UNIT-V
Vector Algebra

Definition notation and rectangular resolution of a vector. Addition and subtraction of vectors. Scalar and vector product of two vectors. Simple problems related to work, moment and angular velocity.

TOPICS

- **सदिश बीजगणित (Vector Algebra)**

1. सदिशों का निरुपण (Notation of Vector)
2. सदिश का मापांक (Modulus of a vector)
3. इकाई सदिश (Unit vector)
4. शून्य सदिश (Null vector)
5. समान सदिश (Equal vector)
6. दिक्कोज्यायें (Direction Cosines)
7. सदिशों का योग (Addition of Vectors)
8. सदिशो को घटाना (Subtraction of Vectors)
9. स्थिति सदिश (Position Vectors)
10. समतलीय तथा असमतलीय सदिश (Co - Planar and Non-Coplanar Vector)
11. समरेखीय बिन्दु (Collinear Points)

- **दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar Product of Two Vectors)**

1. सदिशों का गुणनफल (Product of Vectors)
2. अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल (Scalar Product or Dot Product)
3. अदिश गुणनफल के गुणधर्म (Properties of Scalar Product)
4. इकाई सदिशों i, j, k का अदिश गुणनफल (Scalar Products of unit vectors i, j, k)
5. दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar product of two vectors)
6. दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between Two vectors)
7. दो सदिशों के लिये समान्तर तथा लम्बवत् होने के प्रतिबन्ध (Conditions for Two Vectors to be Parallel and Perpendicular)

- **दो सदिशों का सदिश गुणन (Vector Product of Two Vectors**

1. सदिश गुणनफल या वज्र गुणनफल (Vector Product or Cross Product)
2. इकाई सदिशों i, j, k का सदिश गुणनफल (Vector Product of Unit Vectors i,j,k)
3. सारणिक रूप में सदिश गुणनफल (Vector Product in Determinant Form)
4. दो सदिशों के बीच का कोण (Angle Between Two Vectors)
5. सदिश गुणनफल के गुणधर्म (Properties of Vector Product)

- **सदिशों के अनुप्रयोग (Applications of Vectors)**

1. बल द्वारा कृत कार्य (Work Done by a Force)
2. किसी बिन्दु के परित: बल का आघूर्ण (Moment of a Force about a Point)
3. किसी पिण्ड का कोणीय वेग (Angular Velocity of a Body)

GTECH POLY

सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

सदिश राशियाँ (Vector Quantity)

Definition:-

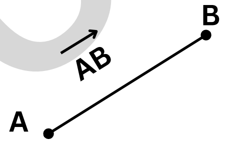
- वे राशियाँ जिन्हें व्यक्त करने के लिये परिमाण के साथ - साथ दिशा भी आवश्यक होती है। सदिश राशियाँ कहलाती है।
  Those quantities which require magnitude as well as direction to be expressed are called vector quantities.

Example :-

- बल, विस्थापन, वेग, त्वरण, भार, संवेग, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, आघूर्ण आदि।
  Force, displacement, velocity, acceleration, weight, momentum, electric field intensity, moment etc.

सदिशों का निरुपण (Notation of Vector)

- सदिशों का निरुपण Arrow (तीर) द्वारा किया जाता है।
  Vectors are represented by arrows.



जैसे :-

vector a $\Rightarrow$ $\vec{a}$

vector b $\Rightarrow$ $\vec{b}$

vector AB $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$

सदिश का मापांक (Modulus of a vector)

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है तो

$\vec{r}$ का मापांक (Modulus) = $\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

जैसे :- $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का मापांक (Modulus)= ?

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

इकाई सदिश (Unit vector)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ है तो

$\vec{a}$ का इकाई सदिश (Unit Vector) $\boxed{\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$

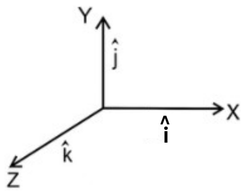
$$\boxed{\hat{a} = \frac{a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}}$$

जैसे :- $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ का इकाई सदिश (Unit Vector)

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\boxed{\hat{a} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} \quad \text{Ans}}$$



Note :- $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ क्रमशः x , y तथा z - अक्ष की दिशा में unit Vector है।

शून्य सदिश (Null vector)

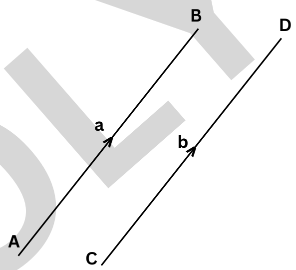
- वह सदिश जिसका मापांक शून्य होता है, उसे शून्य सदिश कहते हैं।
  A vector whose modulus is zero. It is called the zero vector.

जैसे :- यदि $\vec{a}$ एक शून्य सदिश (Null Vector) है तो $\boxed{|\vec{a}| = 0}$

समान सदिश (Equal vector)

- यदि दो या दो से अधिक सदिशों के परिमाण तथा दिशा एक समान हो तो वह समान सदिश कहलाते हैं।
  If two or more vectors have the same magnitude and direction then they are called equal vectors.

