UNIT - III
Differential Equations & Numerical Methods

Definition of differential Equations, order and degree of a differential equation, formation of differential equations, solution of first order and first degree differential equations by variable separable method (simple problems). Trapezoidal rule, Simpson's 1/3 and Simpson's 3/8 rule and their applications in simple cases. MATLAB - Simple Introduction.

TOPICS

1. **अवकल समीकरण की परिभाषा (Definition of Differential Equation)**
2. **अवकल समीकरण का कोटि (Order of Differential Equation)**
3. **अवकल समीकरण की घात (Degree of Differential Equation)**
4. **अवकल समीकरण को बनाना (Formation of differential equation)**
5. **एकल कोटि तथा एकल घात अवकल समीकरण का हल (Solution of first order and first degree differential equation):**

- **पृथक्करणीय चर विधि द्वारा (By variable separable method)**

6.समलंबी नियम (Trapezoidal Rule)

7. सिम्पसन नियम (Simpson's Rule)

(i) Simpson's 1/3 rule **(ii) Simpson's 3/8 rule**

8. MATLAB

Definition of Differential Equation (अवकल समीकरण की परिभाषा)

- अवकल समीकरण एक ऐसा समीकरण होता है जिसमें स्वतन्त्र और परतन्त्र चर तथा परतन्त्र चरों के अवकल गुणांक सम्बद्ध होते हैं :
  A differential equation is an equation in which the independent and dependent variables and the differential coefficients of the dependent variables are related.

जैसे :-

① $\frac{dy}{dx} + x^2y = 1$

② $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$

③ $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

अवकल गुणांक (Differential Coefficient)

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$$

अवकल समीकरण का कोटि (Order of Differential Equation)

- **एक अवकल समीकरण का कोटि (Order) वही होता है जो उसमें मौजूद उच्चतम अवकल गुणांक का होता है।**
  The order of a differential equation is the same as that of the highest differential coefficient in it.

जैसे :-

① $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ का order = 2

② $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} + xy = 1$ का order = 3

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$ का order = 1

④ $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x$ का order = 1

⑤ $x^2dx = y^2dy$ का order = 1
या $x^2 = y^2\frac{dy}{dx}$

⑥ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \cos x$ का order = 1

⑦ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ का order = 3

NOTE :-

- **"किसी अवकलन समी० में अवकल गुणांक जितनी अधिकतम बार अवकलित करके प्राप्त किया जाता है, उसे अवकलन समी० का order कहते हैं।"**

  The maximum number of times in which the differential coefficient in a differential equation is obtained by differentiating it is called the order of the differential equation.

अवकल समीकरण की घात (Degree of Differential Equation)

- **उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात (degree) अवकल समीकरण की घात कहलाती है।**

  The degree of the highest order differential coefficient is called the degree of the differential equation.

जैसे :-

① $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ की Degree = 1

② $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y = 0$ की Degree = 2

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$ का order = 1 तथा degree = 1

④ $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x$ का order = 1 तथा degree = 1

⑤ $x^2dx = y^2dy$ का order = 1 तथा degree = 1
या $x^2 = y^2\frac{dy}{dx}$

⑥ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \cos x$ का order = 1 तथा degree = 3

⑦ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ का order = 3 तथा degree = 1

Q.1 :- निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि (Order) तथा घात (Degree) ज्ञात करो।

Find the order and degree of the following differential equations.

(A) $\frac{dy}{dx} = \sin x$ Order = 1 Degree = 1

(B) $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y$ Order = 2 Degree = 1

(C) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ Order = 3 Degree = 2

(D)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Square on both sides:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Order = 2

Degree = 2

(E) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Order = 2

Degree = 1

(F)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

Square on both sides:

$$x^4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Order = 2

Degree = 2

अवकल समीकरण को बनाना (Formation of differential equation) :-

- चर और अचर राशियों के किसी साधारण समीकरण को, अवकलित करके तथा स्वेच्छ (arbitrary) स्थिरांकों का विलोपन करके, अवकल समीकरण बनाया जा सकता है।

  Any ordinary equation of variable and constant quantities can be made a differential equation by differentiating it and eliminating arbitrary constants.

- समीकरण का अवकलन अधिकतम उतनी बार करते हैं जितने समीकरण में स्वेच्छ अचर होते हैं।

  The equation is differentiated maximum as many times as there are arbitrary constants in the equation.

NOTE :-

- किसी साधारण समीकरण में जितने स्वच्छ अचर होते है, उसका उतनी बार अवकलन करके, स्वच्छ अचर को Remove करके अवकल समीकरण बनाते हैं।

  A differential equation is formed by differentiating a simple equation as many times as the number of arbitrary constants it contains and then removing the arbitrary constants.

