

UNIT-IV
Two dimensional Co-Ordinate Geometry

Equation of straight line in various standard forms (without proof), intersection of two straightlines, angle between two lines. Parallel and perpendicular lines, perpendicular distance formula.

General equation of a circle and its characteristics. To find the equation of a circle, given:

- (i) Centre and radius,
- (ii) Three points lying on it and
- (iii) Co-ordinates of end points of a diameter;

Definition of conics (Parabola, Ellipse, Hyperbola), their standard equations without proof. Problems on conics when their foci, directrices or vertices are given.

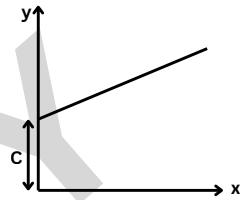
विभिन्न मानक रूपों में सरल रेखा का समीकरण

(Equation of a Straight Line in Different Standard Forms) :-

(1) जब रेखा y - अक्ष पर c अन्तःखण्ड काटती है तब रेखा का समी०

When a line cuts an intercept c on y - axis, then the equation of the line is Y

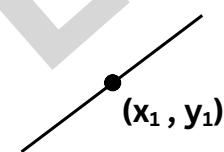
$$y = mx + c \quad m = \text{प्रवणता (gradient or slope)}$$



(2) बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समीकरण

Equation of the line passing through the point (X_1, Y_1)

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

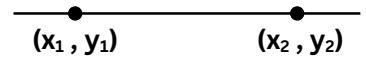


(3) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (X_2, Y_2) से जाने वाली रेखा का समी०

Equation of the line passing through two points (X_1, Y_1) and (X_2, Y_2)

∴ एक Point (x_1, y_1) से जाने वाले रेखा का समी०

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \dots\dots (1)$$



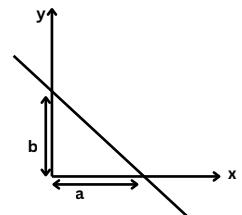
∴ दो Points (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा का समी०

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \quad \therefore m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

(4) यदि रेखा x -अक्ष तथा y - अक्ष पर क्रमशः a तथा b अन्तःखण्ड काटती है।

If the line cuts intercepts a and b on the x -axis and y -axis respectively.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

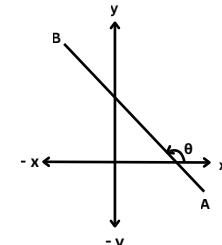
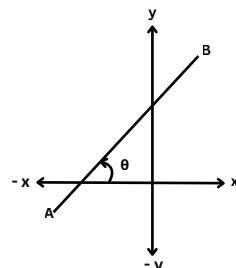
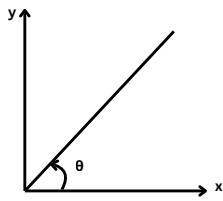


रेखा का ढाल (Slop of Line)

- वामावर्त (anticlockwise) दिशा में किसी रेखा द्वारा धनात्मक x - अक्ष से बनाये गये कोण की स्पर्शज्या (tangent), रेखा की प्रवणता (slope) कहलाती है। इसे सामान्यतया m से प्रदर्शित करते हैं।

The tangent of the angle made by a line with the positive x -axis in the anticlockwise direction is called the slope of the line. It is usually represented by m .

$$m = \tan \theta$$



दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन (Intersection of Two Lines)

- दो रेखाओं का समीकरण इस प्रकार है-

The equation of two lines is as follows

दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए दोनों रेखाओं के समी. को Solve करके x, y की value ज्ञात करते हैं।

Intersection Point = Value of x & y

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

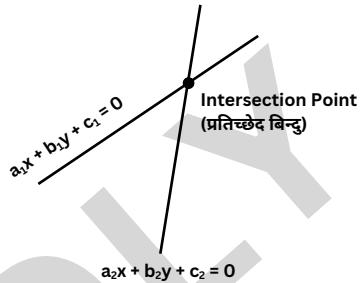
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ब्रज गुणन द्वारा (by Cross multiplication)

$$\frac{x}{(b_1c_2 - b_2c_1)} = \frac{y}{(a_2c_1 - a_1c_2)} = \frac{1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$\text{Intersection Points} = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$



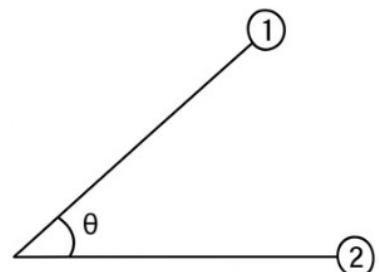
दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle Between Two Lines) (Extra)

- यदि दो रेखाएँ निम्नलिखित हैं -

If the two lines are as follows-

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \quad \dots\dots\dots(2)$$



इन दोनों रेखाओं के बीच का कोण

$$\cos \theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

दो रेखाओं के बीच कोणों का प्रवणता सूत्र (Slope Formula for Angles Between Two Lines)

- यदि दो रेखाएँ निम्नलिखित हैं -

If the two lines are as follows-

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

पहली रेखा की प्रवणता (Slope) $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$

तथा दूसरी रेखा की प्रवणता (Slope) $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

दोनों रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two lines)

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

समी (1) से

$$b_1 y = -a_1 x - c_1$$

$$y = -\frac{a_1}{b_1} x - \frac{c_1}{b_1}$$

$$y = mx + c \quad (\text{तुलना करने पर})$$

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$$

इसी प्रकार

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

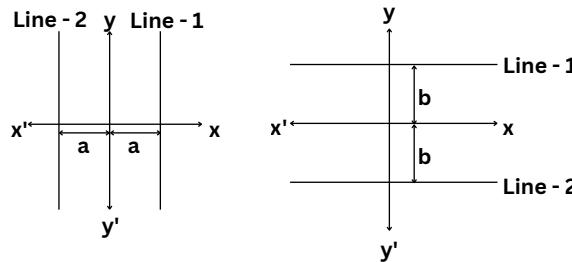
समान्तर व लम्ब रेखाएँ (Parallel and Perpendicular Lines)

1) x - अक्ष के समान्तर तर रेखा का समीकरण (Equation of Line Parallel to X - Ans)

(i) $y = b$ (ii) $y = -b$

2) y - अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण (Equation of Line Parallel to y - Axis)

(i) $x = a$ (ii) $x = -a$



NOTE :-

1) x - अक्ष का समीकरण (Equation of x - Ans)

$y = 0$

2) y - अक्ष का समीकरण (Equation of y - Axis)

$x = 0$

समान्तर रेखाएँ के लिये प्रतिबन्ध (Condition for Parallel Lines) :-

$$\text{यदि दी गई रेखाएँ (Lines) } \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

∴ समान्तर रेखाओं की प्रवणता समान होती है (Slope of two Parallel Lines are equal)

$$m_1 = m_2$$

$$\therefore m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \quad \text{तथा} \quad m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$\therefore -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{या} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

लम्ब रेखाओं के लिये प्रतिबन्ध (Condition for Perpendicular Line) :-

$$\text{यदि दी गई रेखाएँ (Lines) } \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

∴ दो लम्बवत् रेखाओं की प्रवणता का गुणनफल -1 होता है।

(Product of slope of two Perpendicular Lines is equal to -1)

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\therefore m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \quad \text{तथा} \quad m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \times \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -1$$

$$a_1 \cdot a_2 = -b_1 \cdot b_2$$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

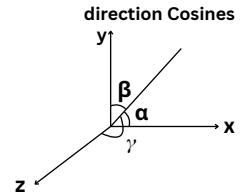
Straight Line in 3 Dimension :-

(1) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जिसकी दिक्कोज्यायें l, m, n हैं तथा जो (x_1, y_1, z_1) से होकर जाती हैं।

Find the equation of a straight line whose direction cosines are l, m, n and passes through (x_1, y_1, z_1) .

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

$$l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$$



(2.) यदि a, b, c दी गई सरल रेखा का दिक् अनुपात हों तो (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

If a, b, c are direction ratios of a given straight line, then the equation of the line passing through (x_1, y_1, z_1) is.

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

1) x - अक्ष का समीकरण (Equation of x - Axis)

$$y = 0, z = 0$$

2) y - अक्ष का समीकरण (Equation of y - Axis)

$$x = 0, z = 0$$

2) z - अक्ष का समीकरण (Equation of z - Axis)

$$x = 0, y = 0$$

दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण
(Line Passing through Two Points (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2)) :-

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

$$c = z_2 - z_1$$

तीन बिन्दुओं A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) तथा C(x_3, y_3, z_3) की संरेखीय
(Collinearity of three given points) :-

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

$$c = z_2 - z_1$$

दो तिरछी रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी की सरल रेखा का समीकरण तथा लम्बाई
(Equation of the line of shortest distance between two skew lines and its length) :-

दी गई दो रेखाएँ

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \dots(1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad \dots(2)$$

न्यूनतम दूरी (Shortest distance)

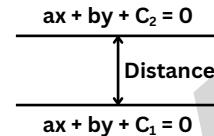
$$(S.D) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}}$$

- यदि किसी रेखा की मूल बिन्दु से दूरी P हो तथा लम्ब रेखा x - अक्ष से a - कोण बनाती है तो रेखा का समीकरण (Equation of Line)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$$

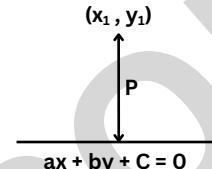
- दो समान्तर रेखाओं $ax + by + C_1 = 0$ तथा $ax + by + C_2 = 0$ के बीच की दूरी

$$\text{Distance} = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



- दो समान्तर रेखाओं $ax + by + C_1 = 0$ तथा $ax + by + C_2 = 0$ के बीच की दूरी (P)

$$P = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Type 1 :- सरल रेखा के समीकरण पर आधारित प्रश्न

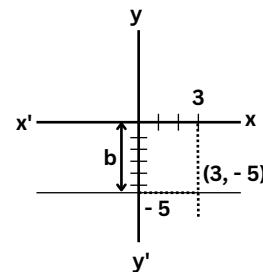
Q.1:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो x - अक्ष के समान्तर है तथा बिन्दु $(3, -5)$ से होकर जाती है।

Find the equation of the line which is parallel to the x - axis and passes through the point $(3, -5)$.

$$y = -b$$

$$y = -5$$

$$y + 5 = 0 \quad \text{Ans.}$$



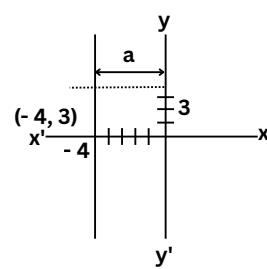
Q.2:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो y - अक्ष के समान्तर है तथा बिन्दु $(-4, 3)$ से होकर जाती है।

Find the equation of the line which is parallel to y -axis and passes through the point $(-4, 3)$.

$$x = -a$$

$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Q.3:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो प्रवणता -1 है तथा जो ऋणात्मक y - अक्ष पर 4 इकाई का अन्तः खण्ड काटती है।

Find the equation of the line whose slope is -1 and which cuts an intercept of 4 units on the negative y - axis.

$$m = -1$$

$$y - \text{अक्ष पर अन्तः खण्ड } C = -4$$

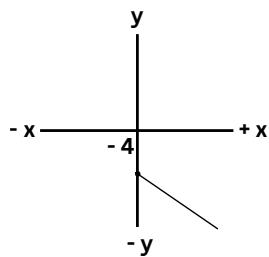
$$y = mx + c$$

$$y = -1x - 4$$

$$y = -x - 4$$

$$y + x + 4 = 0$$

$$x + y + 4 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Q.4:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो y-अक्ष पर 5 इकाई का अन्तर्वर्ती खण्ड काटती है तथा x-अक्ष से 120° का कोण बनाती है।

Find the equation of the line which cuts an intercept of 5 units on the y-axis and makes an angle of 120° with the x - axis.

$$y - \text{अक्ष पर अन्तर्वर्ती: } C = 5$$

$$\theta = 120^\circ$$

$$y = -1x - 4$$

$$m = \tan \theta$$

$$= \tan 120^\circ$$

$$= \tan (180^\circ - 60^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ$$

$$= -\sqrt{3}$$

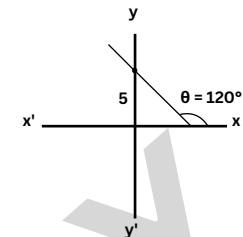
रेखा का समीकरण

$$y = mx + c$$

$$y = -\sqrt{3}x + 5$$

$$y + \sqrt{3}x - 5 = 0$$

$$\boxed{\sqrt{3}x + y - 5 = 0} \quad \text{Ans.}$$



Q.5:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु (2, 3) से होकर जाती है तथा धनात्मक x - अक्ष से 135° का कोण बनाती है।

