

ПРОТОКОЛ III

МЕХАНИКА - ПРАКТИКУМ

**Закон за запазване на импулса.
Централен удар на сфери**

Лабораторно упражнение №3

**Виолета Кабаджова,
ККТФ, фак. номер: ЗРН0600026**

Физически Факултет,
Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
6 ноември 2022 г.

1 Теоритична част

1.1 Закон за Запазване на Импулса (ЗЗИ)

Законът за запазване на импулса гласи:

☞ В изолирана система от две или повече тела сумарният импулс $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ не се променя с времето, т.е. $\vec{p} = const.$ При различни вътрешни взаимодействия може да става само преразпределението му между телата на системата.

Изразено от горното втория закон на Нютон придобива вида:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad (1)$$

където \vec{F} представлява резултатната сила, действаща на тялото или на системата.

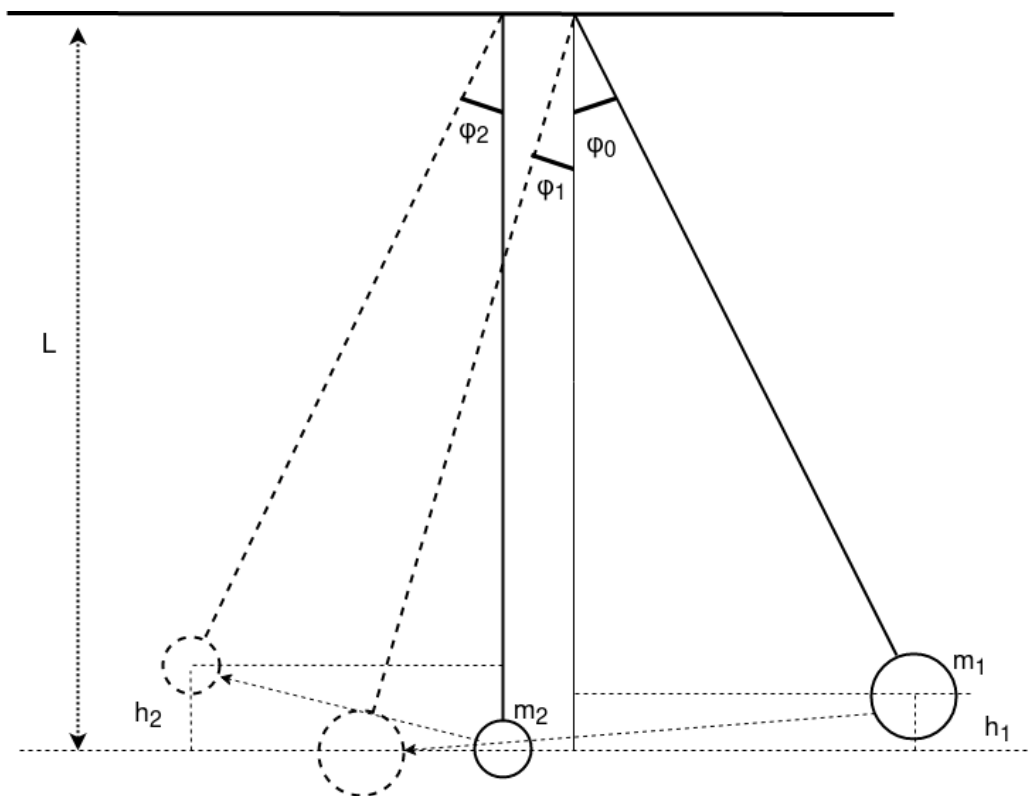
1.2 Коефициент на възстановяване на скоростта

Един от широко разпространените методи за експериментално изследване на ЗЗИ е чрез удари на тела. Мигновено след удара телата имат различни скорости (\vec{u}_1, \vec{u}_2) спрямо скоростите преди момента на удара (\vec{v}_1, \vec{v}_2) . Количествената мярка за промяната в скоростите на телата и вида на удара се нарича коефициент на възстановяване на скоростта K , изразяващ се по следния начин:

$$K = \frac{|u_2 - u_1|}{|v_2 - v_1|} \quad (2)$$

1.3 Деформация при удар

Механичното взаимодействие при удар между реални тела протича в интервал от време $\tau = t_2 - t_1$ от порядъка на 10^{-2} до 10^{-6} s. В този период телата изпитват някакъв вид деформация - пластична (такава при която след удара телата се движат като едно цяло: $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$) и еластична (такава, която е изцяло обратима). От формула 2 следва, че идеално пластичен удар би имало коефициент $K=0$, а идеално еластичен $K=1$.



Фигура 1: Експериментална установка

Съответно за реални тела коефициентът K би приемал стойности $0 < K < 1$.

