UNIT - I
Determinants and Matrices
सारणिक और मैट्रिक्स

Elementary properties of determinants upto 3rd order, consistency of equations, Crammer's rule. Algebra of matrices, inverse of a matrix, matrix inverse method to solve a system of linear equations in three variables.

Part-1 : Determinant (सारणिक)

TOPICS

1. Determinant (सारणिक)
2. Rows and columns of a determinants (सारणिक की पंक्तियां तथा स्तम्भ)
3. Order of a determinant (सारणिक का क्रम)
4. Value of Determinant (सारणिक का मान)
5. Minor (उपसारणिक या लघुघटक)
6. Co-factor (सहखण्ड)
7. Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)
8. Multiplication of two determinants (दो सारणिको का गुणनफल)
9. Crammer's rule (क्रैमर का नियम)
10. Condition for Consistency (सुसंगत के प्रतिबन्ध)
11. Condition of Collinearity of three points (तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिवन्ध)

1. Determinant (सारणिक)

- किन्हीं दो या दो से अधिक समीकरणों के गुणांकों में सम्बन्ध को एक विशेष सारणी । । में निरूपित करना ही सारणिक कहलाता है।
  A special table to show the relationship between the coefficients of any two or more equations, Representing in | | is called determinant.

जैसे:-

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 0 \text{ ——— } (1) \quad \Rightarrow \quad ax = -by$$

$$\mathrm{cx} + \mathrm{dy} = 0 \text{ ——— } (2) \quad \Rightarrow \quad cx = -dy$$

भाग करने पर

$$\frac{a}{c} \asymp \frac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c \quad \Rightarrow \quad a \cdot d - b \cdot c$$

Determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Symbol of Determinant (सारणिक का चिन्ह)

$$| \qquad |$$

Represent of Determinant (सारणिक का निरूपण)

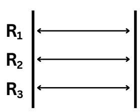
सारणिक को D or Δ से प्रस्तुत करते हैं।

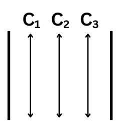
Elements of Determinant (सारणिक के अवयव या तत्व)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6 **में सभी सारणिक के** elements **हैं।**

2. Rows and columns of a determinant (सारणिक की पंक्तियां तथा स्तम्भ)





Row (पंक्ति) = Horizontal Lines (क्षैतिज रेखाएँ) **Column (स्तम्भ) = Vertical Lines (ऊर्ध्वाधर रेखाएँ)**

NOTE :-

- प्रत्येक Determinant (सारणिक) में Row की संख्या और Column की संख्या सदैव बराबर होती है।
  In every determinant, the number of rows and the number of columns are always equal.

3. Order of a determinant (सारणिक का क्रम)

- यदि किसी Determinant के Row की संख्या n तथा Column की संख्या n है तो n × n उस Determinant का order (क्रम) कहलाता है।
  If the number of rows of a determinant is n and the number of columns is n then n × n is called the order of that determinant.

order = no. of Rows X no. of Column

no. of elements (अवयवों की संख्या) = n^2

जैसे:- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}_{2\times 2}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}_{3\times 3}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}_{4\times 4}$

Determinant Possible है या नहीं

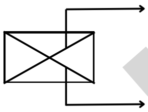
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}_{(2\times 3)}$ (x) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}_{(3\times 3)}$ (✓) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}_{(2\times 2)}$ (✓) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}_{(3\times 2)}$ (x)

4. Value of Determinant (सारणिक का मान)

सारणिक का विस्तार (Expansion of a determinant)

द्वितीय क्रम के सारणिक (second order determinant) :-

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.b - b.c$



Diagonal (विकर्ण)

Leading Diagonal (मुख्य विकर्ण)

जैसे:- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times 2$

$= 4 - 6$

$= -2$ Ans

(मुख्य विकर्ण के अवयव का गुणा) - (दूसरे विकर्ण के अवयव का गुणा)

Q. 1 :- D = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ Find the Value of D.

Sol. :- D = 12 - 10

= 2 Ans

तृतीय क्रम के सारणिक (Third order determinant):-

$R_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}_{(3\times 3)}$

R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 (b_2.c_3 - c_2.b_3) - b_1(a_2.c_3 - c_2.a_3) + c_1(a_2.b_3 - b_2.a_3)$

- Third order determinant का मान ज्ञात करने के लिए इसका प्रसार (Expansion) किसी भी Row या column के अनुदिश (Along) कर सकते हैं।

  To find the value of third order determinant, it can be expanded along any row or column.

Q. 2 :- सारणिक का मान ज्ञात कीजिए। (Find the Value of Determinant) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Sol. :-

$$R_1 \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$$0 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0\,(15 - 0) - 2\,(5 - 0) + 7\,(0 - 6)$

$= 0 - 10 - 42$

$= -52$ Ans

Q. 3 :- $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ सारणिक का मान ज्ञात करें। (Find the value of Determinant).

Sol. :- R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$$3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\,(-4 + 4) + 2\,(2 - 2) + 1\,(-2 + 2)$

$= 3\,(0) + 2\,(0) + 1\,(0)$

$= 0 + 0 + 0$

$= 0$ Ans

Q. 4 :- निम्नलिखित सारणिक का मान ज्ञात कीजिए। (Find the Value of following Determinant).

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Sol. :- R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$= 3\,(6 - 14) - 5\,(4 - 56) + 2\,(8 - 48)$

$= 3\,(-8) - 5\,(-52) + 2\,(-40)$

$= 24 + 260 - 80$

$= 260 - 104$

$= 156$ Ans

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Sol. :- R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$= 1\,(45 - 48) - 2\,(36 - 42) + 3\,(32 - 35)$

$= 1\,(-3) - 2\,(-6) + 3\,(-3)$

$= -3 + 12 - 9$

$= -12 + 12$

$= 0$ Ans

5. Minor (उपसारणिक या लघुघटक)

- किसी सारणिक के किसी अवयव से होकर जाने वाली पंक्ति तथा स्तम्भ को निकाल देने पर जो सारणिक प्राप्त होता है उसे उस अवयव का Minor (उपसारणिक या लघुघटक) कहते है।
  The determinant obtained by removing the row and column passing through any element of a determinant is called the minor of that element.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

a_1 का Minor = $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ c_2 का Minor = $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

a_2 का Minor = $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ b_3 का Minor = $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

6. Co - factors (सहखंड)

- किसी सारणिक के किसी अवयव का सहखंड उस अवयव के उपसारणिक में उचित चिन्ह (धन या ऋण) लगाने से प्राप्त होता है।
  The co - factor of any element of a determinant is obtained by applying appropriate sign (plus or minus) to the minor of that element.

