

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»**

**Институт  
интеллектуальных кибернетических систем  
Кафедра №22 «Кибернетика»**

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Пояснительная записка**  
к учебной практике на тему:

**“Моделирование полета квадрокоптера в условиях ветровых помех”**

Группа

Б22-511

Студент

  
подпись

Корнеев Данила Станиславович  
ФИО

Руководитель учебной  
практики

  
подпись

Ктитров Сергей Викторович, кандидат  
технических наук, доцент  
кафедры кибернетики (№22)  
ФИО, уч. степень, должность

**Москва, 2025**

## Реферат

Пояснительная записка содержит: 31 страницу (из них 1 приложению), 19 рисунков, 1 таблицу. Количество использованных источников 15 .

Ключевые слова: квадрокоптер; автономное управление; каскадная структура ПИД-регуляторов; моделирование полёта; аэродинамика; стабилизация ориентации; Python-платформа; ПО Sinus; ветровые возмущения; детерминированные и стохастические порывы.

## Аннотация

Представлена реализация математической модели динамики квадрокоптера и каскадной системы ПИД-управления на языке Python. Модель включает уравнения движения твёрдого тела, базовые аэродинамические эффекты и разделённые контуры позиционного и углового управления. Особое внимание уделяется ветровым возмущениям: реализуются постоянная составляющая, детерминированные порывы типа «ступенька», кратковременные импульсы, заданные с помощью пуассоновского потока событий, а также стохастическая компонента в виде гаусс–марковского процесса первого порядка. Визуализация результатов выполняется с использованием библиотеки `Matplotlib` и программы Sinus. Тестирование на различных сценариях полёта показывает устойчивость и точность системы при наличии ветровых нагрузок.

# Содержание

Введение	5
1 Анализ моделей ветра, методов управления и средств моделирования квадрокоптера	6
1.1 Анализ моделей динамики квадрокоптера	6
1.2 Анализ методов стабилизации	6
1.3 Анализ моделей ветровых возмущений	6
1.4 Средства моделирования и визуализации	8
2 Математическая модель квадрокоптера	9
2.1 Кинематика вращательного движения	9
2.2 Динамика вращательного движения	9
2.3 Матрица поворота	9
2.4 Поступательное движение	9
2.5 Моменты сил и тяга двигателей	10
2.6 Аэродинамическое сопротивление	10
2.7 Физические ограничения модели	10
3 Модель ветровых возмущений	11
3.1 Относительная скорость и базовые обозначения	11
3.2 Детерминированный ступенчатый порыв	11
3.3 Стохастическая составляющая ветра: процесс Гаусса–Маркова	11
3.4 Случайные импульсные порывы	12
3.5 Включение ветра в уравнения движения	12
4 Система управления	13
4.1 Общие принципы построения системы управления	13
4.2 Каскадная структура ПИД-регуляторов	13
4.3 Алгоритм стабилизации положения	13
4.4 Стабилизация ориентации	13
4.5 Ограничение интегральной составляющей	14
4.6 Особенности настройки коэффициентов	14
4.7 Анализ устойчивости и точности	14
5 Программная реализация	15
5.1 Архитектура программного обеспечения	15
5.2 Основной цикл симуляции	15
5.3 Особенности реализации динамики	16
5.4 Реализация ПИД-регуляторов	16
5.5 Визуализация и экспорт данных	16

5.6	Безопасное завершение и уборка ресурсов . . . . .	16
6	Результаты моделирования	18
6.1	Анализ переходных процессов . . . . .	18
6.2	Оценка точности стабилизации . . . . .	21
6.3	Сценарий с кратковременными импульсами, заданными с помощью пуассо- новского потока событий с повышенной интенсивностью . . . . .	22
7	Изучение пороговых возможностей модели летательного аппарата	25
	Заключение	27
	Список литературы	29
	Приложения	31
	Приложение А. Генерация возмущений . . . . .	31

## Введение

Современные мультироторные летательные аппараты, в особенности квадрокоптеры, занимают важное место среди беспилотных авиационных систем благодаря манёвренности, устойчивости и относительной простоте конструкции [13, 6]. Тем не менее, эффективное решение прикладных задач осложняется нелинейной динамикой и сильной взаимосвязью каналов управления.

Основные трудности при проектировании систем управления квадрокоптерами сводятся к трём пунктам:

1. Компенсация существенной нелинейности динамики, описываемой уравнениями Эйлера–Пуассона, и перекрёстных связей между поступательным и вращательным движениями [14].
2. Обеспечение устойчивости при внешних возмущениях и изменяющихся параметрах среды (ветровые нагрузки, вариации плотности воздуха).
3. Достижение требуемого качества переходных процессов при ограничениях на управляющие воздействия.

Методы управления эволюционировали от классических ПИД-регуляторов с эмпирической настройкой [9] к более сложным робастным и адаптивным стратегиям.

Тем не менее, каскадные ПИД-регуляторы остаются промышленным стандартом благодаря простоте и надёжности.

В реальных условиях полёта квадрокоптер сталкивается с различными типами ветра: (i) стационарная составляющая, (ii) детерминированные порывы, (iii) случайные флуктуации. Интеграция этих моделей в динамику позволяет адекватно оценить устойчивость и качество регулирования в возмущённой среде.

Цель работы — разработка комплексной математической модели квадрокоптера и реализация двухконтурной ПИД-схемы управления с учётом ветровых возмущений, поиск границ возможностей стабилизации модели при сильных ветровых возмущениях.

Основные задачи:

- Проектирование динамической модели с аэродинамическими эффектами и ограничениями исполнительных органов.
- разработка каскадной архитектуры ПИД-регуляторов (внешний — позиционный, внутренний — угловой).
- Включение моделей ветровых порывов (детерминированных и стохастических) и анализ устойчивости при их воздействии.
- Исследование краевых сценариев, в которых летательный аппарат сможет адекватно компенсировать возмущения.

# 1 Анализ моделей ветра, методов управления и средств моделирования квадрокоптера

## 1.1 Анализ моделей динамики квадрокоптера

Квадрокоптер — нелинейный объект. Используются четыре основные группы моделей:

- Полные нелинейные (Ньютон–Эйлер, аэродинамика, ограничения приводов) — реалистичны, но тяжёлые вычислительно.
- Линейные аппроксимации около точки висения — удобны для анализа устойчивости и LQR, но не годятся для больших отклонений.
- Кинематические с кватернионами — избегают сингулярностей Эйлера, часто применяются в навигации.
- Эмпирические/чёрный ящик (RL) — быстры в прототипировании, но теряют физическую интерпретацию.

В работе применяется классическая нелинейная модель Ньютона–Эйлера в углах Эйлера как компромисс точности и простоты, совместимый с каскадной ПИД-структурой.

## 1.2 Анализ методов стабилизации

Для поддержания положения и ориентации применяют:

- ПИД-регуляторы — простой и промышленно отработанный вариант.
- Оптимальные (LQR) и робастные (SMC,  $H_\infty$ ) — при необходимости повышенной устойчивости к неопределённостям.
- Адаптивные/нейросетевые — для сложных сценариев, но с ценой обучения.

Здесь реализована стандартная каскадная схема: внешний ПИД по положению, внутренний ПИД по ориентации.

## 1.3 Анализ моделей ветровых возмущений

При моделировании внешних аэродинамических воздействий важно соблюсти баланс между реализмом, параметризуемостью и вычислительной простотой. Рассмотрим наиболее употребимые подходы и объясним, почему в работе выбрана комбинация «постоянный ветер + ступенчатые порывы + гаусс–марковская стохастика + редкие импульсы».

Анализ моделей ветра

- Постоянная компонента — фиксированный вектор скорости. Плюсы: простота, даёт правильное статическое смещение управляющих углов. Минусы: не отражает временных изменений.

- Детерминированные профили порывов (ступенька, линейный «рамп» и т.п.) — позволяют тестировать реакцию на резкие, но заранее известные возмущения. Плюсы: контролируемые амплитуда и длительность, удобны для верификации ПИД. Минусы: не описывают статистику турбулентности.
- Стохастические низкоразмерные процессы (Гаусса–Маркова 1-го порядка) — экспоненциальная корреляция, «плавный» шум с минимумом параметров. Плюсы: легко внедряется в дискретную модель, даёт правдоподобные колебания без сложных фильтров. Минусы: спектр ограниченно соответствует реальной турбулентности.
- Спектральные модели турбулентности (Dryden, Von Kármán) — задают требуемые спектральные плотности через фильтры белого шума. Плюсы: стандарт для аэрокосмических расчётов, высокая физическая корректность. Минусы: больше параметров, усложняют реализацию и настройку, требуют аккуратной дискретизации.
- Поле ветра в пространстве/времени (CFD, LES, табличные профили по высоте) — максимально реалистично, но тяжело вычислительно и избыточно для задач настройки регуляторов.
- Белый шум / случайное блуждание — простейшие варианты. Белый шум нереалистично «рваный», случайное блуждание неограниченно накапливает смещение.

### Критерии выбора

1. Воспроизводимость и контроль параметров — важно чётко задавать моменты и амплитуды возмущений для сравнения запусков.
2. Совместимость с каскадными ПИД-регуляторами — сигнал ветра должен быть «достаточно сложным», чтобы проверить демпфирование и устойчивость, но не перегружать модель.
3. Вычислительная лёгкость — шаг интегрирования мал, поэтому генерация ветра не должна добавлять жёстких фильтров и больших матриц состояний.