जैसे :-

- **y = mx का अवकलन समीकरण (Differential Equation) बनाइए।**

इसमें केवल एक Constant (m) है, इसलिए इसका केवल एक बार differential करेंगे।

y = mx -------- (1)

d.w.r.to x

$$\frac{dy}{dx} = m \quad ----(2)$$

m का मान समीकरण(1) से समीकरण (2) में रखने पर -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0$$ **Ans.**

Q.1 :- y = mx + c का अवकलन समीकरण बनाइए।

इसमें दो constants (m और C) हैं।

y = mx + C -------- (1)

d.w.r.to x

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot 1 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = m \quad ----(2)$$

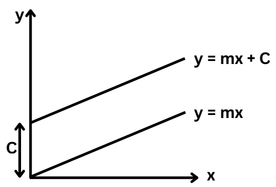
Again d.w.r.to x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad ----(3)$$ **Ans.**

Q.2 :- मूल बिन्दु से होकर गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये।
Find the differential equation of all straight lines passing through the origin.

Equation of Line Passing through origin.

y = mx -------- (1)



इसमें एक Constant (m) है।

d.w.r.to x

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot 1 \quad ----(2)$$

समीकरण (1) से m का मान समीकरण (2) में रखने पर -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0$$ **Ans.**

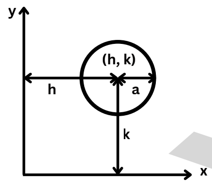
Q.3 :- उस वृत्त समूह का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये जो y - अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करते हैं।
Find the differential equation of the group of circles which touch the y-axis at the origin.

वृत्त का समीकरण (Equation of circle)

केन्द्र (Centre) = c (h, k)

त्रिज्या (Radius) = a

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$



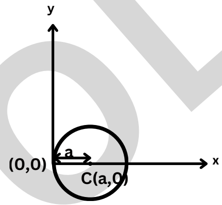
y - अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = a^2$

$(x^2 + a^2 - 2x.a) + y = a^2$

$x^2 + a^2 - 2xa + y^2 - a^2 = o$

$x^2 + y^2 - 2ax = o$ ------ (1)



इसमें एक constants (a) हैं।

d.w.r.to x

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2a \times 1 = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2a \quad ----(2)$$

समीकरण (1) से 2a का मान समीकरण (2) में रखने पर -

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$$2x^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$2xy \cdot \frac{dy}{dx} + 2x^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$\boxed{2xy \cdot \frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0}$$ **Ans.**

Q.4 :- $y = a.\, e^{(2x)} + b.\, e^{-3x} + c.\, e^{x}$ के संगत अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये।
Find the differential equation corresponding to.

$y = a.\, e^{(2x)} + b.\, e^{-3x} + c.\, e^{x}$ ------ (1)

इसमें तीन constants (a, b, c) हैं।

d.w.r. to x

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} + (-3)be^{-3x} + ce^{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - 3be^{-3x} + ce^{x} \quad ----(2)$$

Again d.w.r.to x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + 9be^{-3x} + ce^x \quad ----(3)$$

Again d.w.r.to x

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8ae^{2x} - 27be^{-3x} + ce^x \quad ----(4)$$

समीकरण (1) को 6 से गुणा करके समीकरण (4) में जोड़ने पर

$$6y + \frac{d^3y}{dx^3} = 14ae^{2x} - 21be^{-3x} + 7ce^x$$

$$6y + \frac{d^3y}{dx^3} = 7(2ae^{2x} - 3be^{-3x} + ce^x)$$

$$6y + \frac{d^3y}{dx^3} = 7\frac{dy}{dx} \quad \text{(समीकरण 2 से)}$$

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0}$$ **Ans.**

Q.5 :- y = A. $e^{(2x)}$ - B. e^{-x} का संगत अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये।
Find the differential equation corresponding to.

y = A. $e^{(2x)}$ - B. e^{-x} ------- (1)

इसमें दो Constant (A, B) है।

d.w.r. to x

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{-x} \quad \text{———} (2)$$

Again d.w.r. to x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} - Be^{-x} \quad \text{———} (3)$$

समीकरण (1) + समीकरण (2) से -

$$y + \frac{dy}{dx} = 3Ae^{2x} \quad \text{———} (4)$$

समीकरण (2) + समीकरण (3) से -

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 6Ae^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \times (3Ae^{2x})$$

समीकरण (4) से 3A. e^{2x} का मान रखने पर -

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2y + 2\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0}$$ **Ans.**

Q.6 :- वक्रो के समीकरण $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ का अवकल समीकरण ज्ञात करो यहाँ C_1 , C_2 स्वेच्छ अचर है।

Find the differential equation of the curve $y = C_1$ COS ax + C_2 sin ax where C_1 , C_2 are arbitrary constants.