Find the equation of the line which passes through the point (2, 3) and makes an angle of 135° with the positive x - axis.

$$m = \tan \theta$$

$$= \tan 135^\circ$$

$$= \tan (180^\circ - 45^\circ)$$

$$= -\tan 45^\circ$$

$$= -1$$

$$\text{Point } (x_1, y_1) = (2, 3)$$

रेखा का समीकरण

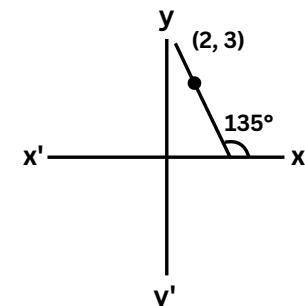
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2$$

$$y - 3 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x + y - 5 = 0} \quad \text{Ans.}$$



Q.6:- बिन्दुओं (-1, 3) व (4, -2) से होकर जाने वाली रेखा का होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

Find the equation of the line passing through the points (-1, 3) and (4, -2).

$$(x_1, y_1) = (-1, 3)$$

$$(x_2, y_2) = (4, -2)$$

रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

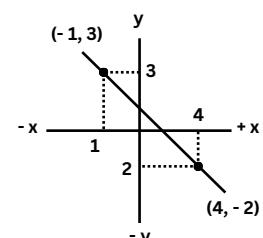
$$y - 3 = \frac{-2 - 3}{4 - (-1)}(x - (-1))$$

$$y - 3 = \frac{-5}{5}(x + 1)$$

$$y - 3 = -x - 1$$

$$y - 3 + x + 1 = 0$$

$$\boxed{x + y - 2 = 0} \quad \text{Ans.}$$



Q.7:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो धनात्मक x-अक्ष पर 4 इकाई तथा ऋणात्मक y-अक्ष पर 3 इकाई का अन्तःखण्ड (intercept) काटती है।

Find the equation of the line which cuts the intercept of 4 units on the positive x-axis and 3 units on the negative y - axis.

x - अक्ष पर अन्तःखण्ड a = 4

y - अक्ष पर अन्तःखण्ड b = - 3

रेखा का समीकरण

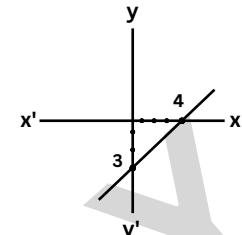
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$\frac{3x - 4y}{12} = 1$$

$$3x - 4y = 12$$

$$3x - 4y - 12 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Q.8:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिसकी मूलबिन्दु से लम्ब दूरी 3 इकाई है तथा जिस पर मूलबिन्दु से लम्ब, धनात्मक x - अक्ष से 30° का कोण बनाता है।

Find the equation of the line whose perpendicular distance from the origin is 3 units and on which the perpendicular from the origin makes an angle of 30° with the positive x-axis.

मूल बिन्दु से लम्ब दूरी P = 3

लम्ब रेखा का धनात्मक x - अक्ष से कोण $\alpha = 30^\circ$

रेखा का समीकरण

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$$

$$x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 3$$

$$x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + y \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\frac{\sqrt{3}x + y}{2} = 3$$

$$\sqrt{3}x + y = 6$$

$$\sqrt{3}x + y - 6 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Type 2 - दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु पर आधारित प्रश्न (Questions Based on Intersection of Two Lines)

Q.9:- दो रेखाओं $2x - y + 3 = 0$ तथा $x + 2y - 4 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक कीजिये।

Find the coordinates of the points of intersection of two lines $2x - y + 3 = 0$ and $x + 2y - 4 = 0$.

$$\text{पहली रेखा } 2x - y + 3 = 0 \dots (1)$$

$$\text{दूसरी रेखा } x + 2y - 4 = 0 \dots (2)$$

समीकरण (1) में 2 से गुणा करके समीकरण (2) के साथ जोड़ने पर

$$4x - 2y + 6 = 0$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$\hline 5x + 2 = 0 \quad \text{जोड़ने पर}$$

$$5x = -2$$

$$x = \frac{-2}{5} \quad \text{समीकरण (1) में रखने पर}$$

$$2\left(\frac{-2}{5}\right) - y + 3 = 0$$

$$\frac{-4}{5} - y + 3 = 0$$

$$\frac{-4}{5} + 3 = y$$

$$\frac{-4 + 15}{5} = y$$

$$y = \frac{11}{5}$$

$$\text{प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक} = \left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right) \quad \text{Ans.}$$

Q.10:- उस रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु (3,5) तथा रेखाओं $4x + y - 1 = 0$ तथा $7x - 3y - 35 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है।

Find the sum of the line that passes through the point (3,5) and the point of intersection of the lines $4x + y - 1 = 0$ and $7x - 3y - 35 = 0$.

दिया है :—

$$(x_1, y_1) = (3, 5)$$

$$\text{पहली रेखा } 4x + y - 1 = 0 \dots (1)$$

$$\text{दूसरी रेखा } 7x - 3y - 35 = 0 \dots (2)$$

समीकरण (1) में 3 से गुणा करके समीकरण (2) के साथ जोड़ने पर

$$\begin{aligned} 12x + 3y - 3 &= 0 \\ 7x - 3y - 35 &= 0 \\ \hline 19x - 38 &= 0 \quad \text{जोड़ने पर} \\ 19x &= 38 \end{aligned}$$

अब $x = 2$ समीकरण (1) में रखने पर

$$4(2) + y - 1 = 0$$

$$8 + y - 1 = 0$$

$$y + 7 = 0$$

$$y = -7$$

प्रतिच्छेद बिंदु (Intersection Point): (2, -7)

$$(x_1, y_1) = (3, 5), (x_2, y_2) = (2, -7)$$

रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{-7 - 5}{2 - 3}(x - 3)$$

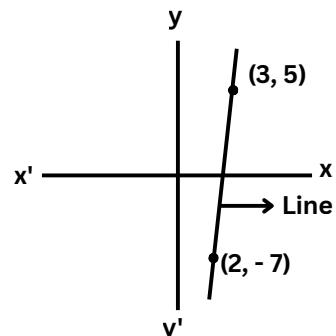
$$y - 5 = 12(x - 3)$$

$$y - 5 = 12x - 36$$

$$y - 5 - 12x + 36 = 0$$

$$-12x + y + 31 = 0$$

$$12x - y - 31 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Type 3 - दो रेखाओं के बीच कोण पर आधारित प्रश्न (Questions Based on Angle between Two Lines)

Q.11:- दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिये-

Find the angle between the lines -

$$(i) x - y\sqrt{3} - 5 = 0 \text{ तथा } 3x + y - 7 = 0$$

$$\text{पहली रेखा: } x - y\sqrt{3} - 5 = 0$$

$$x - 5 = y\sqrt{3}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}}$$

इसलिए,

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

दूसरी रेखा :

$$\sqrt{3}x + y - 7 = 0$$

$$y = -\sqrt{3}x + 7 \quad (\because y = mx + c)$$

$$m_2 = -\sqrt{3}$$

दो रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3})} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 - 1} \right| = \infty$$

$$\tan \theta = \tan 90^\circ$$

$$\boxed{\theta = 90^\circ} \quad \text{Ans.}$$

$$(ii) y = (2 - \sqrt{3})x + 5 \text{ तथा } y = (2 + \sqrt{3})x - 7$$

पहली रेखा :

$$y = (2 - \sqrt{3})x + 5 \quad (\because y = mx + c)$$

$$m_1 = (2 - \sqrt{3})$$

दूसरी रेखा

$$y = (2 + \sqrt{3})x - 7 \quad (\because y = mx + c)$$

$$m_2 = (2 + \sqrt{3})$$

दो रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{-2\sqrt{3}}{1 + (4 - 3)} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

$$\boxed{\theta = 60^\circ} \quad \text{Ans.}$$

Q.12:- रेखाओं $x - 2y + 3 = 0$ तथा $3x + y - 1 = 0$ के बीच अधिक कोण (obtuse angle) ज्ञात कीजिये।

Find the obtuse angle between the lines $x - 2y + 3 = 0$ and $3x + y - 1 = 0$.

पहली रेखा :

$$x - 2y + 3 = 0$$

$$x + 3 = 2y$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \quad (\because y = mx + c)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}$$

दूसरी रेखा

$$3x + y - 1 = 0$$

$$y = -3x + 1 \quad (\because y = mx + c)$$

$$m_2 = -3$$

दो रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-3)}{1 + \frac{1}{2}(-3)} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{2} + 3}{1 - \frac{3}{2}} \right|$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} \right|$$

$$\tan \theta = |-7|$$

$$\therefore \tan \theta = |-7|$$

न्यूनकोण (Acute Angle) के लिए:

$$\tan \theta = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}(7)$$

अधिक कोण (Obtuse Angle) के लिए:

$$\tan \theta = -7$$

$$\theta = \pi - \tan^{-1}(7) \quad \text{Ans.}$$

रेखा $ax + by + c = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण (Equation of Parallel Line)

$$ax + by + \lambda = 0 \quad \lambda = \text{constant}$$

रेखा $ax + by + c = 0$ के लम्ब रेखा का समीकरण (Equation of Perpendicular Line)

$$bx - ay + \lambda = 0$$

Q.13:- $3x - 4y + 5 = 0$ के समान्तर तथा बिन्दु (2, 3) से जाने वाली रेखा का समी० ज्ञात करो।

Find the sum of the line parallel to $3x - 4y + 5 = 0$ and passing through the point (2, 3).

$3x - 4y + 5 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $\Rightarrow 3x - 4y + \lambda = 0 \dots \dots \dots (i)$

समीकरण (i) बिंदु (2, 3) से गुजरती है

$$\begin{aligned} x = 2, y = 3 \text{ को समीकरण (i) में रखने पर} \\ \Rightarrow 3 \times 2 - 4 \times 3 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow 6 - 12 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow -6 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow \lambda = 6 \end{aligned}$$

समीकरण (i) में रखने पर

$3x - 4y + 6 = 0$

Ans.

Q.14:- रेखा $3x + 2y + 5 = 0$ के लम्ब तथा बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा का समी० ज्ञात करो।

Find the sum of the line parallel to $3x + 2y + 5 = 0$ and passing through the point (2, 3).

रेखा $3x + 2y + 5 = 0$ के लम्ब रेखा का समी० $2x - 3y + \lambda = 0 \dots \dots \dots (1)$

समीकरण (1) बिंदु (3, 4) से होकर जाती है

$$\begin{aligned} x = 3, y = 4 \text{ को समीकरण (1) में रखने पर} \\ \Rightarrow 2 \times 3 - 3 \times 4 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow 6 - 12 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow -6 + \lambda = 0 \\ \Rightarrow \lambda = 6 \end{aligned}$$

समीकरण (1) में रखने पर

$2x - 3y + 6 = 0$

Ans.

Type 4 - समान्तर तथा लम्ब रेखाओं पर आधारित प्रश्न (Questions based on Parallel and Perpendicular)

Q.15:- K का मान ज्ञात कीजिये यदि रेखा $2x + 3y + 4 + K(6x - y + 12) = 0$, रेखा $7x + 5y - 4 = 0$ पर लम्ब है। -

Find the value of K if the line $2x + 3y + 4 + K(6x - y + 12) = 0$, is perpendicular to the line $7x + 5y - 4 = 0$.

पहली रेखा $2x + 3y + 4 + k(6x - 4y + 12) = 0$

$$2x + 3y + 4 + 6kx - ky + 12k = 0$$

$$(2 + 6k)x + (3 - k)y + 4 + 12k = 0$$

$$(3 - k)y = -(2 + 6k)x - 4 - 12k$$

$$y = \frac{-(2 + 6k)}{(3 - k)}x - \frac{(4 + k)}{(3 - k)}$$

$$\therefore y = mx + c$$

$$m_1 = \frac{2 + 6k}{k - 3}$$

दूसरी रेखा

$$y = -\frac{7}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$\therefore y = mx + c$$

$$m_2 = -\frac{7}{5}$$

Condition for Perpendicular Lines $\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\left(\frac{2 + 6k}{k - 3} \right) \left(-\frac{7}{5} \right) = -1$$

$$\frac{(2 + 6k)}{(k - 3)} \times \frac{7}{5} = 1$$

$$14 + 42k = 5k - 15$$

$$42k - 5k = -15 - 14$$

$$37k = -29$$

$$k = -\frac{29}{37} \quad \text{Ans.}$$

Q.16:- एक रेखा बिन्दु (a, 2a) तथा (-2, 3) से होकर जाती है तथा रेखा $4x + 3y + 5 = 0$ के लम्ब है, a का मान ज्ञात करो।

A line passes through the points (a, 2a) and (-2, 3) and the line is perpendicular to $4x + 3y + 5 = 0$. Find the value of a.