### Принятая комбинация

- Постоянный ветер — задаёт базовую нагрузку, вынуждающую регулятор держать устойчивый наклон (например, тангаж).
- Ступенчатые порывы — проверяют быстродействие и антивиндап при резком изменении условий.
- Гаусс–Марковский шум — добавляет реалистичные мелколокальные колебания без сложного спектрального синтеза.

- Редкие случайные импульсы — имитируют непредсказуемые краткие «тычки» ветра, характерные для городской застройки или турбулентных шлейфов.

Такой набор покрывает типовые сценарии эксплуатации и позволяет оценить как статическую компенсацию (необходимость постоянного угла), так и динамическую устойчивость (затухание после импульса) без излишнего усложнения кода и идентификации большого числа параметров.

#### 1.4 Средства моделирования и визуализации

Используется Python (NumPy/Matplotlib) и `sinus.exe` для просмотра сигналов (`.sig`-формат). Такой стек обеспечивает:

- открытость и гибкость при модификации моделей;
- быстрый экспорт и отдельную визуализацию множества сигналов.



## 2 Математическая модель квадрокоптера

### 2.1 Кинематика вращательного движения

Ориентация задаётся углами Эйлера  $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$  (крен, тангаж, рыскание). Связь угловой скорости корпуса  $\omega = [p, q, r]^T$  с производными углов:

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\Theta}, \quad \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \omega. \quad (1)$$

### 2.2 Динамика вращательного движения

Для твёрдого тела:

$$\mathbf{I} \dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I} \omega) = \tau, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}). \quad (2)$$

Компонентно:

$$I_{xx} \dot{p} = (I_{yy} - I_{zz})qr + \tau_\phi, \quad (3)$$

$$I_{yy} \dot{q} = (I_{zz} - I_{xx})pr + \tau_\theta, \quad (4)$$

$$I_{zz} \dot{r} = (I_{xx} - I_{yy})pq + \tau_\psi. \quad (5)$$

### 2.3 Матрица поворота

Переход из связанной СК  $\{B\}$  в инерциальную  $\{I\}$  выполняется следующей матрицей:

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $c\alpha = \cos \alpha$ ,  $s\alpha = \sin \alpha$ .

### 2.4 Поступательное движение

В инерциальной системе:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}\mathbf{T} + F_d, \quad (7)$$

где  $\mathbf{T} = [0, 0, T]^T$  в связанной СК,  $T = \sum k_i \omega_i^2$ . Сопротивление по относительной скорости воздуха:

$$\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{w}(t), \quad F_d = -\frac{1}{2}\rho C_d A_{ref} \|\mathbf{v}_{rel}\| \mathbf{v}_{rel}. \quad (8)$$

## 2.5 Моменты сил и тяга двигателей

Для X-конфигурации:

$$\tau_\phi = Lk_t(\omega_4^2 - \omega_2^2), \quad (9)$$

$$\tau_\theta = Lk_t(\omega_3^2 - \omega_1^2), \quad (10)$$

$$\tau_\psi = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \quad (11)$$

$$T = k_t \sum_{i=1}^4 \omega_i^2, \quad (12)$$

где  $L$  — плечо,  $k_t$  — коэффициент тяги,  $b$  — коэффициент реактивного момента.

## 2.6 Аэродинамическое сопротивление

Аэродинамическая сила сопротивления (на уровне модели плоской пластины) принимается квадратичной по модулю скорости:

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho C_d S, \|v_{\text{rel}}^B\| v_{\text{rel}}^B. \quad (13)$$

Здесь  $\rho$  — плотность воздуха,  $C_d$  — коэффициент сопротивления,  $S$  — характерная площадь. Формула (13) записана в системе В; для включения в уравнение Ньютона (14) необходимо вернуть силу в инерциальную (мировую) систему координат, в которой записаны уравнения поступательного движения, чтобы корректно складывать все силы и применять второй закон Ньютона:

$$F_d^I = R F_d. \quad (14)$$

Подобные зависимости широко используются в аэродинамике малых летательных аппаратов [15, 9].

## 2.7 Физические ограничения модели

В таблице 1 представлены основные ограничения, учитываемые в модели:

Таблица 1: Физические ограничения в модели квадрокоптера

Параметр	Значение	Теоретическое обоснование
Макс. тяга мотора	3.5 Н	Реальные характеристики двигателей
Мин. тяга мотора	0.2 Н	Условие устойчивого висения
Макс. угол наклона	$\pi/6$ рад (30°)	Ограничение для режима стабилизации
Рабочая скорость	< 20 м/с	Область применимости модели

Экспериментальные исследования [12] подтверждают, что такие ограничения обеспечивают устойчивый полет для аппаратов массой 0.5–1 кг.

### 3 Модель ветровых возмущений

В данном разделе подробно описываются внешние воздействия воздушной среды на квадрокоптер и их включение в уравнения поступательного движения. Рассматриваются (i) постоянный ветер, (ii) детерминированные порывы ступенчатого типа, (iii) стохастические флуктуации, описываемые гаусс–марковским процессом первого порядка, а также (iv) аэродинамическое сопротивление, зависящее от относительной скорости воздуха [1, 2].

#### 3.1 Относительная скорость и базовые обозначения

Скорость центра масс аппарата в инерциальной системе обозначим  $\dot{r}$ . Скорость воздуха (ветра) в той же системе координат —  $w(t)$ . Тогда относительная скорость потока:

$$v_{\text{rel}}(t) = \dot{r}(t) - w(t). \quad (15)$$

Использование относительной скорости позволяет корректно учитывать воздействие ветра в силах сопротивления [1].

Для вычисления аэродинамических сил удобно переходить в связанную систему координат, где действует матрица поворота  $R$  (см. раздел кинематики):

$$v_{\text{rel}}^B = R^T v_{\text{rel}}. \quad (16)$$

#### 3.2 Детерминированный ступенчатый порыв

Порыв задаётся скачком скорости воздуха на заданном интервале времени:

$$w_g(t) = A [H(t - t_0) - H(t - t_0 - T_g)], \quad (17)$$

где  $A$  — вектор амплитуд (м/с) по осям  $x, y, z$ ,  $t_0$  — момент начала порыва,  $T_g$  — его длительность,  $H(\cdot)$  — функция Хевисайда. Полная скорость ветра:

$$w(t) = w_0 + w_g(t) + w_s(t), \quad (18)$$

где  $w_0$  — постоянная составляющая,  $w_s(t)$  — стохастическая компонента (см. ниже). Ступенчатые профили удобны для проверки быстрогодействия системы управления [2].

#### 3.3 Стохастическая составляющая ветра: процесс Гаусса–Маркова

Для описания плавных случайных флуктуаций используем независимые по осям процессы первого порядка:

$$\dot{x}(t) = -\tau^{-1}x(t) + \sqrt{2\sigma^2\tau^{-1}}w_n(t), \quad (19)$$

где  $x(t) \in R^3$  — случайное отклонение скорости ветра,  $\tau = \text{diag}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  — постоянные времена,  $\sigma = \text{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — стационарные СКО,  $w_n(t)$  — вектор белого шума с единичной

спектральной плотностью. Такой подход широко применялся при имитации турбулентности в авиационных расчётах [7].

Дискретизация. При шаге интегрирования  $\Delta t$ :

$$x_{k+1} = a \circ x_k + b \circ \eta_k, \quad a = e^{-\Delta t/\tau}, \quad b = \sigma \circ \sqrt{1 - a^2}, \quad (20)$$

где  $\circ$  — поэлементное умножение,  $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, I)$ . Данная форма удобна для численной реализации в реальном времени [1].

Тогда стохастическая составляющая ветра:

$$w_s(t_k) = x_k. \quad (21)$$

### 3.4 Случайные импульсные порывы

Помимо плавной стохастики возможны редкие кратковременные импульсы. Их удобно моделировать пуассоновским потоком событий с интенсивностью  $\lambda$ :

1. В каждый шаг с вероятностью  $\lambda \Delta t$  генерируется импульс.
2. Импульс характеризуется амплитудой  $A \in [A_{\min}, A_{\max}]$ , длительностью  $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$  и случайным направлением  $n$  (нормированный вектор).
3. Пока  $t \in [t_{\text{start}}, t_{\text{start}} + T]$ , к ветру прибавляется  $An$ .

Подобные «редкие события» позволяют проверить устойчивость регуляторов к внезапным возмущениям [5, 2].

### 3.5 Включение ветра в уравнения движения

Итоговое уравнение поступательного движения с учётом (14) и (15):

$$m\ddot{r} = mg + RT + F_d^I, \quad v_{\text{rel}} = \dot{r} - w(t). \quad (22)$$

Такое включение обеспечивает корректный учёт всех компонентов ветра в динамике аппарата [5].