$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ ------ (1)

इसमें दो Constant (C_1 , C_2) है।

d.w.r. to x

$$\frac{dy}{dx} = -c_1 \sin(ax) \cdot (a \times 1) + c_2 \cos(ax) \cdot (a \times 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax) \quad \text{———} \ (2)$$

Again d.w.r. to x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 c_1 \cos(ax) - a^2 c_2 \sin(ax)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 (c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax))$$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर -

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2(y)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0}$$ **Ans.**

Q.7:- समीकरण $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$ के लिए अवकल समीकरण बनाओ जहाँ A, B तथा C अचर है।

Form the differential equation for the equation $y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$, where A, B and C are constants.

$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$ ------ (1)

इसमें तीन Constant (A, B, C) है।

d.w.r.to x

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{x} + 0 \quad \text{———} \ (2)$$

Again d.w.r.to x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + Be^{x} \quad \text{———} \ (3)$$

Again d.w.r.to x

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8Ae^{2x} + Be^{x} \quad \text{———} \ (4)$$

समीकरण (2) + समीकरण (3) से -

$$\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}=-2Ae^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x} \quad \text{———} \ (5)$$

समीकरण (3) + समीकरण (4) से -

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}=-4Ae^{2x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}=2\times(2Ae^{2x})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}=2\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\right)$$

समीकरण (5) से 2A. e^{2x} का मान रखने पर -

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0}$$ **Ans.**

Q.8:- वह अवकल समीकरण ज्ञात करो जिसका हल $ax^2 + by^2 = 1$ है।

Find the differential equation whose solution is $ax^2 + by^2 = 1$.

$ax^2 + by^2 = 1$ ------ (1)

इसमें दो Constant (a, b) है।

d.w.r.to x

$$2a\cdot x+2b\cdot y\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{———} (2)$$

Again d.w.r.to x

$$2a(1)+2b\left(y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$2a+2b\left(y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=0$$

$$2b\left(y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=-2a$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{a}{b} \quad \text{———} \ (3)$$

समी (2) से :

$$2by\frac{dy}{dx}=-2ax$$

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-2a}{2b}$$

$-\frac{a}{b}$ का मान समी (3) से रखने पर -

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0}$$ **Ans.**

Q.9:- उन वृत्तो का अवकल समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y- अक्ष पर स्थित हैं।

Find the differential equation of circles which pass through the origin and whose centers lie on the y - axis.

वृत्त का समी $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=a^2}$

केन्द्र (h, K), त्रिज्या = a

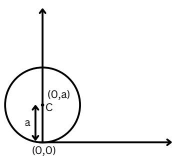
वृत्त का समीकरण जो मूल बिन्दु से जाता है तथा केन्द्र y - अक्ष पर है।

$$\boxed{(x-0)^2+(y-0)^2=a^2}$$

$x^2 + (y^2 + a^2 - 2ay) = a^2$

$x^2 + y^2 + a^2 - 2ay - a^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ------ (1)



इसमें एक Constant (a) है।

d.w.r.to x

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a\frac{dy}{dx} = 0 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से 2a का समीकरण (2) में रखने पर

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - \left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

y से गुणा करने पर -

$$2xy + 2y^2\frac{dy}{dx} - (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + 2y^2\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + y^2\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + \frac{dy}{dx}(y^2 - x^2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(y^2 - x^2) = -2xy$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}}$$ **Ans.**

Q.10:- समीकरण x = A cos (nt + α) द्वारा सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion) का अवकल समीकरण ज्ञात करो।

Find the differential equation of Simple Harmonic Motion by the equation x = A cos(nt + α).