रेखा की प्रवणता (slope) जो Points (a, 2a) तथा (-2, 3) से होकर जाती है।

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{3 - 2a}{-2 - a}$$

रेखा $4x + 3y + 5 = 0$ की प्रवणता (Slope)

$$3y = -4x - 5$$

$$y = \frac{-4x}{3} + \frac{5}{3}$$

$$\therefore y = mx + c$$

$$m_2 = \frac{-4}{3}$$

Condition for Perpendicular Lines

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\left(\frac{3 - 2a}{-2 - a} \right) \times \left(-\frac{4}{3} \right) = -1$$

$$\frac{3 - 2a}{-2 - a} \times \frac{4}{3} = 1$$

$$12 - 8a = -6 - 3a$$

$$-8a + 3a = -6 - 12$$

$$-5a = -18$$

$$a = \frac{18}{5} \quad \text{Ans.}$$

Q.17:- समान्तर रेखाओं $3x - 4y + 9 = 0$ तथा $6x - 8y - 15 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात करो।

Find the distance between the parallel lines $3x - 4y + 9 = 0$ and $6x - 8y - 15 = 0$

पहली Line $3x - 4y + 9 = 0 \dots \dots \dots (1)$ $(ax + by + c_1 = 0)$

दूसरी रेखा $6x - 8y - 15 = 0 \dots \dots \dots (2)$

दूसरी रेखा में दोनों तरफ 2 से भाग करने पर

$$3x - 4y - \frac{15}{2} = 0 \quad (ax + by + c_2 = 0)$$

दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} \text{Distance} &= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|9 - (-\frac{15}{2})|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{|9 + \frac{15}{2}|}{\sqrt{9 + 16}} \\ &= \frac{\frac{33}{2}}{5} \\ &= \frac{33}{10} \end{aligned}$$

$\text{Distance} = \frac{33}{10}$

Ans.

Q.18:- रेखा $3x - 4y - 5 = 0$ के समान्तर तथा रेखा से 2 इकाई दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

Find the equation of the line parallel to the line $3x - 4y - 5 = 0$ and at a distance of 2 units from the line.

$3x - 4y - 5 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $3x - 4y + \lambda = 0 \dots \dots \dots (1)$

$$\text{दूरी} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2 = \frac{|-5 - \lambda|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$2 = \frac{|-(5 + \lambda)|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$2 = \frac{|5 + \lambda|}{5}$$

$$10 = 5 + \lambda$$

$\lambda = 5$

समीकरण (1) में रखने पर :

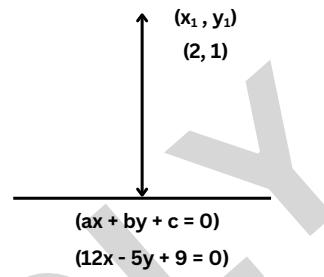
$3x - 4y + 5 = 0$

Ans.

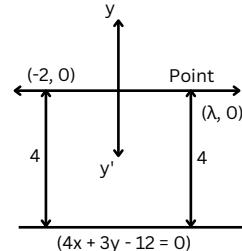
Type 5 - लम्ब दूरी सूत्र पर आधारित प्रश्न (Questions based on Perpendicular Formula)

Q.19:- रेखा $12x - 5y + 9 = 0$ तथा बिन्दु $(2, 1)$ के बीच लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।Find the perpendicular distance between the line $12x - 5y + 9 = 0$ and the point $(2, 1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{लम्ब दूरी} &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 &= \frac{|12 \times 2 - 5 \times 1 + 9|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \\
 &= \frac{24 - 5 + 9}{\sqrt{144 + 25}} \\
 &= \boxed{\frac{28}{13}} \text{ Ans.}
 \end{aligned}$$

Q.20:- x - अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात करो जिनकी रेखा $4x + 3y = 12$ से लम्ब दूरी 4 है।Find the points on the x - axis whose perpendicular distance from the line $4x + 3y = 12$.माना X- अक्ष पर Point के निर्देशांक $= (\lambda, 0)$

$$\begin{aligned}
 \text{लम्ब दूरी} &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 4 &= \frac{|4\lambda + 3(0) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\
 4 &= \frac{|4\lambda - 12|}{\pm 5}
 \end{aligned}$$



धनात्मक (Positive)

$$20 = 4\lambda - 12$$

$$20 + 12 = 4\lambda$$

$$32 = 4\lambda$$

$$\boxed{\lambda = 8}$$

$$\text{Point} = (8, 0)$$

ऋणात्मक (Negative)

$$-20 = 4\lambda - 12$$

$$-20 + 12 = 4\lambda$$

$$-8 = 4\lambda$$

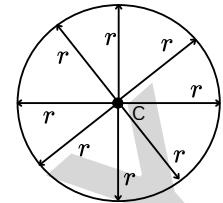
$$\boxed{\lambda = -2}$$

$$\text{Point} = (-2, 0) \quad \text{Ans.}$$

वृत्त (Circle)

- वृत्त एक द्वि-आयामी ज्यामितीय आकृति है, जिसे बंद वक्र के रूप में भी जाना जाता है, जहाँ वक्र रेखा पर सभी बिंदु एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर होते हैं जिसे केंद्र कहा जाता है। केंद्र से वृत्त पर किसी भी बिंदु तक की यह निश्चित दूरी त्रिज्या है।

A circle is a two-dimensional geometric shape, also known as a closed curve, where all points on the curved line are equidistant from a fixed point called the center. This fixed distance from the center to any point on the circle is the radius.



वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिंदु है (Equation of a Circle whose Centre is Origin):-

→ Centre के निर्देशांक = (0, 0)

→ माना वृत्त पर कोई Point P है जिसके निर्देशांक = (x, y)

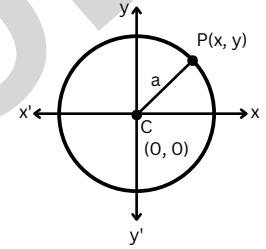
→ चित्र से CP दूरी = त्रिज्या (Radius) = a

दो बिंदुओं के बीच की दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$a = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

Square on both side $a^2 = x^2 + y^2$

वृत्त का समीकरण (Equation of circle)
$$x^2 + y^2 = a^2$$



वृत्त का समीकरण, जिसकी त्रिज्या तथा केन्द्र जात हो : मानक रूप

(Equation of a Circle whose Centre and Radius are given: Standard form) :-

→ माना वृत्त की त्रिज्या (Radius of circle) = a

→ केन्द्र के निर्देशांक (Co. ordinate of centre) = (h, k)

→ माना वृत्त पर Point P (x, y) स्थित है।

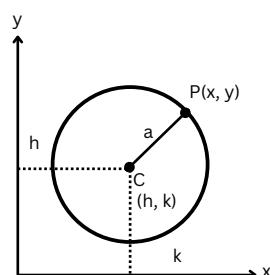
C.P. दूरी = $\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$

$$a = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Square on both side $a^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

वृत्त का समीकरण (Equation of circle)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$



वृत्त के समीकरण का व्यापक रूप (General form of the Equation of a Circle)

General form of Equation of circle :-
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Prove :- We know that $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ Centre = (h, k)

Radius = a

$$x^2 + h^2 - 2hx + y^2 + k^2 - 2ky - a^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - a^2) = 0$$

$$\text{माना } -h = g, \quad -k = f \quad \text{तथा} \quad (h^2 + k^2 - a^2) = c$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\therefore -h = g \Rightarrow h = -g$$

$$-k = f \Rightarrow k = -f$$

$$h^2 + k^2 - a^2 = c \Rightarrow (-g)^2 + (-f)^2 - a^2 = c$$

$$g^2 + f^2 - a^2 = c \Rightarrow a = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

Centre and Radius of Circle :-

$$\text{Centre} = (-g, -f)$$

$$\text{Radius} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

वृत्त का समीकरण (Equation of circle) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

व्यास के शीर्षों के निर्देशांकों के पदों में वृत्त का समीकरण

(Equation of the Circle when ends of the diameter are given) :-

→ माना व्यास के सिरे A तथा B हैं

→ जिनके निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं।

→ इसके वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

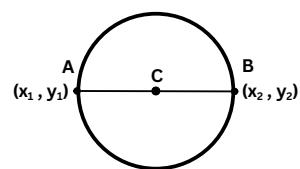
$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$AB \text{ दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Centre C, A तथा B का मध्य बिन्दु है।

$$\text{Centre} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\text{Radius} = \frac{AB \text{ दूरी}}{2}$$



वृत्त का प्राचलिक या परामितीय समीकरण (Parametric Equation of Circle)

वृत्त के समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ में $x = a \cos\theta$ & $y = a \sin\theta$ रखने से समीकरण संतुष्ट होता है।

$$\text{L.H.S.} = (a \cos\theta)^2 + (a \sin\theta)^2$$

$$= a^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta$$

$$= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= a^2(1)$$

$$= a^2 = \text{R.H.S. (संतुष्ट है)}$$

\therefore Parametric Equation of circle

$$x = a \cos\theta$$

$$y = a \sin\theta$$

कुछ विशिष्ट स्थितियों में वृत्त का समीकरण (Equation of Circle in some Special Cases) :-

1. जब वृत्त का केंद्र x - अक्ष पर हो (When the center of the circle is on the x - axis)

इसमें y - निर्देशांक (Co - ordinate)

$$K = 0$$

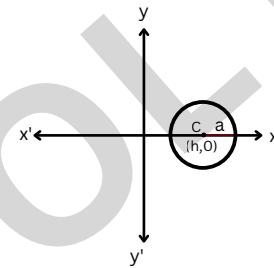
Centre = $(h, 0)$

Radius = a

वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

$$(x - h)^2 + y^2 = a^2$$



2. जब वृत्त का केंद्र y - अक्ष पर हो (When the center of the circle is on the y - axis)

इसमें x - अक्ष निर्देशांक (Co - ordinate)

$$h = 0$$

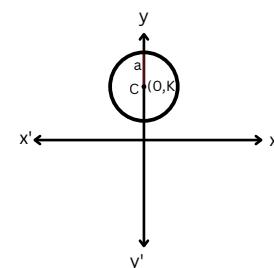
Centre = $(0, K)$

Radius = a

वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

$$(x - O)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

$$x^2 + (y - K)^2 = a^2$$



3. जब वृत्त x - अक्ष को स्पर्श करता है (When the circle touches the x - axis)

इसमें Y - अक्ष निर्देशांक (Co - ordinate)

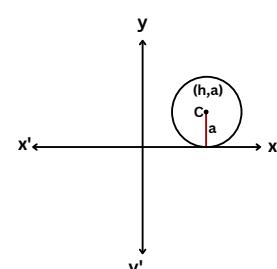
$$K = a$$

Centre = (h, a)

Radius = a

वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

$$(x - h)^2 + (y - a)^2 = a^2$$



4. जब वृत्त y - अक्ष को स्पर्श करता है (When the circle touches the y - axis)

इसमें x - अक्ष निर्देशांक (Co - ordinate)

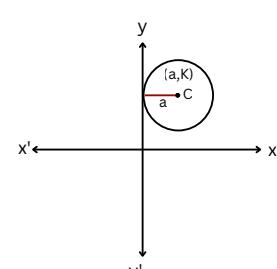
$$h = a$$

Centre = (a, K)

Radius = a

वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

$$(x - a)^2 + (y - K)^2 = a^2$$



5. जब वृत्त x - अक्ष तथा y - अक्ष दोनों को स्पर्श करता है (When the circle touches the both axis x- axis and y - axis):

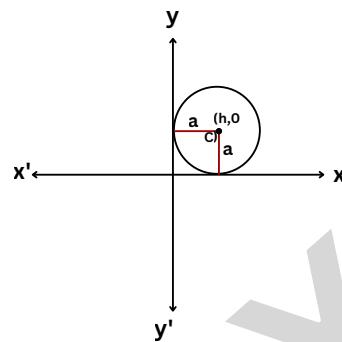
इसमें x तथा y दोनों निर्देशांक (Co - ordinate) $h = K = a$