$\boxed{(\text{Co-factors}) = (-1)^{(i+j)} \times \text{Minor}}$

i = Row

j = column

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- a_1 से होकर पहला Row and पहला ही column Pass हो रहा है।

  The first row and the first column are being passed through a_1.

  $i = 1 \qquad j = 1$

  (Co-factors) $= (-1)^{(i+j)}$. Minor

a_1 का Co-factor $= (-1)^{(1+1)} \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{(2)} . \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Q. 1 :- सारणिक में तत्व 3 और 4 के उपसारणिक या लघुघटक और तत्व 6 और 2 के सहखंड ज्ञात कीजिए।

Find the minors of the elements 3 and 4 and the Co-factor of the elements 6 and 2 in the determinant.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Sol. :- (i) 3 का Minor $= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 32 = -18$ Ans.

(ii) 4 का Minor $= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$ Ans.

(iii) 6 का Co - factor $= (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = +(35 - 0) = 35$ Ans.

(iv) 2 का Co - factor $= (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -(21 - 0) = -21$ Ans.

Properties of Determinant (सारणिक के गुणधर्म)

(1) यदि सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ का प्रत्येक अवयव शून्य है तो सारणिक का मान शून्य होता है।

If every element of any row or any column of a determinant is zero then the value of the determinant is zero.

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$

∵ इस सारणिक के तीसरे column के सभी अवयव Zero हैं

∴ इस सारणिक का मान (D) = 0

(ii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

∵ इस सारणिक के दूसरे Row के सभी अवयव Zero है

∴ D = 0

(2) यदि किसी सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ या कोई दो स्तम्भ सर्वसम (identical) हैं तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।

If any two rows or any two columns of a determinant are identical then the value of that determinant is zero.

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

∵ इसमें पहला और तीसरा column एक समान है।

∴ D = 0

(ii) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

∵ इसमें पहला और दूसरा Row एक समान है।

∴ D = 0

(2) यदि किसी सारणिक की सभी पंक्तियों को स्तम्भों में तथा सभी स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित कर दिया जाए तो उस सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

If all the rows of a determinant are converted into columns and all the columns are converted into rows, then there is no change in the value of that determinant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$R \longleftrightarrow C$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = D_2$$

(4) यदि किसी सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों या किन्हीं दो स्तम्भो को परस्पर बदल दिया जाए तो उस सारणिक के मान का चिन्ह बदल जाता है।

If any two rows or any two columns of a determinant are interchanged then the sign of the value of that determinant changes.

(i)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}$$

$$C_1 \longleftrightarrow C_3$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} x & b_1 & a_1 \\ y & b_2 & a_2 \\ z & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

(5) यदि सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो या दो से अधिक पदों का योगफल है तो सारणिक को उसी क्रम में दो या दो से अधिक सारणिक के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

If each element of any row or column of a determinant is the sum of two or more terms, then the determinant can be expressed as the sum of two or more tables in the same order.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + d_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 + d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

(6)

- यदि सारणिक की किसी एक ही पंक्ति या किसी एक ही स्तम्भ में कोई संख्या उभयनिष्ठ है तो उस संख्या को एक गुणनखण्ड के रूप में सारणिक से बाहर लिया जा सकता है।
  If any number is common in any one row or any one column of the determinant then that number can be taken out of the determinant as a factor.
- यदि सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को किसी अचर से गुणा किया जाए तो पूरे सारणिक को उस अचर से भाग कर देते हैं।
  If each element of any row or column of a determinant is multiplied by a constant, then the entire determinant is divided by that constant.

(i)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k.c_1 \\ a_2 & b_2 & k.c_2 \\ a_3 & b_3 & k.c_3 \end{vmatrix}$$

तीसरे column में k common है

$$= K.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसके R_1 में K से गुणा करने पर

$R_1 \longrightarrow K.R_1$

$$= \frac{1}{K}\begin{vmatrix} K.a_1 & K.b_1 & K.c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(7) यदि सारणिक को किसी एक पंक्ति या किसी एक स्तम्भ के सभी, अवयवों में किसी अचर से गुणा करके किसी अन्य पंक्ति या किसी अन्य स्तम्भ के संगत अवयवों में जोड़ा या घटा दिया जाए तो सारणिक का मान नहीं बदलता।

If all the elements of a row or a column of a determinant are multiplied by a constant and then added or subtracted to the corresponding elements of another row or another column, then the value of the determinant does not change.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \; R_1 \longrightarrow R_1 + K.R_2 \qquad \begin{vmatrix} a_1+K.b_1 & a_2+k.b_2 & a_3+k.b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Q. 1 :- In the determinant $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 12 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$, find minors of 7 and 3 and cofactors of 5 and 9.

Sol. :- **7 का Minor =** $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **= 36 - 12 = 24 Ans.**

3 का Minor = $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$ **= 32 - 84 = - 52 Ans.**

5 का cofactor = $(-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$ **= + (108 - 8) = 100 Ans.**

9 का cofactor = $(-1)^{(3+2)}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}$ **= - (48 - 60) = - (-12) = 12 Ans.**

Q. 2 :- Prove that $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$

Sol. :-

$R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$ $\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$ $\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

R_1 में से (a - b) तथा R_2 में से (b - c) common लेने पर -

$$= (a - b)(b - c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

C_1 के अनुदिश प्रसार

$$= (a - b)(b - c)[1(b + c - a - b)]$$

$$= (a - b)(b - c)(c - a) \quad \text{Proved}$$

Q. 3 :- Prove that the determinant $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx)$

Sol. :- $R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$ $\begin{vmatrix} x-y & x^2-y^2 & yz-zx \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$ $\begin{vmatrix} (x-y) & (x^2-y^2) & yz-zx \\ y-z & y^2-z^2 & zx-xy \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$

R_1 में से (x - y) & R_2 में से (y - z) Common लेने पर

$$=(x - y)(y - z)\begin{vmatrix} 1 & x+y & -z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x+y-y-z & -z+x \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x-z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$C_2 \longrightarrow C_2 - C_3$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-z \\ 1 & y+z+x & -x \\ z & z^2-xy & xy \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= (x - y) (y - z) [0 - 0 + (x - z)(z^2 - xy - yz - z^2 - xz)]$

$= (x - y) (y - z) [(x - z)(- xy - yz - xz)]$

$\boxed{= (x - y) (y - z) (z - x) (xy + yz + zx)}$ Proved

Q. 4 :- Without expanding, prove that $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$

Sol. :-

$$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$

$R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x-y & y+z-z-x \\ 1 & y & z+x \\ 1 & y & x+y \end{vmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x-y & y-x \\ 0 & y-z & z+x-x-y \\ 1 & y & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-y & -(x-y) \\ 0 & y-z & -(y-z) \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$