$\boxed{\vec{a} = \vec{b}}$

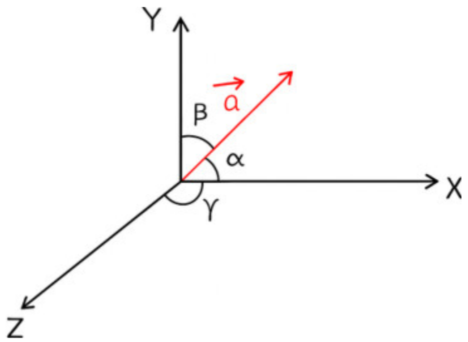


दिक् कोज्याये (Direction Consines)

- किसी सदिश द्वारा अक्षों के साथ बने कोणों को दिक् कोण (Direction Angles) कहते हैं। इन कोणों की कोज्यायों (Cosine) को दिक् कोज्यायें (Direction Cosines) कहते है।
  The angles formed by a vector with the axes are called double angles. The cosines of these angles are called direction cosines.
- दिक् कोज्यायें (Direction Cosines) 3 होती हैं - l , m & n
- यदि कोई vector अक्षों x, y तथा z के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है तो -
  if a vector makes angles α, β and γ with the axes x, y and z respectively, then -

  Direction cosine -

$$\boxed{\begin{aligned} l &= \cos\alpha \\ m &= \cos\beta \\ n &= \cos\gamma \end{aligned}}$$



अक्षो की दिक् कोज्याये (Direction cosine of Axis) -

(1) X - अक्ष की दिक् कोज्याये

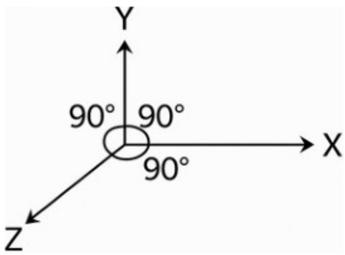
$$\alpha = 0^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma = 90^\circ$$

$$l = \cos\alpha = \cos 0^\circ = 1$$

$$m = \cos\beta = \cos 90^\circ = 0$$

$$n = \cos\gamma = \cos 90^\circ = 0$$

$\boxed{1 , 0 , 0}$



GTECH POLY

(2) Y - अक्ष की दिक् कोज्याये

$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 0^\circ,\ \gamma = 90^\circ$$
$$l = \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$$
$$m = \cos\beta = \cos 0^\circ = 1$$
$$n = \cos\gamma = \cos 90^\circ = 0$$
$$\boxed{0, 1, 0}$$

(3) Z- अक्ष की दिक् कोज्याये

$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \gamma = 0^\circ$$
$$l = \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$$
$$m = \cos\beta = \cos 90^\circ = 0$$
$$n = \cos\gamma = \cos 0^\circ = 1$$
$$\boxed{0, 0, 1}$$

- **Relation b/w direction cosine**

$$\boxed{l^2 + m^2 + n^2 = 1} \quad \text{या} \quad \boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

- **सदिश की दिक् कोज्याये (Direction cosine of Vector)**

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है तो

$$\boxed{l = \frac{\hat{i}\ \text{का गुणांक}}{\vec{r}\ \text{का मानांक}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

$$\boxed{m = \frac{\hat{j}\ \text{का गुणांक}}{\vec{r}\ \text{का मानांक}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

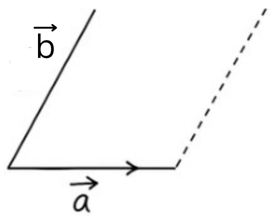
$$\boxed{n = \frac{\hat{k}\ \text{का गुणांक}}{\vec{r}\ \text{का मानांक}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

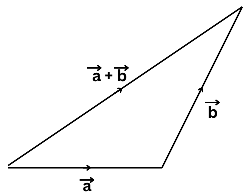
सदिशों का योग (Addition of Vectors)

(1) दो सदिशों के योग का त्रिभुज का नियम (Law of Triangle for sum of two vectors)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$





Sum of $\vec{a}$ & $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}}$$

सदिशो को घटाना (Subtraction of Vectors)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

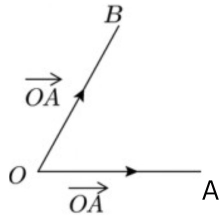
Sub of $\vec{a}$ & $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}}$$

GTECH POLY

स्थिति सदिश (Position Vectors)

- एक ही Point से होकर जाने वाले vectors को Position Vector कहते हैं।
  Vectors passing through the same point are called position vectors.



$\overrightarrow{OA}$ = Point A का Position vector

$\overrightarrow{OA}$ = Point B का Position vector

$\overrightarrow{AB}$ = Point B का Position vector - Point A का Position vector

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$

Q.1 :- निम्नलिखित सदिशों के मापांक ज्ञात करो-
Find the modulus of the following vectors:

(A) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा

$$\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{1 + 1 + 1}$$
$$= \boxed{\sqrt{3}}$$

(B) $3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$= \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5 \times 5}$$
$$= \boxed{5\sqrt{2}}$$

Q.2 :- यदि दो बिन्दुओं A तथा B के किसी बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ हो तो सदिश $\overrightarrow{AB}$ का मापांक तथा $\overrightarrow{AB}$ की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात करो।
If the position vectors of two points A and B relative to any point are $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ and $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, then find the modulus of vector $\overrightarrow{AB}$ and the unit vector in the direction of $\overrightarrow{AB}$.

Point A का Position vector ($\overrightarrow{OA}$) = $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

Point B का Position vector ($\overrightarrow{OB}$) = $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (4i + 2j - 3K) - (3i - 4j + 2k)$

$= 4i + 2j - 3K - 3i + 4j - 2k)$

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ का मापांक (Modulus)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 36 + 25}$$
$$= \sqrt{62} \quad \underline{Ans}$$

$\overrightarrow{AB}$ की दिशा में इकाई सदिश (Unit Vector) = $\dfrac{\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{62}}$ $\underline{Ans}$

Q.3 :- सदिश 13i + 2j - 8k की दिक् - कोज्यायें (Direction cosines) ज्ञात करो तथा सिद्ध करो कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
Find the direction cosines of the vector 13i + 2j - 8k and prove that $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

$13\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ की Direction Cosine = ?