Centre = (a, a)

Radius = a

वृत्त का समीकरण (Equation of Circle)

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$$



अक्षों पर अंतःखंड (Intercept on the axes)

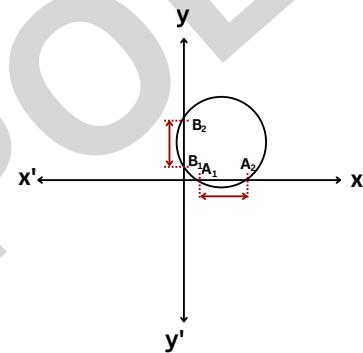
1. x - अक्ष पर अन्तःखंड $A_1 A_2$ की लम्बाई (Length of intercept $A_1 A_2$ on x - Axis) :-

$$A_1, A_2 = 2\sqrt{(g^2 - c)}$$

2. y - अक्ष पर अन्तःखंड B_1, B_2 की लम्बाई

(Length of intercept B_1, B_2 on y - Axis) :-

$$B_1, B_2 = 2\sqrt{(f^2 - c)}$$



General Equation of circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

किन्हीं तीन बिन्दुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात करने की विधि-
(Method to find the equation of a circle passing through any three points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ and (x_3, y_3))

माना $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots \dots (1)$

वृत्त का समीकरण है।

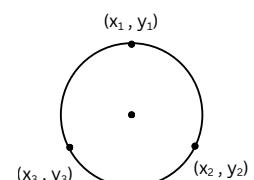
(i) (x_1, y_1) का मान समीकरण (1) में रखने पर $\Rightarrow g, f, c$ में प्राप्त समीकरण (2)

(ii) (x_2, y_2) का मान समीकरण (1) में रखने पर $\Rightarrow g, f, c$ में प्राप्त समीकरण (3)

(iii) (x_3, y_3) का मान समीकरण (1) में रखने पर $\Rightarrow g, f, c$ में प्राप्त समीकरण (4)

(iv) समीकरण (2), (3) तथा (4) को हल करके g, f तथा c का मान निकालो।

(v) g, f तथा c का मान समीकरण (1) में रखने पर वृत्त की समीकरण प्राप्त होगी।



Q.1 :- बिन्दुओ $(1, 1)$ $(2, -1)$ और $(3, -2)$ से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the circle passing through the points $(1, 1)$, $(2, -1)$ and $(3, -2)$.

माना $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots \dots (1)$ वृत्त का समीकरण है।

\therefore वृत्त, Point $(1, 1)$ से होकर जाता है। $\therefore x = 1$ तथा $y = 1$ समीकरण (1) में रखने पर

$$1^2 + 1^2 + 2g \times 1 + 2f \times 1 + c = 0$$

$$2 + 2g + 2f + c = 0 \dots \dots \dots (2)$$

\therefore वृत्त, Point $(2, -1)$ से होकर जाता है। $\therefore x = 2$ तथा $y = -1$ समीकरण (1) में रखने पर

$$(2)^2 + (-1)^2 + 2g \times 2 + 2f \times (-1) + c = 0$$

$$4 + 1 + 4g - 2f + c = 0$$

$$5 + 4g - 2f + c = 0 \dots\dots (3)$$

∴ वृत्त, Point (3, - 2) से होकर जाता है। ∴ x = 3 तथा y = - 2 समीकरण (1) में रखने पर

$$13 + 6g - 4f + c = 0 \dots\dots (4)$$

समीकरण (2), (3) तथा (4) को हल करने पर

$$2 + 2g + 2f + c = 0 \dots\dots (2)$$

$$5 + 4g - 2f + c = 0 \dots\dots (3)$$

$$13 + 6g - 4f + c = 0 \dots\dots (4)$$

समीकरण (3) - समीकरण (2)

$$3 + 2g - 4f = 0$$

$$2g - 4f = - 3 \dots\dots (5)$$

समीकरण (4) - समीकरण (3)

$$8 + 2g - 2f = 0$$

$$2g - 2f = - 8 \dots\dots (6)$$

समीकरण (5) - समीकरण (6)

$$2g - 4f = - 3$$

$$2g - 2f = - 8$$

$$\frac{-2f = 5}{-2f = 5}$$

घटाने पर,

$$f = -\frac{5}{2}$$

समीकरण (5) में रखने पर

$$2g - 4\left(-\frac{5}{2}\right) = -3$$

$$2g + 10 = - 3$$

$$2g = - 3 - 10$$

$$2g = - 13$$

$$g = -\frac{13}{2}$$

g तथा f का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$2 + 2\left(-\frac{13}{2}\right) + 2\left(-\frac{5}{2}\right) + c = 0$$

$$2 - 13 - 5 + c = 0$$

$$2 - 18 + c = 0$$

$$- 16 + c = 0$$

$$c = 16$$

g, f तथा C का वृत्त के समीकरण (1) में रखने पर

$$\text{वृत्त का समीकरण} \quad x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{13}{2}\right)x + 2\left(-\frac{5}{2}\right)y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 13x - 5y + 16 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Q. 2:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 3) तथा त्रिज्या 5 है।

Find the equation of the circle whose centre is (2, 3) and radius is 5.

केंद्र (centre) (h, k) = (2, 3)

त्रिज्या (Radius) a = 5

वृत्त का समीकरण (Equation of circle) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + y^2 + 3^2 - 2 \cdot y \cdot 3 = 25$$

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 - 6y = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Q. 3:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र (2, -1) तथा जो बिंदु (3, 6) से होकर जाता है।

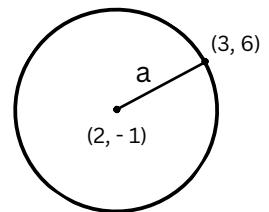
Find the equation of the circle whose centre is (2, -1) and which passes through the point (3, 6).

Radius (त्रिज्या)

$$a = \sqrt{(3 - 2)^2 + (6 + 1)^2}$$

$$a = \sqrt{1 + 49}$$

$$a = \sqrt{50}$$



वृत्त का समीकरण :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 50$$

$$x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 + y^2 + 2y \cdot 1 + 1^2 = 50$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 50$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 50$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 45 \quad \text{Ans.}$$

Q. 4:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसके व्यास के सिरे क्रमशः (3, 4) तथा (8, 6) हैं।

Find the equation of the circle whose ends of the diameter are (3, 4) and (8, 6) respectively.

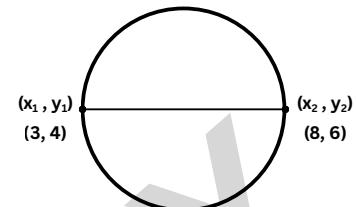
वृत्त का समीकरण (Equation of circle)

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$(x - 3)(x - 8) + (y - 4)(y - 6) = 0$$

$$x^2 + 8x - 3x + 24 + y^2 + 6y - 4y + 24 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 11x - 10y - 48 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Q. 5:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें, जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (- 1, 2) और (4, - 3) हैं।

Find the equation of the circle whose ends of the diameter have coordinates (1, - 2) and (4, - 3).

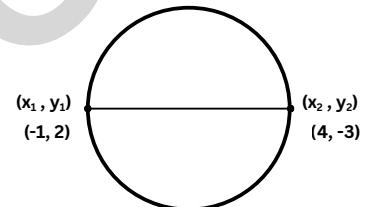
वृत्त का समीकरण (Equation of circle)

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$(x + 1)(x + 4) + (y - 2)(y + 3) = 0$$

$$x^2 + 4x + x + 4 + y^2 + 3y - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0 \quad \text{Ans.}$$



Q. 6:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (0, 0) तथा त्रिज्या 3 है।

Find the equation of the circle whose centre is (0, 0) and radius is 3.

वृत्त का समीकरण (Equation of circle)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Ans.}$$

Q. 7:- निम्न वृत्तों के केंद्रों के निर्देशांक और त्रिज्याओं की लंबाई ज्ञात करें।

Find the coordinates of the centers and the lengths of the radii of the following circles.

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

(b) $(x + 5)^2 + y^2 = 49$

(c) $x^2 + y^2 = 25$

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

दिया गया समीकरण :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \dots (1)$$

वृत्त का व्यापक समीकरण :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (2)$$

तुलना करने पर :

$$2g = -4 \Rightarrow g = -2$$

$$2f = 2 \Rightarrow \boxed{f = 1}$$

$$\boxed{c = 1}$$

वृत्त का केंद्र :

$$(-g, -f) = (2, -1)$$

वृत्त की त्रिज्या :

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 - 1}$$

$$r = \sqrt{4 + 1 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\boxed{r = 2, \quad \text{Centre} = (2, -1)} \quad \text{Ans.}$$

(b) $(x + 5)^2 + y^2 = 49$

दिया गया समीकरण :

$$(x + 5)^2 + y^2 = 49$$

$$(x - (-5))^2 + (y - 0)^2 = 72 \dots (1)$$

वृत्त का व्यापक समीकरण :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \dots (2)$$

तुलना करने पर :

$$h = -5, \quad k = 0, \quad a = 7$$

वृत्त का केंद्र :

$$(h, k) = (-5, 0)$$

वृत्त की त्रिज्या :

$$a = 7$$

$$\boxed{\text{Centre} = (-5, 0), \quad \text{Radius} = 7}$$

(c) $x^2 + y^2 = 25$

दिया गया समीकरण :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \dots (1)$$

वृत्त का व्यापक समीकरण :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots (2)$$

अतः :

$$\boxed{\text{Centre} = (0, 0), \text{Radius} = a = 5}$$

Q. 8:- वृत्त $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात करो।

Find the center and radius of the circle : $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$.

Sol:- $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$

$$2 \left(x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - 3y + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - 3y + \frac{3}{2} = 0 \quad (1)$$

वृत्त का व्यापक समीकरण: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (2)$

तुलना करने पर: $2g = \frac{5}{2} \Rightarrow g = \frac{5}{4}$

$$2f = -3 \Rightarrow f = -\frac{3}{2}$$

$$c = \frac{3}{2}$$

वृत्त का केंद्र (Centre): $(-g, -f) = \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

वृत्त की त्रिज्या (Radius): $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{25+36-24}{16}}$$

$$r = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

Centre $= \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$, Radius $= \frac{\sqrt{37}}{4}$ Ans.

Q. 9:- यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0$ x - अक्ष को स्पर्श करें λ तो का मान ज्ञात कीजिये।

If the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0$ touches the x - axis then find the value of λ .

x - अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण

$$(x - h)^2 + (y - a)^2 = a^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \dots (1)$$

दिया गया समीकरण:

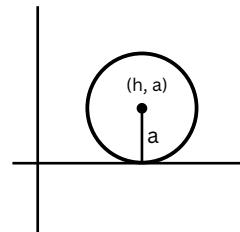
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0 \dots (2) \quad (\text{समीकरण (2) भी } x \text{ - अक्ष को स्पर्श करता है।})$$

तुलना करने पर:

$$-2h = -4 \Rightarrow h = 2$$

$$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$$

$$\lambda = 2^2 = 4 \Rightarrow \lambda = 4 \quad \underline{\text{Ans.}}$$



Q. 10:- वृत्त $x + (y + 2)^2 = 9$ के केन्द्र का निर्देशांक और त्रिज्या ज्ञात करें।

Find the coordinates of the centre and radius of the circle $x^2 + (y + 2)^2 = 9$.

$$(x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2 \dots \dots (1)$$

वृत्त का समीकरण : $(x - h)^2 + (y - K)^2 = a^2 \dots \dots (2)$

तुलना करने पर : $h = 0$ $K = -2$ $a = 3$

वृत्त का केंद्र (Centre):- $(h, k) = (0, -2)$ Ans.

वृत्त की त्रिज्या (Radius) :- $a = 3$ Ans.

Q. 11:- वृत्त $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 1 = 0$ के केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

Find the coordinates of the center and radius of the circle $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 1 = 0$.

$$x^2 + y^2 + 3x - 7y + 1 = 0 \dots \dots (1)$$

वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots (2)$$

तुलना करने पर :

$$2g = 3 \Rightarrow g = \frac{3}{2}$$

$$2f = -7 \Rightarrow f = -\frac{7}{2}$$

$$c = 1$$

वृत्त का केंद्र (Centre):- $(-g, -f) = \left(-\frac{3}{2}, +\frac{7}{2}\right)$

वृत्त की त्रिज्या (Radius) :- $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 1}$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4} - 1}$$

$$r = \sqrt{\frac{9+49-4}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{\sqrt{54}}{2}$$

$r = \frac{\sqrt{54}}{2}$ Ans.

