Se ha justificado esta esperanza? La literatura indica que se dispone ya de una aplicación satisfactoria en la refinación de petróleo.[14] Yo mismo la he aplicado en forma semejante; quizá merecería referirse a ella. La aplicación de la técnica se llevó a cabo en una refinería pequeña, que produce gasolina de alto octanaje y de tipo medio para automóviles. La operación principal estudiada fue la mezcla. En esta operación se mezclan diez tipos químicos distintos de petróleo semirrefinado, llamados existencias de mezclas. Con ellos se obtiene una gasolina para la venta, cuyas características se acercan al promedio ponderado de los compuestos. Por ejemplo, si se mezclan 500 galones de gasolina de 80 octanos con 1 000 galones de gasolina de octanaje de 86, se obtienen $500 + 1\,000 = 1\,500$ galones de gasolina con octanaje de $(^1/_3 \times 80) + (^2/_3 \times 86) = 84$.

Para nuestros propósitos el aspecto importante de esta mezcla de gasolina es que las características más importantes de la mezcla —su grado de detonación, su presión de vapor, su contenido de azufre, etc.— pueden expresarse como funciones lineales de las diferentes cantidades de las mezclas empleadas, y también puede tratarse el costo de la mezcla si cada una de las existencias empleadas tiene un precio definido por galón.

Así, pues, el problema de encontrar la mezcla que tenga un costo mínimo que llene ciertos requisitos de calidad, es un problema de programación matemática.

Aún más, en esta refinería las cantidades de algunas de las existencias están limitadas precisamente por contratos y por la misma capacidad de refinación. El problema que se presenta entonces es el siguiente: ¿cuáles son las cantidades más ventajosas de producción de gasolina de alto octanaje y de octanaje regular, y cuáles son los volúmenes de cada mezcla que deben utilizarse para obtener cada uno de los productos finales? Este problema es análogo al ejemplo artificial de la producción de automóviles, aunque con la complicación adicional de las especificaciones de calidad. El problema es demasiado complicado para abordarlo a través del análisis gráfico, pero se resolvió fácilmente mediante un procedimiento aritmético. Hasta donde sabemos, la programación matemática ofrece el único método para resolver problemas de este tipo. Charnes y Cooper publicaron recientemente la solución a un problema similar que se presentó en la operación de una empresa metalúrgica.[15]

Un problema totalmente distinto, susceptible de resolver mediante la

[14] A. Charnes, W. W. Cooper y B. Mellon, "Blending Aviation Gasolines", *Econometrica*, abril de 1952, XX, 135-39.

[15] A. Charnes, W. W. Cooper y Donald Farry y asociados, "Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm", *Jour. Operations Research Society of America*, mayo de 1953, I, 114-29.

programación matemática, se presenta en la producción de papel para periódicos. El transporte es uno de los elementos más importantes en el costo de producción de este tipo de papel. Una gran compañía productora de papel tiene seis fábricas, ampliamente distribuidas en el Canadá, y alrededor de doscientos clientes, también difundidos ampliamente en los Estados Unidos. Su problema consiste en decidir el volumen de papel que debe surtir cada fábrica a cada uno de los clientes, para cumplir primero, en esta forma, con los requerimientos contratados por cada cliente; en segundo lugar, para mantenerse dentro de los límites de capacidad de cada fábrica y, tercero, para mantener el costo total de la carga en el punto mínimo posible. El problema comprende 1 200 variables (6 fábricas $\times$ 200 clientes), en contraste con los problemas de dos o cuatro variables que hemos estudiado.

En la solución final, la mayor parte de las variables toman valores iguales a cero, aunque el problema consiste en decidir cuáles son. El problema se soluciona mediante la programación matemática y, aunque es formidable, no lo es tanto como el número de variables parecería indicar.

Estas cuantas ilustraciones pueden ser suficientes para indicar que la programación matemática es una herramienta útil para la planeación de los negocios. También demuestran que se trata de una herramienta flexible, en virtud de que ambos ejemplos se alejaron del ejemplo utilizado en nuestra exposición. La aplicación en el caso del petróleo tenía la característica de la especificación de las calidades; en el caso del papel para periódico se presentaron límites en el volumen de la producción así como en las cantidades de los insumos. No obstante, la programación matemática los resolvió con facilidad.

Por otra parte, debe hacerse notar que las aplicaciones lo fueron en pequeña escala, ocupándose con una fase de operación de una sola empresa. Creo que en esto radica el éxito de todas las aplicaciones hasta la fecha. Las personas ocupadas en la programación matemática están todavía muy lejos de poder resolver los amplios problemas de la planeación de toda una industria o de toda la economía, aunque todos ellos son sólo versiones ampliadas de los problemas encarados y solucionados en el contexto de una sola empresa. No sería prematuro afirmar que la programación matemática ha probado su utilidad como una herramienta práctica para llegar a obtener programas económicos óptimos.

VII. Conclusión

Nuestro propósito con este trabajo sólo ha sido el de introducir las nociones básicas de la programación matemática, confiriéndoles plausibilidad y significado. El lector que trate de resolver un problema de programación

—por simple que sea— tendrá que acudir a otras fuentes,[16] aun cuando este trabajo puede servirle como un antecedente de utilidad.