$x = A\cos(nt + \alpha)$ ------- (1)

इसमें दो Arbitrary Constant (A, α) है।

d.w.r.to x

$$\frac{dx}{dt} = -A\sin(nt+\alpha)\cdot n$$

Again d.w.r. to x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -An^2\cos(nt+\alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2A\cos(nt+\alpha) \quad ...(2)$$

समी से A cos (nt + α) का मान रखने पर

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0}$$ **Ans.**

अवकल समीकरण का हल (Solution of a differential equation) :-

पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण
(Differential equation with variable variable separable) :-

NOTE :-

- इस method द्वारा अवकलन समीकरण (D.E.) में X वाले सभी terms (पदों) को dx के साथ तथा y वाले सभी terms (पदों) को dy के साथ अलग - अलग कर लेते हैं।
- dx और dy को अलग - अलग करने के बाद समकलन (Integration) करके अवकलन समीकरण हल (solve) करते हैं।

Ex :- $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = (1 + y^2)$ को हल कीजिए।

$$(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

Integration on both side

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} c$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) = \tan^{-1} c$$

$$\boxed{\frac{y-x}{1+xy} = c}$$ **Ans.**

NOTE :- dx & dy कभी भी हर (Denominator) में नहीं होने चाहिए।

Formula :-

$$\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\left(\frac{A-B}{1+A\cdot B}\right)$$

Q.11 :- अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ को हल करो।

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y} + x^2e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x + x^2)$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = (e^x + x^2)dx$$

$$e^y\,dy = (e^x + x^2)dx$$

Integration on both side

$$\int e^y\,dy = \int (e^x + x^2)dx$$

$$\boxed{e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C}$$ **Ans.**

Q.12:- अवकल समीकरण $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$ को हल करो। dx

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$$

$$e^y\,dy = (e^x + x^2)dx$$

Integration on both side

$$\int e^y\,dy = \int (e^x + x^2)dx$$

$$\boxed{e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C}$$ **Ans.**

Q.13 :- अवकल समीकरण $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = (1 + y^2)$ को हल करो।

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)$$

$$(1 + x^2)\,dy = (1 + y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}$$

Integration on both side

$$\int \frac{1}{1 + y^2}\,dy = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} c$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y - x}{1 + xy}\right) = \tan^{-1} c$$

$$\boxed{\frac{y - x}{1 + xy} = c}$$ **Ans.**

Q.14:- (1 + x) (1 - y) $\frac{dy}{dx}$ + xy = 0 को हल करो।

$$(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$(1+x)(1-y)\frac{dy}{y} = -x\,dx$$

$$(1-y)\frac{dy}{y} = \frac{-x}{1+x}\,dx$$

Integration on both side

$$\int\left(\frac{1-y}{y}\right)dy = -\int\frac{x}{x+1}\,dx$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = -\int\frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = -\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\boxed{\log y - y = -x + \log(x+1) + c}$$ **Ans.**

Q.15:- अवकल समीकरण को हल कीजिये (Solve the Differential Equation)।

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 1(1+x) + y(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

$$\frac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx$$

Integration on both side

$$\int\frac{1}{1+y}\,dy = \int(1+x)\,dx$$

$$\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\boxed{\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c}$$ **Ans.**

Q.16:- अवकल समीकरण को हल कीजिये (Solve the Differential Equation)।

$$(1-e^x)(1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx}+\frac{3e^x}{\cot y}=0$$

$$(1-e^x)(\sec^2 y)\frac{dy}{dx}=-\frac{3e^x}{\cot y}$$

$$\cot y\cdot\sec^2 y\,dy=-\frac{3e^x}{(1-e^x)}dx$$

$$\frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y}=\frac{3e^x}{e^x-1}dx$$

Integration on both side

$$\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=3\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$$

माना $\tan y = t$ $\qquad e^x - 1 = z$

$\sec^2 y.\ dy = dt$ $\qquad e^x.\ dx = dz$

$$\int\frac{dt}{t}=3\int\frac{dz}{z}$$

$$\log t=3\log z+C$$

$$\boxed{\log(\tan y)=3\log(e^x-1)+C}$$ **Ans.**

Q.17:- समीकरण हल कीजिये (Solve the equation)

$(e^y + 1)\cos x.\ dx + e^y \sin x.\ dy = 0$

dx से भाग करने पर

$$(e^y+1)\cos x+e^y\sin x\frac{dy}{dx}=0$$

$$e^y\sin x\frac{dy}{dx}=-(e^y+1)\cos x$$

$$\frac{e^y\,dy}{e^y+1}=-\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

Integration on both side

$$\int\frac{e^y}{e^y+1}dy=-\int\cot x\,dx$$

माना $e^y + 1 = t$

$e^y.\ dy = dt$

$$\int\frac{dt}{t}=-\log(\sin x)+C$$

$$\log t=-\log(\sin x)+C$$

$$\boxed{\log(e^y+1)+\log(\sin x)=C}$$ **Ans.**

पृथक्करणीय चर में रूपान्तरित होने वाले अवकल समीकरण
(Differential Equation Reducible to Variable Separable) :-