Q. 12:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसका केन्द्र दिए गए वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$ के संकेन्द्रीय हो तथा जो बिन्दु $(-2, -7)$ से होकर जाता है।

Find the equation of the circle whose centre is concentric to the given circle $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$ and which passes through the point $(-2, -7)$.

दिया गया वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0 \dots \dots (1)$

वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots (2)$

तुलना करने पर :

$$2g = -8, \quad 2f = 6, \quad c = -5$$

$$g = -4, \quad f = 3$$

वृत्त का केंद्र (Centre):-

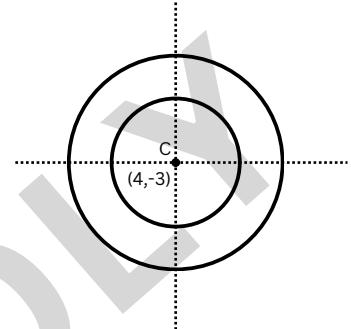
$$(-g, -f) = (4, -3)$$

वृत्त की त्रिज्या (Radius) :-

$$a = \sqrt{(4+2)^2 + (-3+7)^2}$$

$$a = \sqrt{36 + 16}$$

$$a = \sqrt{52}$$



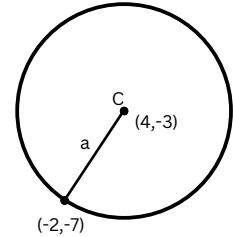
वृत्त की समीकरण (Equation) :- $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 52$$

$$x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 + y^2 + 3^2 + 2 \times y \times 3 = 52$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 + 9 - 52 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 27 = 0 \quad \boxed{\text{Ans.}}$$



Q. 13:- किसी वृत्त $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 29 = 0$ के व्यास का एक सिरा $(4, -3)$ है तो व्यास का दूसरा सिरा ज्ञात करो।

If one end of the diameter of a circle $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 29 = 0$ is $(4, -3)$, then find the other end of the diameter.

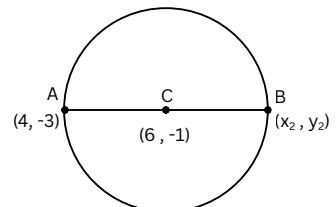
दिया गया वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 29 = 0 \dots \dots (1)$

वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots (2)$

तुलना करने पर :

$$2g = -12, \quad 2f = 2, \quad c = 29$$

$$g = -6, \quad f = 1$$



वृत्त का केंद्र (Centre):- $(-g, -f) = (+6, -1)$

माना दूसरा सिरा :- (x^2, y^2)

Centre C, Point A तथा Point B का मध्य बिंदु है :-

$$\begin{aligned} \frac{4+x_2}{2} &= 6, \quad \frac{-3+y_2}{2} = -1 & -3+y_2 &= -2 \\ 4+x_2 &= 12 & y_2 &= -2+3 \\ x_2 &= 8 & y_2 &= 1 \end{aligned}$$

व्यास का दूसरा सिरा $(x^2, y^2) = (8, 1)$ **Ans.**

Q. 14:- उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसका केन्द्र रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ पर है तथा जो बिन्दुओं $(1, -2)$ तथा $(4, -3)$ से भी जाता है।

Find the equation of the circle whose centre is on the line $3x + 4y - 5 = 0$ and which also passes through the points $(1, -2)$ and $(4, -3)$.

माना वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots (1)$$

वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$ रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ पर स्थित है।

$$3(-g) + 4(-f) - 5 = 0$$

$$-3g - 4f - 5 = 0$$

$$3g + 4f + 5 = 0$$

$$3g + 4f = -5 \quad \dots \dots (2)$$

Point $(1, -2)$ से

$$(1)^2 + (-2)^2 + 2g(1) + 2f(-2) + c = 0$$

$$1 + 4 + 2g - 4f + c = 0$$

$$5 + 2g - 4f + c = 0$$

$$2g - 4f + c = -5 \quad \dots \dots (3)$$

Point $(4, -3)$ से

$$(4)^2 + (-3)^2 + 2g(4) + 2f(-3) + c = 0$$

$$16 + 9 + 8g - 6f + c = 0$$

$$8g - 6f + c = -25 \quad \dots \dots (4)$$

समीकरण (4) – समीकरण (3) :-

$$6g - 2f + 0 = -20 \dots (5)$$

समीकरण (2) + समीकरण (5) $\times 2$:-

$$3g + 4f = -5$$

$$12g - 4f = -40$$

$$15g = -45$$

$$g = -3$$

अब $g = -3$ को समीकरण (2) में रखो :-

$$3(-3) + 4f = -5$$

$$-9 + 4f = -5$$

$$4f = -5 + 9$$

$$f = 1$$

अब g, f को समीकरण (3) में रखो :-

$$2(-3) - 4(1) + c = -5$$

$$-6 - 4 + c = -5$$

$$c = 5$$

वृत्त का समीकरण :-

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(1)y + 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Q. 15:- वृत्त $(2, 2)$ तथा $(-4, 8)$ से जाता है तथा इसका केन्द्र $2x + 5y - 2 = 0$ पर स्थित है।

The circle passes through $(2, 2)$ and $(-4, 8)$ and its centre lies at $2x + 5y - 2 = 0$.

माना वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

वृत्त का केन्द्र $(-g, -f)$ रेखा $2x + 5y - 2 = 0$ पर स्थित है।

$$-2g - 5f - 2 = 0$$

$$2g + 5f + 2 = 0$$

$$2g + 5f = -2 \quad \text{--- (2)}$$

Point $(2, 2)$ से :-

$$2^2 + 2^2 + 2g(2) + 2f(2) + c = 0$$

$$4 + 4 + 4g + 4f + c = 0$$

$$4g + 4f + c = -8 \quad \text{--- (3)}$$

Point $(-4, 8)$ से :-

$$(-4)^2 + (8)^2 + 2g(-4) + 2f(8) + c = 0$$

$$16 + 64 - 8g + 16f + c = 0$$

$$-8g + 16f + c = -80 \quad \text{--- (4)}$$

समी (3) - समी (4) :-

$$12g - 12f + 0 = 72$$

$$g - f = \frac{72}{12} \Rightarrow g - f = 6 \quad \dots \dots (5)$$

समी (2) + समी (5) $\times 5$:-

$$2g + 5f = -2$$

$$\begin{array}{r} 5g - 5f = 30 \\ \hline \end{array}$$

$$7g = 28$$

$$g = 4$$

अब $g = 4$ को समी (2) में रखो :-

$$2(4) + 5f = -2$$

$$8 + 5f = -2$$

$$5f = -10$$

$$f = -2$$

g तथा f का मान समी (3) में रखने पर :-

$$4(4) + 4(-2) + c = -8$$

$$16 - 8 + c = -8$$

$$8 + c = -8$$

$$c = -16$$

वृत्त का समीकरण :-

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2(4)x + 2(-2)y + (-16) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Q. 16:- वृत्त Points (1, 2), (3, 4) तथा (-2, 2) से जाता है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

The circle passes through the points (1, 2), (3, 4) and (-2, 2). Find the equation of the circle.

माना वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots (1)$$

Point (1, 2) से :-

$$1^2 + 2^2 + 2g(1) + 2f(2) + c = 0$$

$$1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$$

$$2g + 4f + c = -5 \quad \dots \dots (2)$$

Point (3, 4) से :-

$$3^2 + 4^2 + 2g \times 3 + 2f \times 4 + c = 0$$

$$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$$

$$6g + 8f + c = -25 \quad \dots \dots (3)$$

Point (-2, 2) से :-

$$(-2)^2 + (2)^2 + 2g(-2) + 2f(2) + c = 0$$

$$4 + 4 - 4g + 4f + c = 0$$

$$-4g + 4f + c = -8 \quad \dots \dots (4)$$

समी (3) - समी (2) :-

$$4g + 4f + 0 = -20 \quad \dots \dots (5)$$

समी (3) - समी (4) :-

$$10g + 4f + 0 = -17 \quad \dots \dots (6)$$

समी (6) - समी (5) :-

$$6g + 0 = 3$$

$$g = \frac{1}{2}$$

अब $g = \frac{1}{2}$ को समी (5) में रखें :-

$$4 \times \frac{1}{2} + 4f = -20$$

$$2 + 4f = -20$$

$$4f = -22$$

$$f = -\frac{11}{2}$$

अब g, f का मान समी (2) में रखें :-

$$2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \left(-\frac{11}{2} \right) + c = -5$$

$$1 - 22 + c = -5$$

$$-21 + c = -5$$

$$c = 16$$

अब g, f, c का मान समी (1) में रखें :-

$$x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) x + 2 \left(-\frac{11}{2} \right) y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - 11y + 16 = 0$$

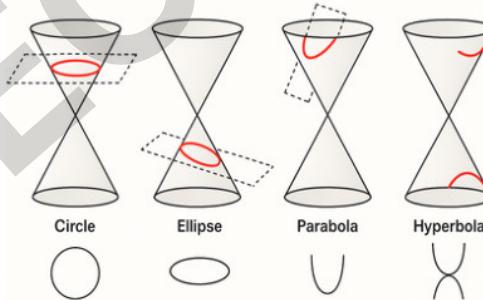
Ans.

शांकव (Conics)

- उन सभी वक्रों (curves) को शांकव कहा जाता है जिन्हें एक लम्ब वृत्तीय शंकुं तथा एक समतल के विभिन्न स्थितियों में परिच्छेदन (Section) से प्राप्त किया जा सकता है।

All those curves are called conics which can be obtained by sectioning a right circular cone and a plane in different positions.

उदाहरण :- वृत्त (Circle), परवलय (Parabola), दीर्घवृत्त (Ellipse), अतिपरवलय (hyperbola) आदि।



शांकव के विषय में कुछ महत्वपूर्ण तथ्य (Some Important Facts Related to Conics)

- शांकव के समतल में स्थित स्थिर बिन्दु को शांकव की नाभि (focus) कहते हैं तथा इसे अक्षर S से प्रदर्शित करते हैं।

The fixed point situated in the plane of the conic is called the focus of the conic and is represented by the letter S.

- स्थिर रेखा को शांकव की नियता (Directrix) कहते हैं।

The fixed line is called the directrix of the conic.

- अचर अनुपात को शांकव की उत्केन्द्रता (Eccentricity) कहते हैं तथा इसे अक्षर e से प्रदर्शित करते हैं।

The constant ratio is called the eccentricity of the conic and is represented by the letter e.

- (i) यदि उत्केन्द्रता $e < 1$ तब, दीर्घवृत्त (ellipse) होगा।
- (ii) यदि उत्केन्द्रता $e = 1$ तब, परवलय (Parabola) होगा।
- (iii) यदि उत्केन्द्रता $e > 1$ तब, अतिपरवलय (Hyperbola) होगा।
- (iv) यदि उत्केन्द्रता $e = 0$ तब, वृत्त (Circle) होगा।

- शांकव तथा अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु, शांकव का शीर्ष (Vertex) कहलाता है।

The point of intersection of the conic and the axis is called the vertex of the conic.

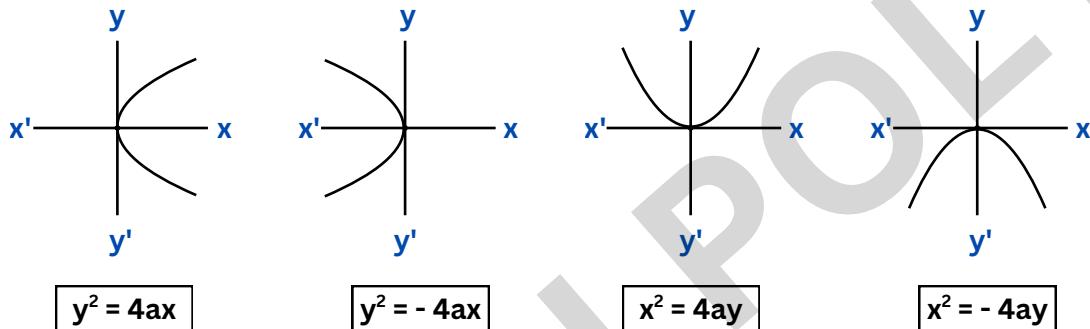
- शांकव की नाभि से होकर जाने वाली तथा अक्ष पर लम्ब जीवा को शांकव का नाभिलम्ब (Latus - Rectum) कहते हैं।

The chord passing through the focus of a conic and perpendicular to the axis is called the latus - rectum of the conic.

