Ankündigung:

Das erste Hausübungsblatt ist fertig.

YAY

- Wo?

  Moodle

- Abgabe wann?

  bis 23.12.2020 23:59

- Abgabe wie?

  per Email an Viktor und mich

- Wann gibt es den 0,3-Noten-Bonus?

  Wenn beide Hausübungsblätter bestanden sind.

- Wann gilt ein Hausübungsblatt als bestanden?

  Wenn mehr als die Hälfte der Aufgaben sinnvoll bearbeitet sind

- Sprechstunden können per Email vereinbart werden

Heute:
- Kompaktheit in metrischen Räumen
- Beweis vom Satz von Tychonoff
- Einpunktkompaktifizierung

Kompaktheit in metrischen Räumen

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

Wir haben gesehen.

- Eine Teilmenge K von X ist kompakt
  $\Leftrightarrow$ Jede Folge in K eine konvergente Teilfolge hat
  $\Leftrightarrow$ Jede unendliche Teilmenge A von K einen **Häufungspunkt** $x \in K$
  dh $\forall$ U offen in K mit $x \in U$ gilt
  $A \cap U \ni x'$ $\quad x' \in A \quad x' \neq x$
- Eine kompakte Teilmenge von X ist abgeschlossen und beschränkt, aber nicht umgekehrt

(abgeschlossen und beschränkt $\not\Rightarrow$ kompakt in metrischen Räumen)

Def Eine Teilmenge A von (X,d) ist **totalbeschränkt** wenn zu jedem $\varepsilon>0$ eine endliche Menge von Punkten $x_1,\dots,x_n\in A$ existiert s.d. $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$.

Def: Eine Folge in (X,d) ist eine **Cauchy-Folge** falls für jedes $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ existiert s.d. $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ für $m,n\geq N$.

Def Ein metrischer Raum ist **vollständig** wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bem: 1) totalbeschränkt $\Rightarrow$ beschränkt
$\not\Leftarrow$

2) Jede kompakte Teilmenge K von

(X,d) ist totalbeschränkt

Bew: $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ hat eine endliche Teilüberdeckung

3) Jede kompakte Teilmenge von K (X,d) ist vollständig.

Bew: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine Cauchy-Folge.

Folgenkompaktheit $\Rightarrow \exists$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in K$

$\ell, m \gg 0$

$d(x, x_m)$

$\leq \underbrace{d(x, x_{n_\ell})}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_\ell}, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$

$< \varepsilon$

4) In metrischen Räumen

kompakt $\Leftrightarrow$ totalbeschränkt

+ vollständig

Satz von Tychonoff

Satz (Tychonoff): Das Produkt kompakter Räume ist kompakt (in der Produkttopologie).

Wiederholung (Ultrafilter):

Def: Sei X eine Menge. Ein Filter auf X ist eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X s.d.

(F1) $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2) $M, N \in \mathcal{F} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{F}$

(F3) $M \in \mathcal{F}$ $M \subseteq N \subseteq X$
$\Rightarrow N \in \mathcal{F}$

Ein Filter $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter wenn

(F4) $M \in \mathcal{F}$ oder $(X - M) \in \mathcal{F}$
für jede Teilmenge M von X.

Def Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

$\mathcal{F}$ **konvergiert** gegen $x \in X$ wenn jede Umgebung von x in X ein Element von $\mathcal{F}$ ist.

Satz: Sei X ein topologischer Raum.

X ist kompakt $\Longleftrightarrow$ Jeder Ultrafilter konvergiert gegen einen Punkt in X.

NEU:

Def: Für $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y, und $\mathcal{F}$ einen Filter auf X, definieren wir den

Pushforwardfilter

$$f_* \mathcal{F} := \{ M \subseteq Y \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{F} \}$$

Lemma:
- $f_* \mathcal{F}$ ist ein Filter auf Y
- Wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, ist auch $f_* \mathcal{F}$ ein Ultrafilter

<u>Bew</u>: Wir überprüfen die Axiome.