NOTE :-

- इसमें Variables अलग - अलग नहीं हो पाते हैं परन्तु उन्हें अलग - अलग करने के लिए Variable Separable form (चर पृथ्थकरण रूप) में रुपान्तरित किया जा सकता है।
- इसमें जिस पद में x, y साथ में हो उसे z मानकर solve करते हैं।

Q.18:- अवकल समीकरण $(x - y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$ को हल करो।

माना $x - y = z$

d.w.r.t to x

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

मान रखने पर

$$z^2\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = a^2$$

$$z^2 - z^2\frac{dz}{dx} = a^2$$

$$z^2 - a^2 = z^2\frac{dz}{dx}$$

$$dx = \frac{z^2}{z^2 - a^2}dz$$

Integration on both side

$$\int 1\,dx = \int \frac{z^2 - a^2 + a^2}{z^2 - a^2}dz$$

$$x = \int\left[\frac{(z^2 - a^2)}{(z^2 - a^2)} + \frac{a^2}{z^2 - a^2}\right]dz$$

$$x = \int dz + a^2\int \frac{1}{z^2 - a^2}dz$$

Formula used: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

$$x = z + a^2\left[\frac{1}{2a}\log\left(\frac{z-a}{z+a}\right)\right] + C$$

$$x = z + \frac{a}{2}\log\left(\frac{z-a}{z+a}\right) + C \qquad \therefore z = (x - y)$$

$$x = x - y + \frac{a}{2}\log\left(\frac{x-y-a}{x-y+a}\right) + C$$

$$\boxed{y = \frac{a}{2}\log\left(\frac{x-y-a}{x-y+a}\right) + C}$$ **Ans.**

Q.18:- अवकल समीकरण $(x + y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$ को हल करो।

माना $x + y = z$

d.w.r.t to x

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

मान रखने पर

$$z^2\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=a^2$$

$$z^2\frac{dz}{dx}-z^2=a^2$$

$$z^2\frac{dz}{dx}=a^2+z^2$$

$$z^2\,dz=(a^2+z^2)\,dx$$

$$\frac{z^2}{a^2+z^2}\,dz=dx$$

Integration on both side

$$\int\frac{z^2+a^2-a^2}{a^2+z^2}\,dz=\int 1\,dx$$

$$\int\frac{(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)}\,dz-\int\frac{a^2}{a^2+z^2}\,dz=\int 1\,dx$$

$$\int 1\,dz-a^2\int\frac{1}{a^2+z^2}\,dz=\int 1\,dx$$

Formula used:

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$z-a^2\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right]=x+C$$

$$z-a\tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)=x+C$$

$$\therefore z=x+y$$

$$(x+y)-a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)=x+C$$

$$\boxed{y=a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right)+C}$$ **Ans.**

Q.20:- अवकल समीकरण को हल कीजिये (Solve the Differential Equation)।

$$\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$$

माना x + y = z

d.w.r to x

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

मान रखने पर -

$$\frac{dz}{dx}-1=\sin z$$

$$\frac{dz}{dx}=(\sin z+1)$$

$$\frac{dz}{(\sin z+1)}=dx$$

Integration on both side

$$\int\frac{1}{1+\sin z}\times\frac{1-\sin z}{1-\sin z}\,dz=\int 1\,dx$$

$$\int\frac{1-\sin z}{1-\sin^2 z}\,dz=\int 1\,dx$$

$$\int\frac{1-\sin z}{\cos^2 z}\,dz=\int 1\,dx$$

$$\int\left[\frac{1}{\cos^2 z}-\frac{\sin z}{\cos^2 z}\right]dz=x+C$$

$$\int(\sec^2 z-\sec z\tan z)\,dz=x+C$$

$$\tan z-\sec z=x+C$$

$$\boxed{\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+C}$$ **Ans.**

Q.21:- समीकरण को हल कीजिए। (Solve the equation)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 4y + 3}{3x - 2y + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x - 2y) + 3}{(3x - 2y) + 1}$$

माना 3x − 2y = z

d.w.r to x

$$3 - 2\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$3 - \frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{dz}{dx}\right)$$