GTECH POLY

$$\ell = \frac{i \text{ का गुणांक}}{\text{मापांक}} = \frac{13}{\sqrt{13^2+2^2+(-8)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169+4+64}} = \frac{13}{\sqrt{237}}$$

$$m = \frac{j \text{ का गुणांक}}{\text{मापांक}} = \frac{2}{\sqrt{237}}$$

$$n = \frac{k \text{ का गुणांक}}{\text{मापांक}} = \frac{-8}{\sqrt{237}}$$

$$\boxed{\frac{13}{\sqrt{237}}, \frac{2}{\sqrt{237}}, \frac{-8}{\sqrt{237}}} \quad \underline{Ans}$$

Prove :- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

L.HS. $= l^2 + m^2 + n^2$

$$= \left(\frac{13}{\sqrt{237}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{237}}\right)^2 + \left(\frac{-8}{\sqrt{237}}\right)^2$$

$$= \frac{169}{237} + \frac{4}{237} + \frac{64}{237}$$

$$= \frac{237}{237}$$

= $\boxed{1 = \text{R.H.S.}}$ Proved

Q.4 :- यदि सदिश A = 2i + 4j - 5k तथा B = i + 2j + 3k हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात करो-

If vector A = 2i + 4j - 5k and B = i + 2j + 3k then find the value of the following-

(i) $\vec{A} + \vec{B}$ तथा $|\vec{A} + \vec{B}|$

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \quad \underline{Ans}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7 \quad \underline{Ans}$$

(ii) $\vec{A} - \vec{B}$ तथा $|\vec{A} - \vec{B}|$

$$\vec{A} - \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \quad \underline{Ans}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{1+4+64} = \sqrt{69} \quad \underline{Ans}$$

Q.5 :- सदिशों i - 3j + 2k तथा 2i + j + 4k के योग के समान्तर इकाई सदिश ज्ञात करो।

Find the unit vector parallel to the sum of vectors i - 3j + 2k and 2i + j + 4k.

माना $\vec{a}$ = 1- 3j + 2k

$\vec{b}$ = 2i + j + 4k

GTECH POLY

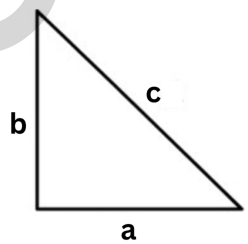
Sum $\vec{a}+\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$

unit vector Parallel to $(\vec{a}+\vec{b})$ = $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}$$
$$=\sqrt{9+4+36}$$
$$=7$$

$$\text{Unit vector}=\frac{3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}}{7}\quad \underline{Ans}$$

Q.6 :- सिद्ध करो कि सदिशों 3i + 2j + k, - i + 3j - 3k तथा 2i + 5j - 2k से बना त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।
Prove that the triangle formed by the vectors 3i + 2j + k, -i + 3j - 3k and 2i + 5j - 2k will be a right angled triangle.



माना $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

$$\vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$$
$$\vec{c}=2\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$$
$$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2}=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$$

for Right Angle Triangle (समकोण △ के लिए)

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$
$$\text{L.H.S.}=c^2=(\sqrt{33})^2=33$$
$$\text{R.H.S.}=a^2+b^2=(\sqrt{14})^2+(\sqrt{19})^2$$
$$=14+19$$
$$=33$$
$$\therefore \text{L.H.S.}=\text{R.H.S.}\quad \underline{\text{Proved}}$$

Q.7 :- यदि सदिश $\overrightarrow{OA}$ = 2i - j + k तथा $\overrightarrow{OB}$ = 5i - 3j + 2k हो तो सदिश $\overrightarrow{AB}$ का मान निकालो।
If vector $\overrightarrow{OA}$ = 2i - j + k and $\overrightarrow{OB}$ = 5i - 3j + 2k then find the value of vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OB}=5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

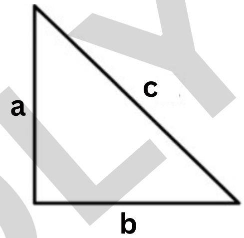
$$= (5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \quad \underline{Ans}$$

Q.8 :- सिद्ध करो कि सदिश $\vec{a}$ = 2i - j + k, $\vec{b}$ = i - 3j - 5k तथा $\vec{c}$ = 3i - 4j - 4k एक समकोण त्रिभुज की भुजायें निरूपित करती है।

Prove that the vectors $\vec{a}$ = 2i - j + k, $\vec{b}$ = i - 3j - 5k and $\vec{c}$ = 3i - 4j -4k represent the sides of a right triangle.



$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$$

समकोण त्रिभुज के लिए $\quad$ कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{———} \quad (1)$$

L.H.S. = $\quad c^2 = (\sqrt{41})^2 = 4$

R.H.S. = $\quad a^2 + b^2$

$= (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{35})^2$

= 6 + 35

= 41 **Ans**

L.H.S. = R.H.S. Proved

समतलीय तथा असमतलीय सदिश (Co - Planar and Non-Coplanar Vector)

- यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ सदिश समतलीय है। तो किसी भी एक सदिश को अन्य दो सदिशों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।
  If the vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are coplanar, then any one vector can be expressed in terms of the other two vectors.