От ЗЗИ следва, че:

$$\vec{p}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = \vec{p}_r \quad (3)$$

2 Експериментална част

2.1 Експериментална установка

На фиг. 1 е показана експерименталната установка. Тя се състои от две сфери с различни маси, окачени на две отделни нишки. Сферите са така разположени, че при допир в състояние на покой, права, успоредна на подложката, минава през центровете им (т.е. в последствие ударът ще

бъде централен, тъй като моментът на удара ще бъде перпендикулярен на тази подложка). Централен удар наричаме такъв, при който векторите на скоростите на двете тела по време на удара лежат на права, свързваща центровете на масите им.

На фигурата са илюстрирани началните положения на двете сфери (с непрекъсната линия) и тяхното преместване след уадра (с пунктирна линия). φ_0 наричаме началният ъгъл, на който е "повдигната" сферата с маса m_1 , φ_1 е максималното отклонение на сферата след удара, а φ_2 - ъгълът, с който ще се премести ударената сфера с маса m_2 . L (което ще реферираме за напред като l) е височината от точката на окачване до правата на централния удар, а височините h_1 и h_2 са височините, които достигат съответните тела спрямо правата на централния удар.

Отклонената на ъгъл φ_1 сфера има потенциална енергия $E_n = m_1gh$. В момента на удара, тялото е с потенциална енергия $E_n = 0$ и с максимална кинетична енергия $E_k = \frac{m_1\vec{v}_1^2}{2}$. С пренебрегване на загубите от силите на триене и съпротивление, в сила е законът за запазване на пълната механична енергия (ЗЗПМЕ), от който следва, че:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (4)$$

От фиг. 1 виждаме, че $h = l(1 - \cos(\varphi_0)) = 2l\sin^2(\frac{\varphi_0}{2})$, където l - дължината на нишката.

От ЗЗПМЕ можем да разпишем и останалите скорости за момент $t = \tau$, когато ударът завършва:

$$u_1 = 2\sqrt{gl}\sin(\frac{\varphi_1}{2}), u_2 = 2\sqrt{gl}\sin(\frac{\varphi_2}{2}) \quad (5)$$

След заместване на скоростите от формули 5 и 4 във формула 2, получаваме, че:

$$K = \frac{\sin(\frac{\varphi_2}{2}) - \sin(\frac{\varphi_1}{2})}{\sin(\frac{\varphi_0}{2})} \quad (6)$$

2.2 Задача: Измерване на коефициентът K на възстановяване на скоростта при централен удар

2.2.1 Измерване

Извършвайки описания в точка 2.1 експеримент, записваме данните за измерените φ_1 и φ_2 в таблиците по-долу. При еднократно измерване по-

N	$\varphi_{1i}, ^\circ$	$\varphi_{1i} - \bar{\varphi}_1, ^\circ$	$(\varphi_{1i} - \bar{\varphi}_1)^2 \cdot 10^{-2}$
1	4.5	-0.125	1.5625
2	5	0.375	14.0625
3	5	0.375	14.0625
4	4.25	-0.375	14.0625
5	4.5	-0.125	1.5625
6	4.75	0.125	1.5625
7	4.75	0.125	1.5625
8	4.5	-0.125	1.5625
9	4.5	-0.125	1.5625
10	4.5	-0.125	1.5625
$\bar{\varphi}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \varphi_{1i}}{N}$	4.63	$(\sum_{i=1}^N (\varphi_{1i} - \bar{\varphi}_1)^2) \cdot 10^{-2}$	0.059 = 0.0001 rad

лучаваме, че $\varphi_0 = 13.75^\circ = 0.24rad$

Всички измервания са получени в градуси ($^\circ$). За да заместим в последствие във формулите, е необходимо да ги преобразуваме в радиани:

$$\alpha(rad) = \alpha(^\circ) \frac{\pi}{180} \quad (7)$$

Оттук следва, че резултите за средната стойност в радиани са съответно $\varphi_1 = \frac{4.63\pi}{180} = 0.0807 \text{ rad}$ и $\varphi_2 = \frac{13.28\pi}{180} = 0.2317 \text{ rad}$.

По формула 2 получаваме, че:

$$K = \frac{\sin(\frac{\varphi_2}{2}) - \sin(\frac{\varphi_1}{2})}{\sin(\frac{\varphi_0}{2})} = \frac{\sin(\frac{0.2317}{2}) - \sin(\frac{0.0807}{2})}{\sin(\frac{0.24}{2})} = 0.6286$$

2.2.2 Пресмятане на абсолютна грешка

Абсолютната грешка получаваме по формулата:

$$\Delta K = K \left[\frac{\frac{1}{2}\cos(\frac{\varphi_1}{2})\Delta\varphi_1 + \frac{1}{2}\cos(\frac{\varphi_2}{2})\Delta\varphi_2}{\sin(\frac{\varphi_1}{2}) - \sin(\frac{\varphi_2}{2})} - \frac{\frac{1}{2}\cos(\frac{\varphi_0}{2})\Delta\varphi_0}{\sin(\frac{\varphi_0}{2})} \right], \quad (8)$$

където $\Delta\varphi_0$ е удвоената инструментална грешка, а $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ са сума от квадратите на инструменталната грешка Δ_{instr} и квадратичната грешка σ :