मान रखने पर

$$\frac{1}{2}\left(3 - \frac{dz}{dx}\right) = \frac{2(z) + 3}{(z) + 1}$$

$$3 - \frac{dz}{dx} = \frac{4z + 6}{z + 1}$$

$$3 - \frac{(4z + 6)}{z + 1} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{3z + 3 - 4z - 6}{z + 1} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{-z - 3}{z + 1} = \frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{(z + 3)}{(z + 1)} = \frac{dz}{dx}$$

$$-dx = \frac{z + 1}{z + 3}dz$$

Integration on both side

$$-\int dx = \int \frac{z + 1 + 2 - 2}{z + 3}dz$$

$$-\int dx = \int \frac{(z + 3) - 2}{z + 3}dz$$

$$-\int dx = \int \frac{z + 3}{z + 3}dz - \int \frac{2}{z + 3}dz$$

$$-\int dx = \int dz - 2\int \frac{1}{z + 3}dz$$

$$-x = z - 2\log(z + 3) + C$$

$$\therefore z = 3x - 2y$$

$$-x = 3x - 2y - 2\log(3x - 2y + 3) + C$$

$$-x - 3x + 2y + 2\log(3x - 2y + 3) = C$$

$$\boxed{-4x + 2y + 2\log(3x - 2y + 3) = C}$$ **Ans.**

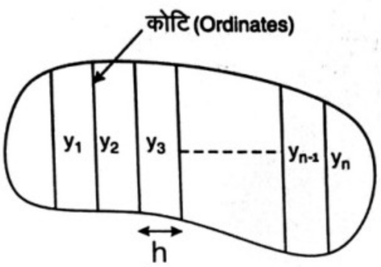
आंकिक समाकलन (Numerical Integration) :-

आंकिक विधियाँ (Numerical Methods) :-

1. **सिम्पसन का एक तिहाई (1/3 वॉ) नियम (Simpson's one third rule/Simpson's 1/3 rd rule)**
2. **सिम्पसन का 3/8 वाँ नियम (Simpson's three-eight rule/Simpson's 3/8 th rule)**
3. **समलम्बी नियम (Trapezoidal rule)**

सिम्पसन का एक तिहाई (1/3 वॉ) नियम (Simpson's 1/3rd rule) :-

- ये अनियमित आकार का क्षेत्रफल निकालने के लिए संपूर्ण क्षेत्र को बराबर दूरी पर विषम कोटियाँ लेकर सम भागों में बाँट दिया जाता है।
  To find the area of an irregular shape, the entire area is divided into equal parts by taking odd ordinates at equal distance.



Area by Simpson's ⅓ rd Rule

$$A = \frac{h}{3}\left[(F+L)+2(O)+4(E)\right]$$

h = Common distance between two ordinates (दो कोटियों के बीच की समान दूरी)

F = First ordinate (प्रथम कोटि)

L = Last ordinate (अन्तिम कोटि)

O = Sum of Remaining odd ordinates (शेष विषम कोटियों का योग)

E = Sum of Remaining Even ordinates (शेष सम कोटियों का योग)

यदि कोटियाँ निम्न प्रकार हो -

प्रथम कोटि (First ordinate) = y_1

द्वितीय कोटि (Second ordinate) = y_2

तृतीय कोटि (Third ordinate) = y_3

अन्तिम कोटि (Last ordinate) = y_n

$$\boxed{\text{Area} = \frac{h}{3}\left[(y_1+y_n)+2(y_3+y_5+y_7+\ldots)+4(y_2+y_4+y_6+\ldots)\right]}$$

सिम्पसन ⅓ नियम द्वारा $\int_a^b$ f(x) dx का मान ज्ञात करना।

$$h = \frac{b-a}{n}$$

n = no of ordinate - 1 (कोटियों की सं०)

n = no of Parts (भागों की संख्या)

x	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + nh = b
y = f(x)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_n

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big[(F+L)+2(O)+4(E)\Big]$$

Q.1:- सिम्पसन के 1/3 rd नियम द्वारा h = 1/4 लेकर $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$ dx का मान ज्ञात करो।

$$h = \frac{1}{4}, \quad a = 0, \quad b = 1 \qquad \therefore\ h = \frac{b-a}{n}$$

$$n = \frac{b-a}{h}$$

$$n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\boxed{n = 4}$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h
x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$y = \frac{1}{1+x^2}$	0	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

By Simpson's 1/3rd Rule

$$= \frac{h}{3}\Big[(F+L) + 2(O) + 4(E)\Big]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[(y_1+y_5) + 2(y_3) + 4(y_2+y_4)\Big]$$

$$= \frac{1}{4\times 3}\Big[(1+\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{4}{5}) + 4(\tfrac{16}{17} + \tfrac{16}{25})\Big]$$

$$= \frac{1}{12}\Big[\tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5} + \tfrac{64}{17} + \tfrac{64}{25}\Big]$$

$$= \frac{1}{12}\Big[1.5 + 1.6 + 3.76 + 2.56\Big]$$

$$= 0.785 \ \underline{Ans}$$

Q.2:- सिम्पसन के 1/3 rd नियम का प्रयोग करते हुये तथा अन्तराल [1, 2] को चार भागों में बराबर बाँटकर फलन $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ का मान ज्ञात करो।

$$a = 1, \quad b = 2, \quad n = 4$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h
x	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$y = \frac{1}{x}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