Aun cuando se han excluido de esta exposición los métodos de solución, debemos señalar que son fundamentales para comprender totalmente el concepto de la programación matemática. Hace alrededor de ochenta años que Walras concibió la producción en forma muy semejante a la de las personas ocupadas en la programación matemática y, en fecha más reciente, A. Wald y J. von Neuman emplearon este concepto de la producción y los métodos estrechamente relacionados con la programación matemática para analizar las condiciones generales del equilibrio económico.[17] Estos trabajos, no obstante, deben considerarse meramente como precursores de la programación matemática. La programación matemática no tuvo una existencia independiente como método de análisis económico sino hasta 1947, cuando G. B. Dantzig dio a conocer el "método simplex" de solución que hizo posible la aplicación práctica.[18] La existencia de un método mediante el cual podía calcularse el óptimo económico estimuló la investigación hacia la interpretación económica de la programación matemática y condujo también al desarrollo de métodos alternativos de solución. El hecho de que los problemas económicos y de los negocios, cuando se formulan en términos de programación matemática, puedan resolverse en forma numérica, es la base de la importancia del método. En consecuencia, la omisión de métodos de solución en este trabajo no indica que se les atribuya un interés secundario.

Sólo hemos considerado unos cuantos conceptos empleados en la programación matemática y nos hemos ocupado de un solo tipo de problema de programación; sin embargo, las pocas nociones consideradas son las básicas y todo lo demás es una elaboración y ampliación de la programación matemática. Es aconsejable mencionar dos orientaciones de la elaboración, en virtud de que ellas superan o debilitan los dos supuestos restrictivos impuestos en este trabajo.

La primera de las ampliaciones es la introducción del tiempo en el análisis. El enfoque presente se ha ocupado de un solo período aislado de producción. Pero en muchos casos, están interrelacionados períodos su-

16 La referencia obligada es T. C. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation* (Nueva York, 1951). Los enfoques menos complicados se pueden encontrar en A. Charnes, W. W. Cooper y A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming* (Nueva York, 1953) y en mi trabajo *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm* (Berkeley, 1951).

17 La presentación de Walras se encuentra en *Éléments d'économie politique pure ou théorié de la richesse sociale*, 2ª edic. (Lausanna, 1889), Lección 20. Las contribuciones de A. Wald y J. von Neuman aparecieron originalmente en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Núms. 6, 7, 8. El trabajo más sencillo de Wald se publicó en *Zeitschrift für Nationalökonomie*, VII (1936) y ha sido traducido al inglés con el título de "On some Systems of Equations of Mathematical Economics", *Econometrica*, octubre, 1951, XIX, 368-403. El trabajo de von Neuman se tradujo con el título de "A Model of General Economic Equilibrium", y se publicó en *Rev. Econ. Stud.* 1945-46, XIII, 1-9.

18 G. B. Dantzig, "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", T. C. Koopmans, ed. *op. cit.*, pp 339-47

cesivos de producción. Éste es el caso, por ejemplo, cuando una empresa está integrada verticalmente y en donde la operación de algunos procesos en un período está limitada por los niveles de operación de los períodos precedentes que suministran las materias primas. Los métodos eficientes de análisis para los problemas "dinámicos" de este tipo han sido estudiados particularmente por George Dantzig.[19] Aunque el estudio de este trabajo ha sido estático, el método de análisis puede aplicarse a los problemas que tienen una dimensión temporal.

La segunda de las ampliaciones se relaciona con la consideración de los cambios en los precios de los factores y de los productos finales. En nuestro estudio consideramos los precios como inalterables e independientes de la unidad económica bajo consideración. Los precios constantes, indudablemente, son de gran conveniencia para el analista; pero el método puede superar este supuesto cuando sea necesario. La teoría matemática general que trabaja en condiciones de precios variables ha sido estudiada y se han desarrollado métodos prácticos de solución[20] para los problemas en donde las curvas de oferta y demanda son lineales.[21] El supuesto de los precios constantes, que es quizá el supuesto más restrictivo de todos, se adopta por conveniencia más que por necesidad.

La programación matemática se ha desarrollado como una herramienta para la programación económica y de los negocios y no fundamentalmente con propósitos descriptivos, y por ende predictivos, como los que dieron lugar al análisis marginal. En tanto que las empresas operen bajo las condiciones supuestas en la programación matemática, sería irracional suponer que han actuado bajo las condiciones supuestas por el análisis marginal. Por ejemplo, consideremos la empresa automovilística descrita en la gráfica 1. ¿Cuál sería su actitud si los precios de los automóviles disminuyeran en, digamos, 50 dólares por unidad? En tal caso el ingreso neto por automóvil sería de 250 dólares, es decir, igual a la utilidad neta que se obtiene por cada camión. Gráficamente, conduciría a una rotación de las rectas de igual beneficio hasta que su pendiente fuera de 45°. Después de la rotación, el punto C sería todavía el óptimo y el cambio en los precios no causaría ningún cambio en la producción óptima. Así pues, la programación matemática da lugar a una curva quebrada de oferta.