(F1): $Y \in f_* \mathcal{F}$: $f^{-1} Y = X \in \mathcal{F}$

$\emptyset \notin f_* \mathcal{F}$: $f^{-1} \emptyset = \emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2): $M, N \in f_* \mathcal{F} \overset{?}{\Longrightarrow} M \cap N \in f_* \mathcal{F}$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$f^{-1}(M), f^{-1}(N) \in \mathcal{F} \underset{(F2)}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)}_{= f^{-1}(M \cap N)} \in \mathcal{F}$$

(F3): $M \in f_* \mathcal{F}$ $N \supseteq M \overset{?}{\Longrightarrow} N \in f_* \mathcal{F}$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$f^{-1}(M) \in \mathcal{F} \quad f^{-1}(N) \supseteq f^{-1}(M) \underset{(F3)}{\Longrightarrow} f^{-1}(N) \in \mathcal{F}$$

(F4): M oder $Y - M$ ist in $f_* \mathcal{F}$:

$$f^{-1}(M) \subseteq X$$

$$f^{-1}(Y - M) = X - f^{-1}(M) \subseteq X$$

$\Rightarrow$ entweder $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}$
F4 oder $f^{-1}(Y - M) \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ F4 für $f_* \mathcal{F}$

$\square$

Beweis (Tychonoff):
Sei I eine Indexmenge und
X_i ein kompakter topologischer Raum
für jedes $i \in I$.

Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ausgestattet mit
$\emptyset$ $\neq$
der Produkttopologie
und $\pi_j : X \to X_j$ die Projektionsabb.

Wir zeigen, dass X kompakt,
indem wir zeigen, dass jeder
Ultrafilter konvergiert.

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X.

Lemma $\Rightarrow$ $\pi_{i*} \mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf X_i für $i \in I$.

Weil X_i kompakt ist, konvergiert $\pi_i \mathcal{F}$ gegen $x_i \in X_i$.

Was ist jetzt ein guter Kandidat für einen Grenzwert von $\mathcal{F}$ (auf X)?

Natürlich $x = (x_i)_{i \in I} \in X$

Wir zeigen: $\mathcal{F}$ konvergiert gegen x:

Sei U eine Umgebung von x.

$U \subseteq X$ offene Menge

Wir müssen zeigen, dass $U \in \mathcal{F}$.

Erinnerung:

$$\mathcal{B} = \{ \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \mid U_{i_k} \subseteq X_{i_k} \text{ offen}, n \in \mathbb{N} \}$$

ist eine Basis der Produkttopologie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Es gibt $i_1, \dots, i_n \in I$

und $U_{i_k} \subset X_{i_k}$

s.d. $\underbrace{\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})}_{x \in \quad =: V} \subseteq U$

Wir zeigen zunächst, dass $V \in \mathcal{F}$.

Weil $(\pi_i)_* \mathcal{F}$ gegen x_i konvergiert

ist $x_{i_k} \in U_{i_k} \in (\pi_{i_k})_* \mathcal{F}$

$\Rightarrow \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{F}$

$\overset{(F2)}{\Longrightarrow} \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathcal{F}$ $(*)$

$\overset{(F3)}{\Longrightarrow} U \in \mathcal{F}$

D.h. $\mathcal{F}$ konvergiert gegen x

und $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist kompakt

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Der Beweis funktioniert nicht mit der Boxtopologie. Das Argument (*) funktioniert nämlich nicht.

<u>Beispiel</u>: Sei $X \neq \emptyset$ eine endliche Menge ausgestattet mit diskreten Topologie
$\rightsquigarrow$ top Raum

Dann ist $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ kompakt in der Produkttopologie.

Aber nicht kompakt in der Boxtopologie,
$\nwarrow$ diskret

<u>Bemerkung</u>: Auswahlaxiom
$\iff$ Zorn's Lemma
$\iff$ Tychonoff

Einpunktkompaktifizierung

Beispiel: • $(0,1)$ mit der Standardtop ist nicht kompakt.

Behauptung: Man kann zu $(0,1)$ einen Punkt hinzufügen und bekommt einen kompakten Raum, nämlich S^1

Def: Sei X ein Hausdorffraum (nicht kompakt).
Sei $X^* := X \cup \{\infty\}$, $\infty \notin X$ und τ_∞ die folgende Menge von Teilmengen von X^*.

1) $U \in \tau_\infty$ für jede offene Menge $U \subseteq X$ in X.

2) $X^* - K \in \tau_\infty$ mit $K \subset X$ kompakt

(X^*, τ_∞) heißt Einpunktkompaktifizierung von X.

Lemma: τ_∞ ist eine Topologie auf X^*.

Beweis: Wir überprüfen die Axiome.

(T1): $\emptyset \in \tau_\infty$ da $\emptyset \subset X$ offen

$X^* \in \tau_\infty$ da $X^* - \emptyset$ und $\emptyset$ ist kompakt $\subseteq X$.