N	$\varphi_{2i}, ^\circ$	$\varphi_{2i} - \bar{\varphi}_2, ^\circ$	$(\varphi_{2i} - \bar{\varphi}_2)^2 \cdot 10^{-2}$
1	13.25	-0.025	0.0625
2	13.25	-0.025	0.0625
3	13	-0.275	7.5625
4	13.5	0.225	5.0625
5	13.25	-0.025	0.0625
6	13.75	0.475	22.5625
7	13.5	0.225	5.0625
8	13	-0.275	7.5625
9	13.25	-0.025	0.0625
10	13	-0.275	7.5625
$\bar{\varphi}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \varphi_{2i}}{N}$	13.28	$(\sum_{i=1}^N (\varphi_{2i} - \bar{\varphi}_2)^2) \cdot 10^{-2}$	$0.0618 = 0.0011 \text{ rad}$

$$\Delta\varphi = \sqrt{\sigma^2 + \Delta_{instr}^2}, \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^2}{N-1} \quad (9)$$

Оттук:

$$\sigma_{\varphi_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^2}{N-1} = \frac{0.0001}{9} = 0.00001$$

$$\sigma_{\varphi_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^2}{N-1} = \frac{0.0011}{9} = 0.00012$$

Инструменталната грешка от уреда, измерващ ъглите на отместване е $\frac{0.25}{2} = 0.125^\circ = 0.0022 \text{ rad}$. Следователно:

$$\Delta\varphi_1 = \sqrt{\sigma_{\varphi_1}^2 + \Delta_{instr}^2} = \sqrt{0.00001 + 0.0022^2} = 0.0039$$

$$\Delta\varphi_2 = \sqrt{\sigma_{\varphi_2}^2 + \Delta_{instr}^2} = \sqrt{0.00012 + 0.0022^2} = 0.0112$$

$$\Delta\varphi_0 = \sqrt{\sigma_{\varphi_2}^2 + \Delta_{instr}^2} = \sqrt{0 + 0.0022^2} = 0.0022$$

По формула 8 получаваме:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \cdot 0.6286 \left[\frac{\cos(\frac{0.0807}{2})0.0039 + \cos(\frac{0.2317}{2})0.0112}{\sin(\frac{0.0807}{2}) - \sin(\frac{0.2317}{2})} - \frac{\cos(\frac{0.24}{2})0.0022}{\sin(\frac{0.24}{2})} \right] = 0.1467$$

Следователно получаваме $K = (0.6286 \pm 0.1467)$.

2.3 Задача: Проверка и анализ на валидността на ЗЗИ

ЗЗИ може да се изрази и по следния начин:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (10)$$

Използвайки формулите от 5 и 10, проверката на валидността на ЗЗИ се свежда до проверка на следното равенство по грешките му:

$$m_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = m_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + m_2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \quad (11)$$

Формулата за абсолютна грешка на горното уравнение е:

$$\Delta(m \cdot \sin(\frac{\varphi}{2})) = \sin(\frac{\varphi}{2}) \Delta m + m \frac{1}{2} \cos(\frac{\varphi}{2}) \Delta \varphi \quad (12)$$

Дадено ни е, че $\Delta m = 0.05g = 0.05 \cdot 10^{-3}kg$, $m_1 = 180.5g = 180.5 \cdot 10^{-3}kg$, $m_2 = 104.4g = 104.4 \cdot 10^{-3}kg$. Оттук:

$$\Delta(m_1 \cdot \sin(\frac{\varphi_0}{2})) = \sin(\frac{0.24}{2}) \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} + 180.5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2} \cos(\frac{0.24}{2}) \cdot 0.0022 = 0.00093$$

$$\Delta(m_1 \cdot \sin(\frac{\varphi_1}{2})) = \sin(\frac{0.0807}{2}) \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} + 180.5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2} \cos(\frac{0.0807}{2}) \cdot 0.0039 = 0.00035$$

$$\Delta(m_2 \cdot \sin(\frac{\varphi_2}{2})) = \sin(\frac{0.2317}{2}) \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} + 104.4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2} \cos(\frac{0.2317}{2}) \cdot 0.0112 = 0.00058$$

След пресметването на абсолютните грешки за всеки един от факторите, следва изчисление и на самите стойности от всяка страна. Валидирането на ЗЗИ се свежда до въпроса лявата страна на уравнение 11 приблизително равна ли е дясната, имайки в предвид грешката.

$$[180.5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\frac{0.24}{2})]? = [180.5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\frac{0.0807}{2}) + 104.4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\frac{0.2317}{2})]$$

Тоест:

$$[(0.0216 \pm 0.00093)]? = [(0.0073 \pm 0.00035) + (0.0121 \pm 0.00058)]$$

Имайки в предвид грешката от пренебрегването на фактори като съпротивлението на въздуха, приближение на стойности и други, получените стойности са близки, с което показваме ЗЗИ.