$\therefore \quad \boxed{\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}}$

या $\quad \vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c}$

या $\quad \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

- **यहाँ m, n दो अदिश राशियाँ है। (Here m, n are two scalar quantities.)**
- **नोट - यदि सदिश $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$**
- **Determinant form (सरणिक रूप)**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- **प्रसार करके $\triangle$ का मान ज्ञात करते हैं।**

- यदि, $\triangle = 0$, तो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को समतलीय (Co-planar) तथा एकघातीय आश्रित सदिश (Linearly dependent Vectors) कहते है।
  If $\triangle = 0$, then the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are called co-planar and linearly dependent vectors.
- यदि, $\triangle \neq 0$, तो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को असमतलीय (Non - coplanar) तथा एकघातीय स्वतंत्र सदिश (Linearly independent Vectors) कहते हैं।
  If, $\triangle \neq 0$, then the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are called non - coplanar and linearly independent vectors.

समरेखीय बिन्दु (Collinear Points)

- तीन बिन्दु A, B तथा C जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ है, समरेखीय होंगें।
  Three points A, B and C whose position vectors are $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ will be collinear.

यदि प्रतिबन्ध, $$\boxed{l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = 0}$$

तथा $$\boxed{l + m + n = 0}$$

- यहाँ l, m तथा n अदिश राशियाँ है (Here l, m and n are scalar quantities)।

नोट :-

- समरेखीय के लिये सदिशों के गुणांकों से बने सारणिक का मान यदि शून्य हो तो भी बिन्दु समरेखीय होंगे -
  For collinearity, if the value of the determinant formed by the coefficients of the vectors is zero, then also the points will be collinear.

Q.9 :- सिद्ध करो कि बिन्दु $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ तथा $7\vec{a} - \vec{c}$ समरेखीय है।

Prove that the points $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ and $7\vec{a} - \vec{c}$ are collinear.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार करने पर

$$\Delta = (-2)(-2-0) - 3(-1-21) + 5(0-14)$$
$$= -2(-2) - 3(-22) + 5(-14)$$
$$= 4 + 66 - 70$$
$$= 70 - 70 = 0 \quad \underline{\text{Ans}}$$

$\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ Points Collinear है।

Q.10 :- यदि सदिश 2i - 4j + 5k, i - λj + k तथा 3i + 2j - 5k समतलीय हो तो λ का मान ज्ञात करो।

If the vectors 2i - 4j + 5k, i - λj + k and 3i + 2j - 5k are coplanar then find the value of λ.

समतलीय के लिए $\triangle = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

R_1 के अनुदिश प्रसार करने पर

$$2(5\lambda - 2) + 4(-5-3) + 5(2+3\lambda) = 0$$
$$10\lambda - 4 - 32 + 10 + 15\lambda = 0$$

GTECH POLY

$$25\lambda - 26 = 0$$
$$25\lambda = 26$$
$$\boxed{\lambda = \frac{26}{25}} \quad \text{Ans.}$$

Q.11 :- सिद्ध करो कि सदिश $3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}$, $4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ समतलीय है।

Prove that the vectors $3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}$, $4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ and $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ are coplanar.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार करने पर

$$= 3(-4-10) - 1(16+12) + 5(20-6)$$
$$= 3(-14) - 1(28) + 5(14)$$
$$= -42 - 28 + 70$$
$$= -70 + 70 = 0 \quad \text{Ans}$$

$\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ **समतलीय है।**

Q.12 :- सिद्ध करो कि सदिश i - 3j + 2k, 2i - 4j - 4k तथा 3i + 2j - k एक घातीय स्वतन्त्र सदिश (Linearly Independent Vectors) है।

Prove that the vectors i - 3j + 2k, 2i - 4j - 4k and 3i + 2j - k are Linearly independent vectors.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार करने पर

$$= 1(4+8) + 3(-2+12) + 2(4+12)$$
$$= 1(12) + 3(10) + 2(16)$$
$$= 12 + 30 + 32 = 74 \neq 0 \quad \text{Ans}$$

$\therefore \Delta \neq 0$

non. coplanar and

Linearly independent vectors

Q.13 :- सिद्ध करो कि बिन्दु (3, -2, 4), (6, 3, 7), (5, 7, 8) तथा (2,2,5) समतलीय है।

Prove that the points (3, -2, 4), (6, 3, 7), (5, 7, 8) and (2,2,5) are coplanar.

पहले Point का Position vector $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

पहले Point का Position vector $\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$

पहले Point का Position vector $\overrightarrow{OC} = 5\hat{i} + 7\hat{j} + 8\hat{k}$

पहले Point का Position vector $\overrightarrow{OD} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

GTECH POLY

$$= 3(-12+5) - 5(3+3) + 3(5+12)$$
$$= 3(-7) - 5(6) + 3(17)$$
$$\Delta = -21 - 30 + 51$$
$$= -51 + 51$$
$$= 0$$ **Ans**

$\because \Delta = 0$

$\therefore$ समतलीय है।

दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar Product of Two Vectors)

सदिशों का गुणनफल (Product of Vectors)

- **दो सदिशों का गुणनफल दो प्रकार का होता है - The product of two vectors is of two types -**

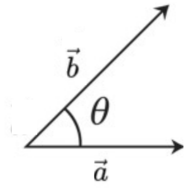
(A) अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल
(Scalar Product or Dot Product)

(B) सदिश गुणनफल या वज्र गुणनफल
(Vector Product or Cross Product)

अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल (Scalar Product or Dot Product)

- **यदि कोई दो Vectors a & b दिये हो तो**
- **a & b का अदिश गुणन (Scalar Product) =** $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta}$

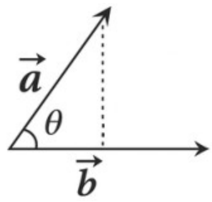
या $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta}$



Note :-

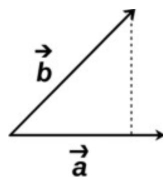
- **सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप (Projection of vector $\vec{a}$ on to vector $\vec{b}$)**

$$\boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\text{ का मापांक}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$$



- **सदिश $\vec{b}$ का सदिश $\vec{a}$ पर प्रक्षेप (Projection of vector $\vec{b}$ on to vector $\vec{a}$)**

$$\boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\text{ का मापांक}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}}$$



अदिश गुणनफल के गुणधर्म (Properties of Scalar Product)

(A) अदिश गुणनफल क्रम विनिमय नियम (Commutative Law) का पालन करता है।
Scalar product obeys the Commutative Law.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$$

(B) अदिश गुणनफल साहचर्य नियम (Associative Law) का पालन करता है।
Scalar product obeys the Associative Law.

$$\boxed{m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b})}$$

GTECH POLY

(C) अदिश गुणनफल वितरण नियम (Distributive Law) का पालन करता है।
The scalar product obeys the distributive law.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}}$$

(D) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एक ही दिशा में हों या समान्तर हों, तो θ = 0°
If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are in the same direction or parallel, then θ = 0°

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos 0^\circ = ab}$$

(E) यदि a कोई अशून्य सदिश हो, तो
If a is any non-zero vector, then

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2}$$

(F) यदि दो सदिश परस्पर लम्बवत हों, तो θ = 90°
If two vectors are perpendicular to each other, then θ =90°

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos 90^\circ = ab\cdot 0 = 0}$$

(G) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ सदिश विपरीत दिशा में हों, तो θ = 180°
If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ vectors are in opposite direction, then θ = 180°

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos 180^\circ = -ab}$$

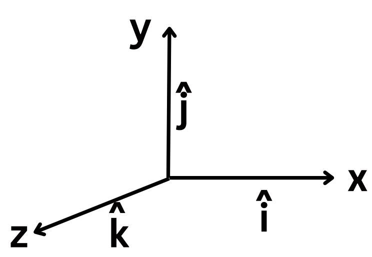
इकाई सदिशों i, j, k का अदिश गुणनफल (Scalar Products of unit vectors i, j, k)

(1) $\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}|\,|\hat{i}|\cos 0^\circ = 1\times 1 = 1$

(2) $\hat{j}\cdot\hat{j} = |\hat{j}|\,|\hat{j}|\cos 0^\circ = 1\times 1 = 1$

(3) $\hat{k}\cdot\hat{k} = |\hat{k}|\,|\hat{k}|\cos 0^\circ = 1\times 1 = 1$

$$\boxed{\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1}$$



(1) $\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}|\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$

(2) $\hat{j}\cdot\hat{k} = |\hat{j}|\,|\hat{k}|\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$

(3) $\hat{k}\cdot\hat{i} = |\hat{k}|\,|\hat{i}|\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$

$$\boxed{\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0}$$

दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar product of two vectors)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between Two vectors)

$$\because \ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta$$

$$\therefore \ \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)}$$

दो सदिशों के लिये समान्तर तथा लम्बवत् होने के प्रतिबन्ध
(Conditions for Two Vectors to be Parallel and Perpendicular)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0}$$

(2) $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ $\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$

Q.1:- निम्नलिखित का मान ज्ञात करो-

(a) $(2+\hat{i})\cdot(2-\hat{i})$

$= 4 - 2\hat{i} + 2\hat{i} - \hat{i}^2$

$= 4 - (1)^2$ $\quad\therefore \hat{i}^2 = |\hat{i}|^2 = 1^2 = 1$

$= 4 - 1$

$= 3$ Ans

Q.2:- सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\quad \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ के मध्य बने कोण का कोज्या ज्ञात करो।

Find the cosine of the angle formed between the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \quad \text{——} (1) \qquad \because \ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 - 2 + 3 = 7$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}$

$\cos\theta = \frac{7}{14}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}}$ Ans

$\therefore \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$ Ans

Q.3:- सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, का सदिश $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेपण ज्ञात करो। सदिश B का A पर भी प्रक्षेपण ज्ञात करो।

Find the projection of vector $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ onto vector $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$. Also find the projection of vector B onto A.

(i) $\vec{A}$ का $\vec{B}$ पर प्रक्षेप = $\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$\vec{A}$ का $\vec{B}$ पर प्रक्षेप = $\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ Ans

(ii) $\vec{B}$ का $\vec{A}$ पर प्रक्षेप = $\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$\vec{B}$ का $\vec{A}$ पर प्रक्षेप = $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ Ans

Q.4:- ज्ञात करे कि P के किस मान के लिए सदिश परस्पर समान्तर है।

Find for what value of P the vectors are parallel to each other.

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}, \quad \vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{2}{p} = \frac{9}{3}$$

$\dfrac{3}{1} \times \dfrac{2}{p}$ या $\dfrac{2}{p} \times \dfrac{9}{3}$

3P = 2   9P = 6

$p = \dfrac{2}{3}$ Ans $p = \dfrac{6}{9}$

$$p = \frac{2}{3} \text{ Ans}$$

Q.5:- यदि सदिश $2\hat{i} + m\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है, तो m का मान निकालो I

If the vectors $2\hat{i} + m\hat{j} + 3\hat{k}$ and $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ are perpendicular to each other, then find the value of m.