R_1 में से $(x - y)$ & R_2 में से $(y - z)$ Common लेने पर

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$

C_1 के अनुदिश प्रसार

$=(x - y) (y - z) [0 - 0 + 1 (-1 + 1)]$

$=(x - y) (y - z) (0) \quad = (0)$ Proved

Q. 5 :- Solve the equation $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

Sol. :-

$C_1 \longrightarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} (x+a+b+c) & b & c \\ (x+a+b+c) & x+b & c \\ (x+a+b+c) & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

$R_1 \longrightarrow R_1 - R_3$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & c-x-c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$$= (x + a + b + c)\ [- x\ (b - x - b)] = 0$$

$$= (x + a + b + c)\ (x^2) = 0$$

$\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = -(a + b + c)}$ **Ans.**

Q. 6 :- Find the roots of the equation $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$
(समी के मूल ज्ञात कीजिए)

Sol. :- $R_1 \longrightarrow R_1 - R_2$ & $R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 0 & -2-2x & 5-5x^2 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$$

C_1 के अनुदिश प्रसार

$$0 - 0 + 1\ (30 - 30x^2 + 30 + 30x) = 0$$

$$-30 - (x^2 - x - 1 - 1) = 0$$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$x(x - 2) + 1(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$\boxed{x = 2, -1}$ Ans.

Multiplication of two determinants (दो सारणिको का गुणनफल)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \& \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

तो $D_1 \times D_2 = ?$ Rule $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Rule by Row}}$

$$D_1 . D_2 = \begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) & (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2) & (a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3) \\ (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1) & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) & (a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3) \\ (a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1) & (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2) & (a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3) \end{vmatrix}$$

- प्रथम सारणिक D_1 की प्रथम पंक्ति के अवयवों को क्रमशः दूसरे सारणिक D_2 के प्रथम, द्वितीय व तृतीय पंक्ति के संगत अवयवों से गुणा करते है। इनके योग से $D_1 . D_2$ की प्रथम पंक्ति के अवयव प्राप्त होते है।
  The elements of the first row of the first determinant D_1 are multiplied with the corresponding elements of the first, second and third rows of the second determinant D_2 respectively. By their addition the elements of the first row of $D_1.D_2$ are obtained.
- इसी प्रकार D_1 के द्वितीय व तृतीय पंक्ति के अवयवों को क्रमशः D_2 के प्रथम, द्वितीय, तृतीय पंक्ति के संगत अवयवों से गुणा करके उनका योग लेने पर क्रमशः $D_1 . D_2$ के द्वितीय व तृतीय पंक्ति के अवयव प्राप्त किया जा सकते हैं।
  Similarly, by multiplying the second and third row elements of D_1 with the corresponding first, second and third row elements of D_2 and taking their sum, the second and third row elements of D_1 and D_2 can be obtained respectively.

Q. 6 :- If $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ And $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ then find $\Delta_1 \times \Delta_2$.

Trick $\longrightarrow$ Rule by Row

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} (3 + 8 + 6) & (9 + 8 + 0) & (6 + 16 + 6) \\ (1 + 0 + 18) & (3 + 0 + 0) & (2 + 0 + 18) \\ (2 + 12 + 3) & (6 + 12 + 0) & (4 + 24 + 3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 17 & 28 \\ 19 & 3 & 20 \\ 17 & 18 & 31 \end{vmatrix} \text{ Ans.}$$

SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS (रैखिक समीकरण निकाय)

Homogeneous and Non-Homogeneous Equations (समघात तथा असमघात रैखिक समीकरण निकाय):-

- यदि अचर पद शून्य हैं, तो समीकरण समघात समीकरण कहलाते हैं, अन्यथा वे असमघात समीकरण होते हैं।
  If the constant terms are zero, the equations are called homogeneous equations, otherwise they are non-homogeneous equations.

Homogeneous

$a_1x + b_1y + C_1z = 0 \longrightarrow (1)$

$a_2x + b_2y + C_2z = 0 \longrightarrow (2)$

$a_3x + b_3y + C_3z = 0 \longrightarrow (3)$

Non- Homogeneous

$a_1x + b_1y + C_1z = d_1 \longrightarrow (1)$

$a_2x + b_2y + C_2z = d_2 \longrightarrow (2)$

$a_3x + b_3y + C_3z = d_3 \longrightarrow (3)$

1. $4x + 5y + 3 = 0$ N
2. $x + y + z = 0$ H
3. $3x - 2y + 5 = 0$ N
4. $3y + 5x = 3z$ H
5. $2x - 5y - z - 1 = 0$ N
6. $-x - y = z$ H

Consistent and Inconsistent System of Equations (सुसंगत और असंगत समीकरण निकाय):

- समीकरणों की प्रणाली को सुसंगत कहा जाता है यदि इसका एक अद्वितीय हल होता है या इसमें अनंत कई हल होते हैं और यदि इसका कोई हल नहीं होता है तो इसे असंगत कहा जाता है।
  The system of equations is said to be consistent if it has a unique solution or it has infinite many solutions and called inconsistent if it has no solution.

Consistent Equations $\longrightarrow$ जिनका Solution (हल) होता है

In consistent Equations $\longrightarrow$ जिनका कोई Solution (हल) नहीं होता है।

Crammer's rule (क्रैमर का नियम)

- Crammer's Rule का प्रयोग Linear Equation System (रैखिक समीकरण निकाय) को Solve (हल) करने के लिए किया जाता है।
  Crammer's Rule is used to solve Linear Equation System.

यदि

$a_1x + b_1y + C_1z = d_1 \longrightarrow (1)$

$a_2x + b_2y + C_2z = d_2 \longrightarrow (2)$

$a_3x + b_3y + C_3z = d_3 \longrightarrow (3)$

Note :-

- क्रैमर नियम के लिए d_1, d_2, d_3 शून्य नहीं होना चाहिए। (अत: Non - Homogeneous Equation system होना चाहिए)
  For camber rule d_1, d_2, d_3 should not be zero. (Hence there should be Non-Homogeneous Equation system.

$a_1x + b_1y + C_1z = d_1 \longrightarrow (1)$

$a_2x + b_2y + C_2z = d_2 \longrightarrow (2)$

$a_3x + b_3y + C_3z = d_3 \longrightarrow (3)$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Sol. :- $\boxed{x = \frac{D_1}{D}}$ $\boxed{y = \frac{D_2}{D}}$ $\boxed{z = \frac{D_3}{D}}$

Q. 1 :- Solve the following equations using Cramer's rule.

$3x - 2y = 5$

$4x + y = 14$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 28 = 33$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 20 = 22$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{22}{11} = 2$$

$\boxed{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}}$ Ans.