परवलय (Parabola)

- Parabola के चार रूप (form) होते हैं -

There are four forms of a parabola -



Parabola $y^2 = 4ax$

O → शीर्ष (Vertex) = (0, 0)

S → नाभि (Focus) = (a, 0)

zz' → नियता (directrix)

नियता का समीकरण (Equation of directrix)

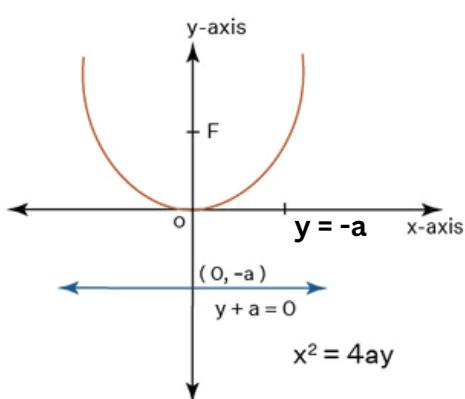
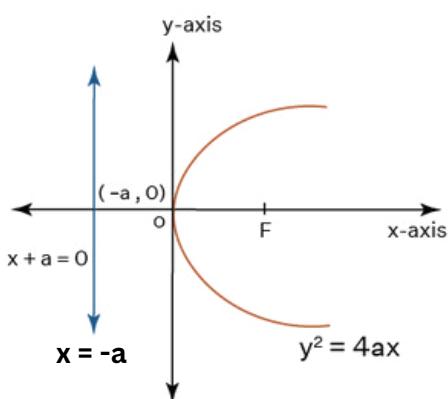
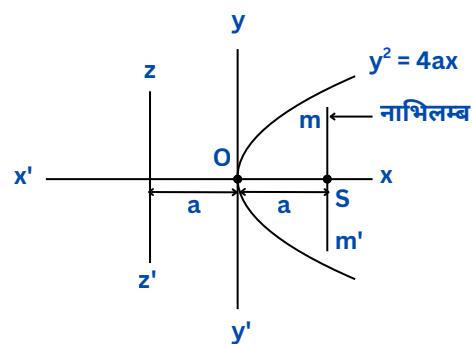
$$x = -a$$

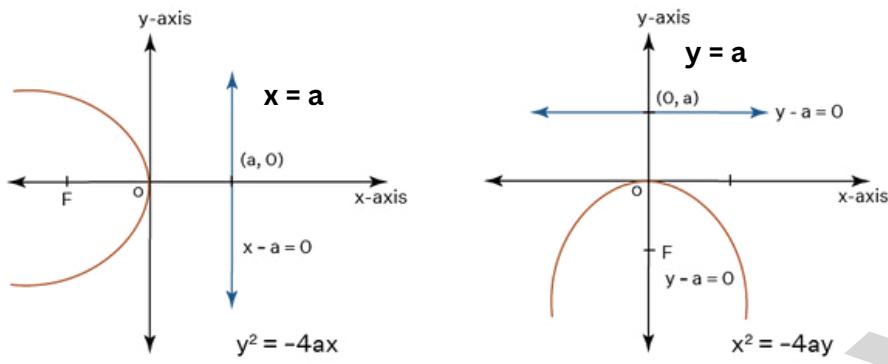
mm' नाभिलम्ब (latus - Rectum)

नाभिलम्ब का समीकरण (Equation of latus - Rectum)

$$x = a$$

नाभिलम्ब का लम्बाई (Length of latus - Rectum) = 4a





परवलय (Parabola)

Forms	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
Equation of the axis	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Equation of the directrix	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
Vertex	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Focus	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
Length of latus rectum	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$

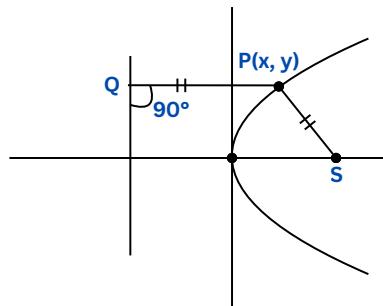
	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
शीर्ष के निर्देशांक	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
नाभि के निर्देशांक	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
नियता का समीकरण	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
नाभिलम्ब का समीकरण	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$
बिन्दु (x, y) की नाभि दूरी	$x + a$	$x - a$	$y + a$	$y - a$
किसी दिशा में मुख खुलता है?	X-अक्ष धन की दिशा में	X-अक्ष ऋण दिशा में	Y-अक्ष धन दिशा में	Y-अक्ष ऋण दिशा में

परवलय (Parabola) के लिये

बिन्दु P की नाभि से दूरी (PS) =

बिन्दु P से नियता पर डाले गये लम्ब की लम्बाई (PQ)

$$PS = PQ$$



Q. 1:- उस परवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नाभि (4,3) तथा नियता $4x - 3y + 2 = 0$ है।

Find the equation of the parabola whose focus is (4, 3) and directrix is $4x - 3y + 2 = 0$.

नाभि (4, 3)

नियता $4x - 3y + 2 = 0$

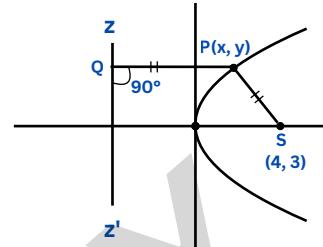
Parabola की Definition

Point P से नाभि की दूरी = Point P से नियता पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2} = \frac{4x - 3y + 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + 16 - 8x + y^2 + 9 - 6y} = \frac{4x - 3y + 2}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\sqrt{x^2 + 16 - 8x + y^2 + 9 - 6y} = \frac{4x - 3y + 2}{5}$$



Square on both side

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = \frac{(4x - 3y + 2)^2}{25}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$25x^2 + 25y^2 - 200x - 150y + 625 = 16x^2 + 9y^2 + 4 - 24xy - 12y + 16x$$

$$25x^2 + 25y^2 - 200x - 150y + 625 - 16x^2 - 9y^2 - 4 + 24xy + 12y - 16x = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 - 216x - 138y + 24xy + 621 = 0 \quad \boxed{\text{Ans.}}$$

Q. 2:- परवयल $y^2 = -12x$ की नाभि के निर्देशांक, अक्ष तथा नियता का समीकरण ज्ञात करो।

Find the Co-ordinate of focus, Axis and equation of directrix of parabola $y^2 = -12x$.

$$\text{Parabola} = y^2 = -12x$$

$$\text{Standard form} y^2 = -4ax$$

$$\text{compare, } -4a = -12$$

$$\boxed{a = 3} \quad \boxed{\text{Ans.}}$$

$$(1) \text{ नाभि के निर्देशांक} = (-3, 0)$$

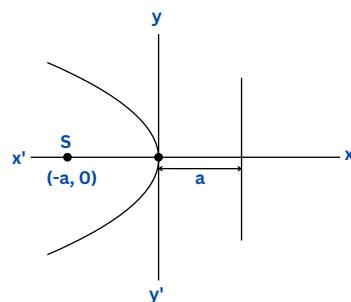
$$(2) \text{ अक्ष का समीकरण (x - Axis) : -}$$

$$\boxed{y = 0} \quad \boxed{\text{Ans.}}$$

$$(3) \text{ नियता का समीकरण } x = a$$

$$x = 3$$

$$\boxed{x - 3 = 0} \quad \boxed{\text{Ans.}}$$



Q. 3:- परवलय $y^2 = 16x$ की नाभि के निर्देशांक, नियता का समीकरण एवं नाभिलम्ब के निर्देशांक ज्ञात कीजिये ?

Find the coordinates of the focus, equation of directivity and coordinates of the normal of the parabola $y^2 = 16x$?

$$y^2 = 16x \dots (1)$$

Standard form. $y^2 = 4ax$

Compare, $4a = 16$

$$a = 4 \quad \text{Ans.}$$

(1) नाभि के निर्देशांक = $(4, 0)$

(2) नियता का समीकरण $x = -a$

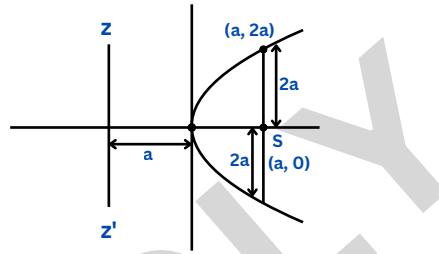
$$x = -4$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{Ans.}$$

नाभिलम्ब की लम्बाई = $4a$

नाभिलम्ब के निर्देशांक = $(a, \pm 2a)$

$$4, \pm 8 \quad \text{Ans.}$$



Q. 4:- परवलय $y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ की नाभि के निर्देशांक, शीर्ष, नियता एवं अक्ष के समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equations of the coordinates of the focus, vertex, directrix and axis of the parabola $y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$.

$$y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$$

$$y^2 - 6y = -4x - 13$$

$$y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 = -4x - 13$$

$$(y - 3)^2 - 9 = -4x - 13$$

$$(y - 3)^2 = -4x - 13 + 9$$

$$(y - 3)^2 = -4x - 4$$

माना $Y = y - 3$ तथा $X = x + 1$

$$Y^2 = -4X \dots (1)$$

Standard form: $Y^2 = -4AX \dots (2)$

Compare, $-4A = -4$

$$A = 1$$

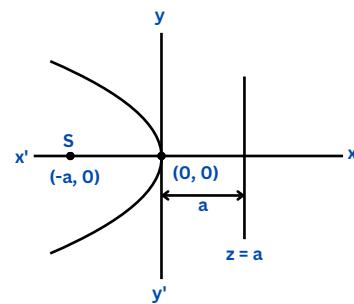
(1) नाभि के निर्देशांक = $(-A, 0)$

$$X = -A \quad Y = 0$$

$$X + 1 = -1 \quad Y - 3 = 0$$

$$X = -1 - 1 \quad Y = 3$$

$$X = -2 \quad \text{नाभि के निर्देशांक} = (-2, 3) \quad \text{Ans.}$$



शीर्ष के निर्देशांक $(0, 0)$

$x = 0$

$Y = 0$

$x + 1 = 0$

$Y - 3 = 0$

$x = -1$

$Y = 3$

शीर्ष के निर्देशांक $(-1, 3)$ **Ans.**नियता का समीकरण $X = A$

$x + 1 = 1$

$x = 0$ **Ans.**

अक्ष का समी० $(X - \text{Axis})$

$Y = 0$

$y - 3 = 0$ **Ans.**

Q. 5:- ज्ञात कीजिये कि परवलय $y^2 = 18x$ के किस बिन्दु पर कोटि, भुज की तीन गुनी है।Find at what point of the parabola $y^2 = 18x$ the ordinate is three times the abscissa.

$y^2 = 18x \dots \dots (1)$

 $x = h$ तथा $y = 3h$ समी० (1) में रखने पर -

$(3h)^2 = 18h$

$9h^2 = 18h$

$h = 2$

Point $(h, 3h) = (2, 6)$ **Ans.**माना :- x - अक्ष \rightarrow भुज (abscissa) = h y - अक्ष \rightarrow कोटि (ordinate) = $3h$ Q. 6:- उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष के निर्देशांक $(2, -3)$ तथा नाभि के निर्देशांक $(0, 5)$ हैं।Find the equation of the parabola whose vertex has coordinates $(2, -3)$ and focus has coordinates $(0, 5)$.

