



---

# Анализ математической модели цепи Чуа

---

Олег Опякин  
Константин Лишик  
Даниил Викульцев

ФРТК, 2й курс  
ФАКТ, 2й курс  
ЛФИ, 2й курс

НИУ МФТИ, Декабрь 2024г.

# Анализ математической модели цепи Чуа

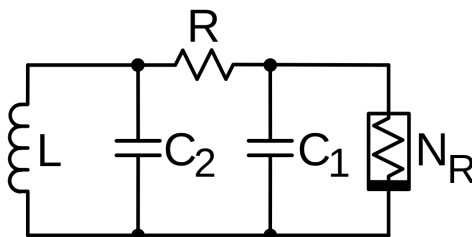
December 27, 2024

Данное исследование было проведено в ходе выполнения работы *"Генератор случайных чисел на основе цепи Чуа"*. В ходе работы была описана математическая модель цепи Чуа и был предложен способ получения случайных бинарных последовательностей.

В основной работе приведены лишь конкретные выводы, полноценное исследование с математическими выкладками выполним здесь.

## 1 Введение

Цепь Чуа - это электротехническое устройство, способное демонстрировать режим хаотических колебаний. В данной работе рассмотрена математическая модель, система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая цепь. Идея работы заключается в том, чтобы максимально полно описать решение этой системы, а затем удостовериться в справедливости сделанных предположений.



## 2 Формирование математической модели

Не будем широко освещать "физическую" часть работы. Достаточно сказать, что хаотические колебания обеспечиваются наличием в цепи

нелинейного элемента  $N_R$ . Эти колебания можно обнаружить при наблюдении за напряжением на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  и током на индуктивности  $L$ .

Расписав правила Кирхгофа и перейдя к безразмерным коэффициентам, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (1)$$

Где  $h(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$  - функция нелинейного элемента. Коэффициенты  $\alpha, \beta, m_0, m_1$  известны из параметров установки.

### 3 Анализ решения

Система (1) не решается аналитически, однако некоторые свойства решения можно определить, проанализировав правую часть.

#### 3.1 Положения равновесия

Для начала определим положения равновесия системы. Пусть  $x > 1$ . Раскроем модуль и приравняем правые части к 0. Получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x(-1 - m_1) + y + m_1 - m_0) = 0 \\ \dot{y} = x - y + z = 0 \\ \dot{z} = -\beta y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Откуда определим первое положение равновесия:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1} \\ 0 \\ \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Аналогично для  $x < -1$  получим второе положение равновесия:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1} \\ 0 \\ \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Для  $-1 \leq x \leq 1$  получим:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Пусть  $m_0 = -1.143, m_1 = -0.714, \alpha = 15.6, \beta = 27$ . Тогда положения равновесия :  $E_1 = [1.5, 0, -1.5], E_2 = [-1.5, 0, 1.5], E_3 = [0, 0, 0]$ .

Теперь займёмся определением характера фазового портрета в окрестностях указанных положений равновесия.

### 3.2 Определение характера фазового портрета

Рассмотрим случай, когда  $x > 1$ , и линеаризуем систему в окрестности положения  $E_1$ . Для этого проведём замену :

$$\begin{cases} U = x - (\frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}) \\ V = y \\ P = z - (\frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}) \end{cases} \quad (6)$$

После замены получим систему (линеаризация в окрестности  $E_1$ ) :

$$\begin{cases} \dot{U} = -\alpha(m_1 + 1)U + \alpha V \\ \dot{V} = U - V + P \\ \dot{P} = -\beta V \end{cases} \quad (7)$$

Характер портрета будет зависеть от *собственных значений* матрицы системы (7). Рассмотрим определитель этой матрицы:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\alpha(m_1 + 1) - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -\beta & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2(-\alpha(m_1 + 1) - 1) + \lambda(-\alpha m_1 - \beta) - \alpha\beta(m_1 + 1) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.3 Решение "в лоб"

Кубическое уравнение решается с использованием программного пакета для символьных вычислений SymPy. Для указанных выше значений коэффициентов получим следующие собственные значения (важно отметить, что программа позволяет получить точные значения  $\lambda$ . Не будем их приводить из-за громоздкости.):

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx -6.1 \\ \lambda_{2,3} \approx 0.3 \pm 4.4i \end{cases}$$

Получаем тройку собственных значений :  $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ , причём  $\lambda_2 = \lambda_3^*$ . При этом  $Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_{2,3}) > 0$ .

Отсюда становится понятен характер фазового портрета. В окрестности  $E_1$  получим **неустойчивый "3-D фокус"**<sup>1</sup>

Проанализировав матрицу линеаризации системы в окрестности  $E_2$  получим те же самые значения значения  $\lambda_{1-3}$ . Следовательно, положение  $E_2$  тоже будет **неустойчивым "3-D фокусом"**.

Для матрицы линеаризации системы в окрестности  $E_3$  получим, что  $Re(\lambda_{1,2}) < 0, Re(\lambda_3) > 0$  это значит, что  $E_3$  - **устойчивый "3-D фокус"**.

На рисунке (В.И. Арнольд) приведён пример положения равновесия с собственными значениями, отвечающими  $E_3$ .