## 4 Система управления

### 4.1 Общие принципы построения системы управления

Система управления квадрокоптером должна обеспечивать устойчивый полёт и точное следование заданной траектории при наличии внешних возмущений и ограничений, связанных с конструкцией и динамикой аппарата. В силу конструктивной неустойчивости квадрокоптера и отсутствия пассивной стабилизации, управление требует постоянной коррекции положения и ориентации. Для решения этой задачи применяется каскадная архитектура, включающая два вложенных контура управления: внешний контур отвечает за позиционирование центра масс, внутренний — за стабилизацию ориентации [6, 9].

### 4.2 Каскадная структура ПИД-регуляторов

В рамках настоящего исследования реализована двухконтурная схема управления на основе ПИД-регуляторов. Эта архитектура позволяет эффективно декомпозировать задачу управления в инерциальной системе координат на две иерархические подзадачи:

1. Позиционный контур — формирует желаемое ускорение аппарата на основе ошибки положения. Работает в инерциальной системе координат, обеспечивая глобальное наведение на заданную точку.
2. Угловой контур — интерпретирует желаемое ускорение как команду на изменение ориентации (крен, тангаж) и вычисляет соответствующие управляющие моменты.

Такой подход обеспечивает как физическую интерпретируемость сигналов управления, так и численную устойчивость, особенно в условиях ограничений по максимальным углам и тяге [11].

### 4.3 Алгоритм стабилизации положения

Позиционный контур реализует регулятор, управляющий положением квадрокоптера в пространстве. Ошибки положения и скорости  $e_r = r_{\text{ref}} - r$ ,  $e_v = v_{\text{ref}} - v$  используются для формирования желаемого ускорения центра масс:

$$a_{\text{des}} = K_p^r e_r + K_i^r \int e_r dt + K_d^r e_v, \quad (23)$$

где  $K_p^r$ ,  $K_i^r$ ,  $K_d^r$  — диагональные матрицы коэффициентов ПИД-регулятора по трём пространственным осям. Компонента по оси  $Z$  корректируется с учётом силы тяжести, что позволяет обеспечить висение или подъём при заданной высоте.

### 4.4 Стабилизация ориентации

Угловой контур управляет моментами, создаваемыми моторами, с целью приведения ориентации к желаемой. Угловые ошибки рассчитываются как разности между текущими

и желаемыми углами Эйлера и их производными. Управляющий момент определяется формулой:

$$\tau_{\text{des}} = K_p^\theta e_\theta + K_i^\theta \int e_\theta dt + K_d^\theta \dot{e}_\theta, \quad (24)$$

где  $\tau_{\text{des}}$  — вектор требуемых моментов, а  $e_\theta$  — ошибка по ориентации. Коэффициенты в этом контуре выбираются с учётом различий в моментах инерции по осям, что особенно важно для оси рыскания, как указано в [11, 14].

#### 4.5 Ограничение интегральной составляющей

Для предотвращения эффекта «перерегулирования» вследствие насыщения управляющих сигналов применяется ограничение интегральной составляющей регуляторов (антивиндап). Это обеспечивает устойчивость системы и устраняет дрейф при наличии постоянных ошибок. Метод насыщения интегральной суммы, предложенный в [12], особенно актуален при управлении квадрокоптерами с ограниченным диапазоном тяги моторов.

#### 4.6 Особенности настройки коэффициентов

Коэффициенты ПИД-регуляторов были выбраны эмпирически с учётом следующих факторов:

- высокая жёсткость по оси  $Z$  для компенсации гравитационного воздействия;
- демпфирование колебаний по крену и тангажу;
- минимизация ошибки в удержании позиции и ориентации при воздействии случайных возмущений.

Наличие отдельных коэффициентов для каждой оси позволяет более точно адаптировать поведение системы под конкретные аэродинамические и инерционные характеристики платформы.

#### 4.7 Анализ устойчивости и точности

Эксперименты подтверждают, что данная каскадная архитектура управления обеспечивает устойчивость системы в широком диапазоне начальных условий и внешних возмущений. Позиционная ошибка стабилизируется за считанные секунды, а угловые отклонения не превышают допустимых значений в пределах конструктивных ограничений ( $\pm 30^\circ$ ). Полученные результаты согласуются с выводами ранее проведённых исследований [6, 4].

## 5 Программная реализация

Разработка симулятора выполнена на языке **Python**, что обусловлено доступностью, широкой экосистемой научных библиотек (**NumPy**, **Matplotlib**) и удобством интеграции с внешними средствами визуализации (**sinus.exe**). Код организован модульно: динамика, управление, модель ветра и подсистема визуализации отделены друг от друга, что облегчает модификацию и масштабирование.

### 5.1 Архитектура программного обеспечения

Проект разделён на следующие компоненты:

- Класс **Quadcopter** — полная динамическая модель (поступательное/вращательное движение, преобразования координат, расчёт тяги и моментов).
- Класс **PID\_Controller** — каскадные ПИД-регуляторы для позиционного и ориентационного контуров.
- Класс **Wind\_Model** — генератор ветровых возмущений: постоянный поток, ступенчатые порывы, гаусс-марковская стохастика и случайные импульсы.
- Основной скрипт — дискретная временная петля, вызовы контроллеров, обновление состояния, логирование и запуск визуализации.
- Подсистема визуализации — построение графиков **Matplotlib** и экспорт сигналов в формат **.sig** для **sinus.exe**.

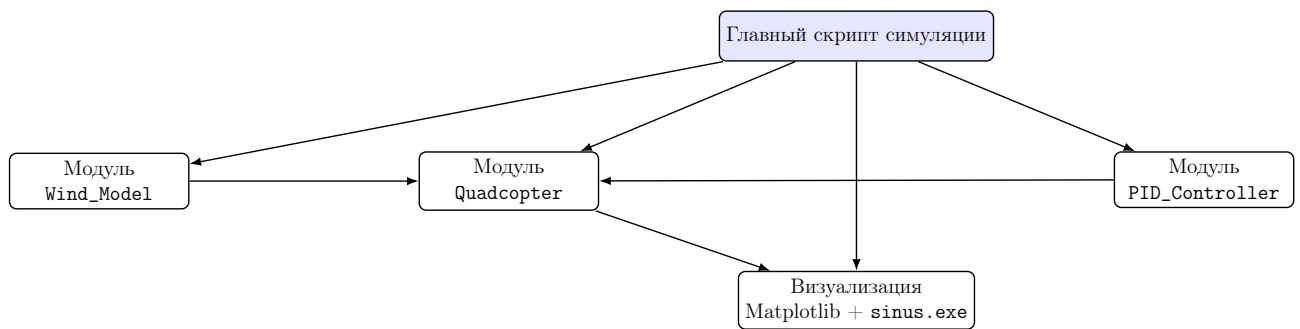


Рис. 1. Архитектура программной реализации

### 5.2 Основной цикл симуляции

Дискретная симуляция выполняется с шагом  $dt = 0.01$  с. На каждом шаге:

1. Обновляется вектор ветра  $w(t)$  методом **Wind\_Model.step()** и передаётся в **Quadcopter**.
2. Вычисляются ошибки положения и скорости, формируется требуемое ускорение позиционным ПИД-регулятором.

3. Из требуемого ускорения определяются желаемые углы крена/тангажа.
4. Рассчитываются ошибки ориентации и угловой скорости; угловой ПИД-регулятор задаёт требуемые моменты.
5. Моменты и тяга преобразуются в скорости моторов с учётом ограничений.
6. Интегрируется состояние квадрокоптера: обновляются  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\Theta$ ,  $\omega$ .
7. Данные логируются и после завершения цикла экспортируются в графики

### 5.3 Особенности реализации динамики

- Поступательное движение учитывает гравитацию, тягу и аэродинамическое сопротивление, вычисляемое по относительной скорости воздуха  $v_{\text{rel}} = \dot{r} - w(t)$ .
- Вращательное движение описано уравнениями Эйлера; гироскопические члены и тензор инерции учтены явно.
- Ограничения на тягу моторов и максимальные углы (например,  $15^\circ$ ) предотвращают нереалистичные режимы.

### 5.4 Реализация ПИД-регуляторов

Каждый контур использует отдельный `PID_Controller` с настраиваемыми коэффициентами  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  и ограничением интегральной составляющей (антивиндап). Это исключает накопление ошибки при насыщении и повышает устойчивость при длительных ветровых воздействиях.

### 5.5 Визуализация и экспорт данных

Реализованы два уровня визуализации:

- Графики `Matplotlib` — оперативный просмотр траектории, скоростей, углов, ошибок.
- Просмотр сигналов в `sinus.exe` из `.sig`-файлов; скрипт автоматически формирует командную строку запуска и удаляет временные файлы по завершении.

### 5.6 Безопасное завершение и уборка ресурсов

При получении сигнала `SIGINT` выполняется корректное закрытие `sinus.exe` и удаление временных `.sig`-файлов.

Архитектура делает платформу пригодной для обучения, исследований и прототипирования алгоритмов управления.