By Simpson's 1/3rd Rule

$$= \frac{h}{3}\left[(F+L)+2(0)+4(E)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_1+y_5)+2(y_3)+4(y_2+y_4)\right]$$

$$= \frac{1}{4\times 3}\left[(1+\frac{1}{2})+2(\frac{2}{3})+4(\frac{4}{5}+\frac{4}{7})\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{16}{5}+\frac{16}{7}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1.5+1.33+3.2+2.28\right] = \frac{8.31}{12} = 0.6925 \ \underline{\text{Ans}}$$

Q.3:- सिम्पसन 1/3 नियम द्वारा $\int_0^4 e^x \, dx$ का मान निम्नलिखित सारणी द्वारा ज्ञात करें।

$$e^0 = 1, \quad e^1 = 2.72, \quad e^2 = 7.39, \quad e^3 = 20.09, \quad e^4 = 54.60$$

$$a = 0, \quad b = 4$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1 \quad (\text{अतः } n = 4)$$

$$\therefore \text{ कोटियों की संख्या} = 5$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h
x	0	1	2	3	4
$y = e^x$	$e^0 = 1$	$e^1 = 2.72$	$e^2 = 7.39$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

$$\int_0^4 e^x \, dx = \frac{h}{3}[(F+L)+2(0)+4(E)]$$

$$= \frac{1}{3}[(y_1+y_5)+2(y_3)+4(y_2+y_4)]$$

$$= \frac{1}{3}[(1+54.60)+2(7.39)+4(2.72+20.09)]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60+14.78+4(22.81)]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60+14.78+91.24]$$

$$= \frac{161.62}{3}$$

$$= 53.87 \text{ } \underline{\text{Ans}}$$

Q.4:- एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। एक किनारे से x दूरी पर गहराई y मीटरों में निम्न सारणी में दी गई है तो नदी के अनुप्रस्थ परिच्छेद का लगभग क्षेत्रफल निकालें।

A river is 80 meters wide. The depth at a distance x from a bank in y meters is given in the following table. Find the approximate area of the cross section of the river.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9

h = Common distance between two ordinates

h = 10

$$\text{Area} = \frac{h}{3}[(F+L)+2(O)+4(E)]$$

$$\text{Area} = \frac{h}{3}[(y_1+y_9)+2(y_3+y_5+y_7)+4(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$= \frac{10}{3}[(0+3)+2(7+12+14)+4(4+9+15+8)]$$

$$= \frac{10}{3}[3+2(33)+4(36)]$$

$$= \frac{10}{3}[3+66+144]$$

$$= \frac{10}{3}[213]$$

$$= \frac{2130}{3} = 710 \text{ वर्ग इकाई } \underline{\text{Ans}}$$

सिम्पसन का 3/8 वाँ नियम (Simpson's 3/8 th rule) :-

- सिम्पसन के 3/8 वे नियम द्वारा सीमाओं x = a से x = b के बीच बराबर दूरी पर कोटियों की स्ट्रिप्स को n बराबर भागों में बाँटों। जिनकी संख्या तीन (3) के गुणांक में होनी चाहिये।
  Divide the strips of quotients equally spaced between the limits x = a to x = b into n equal parts using Simpson's 3/8th rule. The number of which should be a multiple of three (3).

- **यदि कोटियाँ (ordinates) → $y_o, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 \ldots\ldots y_n$**

Common distance $h = \dfrac{b-a}{n}$

Area = $A = \dfrac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + \ldots) + 2(y_3 + y_6 + y_9 + \ldots)]$