शीर्ष, नाभि और नियता का मध्य बिन्दु होता है।

नाभि $(0, 5)$ शीर्ष $(2, -3)$ माना नियता के निर्देशांक (x_1, y_1)

$$\frac{x_1 + 0}{2} = 2$$

$$x_1 = 4$$

$$\frac{y_1 + 5}{2} = -3$$

$$y_1 + 5 = -6 \Rightarrow y_1 = -11$$

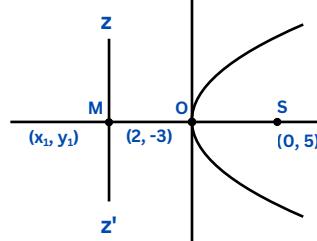
शीर्ष (O) तथा नाभि (S) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{5 - (-3)}{0 - 2}$$

$$= \frac{8}{-2}$$

$$= -4$$



m_1 के लम्बवत रेखा (नियता) की प्रवणता

$$(m_1, m_2, = -1)$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

नियता का समी० $y - y_1 = m (x - x_1)$

$$y - (-11) = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y + 11 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$4y + 44 = x - 4$$

$$x - 4 - 4y - 44 = 0$$

नियता

$$\boxed{x - 4y - 48 = 0}$$

नाभि (0, 5)

परवलय का समी०

Point P(x, y) से नाभि की दूरी = Point P (x, y) से नियता पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 5)^2} = \frac{|x - 4y - 48|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}}$$

square on both side

$$x^2 + (y - 5)^2 = \frac{(x - 4y - 48)^2}{17}$$

$$17[x^2 + (y - 5)^2] = (x - 4y - 48)^2$$

$$17(x^2 + y^2 - 10y + 25)$$

$$= 17x^2 + 17y^2 - 170y + 425$$

$$(x - 4y - 48)^2$$

$$= x^2 + 16y^2 + 2304 - 8xy - 96x + 384y$$

$$17x^2 + 17y^2 - 170y + 425 - (x^2 + 16y^2 + 2304 - 8xy - 96x + 384y) = 0$$

$$\boxed{16x^2 + 8xy + y^2 + 96x - 554y - 1879 = 0} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

दीर्घवृत्त (Ellipse)

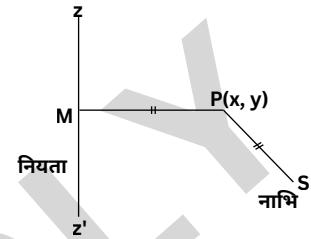
- यदि नाभि S, नियता ZZ' तथा दीर्घवृत्त पर स्थित कोई बिन्दु P हो तब, परिभाषा से, बिन्दु P की नाभि से दूरी = e. बिन्दु P की नियता ZZ' से दूरी अर्थात्

If the nucleus is S, the constant ZZ' and a point P on the ellipse, then, by definition, the distance of the point P from the nucleus = e. The distance of the point P from the constant ZZ' viz

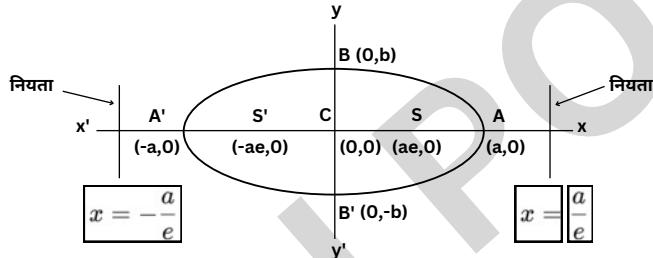
$$PS = e \cdot PM$$

जहाँ $e < 1$

e = दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता (Eccentricity of an Ellipse)



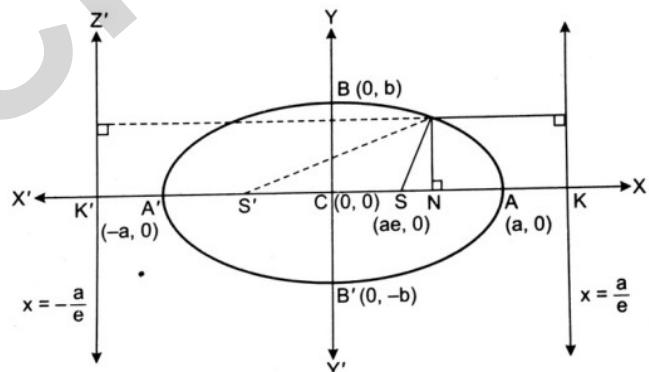
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard Equation of an Ellipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{जहाँ } b^2 = a^2(1 - e^2)$$



दीर्घवृत्त की नाभि (Foci of Ellipse)

नाभि S के निर्देशांक $= (ae, 0)$
नाभि S' के निर्देशांक $= (-ae, 0)$
नाभियों के बीच की दूरी $= 2ae$

दीर्घवृत्त की नियताएँ (Directrices of Ellipse)

नियता ZK का समीकरण, $x = \frac{a}{e}$

नियता Z'K' का समीकरण, $x = \frac{-a}{e}$

नियताओं के बीच की दूरी $= \frac{2a}{e}$

दीर्घवृत्त के शीर्ष (Vertices of Ellipse)

शीर्ष A के निर्देशांक = (a, 0)
शीर्ष A' के निर्देशांक = (-a, 0)

दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष (Major & Minor Axis of Ellipse)

दीर्घाक्ष AA' की लम्बाई = 2a
लघुअक्ष BB' की लम्बाई = 2b

दीर्घवृत्त का केन्द्र (Centre of Ellipse)

केन्द्र C के निर्देशांक = (0, 0)

दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब की लम्बाई (Length of Latus Rectum of Ellipse)

$$\text{दीर्घवृत्त } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ के नाभिलम्ब की लम्बाई} = \frac{2b^2}{a}$$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से सम्बन्धित महत्त्वपूर्ण परिणाम

	$a > b$	$a < b$
केन्द्र के निर्देशांक	(0, 0)	(0, 0)
दीर्घाक्ष की लम्बाई	2a	2b
लघु अक्ष की लम्बाई	2b	2a
दीर्घाक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
लघु अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$

शीर्षों के निर्देशांक	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
उत्केन्द्रता	$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$
नाभियों के निर्देशांक	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
नाभियों के बीच दूरी	$2ae$	$2be$
नियताओं के समीकरण	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{b}{e}$
नियताओं के बीच दूरी	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{b}$
बिन्दु (x, y) की नाभीय दूरियाँ	$a \pm ex$	$b \pm ey$

Q. 1:- उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करों जिसकी उत्केन्द्रता $2/3$ नाभि $(3,5)$ तथा नियता $4x + 3y = 6$ है।

Find the equation of the ellipse whose eccentricity is $2/3$ navel $(3,5)$ and constant $4x + 3y = 6$.

$$e = \frac{2}{3}$$

नाभि $(3, 5)$

नियता का सभी $4x + 3y = 6$

दीर्घवृत्त का समी०

किसी Point P से नाभि की दूरी = e. Point P से नियता पर लम्ब की लम्बाई

$$PS = e.PM$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4x + 3y - 6}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4x + 3y - 6}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4x + 3y - 6}{\sqrt{25}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4x + 3y - 6}{5}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} (4x + 3y - 6)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{2}{15} (4x + 3y - 6)$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{2}{15}\right)^2 (4x + 3y - 6)^2$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{4}{225} (4x + 3y - 6)^2 \quad \text{Ans.}$$

Q. 2:- उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(\pm 2, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 1, 0)$ हैं।

Find the equation of the ellipse whose vertices are $(\pm 2, 0)$ and foci are $(\pm 1, 0)$.

शीर्ष $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

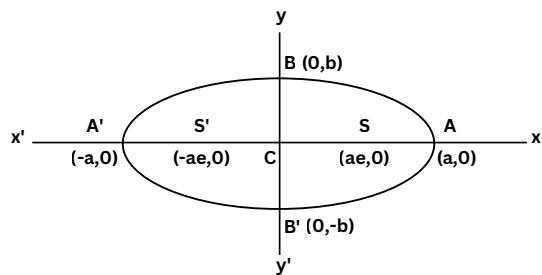
$$a = 2$$

नाभियाँ $(\pm ae, 0) = (\pm 1, 0)$

$$ae = 1$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2(1 - e^2) \\
 b^2 &= 2^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\
 &= 4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
 &= 4 \times \frac{3}{4} \\
 b^2 &= 3 \\
 b &= \sqrt{3}
 \end{aligned}
 \quad \begin{aligned}
 \text{दीर्घवृत्त का समीकरण} \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
 \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1} \quad \text{Ans.}
 \end{aligned}$$

Q. 3:- उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसके दीर्घाक्ष की लम्बाई 16 तथा नाभियाँ $(0, \pm 6)$ हैं।

Find the equation of the ellipse whose major axis is 16 and foci are $(0, \pm 6)$.

माना दीर्घवृत्त का समीकरण, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जहाँ $a < b$

उक्त दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष की लम्बाई $2b$ तथा नाभियाँ $(0, \pm be)$ हैं।

इसलिए $2b = 16$ तथा $be = 6$
 $b = 8$ तथा $be = 6$

अब, $a^2 = b^2(1 - e^2) = b^2e^2 = b^2 - (be)^2$
 $= 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad \text{या} \quad \boxed{\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1} \quad \text{उत्तर}$$

Q. 4:- उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{2}/5$ तथा जो बिन्दु $(-3, 1)$ से होकर जाता है।

Find the equation of the ellipse whose eccentricity is $\sqrt{2}/5$ and which passes through the point $(-3, 1)$.

हल—माना दीर्घवृत्त का समीकरण, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जाहाँ $a > b$

उक्त दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

इसलिए $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow b^2 = \frac{3a^2}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{5}{3a^2} \quad \dots(1)$

∴ दीर्घवृत्त विन्दु $(-3,1)$ से होकर जाता है,

$$\therefore \frac{(-3)^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{5}{3a^2} = 1 \quad \dots(1) \text{ से}$$

$$\Rightarrow \frac{27+5}{3a^2} = 1 \Rightarrow \frac{32}{3a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{32}{3}$$

इसलिए (1) से,

$$b^2 = \frac{3}{5} \times \frac{32}{3} = \frac{32}{5}$$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण—

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$$

$$\text{या } \frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1$$

तथा

$$3x^2 + 5y^2 = 32$$

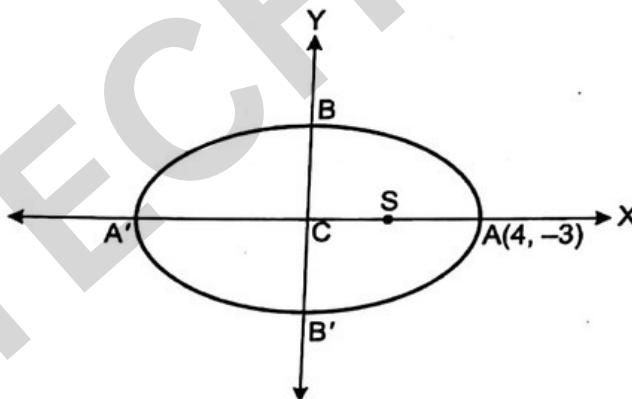
उत्तर

Q. 5:- उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अक्ष निर्देशाक्षों के समान्तर हैं तथा केन्द्र $(2, 3)$, एक नाभि $(3, -3)$ एवं एक शीर्ष $(4, -3)$ है।

Find the equation of an ellipse whose axes are parallel to the coordinate axes and has centre $(2, -3)$, a focus $(3, -3)$ and a vertex $(4, -3)$.

हल—माना दीर्घवृत्त का केन्द्र C , एक नाभि S तथा एक शीर्ष A है।

तब, $C \equiv (2, -3)$, $S \equiv (3, -3)$ तथा $A \equiv (4, -3)$



माना दीर्घवृत्त के दीर्घ एवं लघु अक्षों की लम्बाईयाँ क्रमशः $2a$ तथा $2b$ हैं।

$$\text{सूत्र } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ से,}$$

$$\text{दीर्घवृत्त का समीकरण, } \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{b^2} = 1 \quad \dots(1)$$

∴ दीर्घवृत्त के केन्द्र तथा शीर्ष के बीच की दूरी अर्द्ध-दीर्घाक्ष की लम्बाई के बराबर होती है,

$$\therefore CA = \text{अर्द्ध-दीर्घाक्ष की लम्बाई} = a$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+3)^2} \Rightarrow a = 2 \quad \dots(2)$$

∴ दीर्घवृत्त के केन्द्र तथा नाभि के बीच की दूरी = $a e$

$$\therefore CS = a e \Rightarrow ae = \sqrt{(3-2)^2 + (-3+3)^2}$$

$$\Rightarrow ae = 1 \quad \dots(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से,

$$2e = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 2^2 \left[1 - \left\{ \frac{1}{2} \right\}^2 \right] = 4 \left[1 - \frac{1}{4} \right] = 4 - 1 = 3$$

समीकरण (1) में $a = 2$ तथा $b^2 = 3$ रखने पर,

$$\begin{aligned} \text{दीर्घवृत्त की अभीष्ट समीकरण,} \quad & \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1 \\ \text{या} \quad & 3(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 12 \quad \text{या} \quad 3(x-2)^2 + 4(y+3)^2 - 12 = 0 \\ \text{या} \quad & \boxed{3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0} \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

Q. 6:- दीर्घवृत्त $16x^2 + 25y^2 = 400$ के लिए निम्नलिखित प्रत्येक को ज्ञात कीजिए -

Find each of the following for the ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ -

(a) दीर्घ एवं लघु अक्ष की लम्बाईयाँ।

Lengths of major and minor axis.