माना $\vec{a} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

8 - 2m - 6 = 0

2 = 2m

$\boxed{m = 1}$ Ans

Q.6:- यदि $\vec{a} = 2i + 3j + 6k$ तथा $\vec{b} = 3i + Pj + k$ परस्पर लम्ब हो तो P का मान ज्ञात करो।

If $\vec{a} = 2i + 3j + 6k$ and $\vec{b} = 3i + Pj + k$ are perpendicular to each other then find the value of P.

$\vec{a} = 2i + 3j + 6k$

$\vec{b} = 3i + Pj + k$

GTECH POLY

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ है परस्पर लम्ब है। $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$6 + 3P + 6 = 0$

$12 + 3P = 0$

$3P = -12$

$P = -4$ Ans

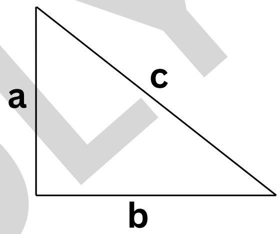
Q.7:- सदिश विधि द्वारा सिद्ध करो कि सदिश 2i - j + k, i - 3j - 5k तथा 3i - 4j - 4K एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

Prove by vector method that the vectors 2i - j + k, i - 3j - 5k and 3i - 4j - 4k form a right triangle.

Method-1 :- $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$c^2 = (\sqrt{41})^2 = 41$$

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{35})^2 = 6 + 35 = 41$$ **Proved**

Method-2 :- **समकोण △ में दो भुजाएं लम्ब होती हो।**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

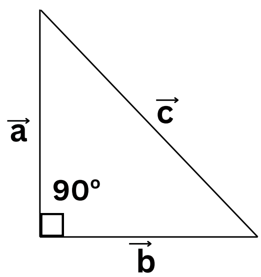
$\vec{a} = 2i - j + k$

$\vec{b} = 1 - 3j - 5k$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 3 - 5$

$= 5 - 5$

$= 0$



Q.8:- यदि कोई सदिश $\vec{a}$ है तो सिद्ध करो कि-

If $\vec{a}$ is any vector then prove that-

$$(\vec{a} \cdot i)i + (\vec{a} \cdot j)j + (\vec{a} \cdot k)k = \vec{a}$$

माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \hat{i} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{i}$$

$$= a_1 + 0 + 0$$

$$= a_1$$

$$\vec{a} \cdot \hat{j} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{j}$$

$$= 0 + a_2 + 0$$

$$= a_2$$

$$\vec{a} \cdot \hat{k} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{k}$$

$$= 0 + 0 + a_3$$

$$= a_3$$

L.H.S.:

$$(\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

$$= a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\boxed{= \vec{a}}$$ R.H.S. Proved

GTECH POLY

Q.9:- निम्नलिखित सदिशों के लिये A.B का मान ज्ञात करो।
Find the value of A.B for the following vectors.

(a) $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = -3 + 1 + 0 = -2$ Ans

(b) $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \quad \vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 + 3 + 2 = 8$ Ans

Q.10:- यदि सदिश ai + 2j - k तथा 3i + 4j - 4k परस्पर लम्बवत् हो तो 'a' का मान ज्ञात करो।
If the vectors ai + 2j - k and 3ı + 4j - 4k are perpendicular to each other, then find the value of 'a'.

लम्बवत की Condition $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$

3a + 8 + 4 = 0

3a + 12 = 0

3a = - 12

$\boxed{a = -4}$ Ans

Q.11:- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश इस प्रकार है कि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो सिद्ध करो कि a तथा b के बीच का कोण 90° होगा।
If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are two vectors such that $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ then prove that the angle between a and b is 90°.

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

Square on both side

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$

$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

$\theta = 90^\circ$ **Proved**

दो सदिशों का सदिश गुणन (Vector Product of Two Vectors

सदिश गुणनफल या वज्र गुणनफल (Vector Product or Cross Product)

यदि दो Vectors $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दिये गये हो

$\vec{a}$ & $\vec{b}$ का सदिश गुणन (vector Product) $\Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}}$$

यहाँ $\hat{n}$ = $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्बवत इकाई सदिश

$$\boxed{\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}}$$

GTECH POLY

इकाई सदिशों i, j, k का सदिश गुणनफल (Vector Product of Unit Vectors i,j,k)

(1) $\hat{i} \times \hat{i} = |\hat{i}|\,|\hat{i}| \sin\theta \cdot \hat{n} = 0$

(2) $\hat{j} \times \hat{j} = 0$

(3) $\hat{k} \times \hat{k} = 0$

$$\boxed{\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0}$$

(1) $\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}| \sin 90^\circ \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times 1\,\hat{k} = \hat{k}$

(2) $\hat{j} \times \hat{k} = |\hat{j}|\,|\hat{k}| \sin 90^\circ \cdot \hat{i} = 1 \times 1 \times 1\,\hat{i} = \hat{i}$

(3) $\hat{k} \times \hat{i} = |\hat{k}|\,|\hat{i}| \sin 90^\circ \cdot \hat{j} = 1 \times 1 \times 1\,\hat{j} = \hat{j}$

$$\boxed{\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}}$$

सारणिक रूप में सदिश गुणनफल (Vector Product in Determinant Form)

यदि

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \hat{i}(a_2b_3 - b_2a_3) - \hat{j}(a_1b_3 - b_1a_3) + \hat{k}(a_1b_2 - b_1a_2)$$

दो सदिशों के बीच का कोण (Angle Between Two Vectors)

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta \cdot \hat{n}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta\,\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \sin\theta$$

या

$$\boxed{\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

सदिश गुणनफल के गुणधर्म (Properties of Vector Product)

(A) सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम (Commutative law) का पालन नहीं करता है।

Vector product does not obey the commutative law.