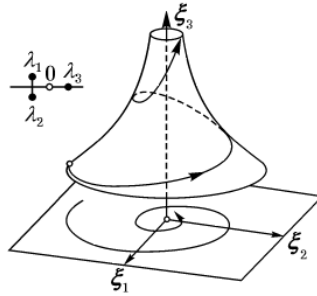


Рис. 148. Случай  $Re \lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$ . Растяжение по направлению  $\xi_3$ , вращение со сжатием в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$

1

Итак, получены следующие результаты:

- $E_{1,2}$  - неустойчивые "3-D фокусы".
- $E_3$  - устойчивый "3-D фокус".

Теперь можно сделать предположение о характере *эволюции* изучаемой системы:

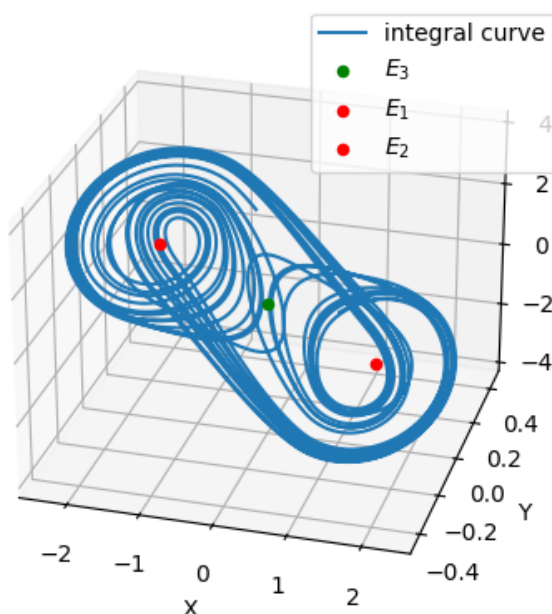
1. Положения равновесия системы будут совпадать с  $E_{1-3}$

<sup>1</sup>Термина "3-D фокус" не существует, однако мы будем обозначать характер фазового портрета именно так по аналогии с двумерным случаем

2. Система будет "раскручиваться" из  $E_1$  и  $E_2$
3. Система будет "скручиваться" в  $E_3$

## 4 Численное решение

Для проверки теоретических выводов было выполнено численное решение системы с использованием метода Эйлера.



Результат приведён на рисунке. Важно отметить, что точки  $E_{1-3}$ , изображённые на графике, получены аналитически, а интегральная кривая - с помощью численного метода.

Видно, что положения равновесия системы действительно *совпадают* с точками, полученными теоретически.

Характеры также определены корректно (программное решение позволяет наблюдать динамику развития системы - она действительно "раскручивается из  $E_1$  и  $E_2$ ", что иллюстрирует видео из презентации).

Точка  $E_3$  несомненно является положением равновесия - если выбрать её в качестве начальных условий, то система сохранит своё положение. Однако при иных начальных условиях устойчивого положения в  $E_3$  не наблюдается. Возможно, это связано с тем, что в ходе решения мы не проходим в достаточно малой окрестности  $E_3$ . В литературе точку  $E_3$  называют *скрытым аттрактором* системы Чуа.

Способ определения характера поведения системы с помощью *формул Кардано* предложен в Приложении.

## 5 Заключение

Итак, рассмотрена математическая модель цепи Чуа, представляющая собой систему дифференциальных уравнений. Определены положения равновесия системы, сделано предположение о характере эволюции системы. Теоретические предположения подтверждены численным решением .

## 6 По всем вопросам

1. Теория (цепь, диод Чуа), установка - Олег Опякин (@oPnOl)
2. Установка, измерения - Константин Лишик (@konstantinlishik)
3. Теория (математика), код, тех - Даниил Викульцев (@techotarsh)
4. [Репозиторий](#) с проектом

Готовы ответить на все вопросы - пишите в тг)



## 7 Используемая литература

1. L. Chua, "The genesis of Chua's circuit", 1992
2. В.И. Арнольд, "Обыкновенные Дифференциальные Уравнения", 4-е издание, Ижевск, 2000
3. Ю.С. Ильяшенко, "Аттракторы динамических систем и философия общего положения", Матем. просв., 2008, выпуск 12, 13–22

## 8 Приложение

### 8.1 Решение с помощью формул Кардано

В работе важно определить характер собственных значений. Для кубического уравнения (8) всегда существуют 3 корня. Определить их вид можно с помощью серии замен:

$$\begin{cases} \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ a = \alpha(m_1 + 1) + 1 \\ b = \alpha m_1 + \beta \\ c = \alpha\beta(m_1 + 1) \end{cases}$$

Затем:

$$\begin{cases} p = b - \frac{a^3}{3} \\ q = c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} \end{cases}$$

Введём последнюю переменную  $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ . Тогда

1.  $D > 0$ :  $\begin{cases} \lambda_1 \in \mathbb{R} \\ \lambda_{2,3} \in \mathbb{C} \end{cases}$
2.  $D = 0$ :  $\begin{cases} \lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$
3.  $D < 0$ :  $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$

С помощью формул Кардано можно построить зависимость знака  $D$  от значений коэффициентов уравнения (8) - т.е. получить несколько областей в  $\mathbb{R}^3$ , отвечающих различным значениям  $D$ .