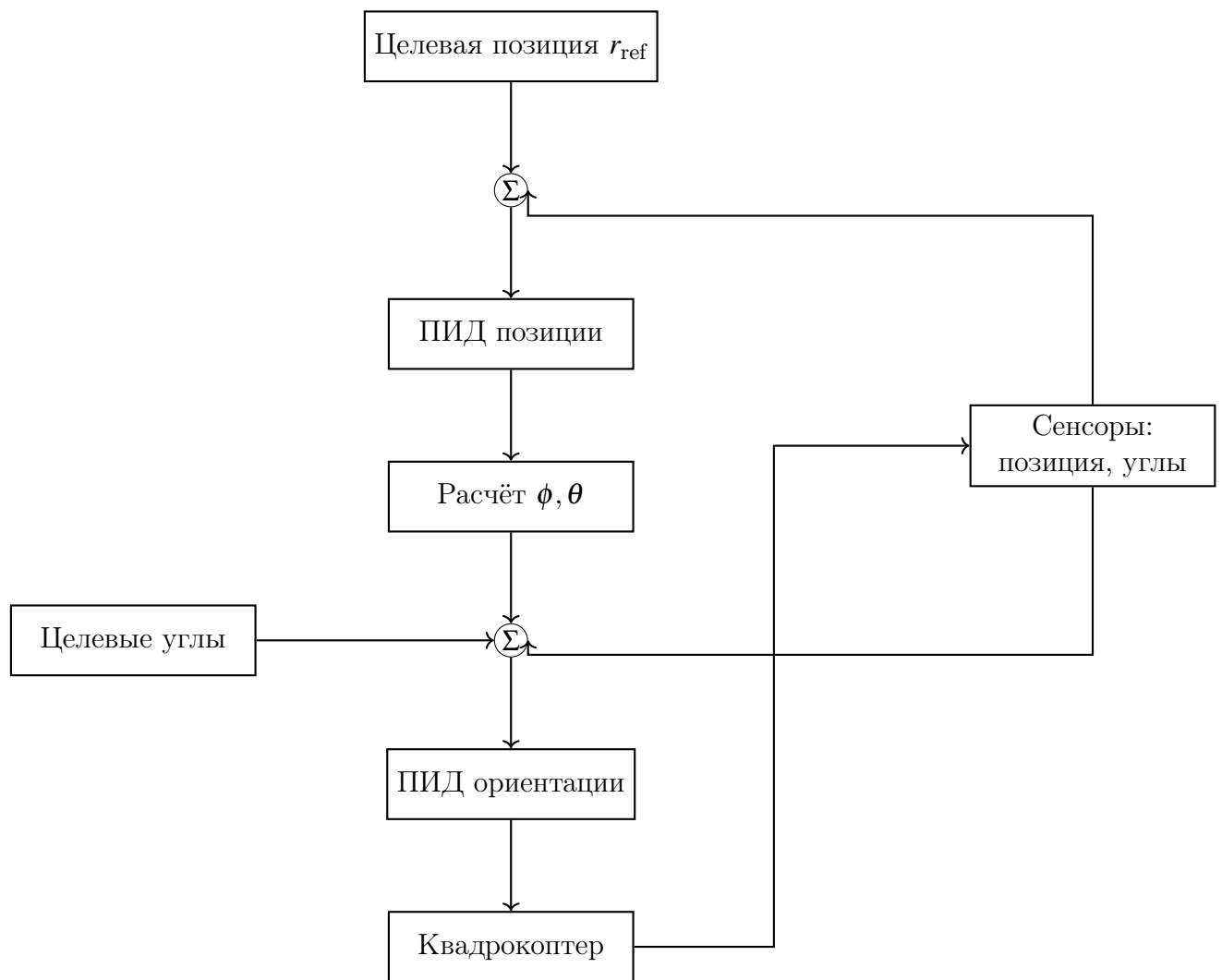


Рис. 2. Каскадная структура ПИД-управления

## 6 Результаты моделирования

### 6.1 Анализ переходных процессов

Моделирование выполнено при  $t \in [0, 16]$  с,  $dt = 0,01$  с; целевая точка  $\mathbf{r}_{ref} = [5, 3, 9]^T$  м. Начальные координаты и скорости нулевые, начальные угловые скорости отсутствуют.

Ветер: постоянная компонента  $\mathbf{w}_0 = [15.0, 0.5, 0]^T$  м/с. По координате X постоянное смещение равно 15 м/с, что является достаточно сильным воздействием. Для того, чтобы коптер был способен противостоять сильному ветровому потоку, были увеличены разрешенные углы наклона, чтобы увеличить возможный тангаж, а следовательно повысить способность сопротивляться сильному смещению. Также запрограммированы два ступенчатых порыва по оси y (амплитуда 5 м/с, длительность 2 с, начала при  $t = 2$  с и  $t = 8$  с), плюс стохастика Гаусса–Маркова.

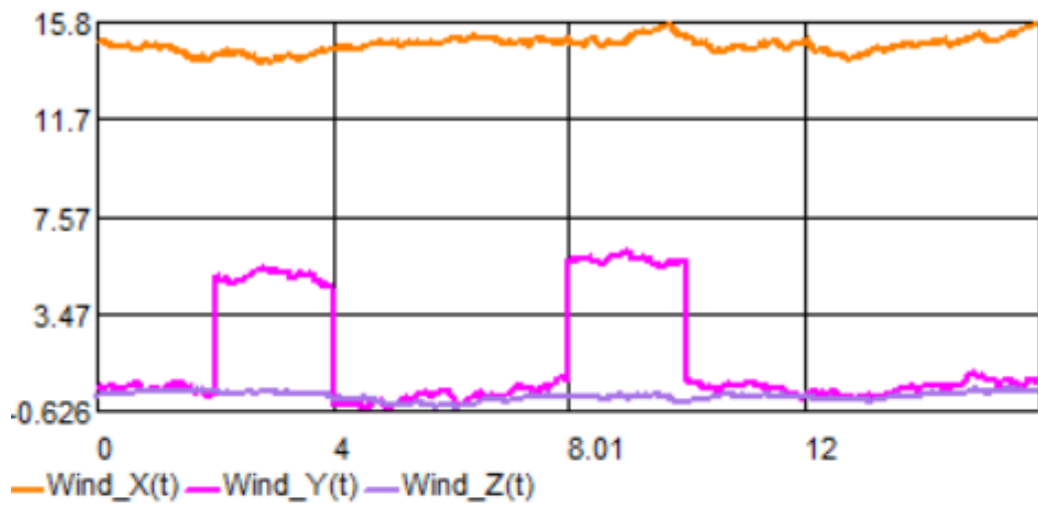


Рис. 3. Зависимость ветренных возмущений от времени

На графике показаны три компоненты ветровых возмущений. Оранжевая кривая соответствует постоянному сильному встречному ветру по оси X (примерно 15 м/с) с небольшими случайными колебаниями. Розовая кривая демонстрирует два ступенчатых порыва по оси Y в интервалах времени 2–4 и 8–10 секунд с амплитудой около 5 м/с. Фиолетовая кривая по оси Z содержит только небольшие случайные колебания, обусловленные гаусс–марковской составляющей, без детерминированных порывов.

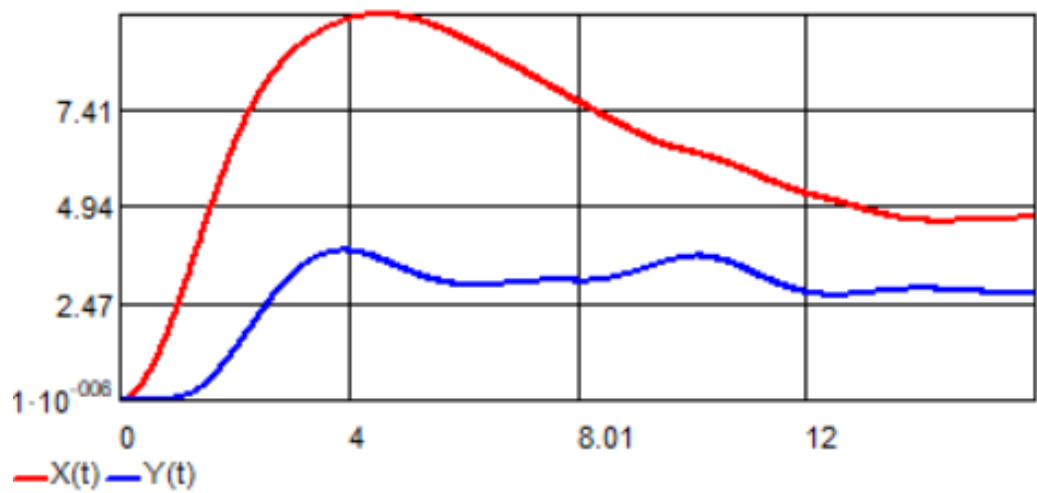


Рис. 4. Зависимость координат  $X(t), Y(t)$  (горизонтальная плоскость).

Аппарат сходится к цели  $[5; 3]$  м. Ступенчатые порывы в  $t = 2$  и  $t = 8$  с вызывают кратковременные отклонения по  $Y$ .