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})}$$

(B) सदिश गुणनफल वितरण नियम (Distributive law) का पालन करता है।

The vector product obeys the distributive law.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}}$$

GTECHPOLY

(C) यदि दो सदिश समान्तर या संरेखीय है तो θ = 0° या 180°

If two vectors are parallel or collinear then θ = 0° or 180°

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=0} \qquad \because \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$$

(D) दो एक समान सदिशों का गुणनफल शून्य होता है।

The product of two equal vectors is zero.

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{a}=0} \quad \because \theta = 0^\circ$$

Q.1:- यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ तथा $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ हो तो सिद्ध करो कि $(\vec{a}-\vec{d})$ तथा Vec $(\vec{b}-\vec{c})$ समानान्तर सदिश है। जब $a \neq b$ तथा $b \neq c$.

If $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ and $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ then prove that $(\vec{a}-\vec{d})$ and vec $(\vec{b}-\vec{c})$ are parallel vectors. When $a \neq b$ and $b \neq c$.

$$\because (\vec{a}-\vec{d}) \parallel (\vec{b}-\vec{c})$$
$$\therefore (\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=0$$

$$\text{L.H.S.} = \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$$
$$=\vec{c}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$$
$$=-(\vec{d}\times\vec{c})+(\vec{d}\times\vec{b})-(\vec{d}\times\vec{b})+(\vec{d}\times\vec{c})$$

= 0 = R.H.S. <u>Proved</u>

$$\because \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$$
$$\because \vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$$

Q.2:- यदि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ इस प्रकार है। कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ हो तो सिद्ध करो कि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

If three vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are such that $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, then prove that $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

$$\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \quad (1)$$

दोनों side $\vec{a}$ का Cross Product करने पर

$$\vec{a}\times(\vec{a}+b+\vec{c})=0$$
$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$$
$$0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a} \quad (2)$$

इसी प्रकार समी. (1) में $\vec{b}$ का Cross Product करने पर

$$\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$
$$\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=0$$
$$\vec{b}\times\vec{a}+0+\vec{b}\times\vec{c}=0$$
$$\vec{b}\times\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$
$$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b} \quad (3)$$

समी. (2) व (3) से

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$ <u>Proved</u>

Q.3:- तीन सदिशों, $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिये सिद्ध करो कि-

Prove that for three vectors, $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=0$$

L.H.S.= $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

$$=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})$$

= 0 = R.H.S. <u>Proved</u>

GTECH POLY

Q.4:- यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ हो तो $(\vec{a} \times \vec{b})$ का मान ज्ञात करो।

If vector $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ then find the value of $(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

प्रसार करने पर

$$= \hat{i}(-4+8) - \hat{j}(6-4) + \hat{k}(-6+2)$$

$$= 4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{Ans}$$

Q.5: यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ हो तो $(\vec{a} \times \vec{b})$ का मान ज्ञात करो।

If vector $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ then find the value of $(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \\ 2 \quad -1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad -3 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार करते हुए:

$$= \hat{i}(3-2) - \hat{j}(-6-1) + \hat{k}(4+1)$$

$$= \hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

Q.6:- निम्नलिखित सदिशों के लिये $(\vec{a} \times \vec{b})$ का मापांक ज्ञात करो-

Find the modulus of $(\vec{a} \times \vec{b})$ for the following vectors-

(i) a = 4i - 3j + 5k तथा b =3i +4j - 6k

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \\ 4 \quad -3 \quad 5 \\ 3 \quad 4 \quad -6 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$$= \hat{i}(18 - 20) - \hat{j}(-24 - 15) + \hat{k}(16 + 9)$$

$$= -2\hat{i} + 39\hat{j} + 25\hat{k} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

Q.7:- यदि सदिश $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हो तो उस इकाई सदिश को ज्ञात करो जोकि सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ पर लम्बवत् हो।

If vector $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ then find the unit vector which is perpendicular to the vectors A and B.

$\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ पर लम्बवत् इकाई सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

GTECH POLY

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसार

$$= \hat{i}(3+1) - \hat{j}(4-2) + \hat{k}(-4-6)$$

$$= 4\hat{i} - 2\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{16+4+100}$$

$$= \sqrt{120}$$

$$\hat{n} = \frac{4\hat{i} - 2\hat{j} - 10\hat{k}}{\sqrt{120}}$$ **Ans.**

Q.8:- सदिशों $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ के बीच के कोण का ज्या (sine) निकालो ।

Find the sine of the angle between the vectors $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ and $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$.