(T2): endliche Schnitte:

3 Fälle: 1. $U_1, U_2 \subseteq X$ offen in X

dann ist $U_1 \cap U_2$ offen in X und $U_1 \cap U_2 \in \tau_\infty$

2. $U \subseteq X$ offen in X

$V = X^* - K$ $K \subseteq X$ kompakt

Ist $U \cap V \in \tau_\infty$?

$$U \cap V = U \cap (X^* - K)$$

$$= U \cap (X - K)$$

$\infty \notin U$ $\subseteq X$

$X - K$ ist offen in X, weil K abgeschlossen, weil X Hausdorff.

3. $X^* - K_1$, $X^* - K_2$

$K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt

Ist $(X^* - K_1) \cap (X^* - K_2) \in \tau_\infty$?

$$\parallel$$

$$X^* - (\underbrace{K_1 \cup K_2}_{\substack{\text{kompakte} \\ \text{Teilmenge} \\ \text{von } X}})$$

$$\Rightarrow (X^* - K_1) \cap (X^* - K_2) \in \tau_\infty$$

(T3) beliebige Vereinigungen:

3 Fälle: 1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, ($U_\alpha$ offen in X, $\forall \alpha \in A$)

ist offen in X

$\Rightarrow$ in τ_∞

2) $\bigcup_{\beta \in B} (X^* - K_\beta)$, ($K_\beta \subseteq X$ kompakt)

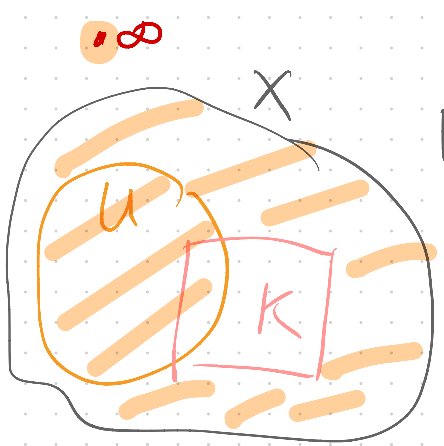
$$= X^* - \underbrace{\bigcap_{\beta \in B} K_\beta}_{\text{kompakt}} \in \tau_\infty$$

3) $U \cup (X^* - K)$

$U \subseteq X$ offen

$K \subseteq X$ kompakt

$$= X^* - (K - K \cap U)$$



$K - (K \cap U)^{\subseteq X}$ ist kompakt

$\quad\;\; \parallel$

$K \cap \underbrace{(X - U)}_{\text{abg}}$

abg weil X Hausdorff

Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt

$$\Rightarrow \quad X^* - (\underbrace{K - K \cap U}_{\substack{\text{kompakt} \\ \text{und } \subseteq X}}) \in \tau_\infty$$

$\square$

Lemma: $X \subseteq X^*$ ist ein Teilraum, dh X hat die Teilraumtopologie induziert durch τ_∞.

Beweis:
- Jede offene Teilmenge von X ist offen in X^*.
- Sei $U \subseteq X^*$ offen in X^*

Ist $U \cap X$ offen in X?

2 Fälle: • $U \subseteq X$ ist offen in X

• $U = X^* - K$ ← kompakte Teilmenge von X

Dann $U \cap X = X - K$ ist offen in X, weil K abgeschlossen, weil X Hausdorff ist.

$\square$

Lemma: X^* ist kompakt.

Beweis: Sei $X^* = \bigcup_{j \in I} U_j$ mit $U_j \subseteq X^*$ offen.

Es gibt ein $i_0 \in I$ s.d. $\infty \in U_{i_0} = X^* - K$ mit $K \subseteq X$ kompakt.

$$\Rightarrow \quad K \subseteq \bigcup_{j \neq i_0} U_j$$

$\Rightarrow$ Es gibt $i_1, \dots, i_n \in I$

K kompakt

s.d. $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

$\Rightarrow X^* = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

$\square$

<u>Lemma</u>: Sei X lokalkompakt,

dh X ist Hausdorff und es gibt für jedes $x \in X$ eine offene Teilmenge U von X und eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ s.d.

$x \in U \subseteq K$)

Dann ist die Einpunktkompaktifizierung X^* Hausdorff.