Q. 2 :- Solve the following equations using Cramer's rule.
क्रैमर के नियम का उपयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल करें।

$x + 2y + 3z = 1 \longrightarrow (1)$

$2x + y - z = 2 \longrightarrow (2)$

$3x + 4y + z = 6 \longrightarrow (3)$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 1(1 + 4) - 2(2 + 3) + 3(8 - 3)$

$= 1(5) - 2(5) + 3(5)$

$= 5 - 10 + 15$

$= 10$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 1(1 + 4) - 2(2 + 6) + 3(8 - 6)$

$= 1(5) - 2(8) + 3(2)$

$= 5 - 16 + 6$

$= -5$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

= 1 (2 + 6) – 1 (2 + 3) + 3 (1 2 – 6)

= 1 (8) – 1 (5) + 3 (6)

= 8 – 5 + 1 8

= 2 1

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

= 1 (6 – 8) – 2 (1 2 – 6) + 1 (8 – 3)

= 1 (– 2) – 2 (6) + 1 (5)

= – 2 – 1 2 + 5

= – 9

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{21}{10}$$

$$z = \frac{D3}{D} = \frac{-9}{10}$$ **Ans.**

Q. 3 :- Solve the following equations using determinants
सारणिक का उपयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल करें

2x + 3y = 5 ⟶ (1)
6x + 9y = 15 ⟶ (2)

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 15 \times 3 = 45 - 45 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 2 \times 15 - 6 \times 5 = 30 - 30 = 0$$

Let $y = k$

समी (1) से

$$2x + 3k = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3k \Rightarrow x = \frac{5 - 3k}{2}$$ **यहाँ** **k = 1, 2, 3, 4,......................∞**

$\because \quad D = D_1 = D_2 = 0$

$\therefore$ **इन समीकरणों के या अनन्त हल (infinite Solution) या फिर कोई हल नहीं होगा।**

For $k = 1$:

$$y = 1$$

$$x = \frac{5 - 3 \times 1}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(x, y) = (1, 1)$$

For $k = 2$:

$$y = 2$$

$$x = \frac{5 - 3 \times 2}{2} = \frac{5-6}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

इसी प्रकार K के अनन्त मानों के लिए x & y के अनन्त हल (Infinite Solution) होंगे।

Q. 4 :- Show that equations 4x + 6y = 14 and 12x + 18y = 32 are in constant.
दिखाइए कि समीकरण असंगत है।

Sol. :- $4x + 6y = 14$ .... (1)

$12x + 18y = 32$ ....(2)

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 4 \cdot 18 - 6 \cdot 12 = 72 - 72 = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 32 & 18 \end{vmatrix} = 14 \cdot 18 - 6 \cdot 32 = 252 - 192 = 60$$

$$\because \quad D = 0 \quad \& \quad D_1 \neq 0$$

$\therefore$ "इसका कोई हल नहीं होगा।" (This will have no solution.)

Q. 5 :- Solve the following equations

$x + y + z = 1$

$x + 2y + 3z = 4$

$x + 3y + 5z = 7$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

1(10-9)-1(5-3)+1(3-2)
= 1(1)-1(2)+1(1)
=1-2+1
=2-2
=0

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

=1(10-9)-1(20-21)+1(12-14)
=1(1)-1(-1)+1(-2)
=1+1-2
=0

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

=1(20-21)-1(5-3)+1(7-4)

=1(-1)-1(2)+1(3)

=-1-2+3

=0

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

= 1(14-12)-1(7-4)+1(3-2)

= 1(2)-1(3) +1(1)

= 2−3+1

= 3-3 =0

$\because$ **$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$**

$\therefore$ इसके या तो कोई हल नहीं होगा या अनन्त हल होगा (Either no solution or infinite Solution)

1. $x + y + z = 1$ ...... (1)
2. $x + 2y + 3z = 4$ ...... (2)
3. $x + 3y + 5z = 7$ ...... (3)

Let $z = k$

$x + y + k = 1$ ...... (1)

$x + 2y + 3k = 4$ ...... (2)

Subtracting (1') from (2):

$$\begin{array}{r} (x + y + k) = 1 \\ (x + 2y + 3k) = 4 \\ - \quad - \quad - \qquad - \\ \hline -y - 2k = -3 \end{array}$$

$$-2k + 3 = y$$

$$\boxed{y = 3 - 2k}$$

Put in Eq(1) $x + (3 - 2k) + k = 1$

$$x + 3 - k = 1$$

$$\boxed{x = k - 2}$$

x, y, z के मान समी में

L.H.S. $(k - 2) + 3(3 - 2k) + 5k$

$$= k - 2 + 9 - 6k + 5k$$

$$= 6k + 7 - 6k$$

$$= 7 = \text{R.H.S.}$$

Equation System having infinite Solutions (समीकरण निकार्य के अनन्त हल होगे।)

$\boxed{x = K - 2}$ $\boxed{y = 3 - 2k}$ $\boxed{z = k}$

K = 1, 2, 3, 4,................. ∞ रखने पर

K = 1 पर	K = 2 पर
$x = 1 - 2 = -1$	$x = 2 - 2 = 0$
$y = 3 - 2 \times 1 = 1$	$y = 3 - 2 \times 2 = -1$
$z = 1$	$z = 2$

इसी प्रकार अनन्त हल होंगे।

Solutions of Homogeneous Linear Equations (समघात रैखिक समीकरणों के हल)

$$a_1x + b_1y + C_1z = 0 \longrightarrow (1)$$
$$a_2x + b_2y + C_2z = 0 \longrightarrow (2)$$
$$a_3x + b_3y + C_3z = 0 \longrightarrow (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

(i) यदि D ≠ 0 तो

- इसका अद्वितीय हल (Unique Solution) होगा जिसे Trivial Solution (ट्रीवियल हल) कहते हैं।

$\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = 0}$ $\boxed{z = 0}$

(ii) यदि D = 0 तो

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

- इस condition में या तो इसका कोई solution नहीं होगा या फिर अनन्त हल होंगे |

इसके लिए z = k मानकर करेंगे |

Q. 1 :- समघात समीकरणों को हल कीजिए (Solve the following homogeneous equations)

$$3x - 4y + 5z = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$
$$2x + 3y + z = 0$$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3\,(1 + 6) + 4\,(1 + 4) + 5\,(3 - 2)$

$= 3\,(7) + 4\,(5) + 5\,(1)$

$= 21 + 20 + 5$

$= 46 \neq 0$

$\because D \neq 0$ तो

इसका unique Solution होगा, जिसे Trivial solution कहते हैं।

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$ Ans.