Q.5 :- $\displaystyle\int_0^6 \frac{1}{1+x}$ **dx का मान, सिम्पसन के 3/8 वे नियम द्वारा ज्ञात करो तथा समाकल्य के वास्तविक मान से तुलना भी करो।**

$$a = 0, \quad b = 6$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1 \quad (\text{अतः } n = 6), \quad \text{कोटियों की संख्या} = 7$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h	a + 5h	a + 6h
x	0	1	2	3	4	5	6
$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_6) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2(y_3)]$$

$$= \frac{3 \times 1}{8}\left[(1 + \frac{1}{7}) + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{8}{7} + 3\left(\frac{15+10+6+5}{30}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{8}{7} + \frac{36}{10} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{8}[1.14 + 3.6 + 0.5]$$

$$= \frac{3}{8}[5.24] = \frac{15.72}{8} = 1.96 \ \underline{\text{Ans}}$$

समलम्बी नियम (Trapezoidal rule) :-

- इस विधि द्वारा अनियमित आकृतियों का क्षेत्रफल तथा अनुप्रस्थ काटों के क्षेत्रफल निकालने के लिये उस क्षेत्रफल को n बराबर भागों में बाँटकर निम्नलिखित सूत्र द्वारा क्षेत्रफल निकाला जाता है।
  By this method, to find the area of irregular shapes and the area of cross sections, divide the area into n equal parts and find the area by the following formula.
- **कोटियाँ (Ordinates) → $y_o, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \ldots\ldots y_n$**

Common distance $h = \dfrac{b-a}{n}$

b = upper Limit
a = Lower Limit
n = no of Parts

Area by Trapezoidal formula

$$\boxed{A = \frac{h}{2}\left[(F+L) + 2(\text{sum of other remaining ordinates})\right]}$$

या

$$\boxed{A = \frac{h}{2}\left[(y_1 + y_n) + 2(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{n-1})\right]}$$

x	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + nh = b
y = f(x)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Q.6 :- $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{1+x}$ **dx का मान समलम्बी नियम से ज्ञात करो।**

$$a = 1, \quad b = 5$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1 \quad (\text{अतः } n = 4)$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h
x	1	2	3	4	5
y = $\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

by Trapezoidal Rule

$$\int_1^5 \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{h}{2}\left[(F+L) + 2(\text{sum of other ordinates})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_5) + 2(y_2 + y_3 + y_4)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3+1}{6}\right)+2\left(\frac{20+15+12}{60}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+2\left(\frac{47}{60}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{47}{30}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0.67+1.56]$$

$$= \frac{2.23}{2} = 1.11 \ \underline{\text{Ans}}$$

Q.6 :- समलम्बीय नियम से $\int_0^6 (x^2 + 1)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

$$a = 0, \quad b = 6$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1 \quad (\text{अतः } n = 6)$$

	a	a + h	a + 2h	a + 3h	a + 4h	a + 5h	a + 6h
x	0	1	2	3	4	5	6
$y = x^2 + 1$	1	2	5	10	17	26	37
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

by Trapezoidal Rule

$$\int_0^6 (x^2+1)\,dx = \frac{h}{2}[(F+L)+2(\text{sum of other ordinates})]$$

$$= \frac{h}{2}[(y_1+y_7)+2(y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)]$$

$$= \frac{1}{2}[(1+37)+2(2+5+10+17+26)]$$

$$= \frac{1}{2}[38+2(60)]$$

$$= \frac{1}{2}[38 + 120]$$

$$= \frac{158}{2} = 79 \ \underline{\text{Ans}}$$

मैटलैब : सामान्य परिचय (MATLAB : Simple Introduction) :-

- MATLAB को MATHWORKS द्वारा 1970 में विकसित किया गया था। यह एक आंकिक गणना (Numerical calculation) का सॉफ्टवेयर है जो Array को मूल मानकर बनायी गयी है।

  MATLAB was developed by MATHWORKS in 1970. It is a numerical calculation software which is built taking array as its base.

- इसके प्रयोग से आव्यूह (Matrix) से सम्बन्धित गणनाएँ, फलनों एवं आंकड़ों की प्लॉटिंग (Plotting), किसी Algorithm को लागू करना, User Interface का निर्माण आदि किया जाता है। यह C, C++ तथा Fortran भाषा में लिखे कोड को आसानी से चला सकती है।

  Using this, calculations related to matrices, plotting of functions and data, implementing any algorithm, creating user-interface etc. are done. It can easily run the code written in C, C++ and Fortran language.

- MATLAB के प्रयोग से डाटा का विश्लेषण (Analysis) तथा विज़ुअलाइजेशन (Visualization) आसानी से किया जाता है।

  Analysis and visualization of data can be done easily using MATLAB.

(1) MATLAB में Text display कराना।

- **उदाहरण :- disp ("Hello, Gtech Poly students")**

(2) MATLAB में Array; परिभाषा करना।

- Syntax :- initial: Increment: terminator

  उदाहरण :- array = 1 : 2 : 9

  तब आउटपुट array = 1 3 5 7 9

  अर्थात् गिनती 1 से प्रारम्भ होकर, 2 - 2 के अन्तराल में 9 तक लिखना है।