$\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ $\quad$ $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

Formula :- $$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3+16) - \hat{j}(1-8) + \hat{k}(-4-6)$$

$$= 19\hat{i} + 7\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{19^2 + 7^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{361+49+100}$$

$$= \sqrt{510}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{1+9+16}$$

$$= \sqrt{26}$$

GTECH POLY

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{4 + 16 + 1}$$
$$= \sqrt{21}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{510}}{\sqrt{26}\sqrt{21}}$$
$$= \frac{\sqrt{510}}{\sqrt{546}}$$
$$= \sqrt{\frac{170}{182}}$$
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{85}{91}}$$ **Ans.**

Q.9:- यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ हो तो सिद्ध करो कि $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ सदिश पर लम्बवत् है।

If the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ then prove that $(\vec{a} \times \vec{b})$ is perpendicular to the vector $\vec{c}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2+8) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(-6+2)$$
$$= 6\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

∴ $(\vec{a} \times \vec{b})$ $\vec{c}$ के लम्ब है।

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \quad (1)$$

L.H.S.
$$(6\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= 6 + 2 - 8$$
$$= 8 - 8$$
$$= 0 = \text{R.H.S.}$$ **Proved**

सदिशों के अनुप्रयोग (Applications of Vectors)

बल द्वारा कृत कार्य (Work Done by a Force) :-

- **किसी बल द्वारा कृत कार्य एक अदिश राशि है जिसका मान बल के परिमाण तथा बल की दिशा में विस्थापन के वियोजित भाग के गुणनफल के बराबर होता है।**
  The work done by a force is a scalar quantity whose value is equal to the product of the magnitude of the force and the displacement divided in the direction of the force.

GTECH POLY

बल F द्वारा कृत कार्य = (बल सदिश).(विस्थापन सदिश)
$W = \vec{F} . \vec{d}$

Note :- कई बलों द्वारा कुल कृत कार्य = बलों के परिणामी द्वारा कृत कार्य
Total work done by several forces = Work done by the resultant of forces

Q.1:- एक बल $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 10\hat{k}$ किसी कण को विस्थापित करता है। कण का विस्थापन सदिश $\vec{d} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ है। बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।
A force $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 10\hat{k}$ displaces a particle. The displacement vector of the particle is $\vec{d} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$. Find the work done by the force.

कार्य (work)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$= (3\hat{i} - 2\hat{j} + 10\hat{k}) \cdot (4\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k})$$
$$= 12 - 12 + 10$$
$$= 10 \text{ unit}$$ **Ans.**

Q.2:- एक बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$, विस्थापन $\vec{d} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ के अनुदिश क्रियारत है। बल द्वारा कृत कार्य ज्ञात कीजिए।
A force $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ acts along the displacement $\vec{d} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$. Find the work done by the force.

कार्य (work)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 4 + 9 + 35$$
$$= 48 \text{ unit}$$ **Ans.**

Q.3:- एक बल $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ किसी पिण्ड को मूल बिन्दु से (1, 1, -1) तक विस्थापित करता है। बल द्वारा कृत कार्य ज्ञात कीजिए।
A force $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ displaces a body from the origin to (1, 1, -1). Find the work done by the force.

बल (Force) $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

माना मूल बिन्दु (0, 0, 0) A है।

A के स्थिति सदिश = $0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

तथा दूसरा बिन्दु (1, 1, 1) B है।

B के स्थिति सदिश = $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ = B के स्थिति सदिश - A के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

विस्थापन $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$

GTECH POLY

कार्य (work) $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$$= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2 - 1 + 1$$

$$= 2 \text{ unit}$$ **Ans.**

Q.4:- एक बल $\vec{F} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ किसी कण को बिन्दु A से बिन्दु B तक हटा देता है। इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ है। बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

A force $\vec{F} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ deflects a particle from point A to point B. The position vectors of these points are $2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ and $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ respectively. Find the work done by the force.

$$\vec{F} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

A के स्थिति सदिश = $A = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

B के स्थिति सदिश = $B = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

विस्थापन $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ = B के स्थिति सदिश - A के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

work $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= (4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$= 8 + 5 - 3$$

$$= 13 - 3$$

$$= 10 \text{ unit}$$ **Ans.**

Q.5:- बलों $F_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $F_2 = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ का परिणामी बल किसी कण पर लगाया जाता है जो बिन्दु (-1, 1, 2) पर स्थित है। यह बल कण को बिन्दु (1, 2, 3) पर विस्थापित कर देता है। परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

The resultant force of the forces $F_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $F_2 = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ is applied on a particle located at the point (-1, 1, 2). This force displaces the particle to the point (1, 2, 3). Find the work done by the resultant force.

परिणामी बल $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$\vec{F} = (2\hat{i} + \hat{i}) + (\hat{j} + \hat{j}) + (-\hat{k} + 2\hat{k})$$

$$\vec{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \quad (1)$$

माना Point A = (-1, 1, 2)

A के स्थिति सदिश = $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

माना Point B = (1, 2, 3)

B के स्थिति सदिश = $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

विस्थापन $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ = B के स्थिति सदिश - A के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{AB} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (2)$$

कार्य (work) $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$= 9 \text{ unit}$ **Ans.**

Q.6:- दो बल $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{Q} = \hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ किसी कण को बिन्दु A से बिन्दु B तक हटाने का कार्य करते हैं। बलों द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए जबकि A तथा B के स्थिति क्रमश: $(-2\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})$ तथा $(-3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$ है।

Two forces $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{Q} = \hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ act to move a particle from point A to point B. Find the work done by the forces when the positions of A and B are $(-2\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})$ and $(-3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$ respectively.

परिणामी बल $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$

$$= (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k} \quad (1)$$

A के स्थिति सदिश = $A = -2\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

B के स्थिति सदिश = $B = -3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = (-3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}) - (-2\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k} \quad (2)$$

कार्य (work) $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= (3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$= -3 + 4 + 10$$

$$= -3 + 14$$

$= 11 \text{ unit}$ **Ans.**

GTECH POLY