(b) उत्केन्द्रता

Eccentricity

(c) शीर्षों एवं नाभियों के निर्देशांक

Coordinates of vertices and foci

(d) नियतांकों के समीकरण।

Equations of directrices.

(e) नाभिलम्ब की लम्बाई।

Length of latus rectum.

हल- दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 = 400 \quad \text{या} \quad & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1 \quad & \end{aligned}$$

यह समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के रूप का है।

तुलना करने पर,

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 16$

इसलिए

$a = 5$ तथा $b = 4$

स्पष्ट है कि

$a > b$

अतः दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष क्रमशः X - अक्ष तथा Y - अक्ष के अनुदिश है।

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 5 = 10$ Ans.

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 4 = 8$ Ans.

माना दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता e है।

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \text{या} \quad e^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \text{या} \quad e = \frac{3}{5}$$

अतः दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता = $\frac{3}{5}$ Ans.

शीर्षों के निर्देशांक = $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$ Ans.

नाभियों के निर्देशांक = $(\pm ae, 0) = (\pm 3, 0)$ Ans.

नियतार्थों के समीकरण,

$$x = \pm \frac{a}{e} \quad \text{या} \quad x = \pm \frac{5}{\frac{3}{5}} \quad \text{या} \quad x = \pm \frac{25}{3}$$

$$\text{नाभिलम्ब की लम्बाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{5} = \frac{32}{5} \quad \boxed{\text{Ans.}}$$

Q. 7:- दर्शाइए कि $9x^2 + 4y^2 - 54x - 56y + 241 = 0$ एक दीर्घवृत्त का समीकरण हैं। इसके लिए $2x = 1$ निम्नलिखित प्रत्येक को ज्ञात कीजिए -

Show that $9x^2 + 4y^2 - 54x - 56y + 241 = 0$ is the equation of an ellipse. For this $2x = 1$ Find each of the following-

(a) उत्केन्द्रता

Eccentricity

(b) नाभिलम्ब की लम्बाई।

Length of latus rectum.

(c) दीर्घाक्ष की लम्बाई

Length of major axis

(d) शीर्षों के निर्देशांक

Coordinates of vertices

(e) नाभियों के निर्देशांक

Coordinates of foci

(f) नियतार्थों के समीकरण

Equations of directrices

हल- दिया हुआ समीकरण,

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 56y + 241 = 0$$

$$(9x^2 - 54x) + (4y^2 - 56y) + 241 = 0$$

$$9[(x^2 - 6x + 9) - 9] + 4[(y^2 - 14y + 49) - 49] + 241 = 0$$

$$9(x - 3)^2 - 81 + 4(y - 7)^2 - 196 + 241 = 0$$

$$9(x - 3)^2 + 4(y - 7)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$$

इसमें $x - 3 = X$ तथा $y - 7 = Y$ रखने पर,

दिया हुआ समीकरण,

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$$

यह समीकरण $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$ के रूप का है जहाँ $a = 2$ तथा $b = 3$

इसलिए दिया हुआ समीकरण एक दीर्घवृत्त निरूपित करता है।

स्पष्ट है कि $a < b$

अतः दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष तथा लघु अक्ष क्रमशः Y - अक्ष तथा X - अक्ष के समान्तर हैं।

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \text{या} \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

अतः दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ Ans.

नाभिलम्ब की लम्बाई = $\frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$ Ans.

दीर्घाक्ष की लम्बाई = $2b = 2 \times 3 = 6$ Ans.

अतिपरवलय (Hyperbola)

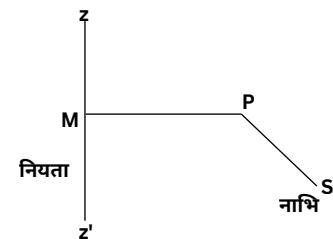
- यदि नाभि S, नियता ZZ' तथा अतिपरवलय पर स्थित कोई बिन्दु P है तो परिभाषा से बिन्दु P की नाभि S से दूरी = $e \times$ बिन्दु P की नियता ZZ' से दूरी

If the nucleus is S, the constant ZZ' and a point P on the hyperbola, then by definition the distance of the point P from the nucleus S = $e \times$ the distance of the point P from the constant ZZ'

$PS = e \cdot PM$

जहाँ $e > 1$

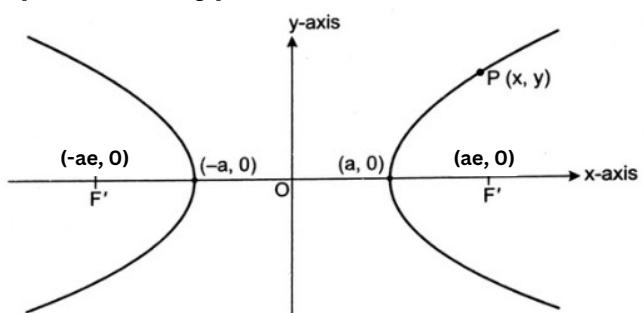
e = दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता (Eccentricity of an Ellipse)



अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard Equation of Hyperbola)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

जहाँ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$



अतिपरवलय की उत्केन्द्रता (Eccentricity of Hyperbola)

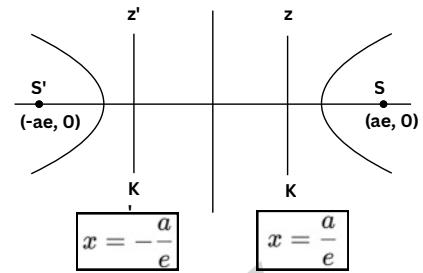
$$b^2 = a^2(e - 1)$$

$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1$$

उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

अतिपरवलय की नाभियाँ (Foci of Hyperbola)

नाभि S के निर्देशांक $= (ae, 0)$
 नाभि S' के निर्देशांक $= (-ae, 0)$
 नाभियों के बीच की दूरी $= 2ae$



अतिपरवलय की नियताएँ (Directrices of Hyperbola)

नियता ZK का समीकरण, $x = \frac{a}{e}$
 नियता $Z'K'$ का समीकरण, $x = -\frac{a}{e}$
 नियताओं के बीच की दूरी $= \frac{2a}{e}$

अतिपरवलय के शीर्ष (Vertices of Hyperbola)

शीर्ष A के निर्देशांक $= (a, 0)$
 शीर्ष A' के निर्देशांक $= (-a, 0)$

अतिपरवलय की अनुप्रस्थ-अक्ष (transverse Axis of Parabola)

अनुप्रस्थ अक्ष AA' की लम्बाई $= 2a$

अतिपरवलय का नाभिलम्ब (Latus - Rectum of Hyperbola)

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a}$

अतिपरवलय से सम्बन्धित महत्वपूर्ण परिणाम (Some Important Results related to Hyperbola)

	$a > b$	$b > a$
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
केन्द्र के निर्देशांक	$(0, 0)$	$(0, 0)$
शीर्षों के निर्देशांक	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई	$2a$	$2b$
अनुप्रस्थ अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$x = 0$
संयुग्मी अक्ष की लम्बाई	$2b$	$2a$
संयुग्मी अक्ष का समीकरण	$x = 0$	$y = 0$

नाभिलम्ब की लम्बाई	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{a}$
उत्केन्द्रता	$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$
नाभियों के निर्देशांक	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
नियताओं के समीकरण	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{b}{e}$
बिन्दु (x, y) की नाभीय दूरियाँ	$ex \pm a$	$ey \pm b$
नाभियों के बीच दूरी	$2ae$	$2be$
नियताओं के बीच दूरी	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$

Q. 1:- उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नाभियाँ $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $8a$ है।

Find the equation of the hyperbola whose foci are $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ and the length of the latus chord is $8a$.

Sol:- हम जानते हैं कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की नाभियाँ $= (\pm ae, 0)$

तब,

$$ae = \pm 2\sqrt{3} \dots \dots (1)$$

तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई,

$$\frac{2b^2}{a} = 8 \Rightarrow b^2 = 4a \dots (2)$$

तब,

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$4a = a^2e^2 - a^2$$

$$4a = (2\sqrt{3})^2 - a^2$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$a^2 - 6a + 2a - 12 = 0$$

$$a(a - 6) + 2(a - 6) = 0$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0$$

परन्तु व का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है,

इसलिये,

$$a = 6$$

तब,

$$b^2 = 4a = 4 \times 6 = 24$$

$$b = 2\sqrt{6}$$

अतिपरवलय का समीकरण,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{24} = 1$$

Ans.

Q. 2:- अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के लिए निम्नलिखित प्रत्येक को ज्ञात कीजिए ?

Find each of the following for the hyperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$?

(a) अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्षों की लम्बाईयाँ।

Lengths of transverse and conjugate axes.

(b) उत्केन्द्रता

Eccentricity

(c) नाभियाँ

Umbilical cord

(d) शीर्षों के निर्देशांक

Coordinates of vertices

(e) नाभिलम्ब

Lattice

(f) नियाताओं के समीकरण

Equations of regulators

अतिपरवलय का समीकरण, $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\text{या } \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \text{ या } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

यह समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के रूप का है।

तुलना करने पर,

$$a^2 = 16 \text{ तथा } b^2 = 9$$

इसलिए,

$$a = 4 \text{ तथा } b = 3$$

$$(a) \text{ अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई } = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{तथा संयुग्मी अक्ष की लम्बाई } = 2b = 2 \times 3 = 6$$

(b) माना अतिपरवलय की उत्केन्द्रता e है।

$$\text{तब, } e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ या } e^2 = 1 + \frac{9}{16}$$

$$\text{या } e = \frac{25}{16} \quad \text{या } e = \frac{5}{4}$$

अतः अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $= \frac{5}{4}$

(c) नाभियाँ $\equiv \pm (ae, 0) \equiv (\pm 5, 0)$

(d) शीर्षों के निर्देशांक $= (\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

$$(e) \text{ नाभिलम्ब } = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$(f) \text{ नियतकों के समीकरण } x = \pm \frac{a}{e}$$

$$\text{या } x = \pm \frac{4}{\frac{5}{4}} \quad \text{या } x = \pm \frac{16}{5} \quad \boxed{\text{Ans.}}$$

Q. 2:- उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10})$ हैं तथा जो बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाता है।

Find the equation of the hyperbola whose foci are $(0, \pm \sqrt{10})$ and which passes through the point $(2, 3)$.

स्पष्ट है कि अतिपरवलय की नाभियाँ $(0, \pm \sqrt{10})$ y - अक्ष पर हैं। तब माना

$$\text{अतिपरवलय का समीकरण} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

तथा

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm be) = (0, \pm \sqrt{10})$$

$$be = \sqrt{10}$$

चूँकि अतिपरवलय बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाता है।, अतः समीकरण (1) से

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = -1$$

$$\frac{4}{b^2(e^2 - 1)} - \frac{9}{b^2} = -1$$

$$\frac{4}{10 - b^2} - \frac{9}{b^2} = -1$$

$$4b^2 - 90 + 9b^2 = -b^2(10 - b^2)$$

$$4b^2 - 90 + 9b^2 + 10b^2 - b^4 = 0$$

$$b^4 - 23b^2 + 90 = 0$$

$$b^4 - 18b^2 - 5b^2 + 90 = 0$$

$$b^2(b^2 - 15) - 5(b^2 - 18) = 0$$

$$(b^2 - 18)(b^2 - 5) = 0$$

$$b^2 = 5, 18$$

੧੮

$$a^2 = b^2 (e^2 - 1) = b^2 e^2 - b^2 = 10 - 5 = 5$$

या

$$a^2 = b^2 e^2 - b^2 = 10 - 18 = -8 \quad (\text{जो कि अमान्य है!})$$

अतः $a^2 = 5$, $b^2 = 5$, तब समीकरण (1) से,

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = -1$$

$$x^2 - y^2 = -5$$

$$x^2 - y^2 + 5 = 0$$