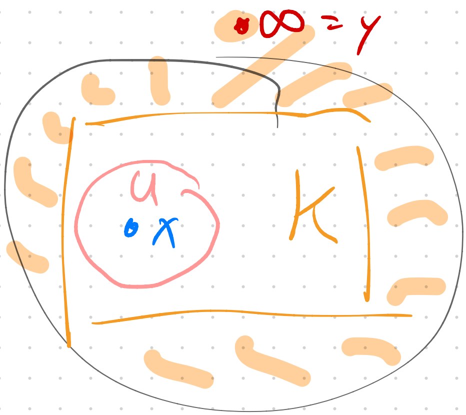
<u>Beweis</u>: Seien $x \neq y$ Punkte in X^*.

wenn $x, y \in X \overset{\text{X Hausdorff}}{\Rightarrow} \exists\, U, V$ offene Teilmengen von X

s.d. $x \in U$, $y \in V$
und $U \cap V = \emptyset$

Wenn $x \in X$
und $y = \infty$:

Weil X lokalkompakt ist, gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ in X und eine kompakte Menge $K \subseteq X$ s.d. $x \in U \subseteq K$.



Sei $V = X^* - K \in \tau_\infty$

Dann ist $U \cap V = \emptyset$

$x \in U$, $\infty = y \in V$

$\square$

Wir haben gezeigt:

<u>Satz</u> (Einpunktkompaktifizierung).

Sei X ein Hausdorffraum und $X^* = X \cup \{\infty\}$ und τ_∞ wie in Definition oben, dann

1) τ_∞ ist eine Topologie auf X^*

und $X \subset X^\infty$ ein Teilraum.

2) X^∞ ist kompakt

3) Wenn X lokalkompakt ist, dann ist X^∞ Hausdorff.

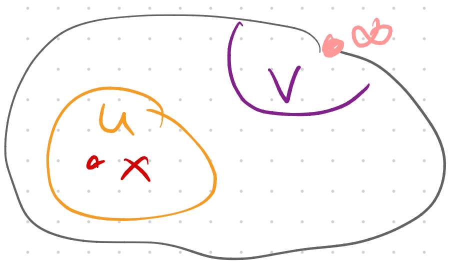
<u>Lemma</u>: Sei Y ein kompakter Hausdorffraum und $X \subset Y$ ein Teilraum s.d. $Y - X = \{pt\}$

Einpunktmenge.

$\Rightarrow$ Dann ist X lokalkompakt.

<u>Beweis</u>: $pt =: \infty$

Sei $x \in X$. Da Y Hausdorff ist, gibt $U, V \subset Y$ offen mit $x \in U$, $\infty \in V$ und $U \cap V = \emptyset$



$K := Y - V$

K ist abgeschlossen

$\Rightarrow$ K kompakt

$\uparrow$

abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt

$\Rightarrow$ $\underbrace{x \in U}_{\text{offen}} \subseteq \underbrace{K}_{\text{kompakt}} \subseteq X$

$\square$

U ist offen in X,
weil X offen in Y
ist weil $Y - X = \{\infty\}$

$\uparrow$

ist abgeschlossen
weil Y
Hausdorff ist
und 1-Punkt
Mengen abg
sind.

Lemma: Sei X lokal kompakt.
X^* die Einpunktkompaktifizierung.
Angenommen Y ist ein kompakter Hausdorffraum sd.
und $X \subseteq Y$ und $Y - X = \{pt\}$.
Teilraum

Dann ist $\varphi : Y \to X^*$

$$\varphi|_X = id_X$$

$$\varphi(pt) = \infty$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis: • Bijektion ✓

Wir haben letzte Woche gesehen, dass eine stetige Bijektion

$$f : Z^{=Y} \to W^{=X^*}$$

Z kompakt, W Hausdorff

ein Homöomorphismus ist

(Lemma 2 (iii) vom 23. 11. 2020)

Also müssen wir nur zeigen, dass φ stetig ist:

Sei $U \in \tau_\infty$

Wenn $U \subseteq X$ offen in X

dann ist

$\varphi^{-1}(U) = U \subseteq X \subseteq Y$

offen in Y

weil $X \subseteq Y$ offen ist (X ist das Komplement einer 1-Punktmenge und in Hausdorffräumen sind 1-Punktmengen abgeschlossen.)

$K \subset X$ kompakt

$U = X^* - K$

dann ist

$\varphi^{-1}(U)$

$= Y - \varphi^{-1}(K)$

$= Y - K$

Außerdem ist K abgeschlossen, weil $K \subseteq Y$ kompakt und Y Hausdorff

Beispiele:

1) S^1 ist kompakt und Hausdorff und $S^1 - \{pt\}$

$$\begin{array}{c} S^1 - \{pt\} \\ \cong \\ (0,1) \\ \cong \\ \mathbb{R} \end{array}$$

lokalkompakt

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^* \cong S^1$$

$$(0,1)^* \cong S^1$$

$[0,1]$ ist eine andere Kompaktifizierung von $(0,1)$

2) $(\mathbb{R}^n)^* \cong S^n$