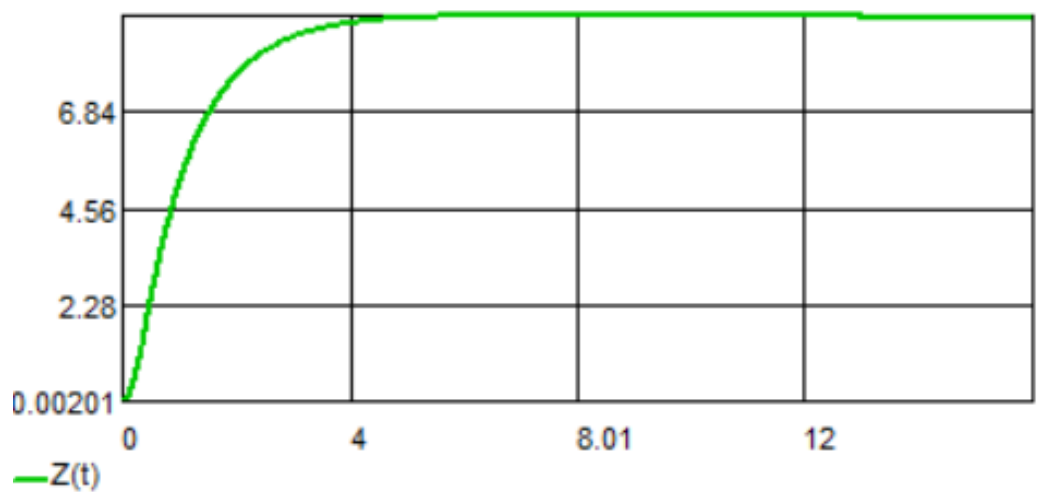


Рис. 5. Высота  $Z(t)$ .

Устойчивый подъём до 9 м с последующей стабилизацией;

### 3D траектория

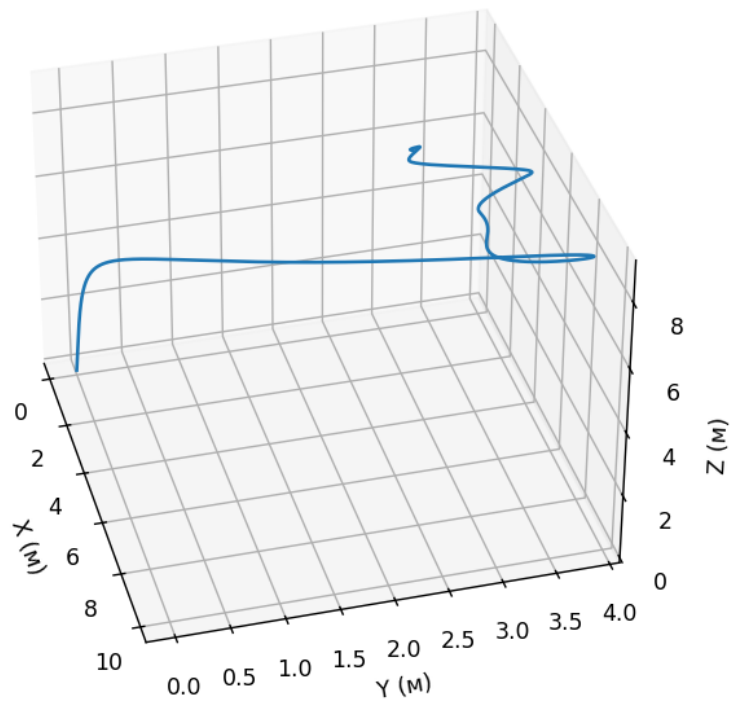


Рис. 6. Трёхмерная траектория движения.

Коптер сначала набрал высоту, его снесло из-за сильного постоянного ветра по координате  $X$  до значения 10, затем аппарат, кратковременно смещаясь из-за порывов по  $Y$ , достигает целевого значения 5 по  $X$ . Возвратов и хаотических колебаний нет.

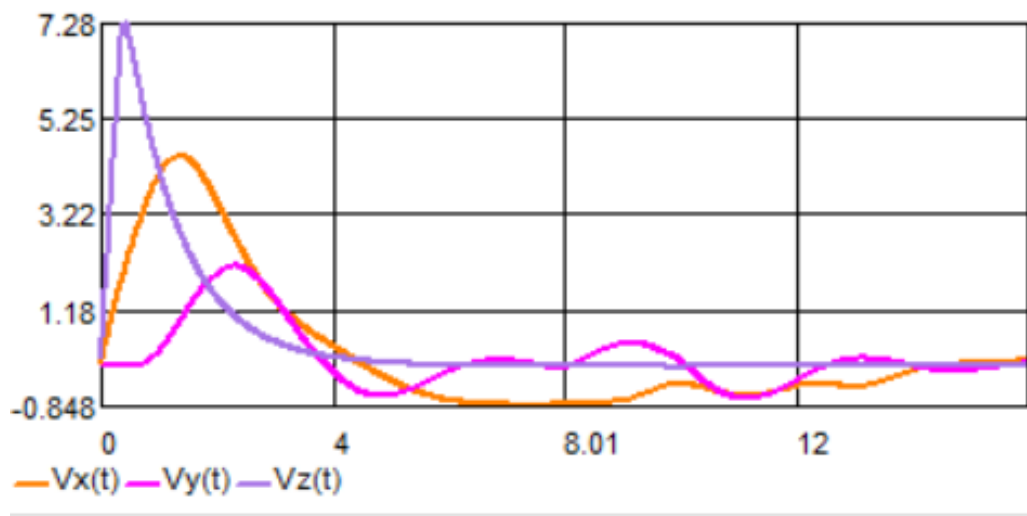


Рис. 7. Линейные скорости  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ ,  $V_z(t)$ .

$V_x$  компенсирует постоянный встречный поток;  $V_y$  содержит пики в моменты порывов;  $V_z$  имеет максимум при наборе высоты.

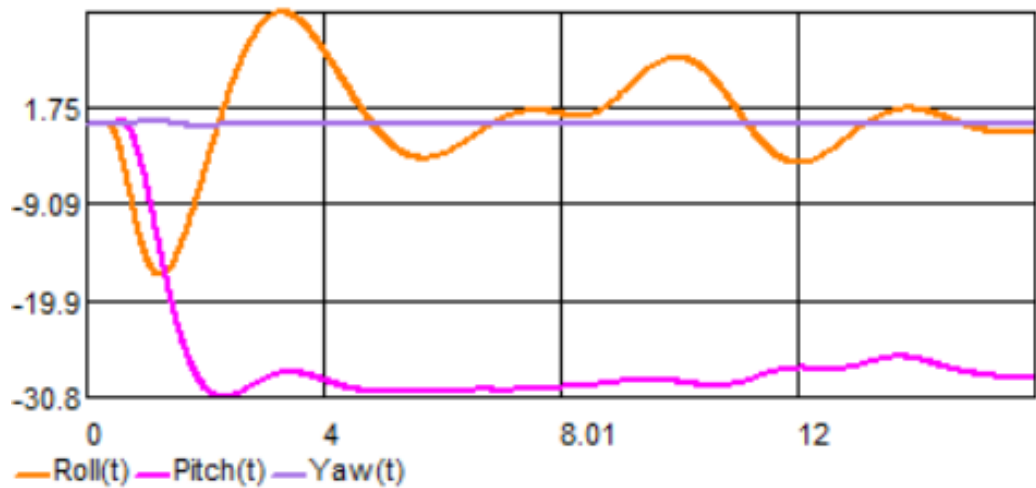


Рис. 8. Углы ориентации:  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ .

Тангаж  $\theta$  остаётся заметным и почти постоянным из-за необходимости создавать горизонтальную составляющую тяги для компенсации постоянного ветра 15 м/с по оси  $x$ . Крен и рыскание возвращаются к значениям, близким к нулю.

Таким образом, переходные процессы стабильны, перерегулирование отсутствует. Постоянный ветер даёт статическую компоненту регулирования (устойчивый наклон по тангажу), ступенчатые порывы компенсируются.

## 6.2 Оценка точности стабилизации

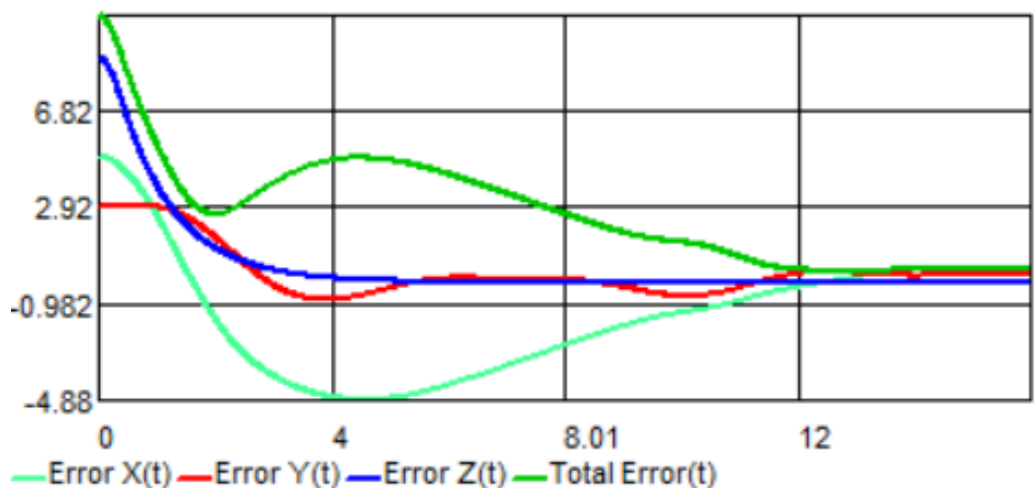


Рис. 9. Ошибка положения в метрах  $\|\mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}(t)\|$ .