Por otra parte, supongamos que el precio de los automóviles aumentara en 50 dólares. En términos gráficos, el cambio de precios haría menor la pendiente de las rectas de igual beneficio hasta que llegaran a ser pa-

19 "A Note on a Dynamic Leontief Model with Substitution" (abstract), *Econometrica*, enero 1953, XXI, 179.

20 Véase H. W. Kuhn y A. W. Tucker, "Non-Linear Programming", en J. Neyman, ed. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, 1951), pp. 481-92.

21 Yo mismo presenté una solución a este problema en un seminario que se llevó a cabo en el Instituto de Tecnología de Massachusetts en septiembre de 1952. Es probable que se conozcan también otras soluciones.

ralelas a la recta de estampado de metales. En este caso la empresa estaría en una situación semejante a la ilustrada por la recta YY' de la gráfica 5. Los planes de producción correspondientes a los puntos en el segmento de la recta DC en la gráfica 1 ofrecerían el mismo beneficio neto y todos serían óptimos. Si los precios de los automóviles aumentaran en más de 50 dólares, o si el aumento de 50 dólares en el precio de los automóviles fuera acompañado por cualquier baja en el precio de los camiones, el punto óptimo de producción saltaría súbitamente del punto C al punto D.

Así pues, la programación matemática indica que las empresas cuyas posibilidades de elección son limitadas ante procesos distintos, responderán en forma discontinua ante las variaciones de precios: serán insensibles a los cambios de precios dentro de cierto margen y cambiarán sus niveles de producción tan pronto como se supere ese margen. Esta deducción teórica tiene seguramente su contrapartida en la realidad.

La programación matemática y la economía del bienestar están estrechamente relacionadas. La economía del bienestar estudia la organización óptima del esfuerzo económico y lo mismo puede afirmarse de la programación matemática. Estas relaciones han sido estudiadas especialmente por Koopmans y Samuelson.[22] El resultado de la investigación, expuesto en términos generales, indica que las condiciones de equilibrio de una economía perfectamente competitiva son iguales a la solución óptima de la programación matemática que comprende los mismos datos.

La programación matemática está estrechamente relacionada desde el punto de vista matemático al método del insumo-producto, o análisis interindustrial elaborado en gran medida por W. W. Leontief.[23] Aun cuando los dos métodos se desarrollan en forma independiente, es importante distinguirlos conceptualmente. El análisis del insumo-producto encuentra su aplicacación casi exclusivamente en el estudio del equilibrio económico general. Concibe a la economía dividida en cierto número de sectores industriales, cada uno de los cuales es análogo a un proceso, en la forma en que este término se emplea en la programación matemática. Puede tomar cualquiera de las dos formas siguientes: en los "modelos abiertos", el análisis del insumo-producto se inicia con cierta demanda final específica de los productos de cada uno de los sectores y estima el nivel en que debe operar cada uno de los procesos de los sectores con el propósito de satisfacer el cuadro de demandas finales; en los "modelos cerrados" no aparece la demanda final, aunque la atención se concentra sobre el hecho de que los insumos requeridos por cada proceso sectorial debe abastecerse como productos por otros sectores. En seguida, el análisis del insumo-producto

[22] T. C. Koopmans "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", en T. C. Koopmans, ed., *op. cit.*, pp. 33-97; P. A. Samuelson, "Market Mechanisms and Maximization" (trabajo preparado para la Rand Corp., 1949).

[23] W. W. Leontief. *The Structure of American Ecoonmy 1919-1939*, 2ª edic. (Nueva York, 1951).

estima un juego de niveles de producción mutuamente compatibles para cada uno de los sectores. En contraste con la programación matemática, las condiciones impuestas por el análisis del insumo-producto son suficientes para determinar los niveles de los procesos y no hay lugar para buscar una solución óptima o un conjunto de "mejores" niveles. Por cierto, el análisis del insumo-producto puede considerarse como un caso especial de la programación matemática, en el cual el número de productos es igual al número de procesos. Por otra parte, las limitaciones de las disponibilidades de recursos, que desempeñan un papel tan importante en la programación matemática, no se tratan en forma explícita en el análisis de insumo-producto. En general, parecería mejor reconocer a estas dos técnicas como métodos distintos, aunque complementarias, del análisis encaminado hacia problemas diferentes.

Así pues, la programación matemática es de importancia tanto para el pensamiento económico como para la planeación económica y de los negocios. En este trabajo sólo ha sido posible referirse a su importancia. En verdad, aparte de la exploración de las implicaciones que tiene para la economía del bienestar, hemos prestado muy poca atención a los efectos que tiene la programación matemática para la economía, en virtud de que la mayor parte de los esfuerzos se ha dedicado a resolver los numerosos problemas prácticos a que da lugar. La perspectiva señalada tiene el propósito de conducir a investigaciones fructíferas, tanto de las implicaciones como de las aplicaciones de la programación matemática.