Q. 2 :- निम्न समघात समीकरणों को हल कीजिए। (Solve the following homogeneous equations)

$3x + y + z = 0 \longrightarrow (1)$

$x - 4y + 3z = 0 \longrightarrow (2)$

$2x + 5y - 2z = 0 \longrightarrow (3)$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 3(8 - 15) - 1(-2 - 6) + 1(5 + 8)$

$= 3(-7) - 1(-8) + 1(13)$

$= -21 + 8 + 13$

$= -21 + 21$

$= 0$

$\because D = 0$

अतः $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$

इसका या तो कोई हल नहीं होगा या फिर अनन्त हल होंगे। (No Solution or infinite Solution)

माना $z = K$

$\mathbf{3x + y + k = 0 \longrightarrow (1)}$

$\mathbf{x - 4y + 3K = 0 \longrightarrow (2)}$

समीकरण (1) - 3 × समीकरण (2)

$$3x + y + k = 0$$
$$\underset{-}{3x} \underset{+}{-} 12y \underset{-}{+} 9k = 0$$
$$\overline{\quad 13y - 8k = 0 \quad}$$

$\boxed{y = \dfrac{8k}{13}}$ **Put in (1)**

$$3x + \frac{8k}{13} + k = 0 \Rightarrow 3x + \frac{8k + 13k}{13} = 0 \Rightarrow 3x + \frac{21k}{13} = 0 \Rightarrow x = -\frac{7k}{13}$$

$x = -\dfrac{7k}{13}, \quad y = \dfrac{8k}{13}, \quad z = k$ समीकरण (3) में रखने पर

$$\text{L.H.S.} = 2\left(-\frac{7k}{13}\right) + 5\left(\frac{8k}{13}\right) - 2k = \frac{-14k + 40k - 26k}{13} = \frac{0}{13} = 0$$

L.H.S. = R.H.S.

अनन्त हल (infinite solutions) होंगे।

$$x = -\frac{7k}{13}, \quad y = \frac{8k}{13}, \quad z = k$$

K = 1, 2, 3, 4,................ ∞ रखने पर

K = 1 रखने पर

$$x = \frac{-7}{13}$$

$$y = \frac{8}{13}$$

$$z = 1$$

K = 2 रखने पर

$$x = \frac{-14}{13}$$

$$y = \frac{16}{13}$$

$$z = 2$$

इसी प्रकार अनन्त हल होगे।

Condition for Consistency (सुसंगत के प्रतिबन्ध)

- **समीकरण निकाय के सुसंगत के प्रतिबन्ध (Condition for consistency of Equation System)**

$a_1x + b_1y + C_1z = d_1 \longrightarrow$ (1)

$a_2x + b_2y + C_2z = d_2 \longrightarrow$ (2)

$a_3x + b_3y + C_3z = d_3 \longrightarrow$ (3)

(i) यदि D ≠ 0 तो दिया हुआ समीकरण निकाय (Equation System) संगत (consistent) होगा। तथा इसका अद्वितीय हल (unique Solution)होगा।

$$x = \frac{D_1}{D} \qquad y = \frac{D_2}{D} \qquad z = \frac{D_3}{D}$$

(ii) यदि D = 0 तथा D_1, D_2, D_3 में से कम से कम कोई भी एक Zero नहीं है तो समीकरण निकाय (Equation System) असंगत (Inconsistent) होगा ।

(iii) यदि $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ तो समीकरण निकाय (Equation system) संगत (consistent) भी हो सकता या असंगत (Inconsistent) भी हो सकता है।

इसके लिए z = K मानकर check करते हैं।

- पहले दोनों समीकरण से x, y का मान निकालकर समीकरण में रखने पर यदि समीकरण (3) को संतुष्ट करे तो Equation system संगत (consistent) होगा जिसके अनन्त हल (Infinite Solution) होंगे।
- और यदि संतुष्ट न करें तो समीकरण निकाय असंगत (inconsistent) होगा।

Q. 1 :- Cramer Rule से सिद्ध करो (Prove that) निम्न समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

$x + 4y - 2z = 3 \longrightarrow (1)$

$3x + y + 5z = 7 \longrightarrow (2)$

$2x + 3y + z = 5 \longrightarrow (3)$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 1(1-15)-4(3-10)-2(9-2)$

$= 1(-14)-4(-7)-2(7)$

$= -14+28-14$

$= -28+28$

$= 0$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= -3(1-15)-4(7-25) -2 (21-5)$

$= 3(-14)-4(-18)-2(16)$

$= -42+72-32$

$= -74+72$

$= -2 \neq 0$

$\because$ **$D = 0$ & $D_1 \neq 0$**

इसका कोई Solution नहीं होगा।

Q. 2 :- सिद्ध करो कि दिये गये समीकरण निकाय असंगत है।

(Prove that following given Equation Systems are inconsistent)

$x - 3y + 2z = 4 \longrightarrow (1)$

$2x + y - 3z = -2 \longrightarrow (2)$

$4x - 5y + z = 5 \longrightarrow (3)$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 1(1-15)+3(2+2)+2(-10-4)$

$= 1(-14)+3(14) +2(-14)$

$= -14 +42-28$

$= -42+42$

$= 0$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 4(1-15)+3(-2+15)+2(10-5)$

$= 4(-14)+3(13) +2(5)$

$= -56+39+10$

$= -56+49$

$= -7 \neq 0$

$\because$ **$D = 0$ & $D_1 \neq 0$**

असंगत (Inconsistent) होगा।

Q. 3 :- दिखाइए कि समीकरण निकाय असंगत (Inconsistent) है ।

$2x - y + 3z = 4 \longrightarrow (1)$

$4x - 2y + 6z = 8 \longrightarrow (2)$

$2x - y + 3z = 5 \longrightarrow (3)$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 2(-6+6)+1(12-12)+3(-4+4)$

$= 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 4(-6+6)+1(24-30)+3(-8+10)$

$= 0+1(-6)+3(2)$

$= -6+6$

$= 0$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 2(24-30)-4(12-12)+3(20-16)$

$= 2(-6)-0+3(4)$

$= -12 +12$

$= 0$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 2(-10+8)+1(20-16)+4(-4+4)$

$= 2(-2)+1(4) +0$

$= -4+4$

$= 0$

$\because$ **$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$**

तो संगत भी हो सकता या असंगत भी हो सकता है -

माना z = K

$2x - y + 3k = 4 \quad (1)$ $\qquad$ $2x - y = 4 - 3K \longrightarrow (1)$

$4x - 2y + 6k = 8 \quad (2)$ **या** $\qquad$ $2x - y = 4 - 3K \longrightarrow (2)$

$2x - y + 3k = 5 \quad (3)$ $\qquad$ $2x - y = 5 - 3K \longrightarrow (3)$

उपरोक्त सभी (1), (2) & (3) समान्तर रेखाओं को प्रदर्शित करती है। इनका कोई हल (Solution) होगा