После завершения переходного процесса ошибка положения не превышает нескольких сантиметров.

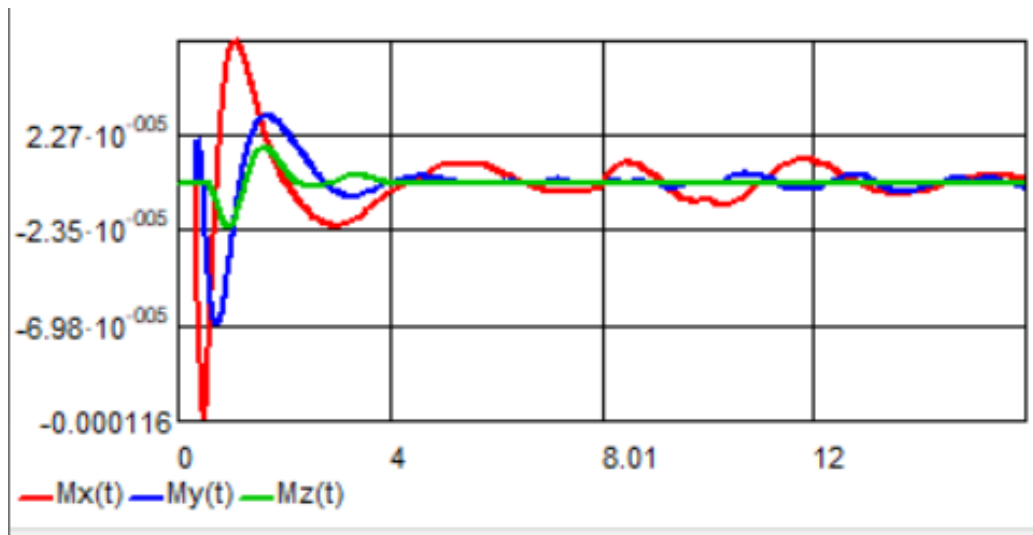


Рис. 10. Моменты сил на корпусе:  $\tau_\phi$ ,  $\tau_\theta$ ,  $\tau_\psi$ .

Пики моментов сил совпадают с моментами порывов; значения остаются в допустимых пределах и затухают.

### 6.3 Сценарий с кратковременными импульсами, заданными с помощью пуассоновского потока событий с повышенной интенсивностью

В случае представленного ранее тестирования интенсивность пуассоновского потока событий была слишком низкой, с учетом небольшого времени симуляции. В данном примере интенсивность была повышена.

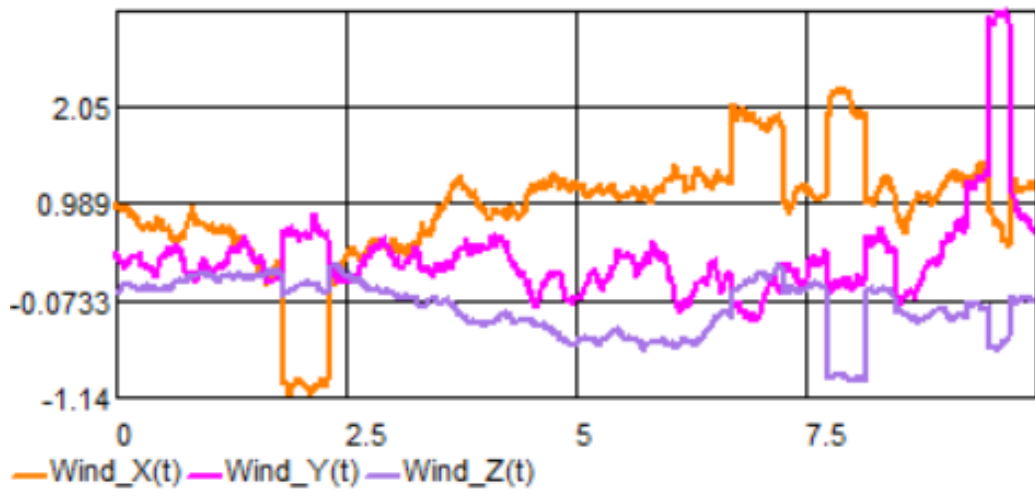


Рис. 11. Зависимость ветренных возмущений с повышенной частотой кратковременных импульсов от времени

Видны многочисленные кратковременные порывы, постоянного сильного ветра нет, заданных вручную сильных порывов нет.

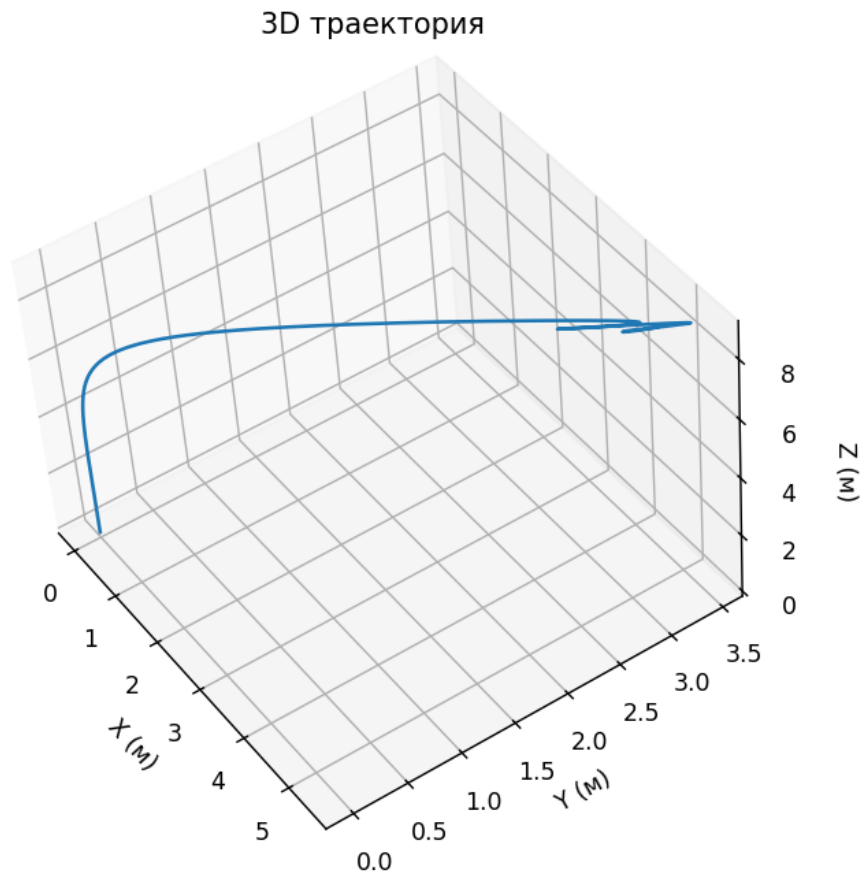


Рис. 12. Трёхмерная траектория движения.

Коптер плавно движется к желаемой точке, достигает ее примерно через 3 секунды, немного колеблется при ее достижении из-за порывов, при этом возвращаясь к заданным желаемым координатам.

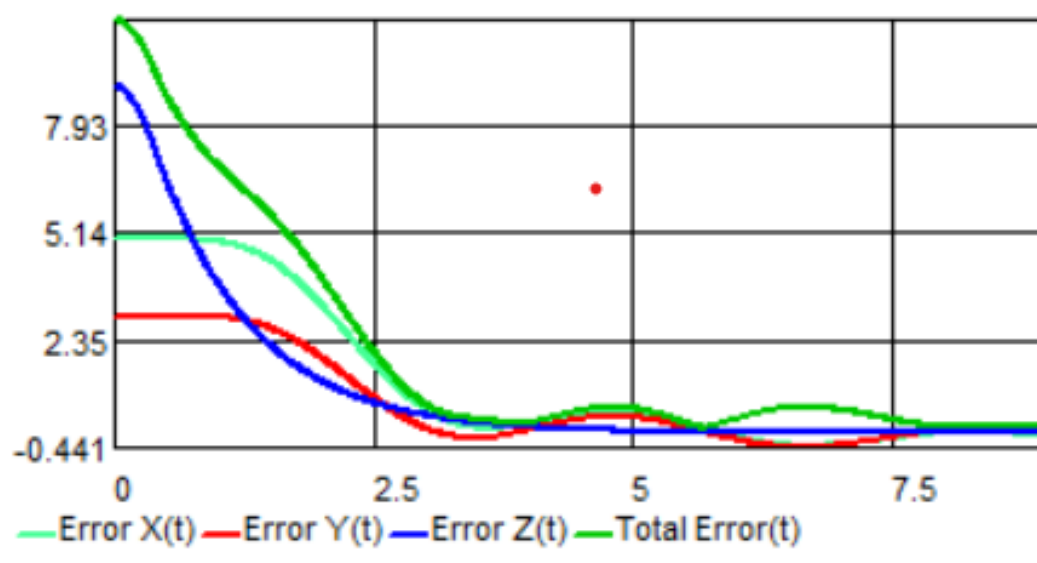


Рис. 13. Ошибка положения во втором тестировании в метрах  $\|\mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}(t)\|$ .