$\therefore$ **समीकरण निकाय असंगत (Inconsistent)होगा**

Matrices (मैट्रिक्स)

TOPICS

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)
2 Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)
   - (i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर (Column Matrix or Column Vector)
   - (ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर (Row Matrix or Row Vector)
   - (iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)
   - (iv) सिंगुलर तथा नान-सिंगुलर आव्यूह (Singular and Non-singular Matrices)
   - (v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices)
   - (vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)
   - (vii) अदिश-आव्यूह (Scalar Matrix)
   - (viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix)
   - (ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices)
   - (x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)
   - (xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix)
   - (xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix)

3. आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)
   - (i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)
   - (ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)
   - (iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)
   - (iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)
5.आव्यूह के सह - गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)
6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)
7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix)
8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
   (To solve a system of Linear Equations by Matrix Method))

1. Definition of Matrix (आव्यूह की परिभाषा)

- m. n संख्याओं के निकाय (system) को m पंक्तियों (rows) तथा n स्तम्भों (columns) में व्यवस्थित (arrange) कर तथा ब्रेकेट में बन्द करने पर, प्राप्त लम्ब सारिणी (rectangular array) को m × n क्रम (order m × n) का आव्यूह (matrix) कहते हैं।
  By arranging a system of m × n numbers in m rows and n columns and enclosing them in brackets, the rectangular array obtained is called a matrix of order m × n.

(i) क्षैतिज रेखाएं (Horizontal Lines) = पंक्ति (Row)

(ii) ऊर्ध्वाधर रेखाएं (Vertical Lines) = स्तम्भ (column)

(iii) पंक्ति की संख्या (No. of Row) m = 2

(iv) स्तम्भ की संख्या (No of Column) n = 3

जैसे:-

Column (स्तम्भ)

Row (पंक्ति) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{(2 \times 3)}$ (m × n)

Order of a matrix (आव्यूह का क्रम) :-

Order = पंक्ति की संख्या (No. of Row) × स्तम्भ की संख्या (No of Column)

Order = m × n

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{(1 \times 5)}$

Elements of matrix (आव्यूह के अवयव) :-

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$

Represent (निरुपण) = $\boxed{a_{ij}}$

Row Column

जैसे :- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a_{13} = 1$, $a_{22} = 3$

a_{31} = not Possible

Element a_{23} का मान = 9

a_{31} का मान = 4

2. Types of Matrices (आव्यूहों के प्रकार)

(i) स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ वेक्टर
(Column Matrix or Column Vector) :-

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (m \times n)$$

- No. of column (स्तम्भ की सं०) = 1
- No. of Row (पंक्ति की सं०) > 1
- Order (क्रम) = m × 1

(ii) पंक्ति आव्यूह या पंक्ति वेक्टर
(Row Matrix or Row Vector) :-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{(1 \times 5)} \quad (m \times n)$$

- No. of Row (पंक्ति की सं०) = 1
- No. of column (स्तम्भ की सं०) > 1
- Order (क्रम) = 1 × n

(iii) वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

- No. of Row (पंक्ति की सं०) = No. of column (स्तम्भ की सं०)
- Order (क्रम) = m × m or n × n

Determinant of a matrix (आव्यूह का सारणिक) :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

- केवल square matrix के सारणिक का ही मान ज्ञात कर सकते हैं।

Determinant (सारणिक) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}_{(2 \times 2)}$

$$= (1 \times 4 - 2 \times 3) = -2$$

(iv) सिंगुलर तथा नान - सिंगुलर आव्यूह
(Singular and Non-singular Matrices) :-

- जिस Matrix के Determinant (सारणिक) का मान Zero हो उसे Singular matrix कहते हैं।

$$\boxed{|A| = 0} \longrightarrow \text{Singular matrix}$$

- जिस matrix के Determinant (सारणिक) का मान Zero न हो, उसे Non - Singular matrix कहते हैं।

$$\boxed{|A| \neq 0} \longrightarrow \text{Non - Singular matrix}$$

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Sol. :-

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 1(45-48)-2(36-42)+3(32-35)$

$= 1(-3)-2(-6)+3(-3)$

$= -3+12-9$

$= -12+12$

$= 0$

$\because \quad |A| = 0$

$\therefore$ matrix A → Singular matrix

2.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sol. :-

$$B = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 20-24$

$= -4 \neq 0$

$\because \quad |B| \neq 0$

$\therefore$ matrix B → Non - Singular

(v) क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Horizontal and Vertical Matrices) :-

(1) Horizontal matrix (क्षैतिज आव्यूह)

No. of Row (पंक्ति की सं०) < No. of column (स्तम्भ की सं०)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

(2 × 5)
(m × n)

(2) vertical matrix (ऊर्ध्वाधर आव्यूह)

No. of Row (पंक्ति की सं०) > No. of column (स्तम्भ की सं०)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

(5 × 2)
(m × n)

(vi) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) :-

- यह एक ऐसा Square matrix होता है जिसमें मुख्य विकर्ण (Leading diagonal) के elements को छोड़कर अन्य सभी element zero होते हैं।"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

- elements of Leading diagonal = non - zero
- other elements = zero

(vii) अदिश आव्यूह (Scalar Matrix) :-

- "यह एक प्रकार का Diagonal matrix (विकर्ण आव्यूह) ही होता है but इसमें मुख्य विकर्ण के सभी elements समान (Same) तथा अन्य सभी elements zero होंगे।"

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- elements of Leading diagonal = Same
- other elements = zero

(viii) इकाई आव्यूह (Identity or Unit Matrix) :-

- "एक ऐसा Square matrix जिससे मुख्य विकर्ण (Leading diagonal) के सभी अवयव 1 हो तथा अन्य सभी अवयव Zero हो।"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

- elements of Leading diagonal = 1
- other elements = zero
- इसे I से प्रदर्शित करते हैं।

(ix) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrices) :-

- इसमें मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव या ऊपर के सभी अवयव Zero होते हैं।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(1) Upper Triangular matrix (उच्च त्रिभुजीय आव्यूह)

इसमें मुख्य विकर्ण (Leading Diagonal) के नीचे के सभी elements Zero होते हैं।

(2) Lower Triangular matrix (निम्न त्रिभुजीय आव्यूह)

इसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी elements zero होते है।

(x) परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix) :-

- यदि किसी Matrix के सभी Row को column में & सभी column को Row में change करने पर जो Matrix प्राप्त होता है, उसे परिवर्त आव्यूह (Transpose matrix) कहते हैं।
- इसे A' या A^T से प्रदर्शित करते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Row ⟷ Column