После завершения переходного процесса ошибка положения несколько сантиметров.

Управляющие воздействия носят затухающий характер, без устойчивых осцилляций. Высокая точность удержания положения достигнута несмотря на сильный постоянный ветер и импульсные порывы, что подтверждает эффективность выбранной каскадной ПИД-структуры.



## 7 Изучение пороговых возможностей модели летательного аппарата

Одной из поставленных целей в работе было нахождение сценариев, при которых из-за слишком резкого или сильного ветра коптер не справился бы с возмущениями среды. В данном разделе будут представлены графики сильных или слишком резких ветровых возмущений, а также 3d графики, иллюстрирующие, что система вышла из-под контроля при таких настройках ветренных возмущений.

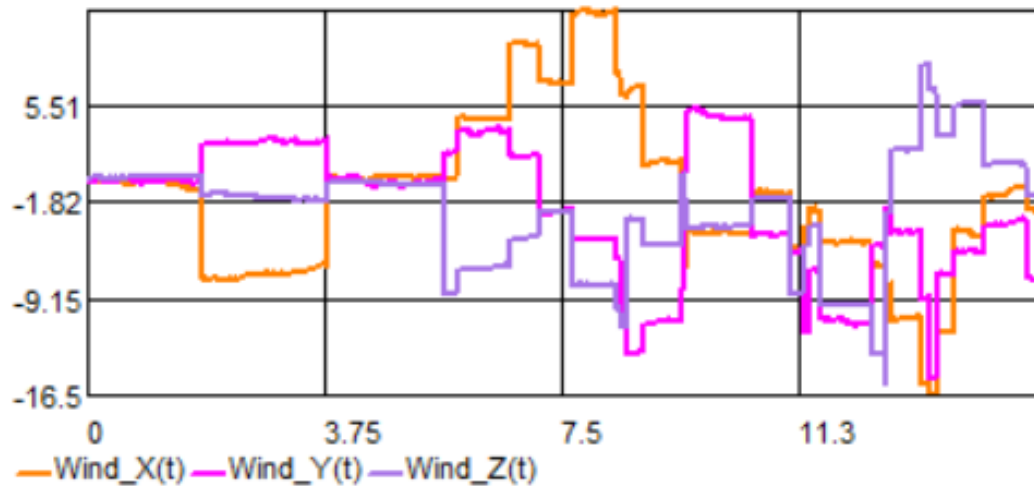


Рис. 14. Сильные и частые порывы ветра

Система показала хорошую стабильность при повышении интенсивности потока порывов, их длительности и амплитуды. Больших ошибок и дестабилизации аппарата удалось достичь при следующих параметрах потока порывов: интенсивность - примерно 1 порыв в секунду с амплитудой от 5 до 10 м/с и длительностью от 1 до 3 секунд.

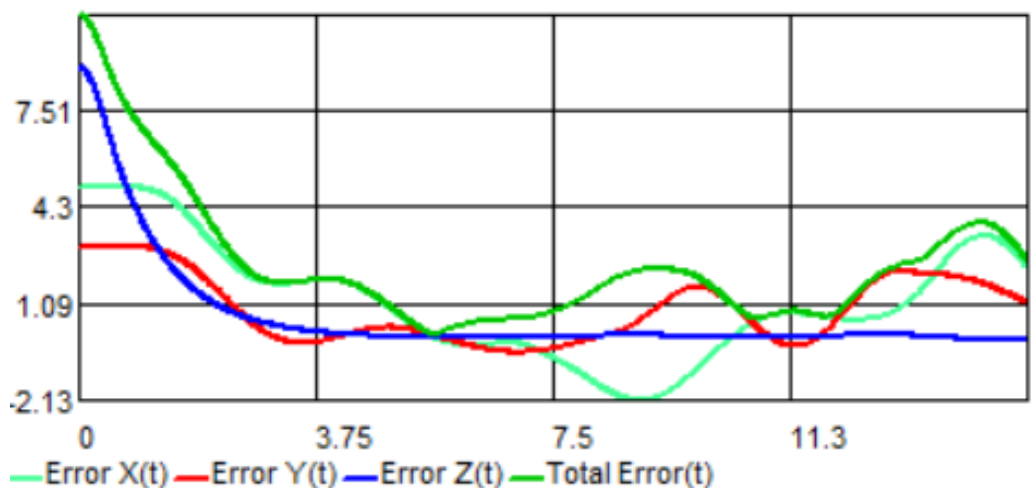


Рис. 15. Ошибка положения в третьем тестировании в метрах  $\|\mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}(t)\|$ .

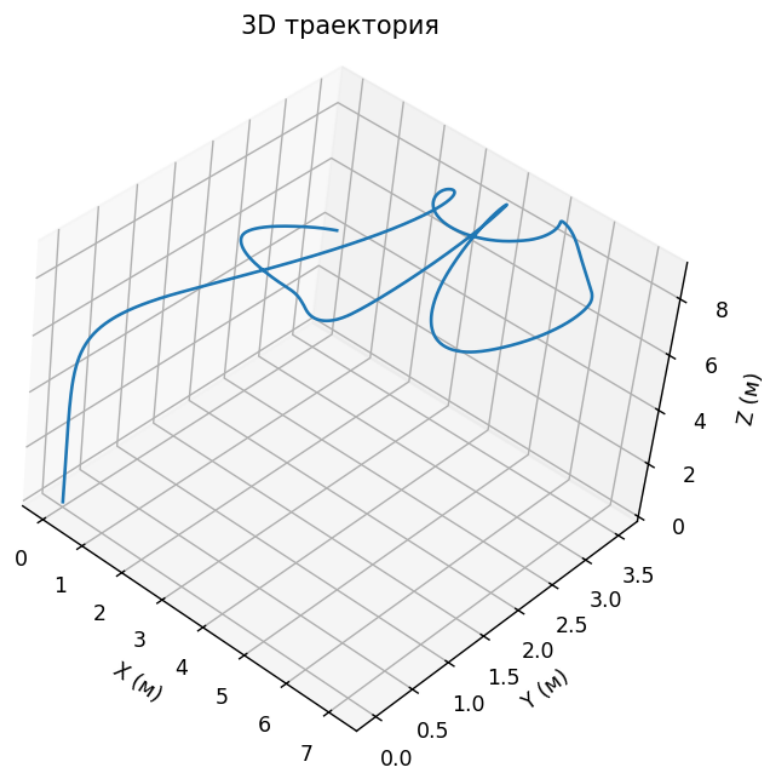


Рис. 16. Трёхмерная траектория движения при сильных и частых порывах.

На графиках видно, что ошибка большая, траектория хаотичная. При более "спокойных" настройках порывов, квадрокоптер справлялся с порывами, удерживал маленькую ошибку по положению, не имел слишком хаотичной траектории.

В первоначальном тестировании, при ветре в 15 м/с по координате X, был представлен позитивный краевой сценарий, ведь при текущих настройках тяги и углов наклона квадрокоптера, уже при постоянном ветре в 16 м/с аппарат не способен удерживаться в желаемой точке, его сносит.

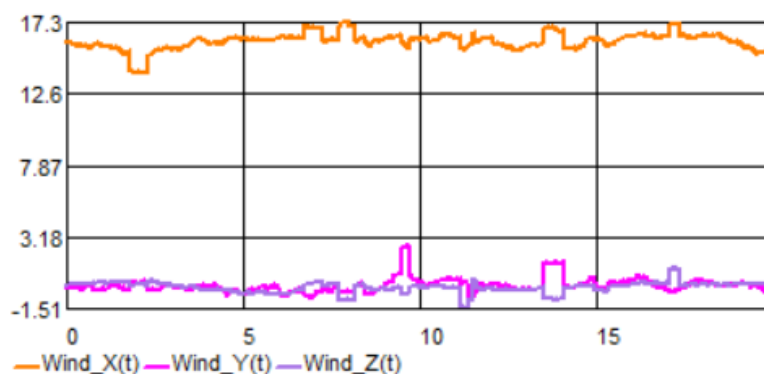


Рис. 17. Ветренные возмущения, 16 м/с по координате X

3D траектория

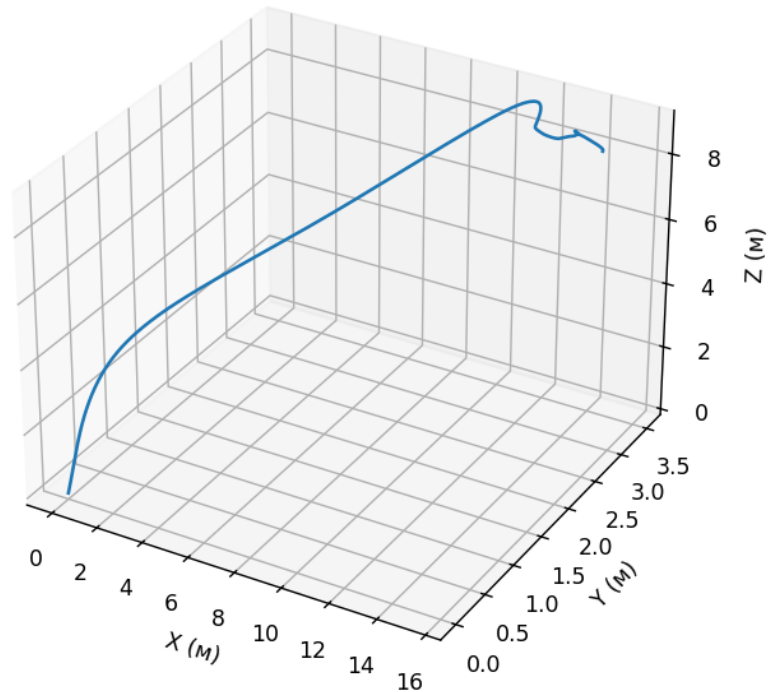


Рис. 18. Трёхмерная траектория движения при постоянном ветре 16 м/с.