परिवर्त आव्यूह (Transpose matrix)

Q. :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A' = ?

Row ⟷ Column

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(xi) सममिति आव्यूह (Symmetric Matrix) :-

- "यदि किसी Metrix का Transpose, दिये गये Matrix के बराबर हो तो इसे Symmetric matrix कहते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Row ⟷ Column

A का Transpose matrix A' or A^T (परिवर्त आव्यूह) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\boxed{A^T = A}$

Q. 1 :- $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो बताइए matrix A Symmetric है या नहीं।

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$\because$ A = A'

$\therefore$ Symmetric है।

Q. 2. :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetric है।

Q. 3 :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$\because$ $A \neq A'$

$\therefore$ Symmetric नहीं है।

(xii) विषम सममित आव्यूह (Skew- Symmetric Matrix) :-

- यदि $A^T = -A$ तो matrix A, skew Symmetric (विषम सममित) कहलाता है।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A का Transpose matrix (परिवर्त आव्यूह) $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^T = -A}$$

Q. 1. :- $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ कौन सा विषम सममित है?

Sol :-

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = -\begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\because$ $A^T = -A$

$\therefore$ A, विषम सममित है।

$\because$ $B^T \neq -A$

$\therefore$ B, विषम सममित नहीं है।

3.आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices)

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices)

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices)

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

(i) दो आव्यूहों की समानता (Equality of two Matrices) :-

दो आवळूह की समानता की शर्त (Condition of equality of two matrices)

(a) क्रम समान (Order Same) होना चाहिए।

(b) दोनों के संगत अवयव (Corresponding elements) Same हो ।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(2\times3)}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(2\times3)}$

matrix A & B कब समान होंगे।

(a) Order = 2 × 3 (Same है।)

(b) Corresponding elements same होने के लिए $\boxed{a = 2}$ & $\boxed{b = 4}$

Q. 1. :- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & x-y \\ x+y & 4 \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह A, B समान है। तो x & y का मान बताइए।

Sol. :-

$x - y = 2 \longrightarrow (1)$

$x + y = 3 \longrightarrow (2)$

जोड़ने पर

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$ Ans. Put in eq. (2) -

$\frac{5}{2} + y = 3$

$y = \frac{3}{1} - \frac{5}{2}$

$y = \frac{6-5}{2}$

$y = \frac{1}{2}$ Ans.

(ii) आव्यूहों का योग व अन्तर (Addition and Subtraction of Matrices) :-

दो आव्यूहों के योग व अन्तर की शर्तें (Condition for Add & Sub of two matrices)

(a) दोनों matrix का Order same होना चाहिए।

(b) संगत अवयव (Corresponding elements)को जोड़ते या घटाते हैं।

जैसे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ \& \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ तो $A + B = ?$ & $A - B = ?$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ Ans.} \qquad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

Q. 1. :- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो A + B तथा (A - B) का मान ज्ञात

Sol. :-

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ Ans.} \qquad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

Q. 2. :- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, और $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ दिखलाइये A + B = B + A.

Sol. :-

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$\because$ A + B = B + A Proved.

(iii) आव्यूहों का अदिश गुणज (Scalar Multiple of a Matrices) :-

- यदि किसी matrix में किसी अदिश 'K' से गुणा किया जाए तो matrix के सभी elements को 'K' से गुणा करते हैं।

जैसे :-

$$\text{Matrix } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$ तो K.A = ?

$$K.\,A = \begin{bmatrix} K.a_1 & K.a_2 & K.a_3 \\ K.b_1 & K.b_2 & K.b_3 \\ K.c_1 & K.c_2 & K.c_3 \end{bmatrix}$$

Q. 1 :- यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ तो 3A का मान ज्ञात करें।

Sol. :-

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 18 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

Q. 2 :- यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ और $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ तो 2P - 3Q का मान ज्ञात कीजिये|

Sol. :-

$$2P - 3Q = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -9 & 10 & -1 \\ -15 & -5 & 18 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

(iv) दो आव्यूहों का गुणनफल (Multiplication of two Matrices)

शर्तें (Condition) :-

(a) पहले matrix के column की सं. = दूसरे matrix के Row की सं.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

(b) इनमें से किसके लिए A.B Possible है ?

सभी के लिए A.B Possible

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ & $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

A.B Possible नहीं है।

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ क्या A.B और B.A दोनी Possible ?

A.B Possible है।

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ & $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

A.B Possible नहीं है।

नियम (Rule) :-

दो matrix का गुणा Row by Column करते हैं अर्थात् पहले matrix के Row का गुणा दूसरे Matrix के column के साथ करते हैं।

जैसे :-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ & $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 3 \times 5 + 4 \times 1 & 3 \times 2 + 4 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 6 \end{bmatrix}$$ Ans.

Q. 1. :- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Sol. :-

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 3+16 & 6+20 & 9+24 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Q. 2 :- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ दिखाइये कि $AB \neq BA$.

Sol. :-

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$. Proved

Q. 3 :- A^2 का मान निकालिये, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Sol. :- $A^2 = A \times A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+8+9 & 2+6+3 & 3+4+12 \\ 4+12+6 & 8+9+2 & 12+6+8 \\ 3+4+12 & 6+3+4 & 9+2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$$ Ans.

Q. 4. :- यदि आव्यूह A = $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह B = $\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि, AB = BA.

Sol. :-

$$A.B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta & \cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta \\ \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta & \sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta & \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta \\ \sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha & \sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

AB = BA. Proved

Q. 5 :- यदि आव्यूह A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध करो $A^2 - 5A + 7I = 0$ जबकि I एक इकाई आव्यूह, आर्डर 2 × 2 की है।

Sol. :- $A^2 = A \times A$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 - 1 & 3 + 2 \\ -3 - 2 & -1 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

L.H.S. = $A^2 - 5A + 7I$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$ R.H.S. Proved.

Q. 6 :- $A^2 - 4A - 5I$ का मान निकालिये, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. :- $A^2 = A \times A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$A^2 - 4A + 5\,I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Ans.}$$

4. आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर
(Difference between matrix and determinant)

(आव्यूह)

- आव्यूह m x n संख्याओं की एक लम्ब सारणी होती है जिसमें m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं। m तथा n का बराबर होना आवश्यक नहीं है
  A matrix m x n is a perpendicular table of numbers with m rows and n columns. m and n need not be equal.
- आव्यूह का वर्गाकार होना आवश्यक नहीं है।
  The matrix need not be square.
- आव्यूह में अवयवों की संख्या m x n होती है।
  The number of elements in a matrix is m x n.
- आव्यूह के लिये निम्न ब्रेकेटों का प्रयोग करते हैं। [ ]
  The following brackets are used for matrices. [ ]

(सारणिक)

- जबकि सारणिक n x n संख्याओं की लम्ब सारणी है इसमें पंक्तियों तथा स्तम्भों का बराबर होना आवश्यक है।
  Whereas the determinant is a perpendicular table of n x n numbers, in this it is necessary that the rows and columns be equal.
- जबकि सारणिक सदैव वर्गाकार होता है।
  Whereas the determinant is always square.
- जबकि सारणिक में अवयवों की संख्या n^2 होती हैं।
  While the number of elements in the determinant is n^2
- जबकि सारणिक के लिये केवल दो समान्तर रेखाओं || का प्रयोग करते हैं।
  Whereas for the determinant only two parallel lines II are used.