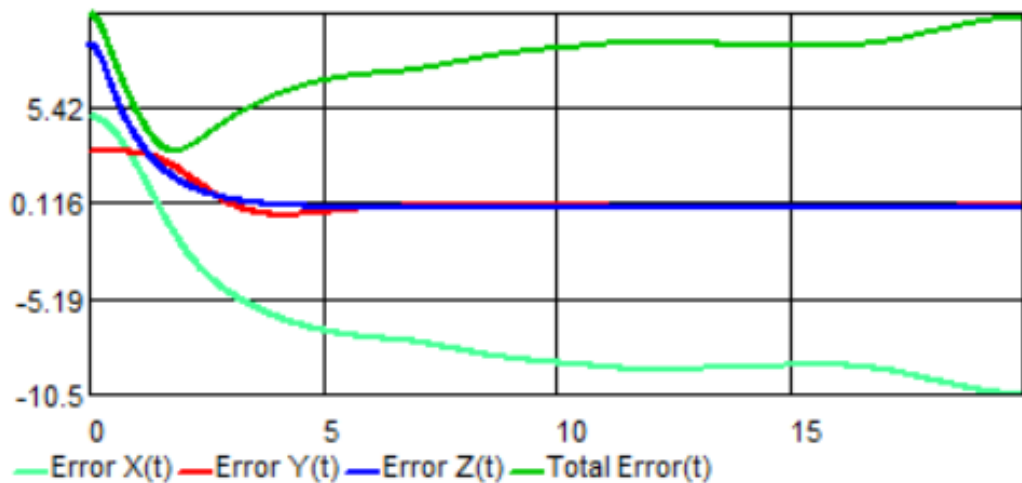


Рис. 19. Ошибка положения в четвертом тестировании в метрах  $\|\mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}(t)\|$ .

## Заключение

В работе реализуется компактная математическая модель квадрокоптера с каскадной ПИД-структурой управления, дополненная подробным описанием и включением ветровых возмущений. Учтены три ключевых компонента ветра: постоянная составляющая, детерминированные ступенчатые порывы и стохастические флуктуации, моделируемые процессом Гаусса–Маркова 1-го порядка. Это позволило оценить поведение системы в ре-

алистичных условиях внешних воздействий.

Численные эксперименты показали:

- устойчивые переходные процессы без выраженного перерегулирования при сильном постоянном встречном ветре;
- кратковременные, эффективно демпфируемые отклонения при ступенчатых порывах;
- высокую точность стабилизации позиции (ошибка после установления не превышает нескольких сантиметров);
- необходимость постоянного ненулевого тангажа для компенсации горизонтальной ветровой нагрузки, что согласуется с физикой задачи.

Практическая ценность результатов заключается в возможности напрямую использовать предложенный код на Python (с логированием в формате `.sig` и визуализацией в Sinus/Matplotlib) для быстрой настройки регуляторов и тестирования сценариев полёта в возмущённой атмосфере.

В дальнейшем планируется:

1. расширить модель турбулентности (Dryden/Von Kármán);
2. внедрить компенсаторы возмущений;
3. учесть дополнительные аэродинамические эффекты.

Таким образом, поставленная цель достигнута: создана модель, позволяющая исследовать динамику квадрокоптера и качество управления в условиях сложных ветровых воздействий, изучены границы возможностей стабилизации модели при сильных ветровых возмущениях.

## Список литературы

- [1] Алексеев А. Н., Козлов А. Е. Моделирование ветровых возмущений БПЛА на основе гаусс–марковских процессов // Труды МАИ. — 2021. — Вып. 118. — С. 1–12.
- [2] Батыров Д. Р., Кузнецов П. С. Дискретные порывы ветра ступенчатого типа в задачах динамики беспилотных летательных аппаратов // Известия вузов. Авиационная техника. — 2020. — № 6. — С. 77–84.
- [3] Будидяк Г. С., Судунёв Р. В. Динамика самолёта. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1983. — 320 с.
- [4] Личухун Г. В., Масленников А. Л. Квадрокоптер: динамика и управление // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. — 2020. — № 4. — С. 604. — DOI 10.18698/2541-8009-2020-04-604.
- [5] Петраневский И. В., Нечаев С. М. Компенсация ветровых возмущений в системах управления квадрокоптерами // Научно-технический вестник ИТМО. — 2015. — № 4. — С. 58–64.
- [6] Beard R. W., McLain T. W. Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice. — Princeton: Princeton University Press, 2012. — 320 p.
- [7] Dryden H. L. A Statistical Theory of Turbulence and the Problem of Gust Loads // NACA Report 575. — 1952. — 27 p.
- [8] Hoerner S. F. Fluid-Dynamic Drag. — Brick Town, NJ: Hoerner Fluid Dynamics, 1965. — 452 p.
- [9] Hoffmann G. M., Waslander S. L., Tomlin C. J. Aerodynamics of quadrotor flight // Proc. 2008 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA 2008). — Pasadena, CA, 2008. — P. 1–6. — DOI 10.1109/ROBOT.2008.4543186.
- [10] Leahy C. J., Brown R. E. Discrete Gust Modeling for Launch Vehicle Assessments // AIAA Atmospheric and Space Environments Conf. — 2008. — AIAA 2008-6826. — 12 p.
- [11] Luukkonen T. Modelling and Control of a Quadcopter. Independent research project. — Espoo: Aalto University, 2011. — 22 p.
- [12] Ornstein T. Experimental aerodynamics of quadrotors // AIAA Journal. — 2012. — Vol. 50, No. 8. — P. 1634–1642. — DOI 10.2514/1.J051456.
- [13] Shyy W., Aono H., Chimakurthi S. K., et al. Understanding and modeling hovering efficiency // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Vol. 720. — P. 1–36. — DOI 10.1017/jfm.2012.600.

- [14] Stevens B. L., Lewis F. L. Aircraft Control and Simulation. 3rd ed. — Hoboken: Wiley, 2015. — 704 p.
- [15] White F. M. Viscous Fluid Flow. 3rd ed. — New York: McGraw-Hill, 2006. — 629 p.

## Приложения

### Приложение А. Генерация возмущений

```
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import atexit
import signal
import sys
import os

class Wind_Model:
    """Генератор ветровых возмущений.
    """
    def __init__(self, dt,
                 steady=np.zeros(3),
                 gm_sigma=np.zeros(3), gm_tau=np.ones(3),
                 gust_events=None,
                 pulse_rate=0.0, pulse_amp_range=(0.0, 0.0), pulse_dur_range=(0.0, 0.0),
                 seed=None):
        self.dt = dt
        self.steady = np.array(steady, dtype=float)
        self.gm_sigma = np.array(gm_sigma, dtype=float)
        self.gm_tau = np.array(gm_tau, dtype=float)
        self.state_gm = np.zeros(3)
        self.gust_events = gust_events or []
        self.pulse_rate = pulse_rate
        self.pulse_amp_range = pulse_amp_range
        self.pulse_dur_range = pulse_dur_range
        self.active_pulses = []
        self.rng = np.random.default_rng(seed)

    # -----
    # >>> ВЕТЕР: СТУПЕНЬ — дискретный порыв (step gust)
    # -----
    @staticmethod
    def step_gust(t, t0, T, A):
        if t < t0 or t > t0 + T:
            return np.zeros(3)
        return np.array(A, dtype=float)

    def _update_gauss_markov(self):
        if np.all(self.gm_sigma == 0):
            return np.zeros(3)
        coef = np.exp(-self.dt / self.gm_tau)
        noise_scale = self.gm_sigma * np.sqrt(1 - coef**2)
        self.state_gm = coef * self.state_gm + noise_scale * self.rng.standard_normal(3)
        return self.state_gm

    def _update_random_pulses(self, t):
        # очистка просроченных импульсов
        self.active_pulses = [p for p in self.active_pulses if t < p['t_end']]
        # генерация нового импульса
        if self.pulse_rate > 0 and self.rng.random() < self.pulse_rate * self.dt:
            amp = self.rng.uniform(*self.pulse_amp_range)
            dur = self.rng.uniform(*self.pulse_dur_range)
            direction = self.rng.normal(size=3)
            direction /= np.linalg.norm(direction) + 1e-9
            vec = amp * direction
            self.active_pulses.append({'vec': vec, 't_end': t + dur})
        if not self.active_pulses:
            return np.zeros(3)
        return np.sum([p['vec'] for p in self.active_pulses], axis=0)

    def step(self, t):
        v = self.steady.copy()
        v += self._update_gauss_markov()
```