5. आव्यूह के सह-गुणनखण्ड (Co-factors of a Matrix)

$$\text{यदि किसी matrix A का co - factor} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

6. सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix)

यदि कोई matrix A है तो

$$\text{Co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Adjoint of a matrix A, **adj A = Transpose of Co-factor A** Row ⟷ Column

सह - गुणनखण्ड का परिवर्त आव्यूह

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

7. आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a Matrix):-

यदि कोई matrix A दिया है -

तो matrix A का व्युत्क्रम (inverse) matrix $\boxed{A^{-1} = \dfrac{\text{adj } A}{|A|}}$ $|A| \neq 0$

(i) |A| निकाले, $|A| \neq 0$

(ii) $\text{Co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ निकाले।

(iii) Adj A - Transpose of co - fector A निकाले।

A^{-1} के सूत्र में मान रखें।

Q. 1 :- आव्यूह A का प्रतिलोम (Inverse) निकालें यदि, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Sol. :- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +3$

$A_{12} = -1$

$A_{21} = -5$

$A_{22} = +2$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

adj A = Transpose of co-factor A

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$ **Ans.**

Q. 2. :- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ तो adj A तथा A^{-1} (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिये।

Sol:-

$$\text{co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -28 + 30 \quad = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -(-21 + 0) = 21$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 0 \quad = -18$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -(0 - 6) \quad = +6$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 0 \quad = -7$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 - 0) \quad = +6$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 4 \quad = 4$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 3) \quad = -8$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 \quad = 4$$

$$\text{Co - factor } A = \begin{bmatrix} 2 & 21 & -18 \\ 6 & -7 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

adj A = Transpose of co - factor A   Row ⟷ Column

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ans.

$$\because \; A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार (Expand along R_1)

$= 1(-28 + 30) - 0 - 1(-18 - 0)$

$= 2 + 18 \;\; = 20 \quad \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$ **Ans.**

Q. 3 :- यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix) ज्ञात करें।

$$\text{co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(9 - 16) = -7$ $A_{21} = -(6 - 12) = +6$ $A_{31} = +(8 - 9) = -1$

$A_{12} = -(3 - 4) = +1$ $A_{22} = +(3 - 3) = 0$ $A_{32} = -(4 - 3) = -1$

$A_{13} = +(4 - 3) = +1$ $A_{23} = -(4 - 2) = -2$ $A_{33} = +(3 - 2) = 1$

$$\text{Co - factor } A = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

adj A = Transpose of co - factor A

Row $\longleftrightarrow$ Column

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ Ans.

Q. 4 :- आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 2(1 - 4) - 5(3 - 2) + 3(6 - 1)$

$= 2(-3) - 5(1) + 3(5)$

$= -6 - 5 + 15$

$= -11 + 15 = 4 \neq 0$

$A_{11} = +(1-4) = -3$ $A_{21} = -(5-6) = +1$ $A_{31} = +(10-3) = +7$

$A_{12} = -(3-2) = -1$ $A_{22} = +(2-3) = -1$ $A_{32} = -(4-9) = +5$

$A_{13} = +(6-1) = 5$ $A_{23} = -(4-5) = +1$ $A_{33} = +(2-15) = -13$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

Row ⟷ Column

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\because A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$ Ans.

Q. 5 :- आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$= 7(4-3) + 1(20-6) - 1(30+12)$

$= 7(1) + 1(-26) - 1(42)$

$= 7 - 26 - 42$

$= -61 \neq 0$

$$\text{co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(4-3) = 1$ $A_{21} = -(2+3) = -5$ $A_{31} = +(-1-2) = -3$

$A_{12} = -(-20-6) = +26$ $A_{22} = +(-14+6) = -8$ $A_{32} = -(7+10) = -17$

$A_{13} = +(30+12) = 42$ $A_{23} = -(21+6) = -27$ $A_{33} = +(-14+10) = -4$

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} 1 & 26 & 42 \\ -5 & -8 & -27 \\ -3 & -17 & -4 \end{bmatrix}$$

Row ⟷ Column

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\because A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{1}{-61}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{bmatrix}$$ Ans.

8. रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल करना
(To solve a system of Linear Equations by Matrix Method)

गुणांक आव्यूह तथा संवर्धित आव्यूह (Coefficient Matrix and Augmented Matrix):

यदि रैखिक समीकरण निकाय (If Linear Equation system)

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ —— (1)

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ —— (2)

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ —— (3)

माना

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}}$$

गुणांक आव्यूह (coefficient matrix) $= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

&

संवर्धित आव्यूह (Augmented matrix) $= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & : & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & : & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & : & d_3 \end{bmatrix}$

$\because$ A.X = B

$$\boxed{X = A^{-1}.B}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

Q. 1. :- समीकरणों का हल आव्यूह विधि से ज्ञात करे। (Find the solution of equations by matrix method).

$x + 3y + 3z = 1$

$x + 4y + 3z = 0$

$x + 3y + 4z = 2$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

माना

$\because$ A.X = B

$\boxed{X = A^{-1}.B}$ —— (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1\,(19-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4)$$

$$|A| = 1\,(7) - 3\,(1) + 3\,(-1)$$

$$|A| = 7 - 3 - 3 = 1$$

$$\text{co - factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = +(16-9) = 7$ $\quad A_{21} = -(12-9) = -3$ $\quad A_{31} = +(9-12) = -3$

$A_{12} = -(4-3) = -1$ $\quad A_{22} = +(4-3) = 1$ $\quad A_{32} = -(3-3) = 0$

$A_{13} = +(3-4) = -1$ $\quad A_{23} = -(3-3) = 0$ $\quad A_{33} = +(4-3) = 1$

$$\text{Co - factor } A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Row ⟷ Column

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because \; A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ put in Eq. (1)

$X = A^{-1}.B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -0 & -6 \\ -1 & +0 & +0 \\ -1 & +0 & +2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 1 \quad y = -1 \quad z = 1}$$ Ans.