

Klassifikationsatz für Überlagerungen

Für B wegzusammenhd., lokal wegzsrgd

und semikat einfach zshgd. ist

$\text{fib}_b : \text{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B, b)^{\circ P}\text{-Set}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & E' \\ p \downarrow & \swarrow q & \longleftarrow \\ B & & \end{array} \quad \begin{array}{c} p^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{\quad} q^{-1}(\{b\}) \\ \downarrow \\ p|_{p^{-1}(b)} \end{array}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Zusammenhängende Überlagerungen entsprechen

transitiven $\pi_1(B, b)^{\circ P}$ -Operationen.

Def.: Gegebenen Funktoren $F, G : C \longrightarrow D$

ist eine $\text{naturliche Transformation } \eta$ von F

nach G :

für jedes Objekt $x \in C$ ein Morphismus

$$\gamma_x : F(x) \longrightarrow G(x)$$

so dass für jeden Pfeil $\varphi : x \rightarrow y$ in C

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(y) \\ \gamma_x \downarrow & & \downarrow \gamma_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(y) \end{array}$$

kommutiert.

Ein natürlicher Isomorphismus ist eine natürliche Transformation γ , für die jeder Pfeil γ_x ein Isomorphismus in D ist.

Alternativ: natürlicher Isomorphismus

\Leftrightarrow invertierbare natürliche Transformation

Stichwort: 2-Kategorien

Def.: Eine Äquivalenz von Kategorien ist ein Funktor $\bar{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ mit einem Pseudoinversen $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, so dass natürliche Isomorphismen $\gamma: G \circ \bar{F} \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $\varepsilon: F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$ existieren.

Def.: Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt

- essenziell surjektiv, wenn für jedes Objekt $d \in \mathcal{D}$ ein $c \in \mathcal{C}$ existiert mit einem Isomorphismus $F(c) \xrightarrow{\sim} d$.

- **vollfrei**, wenn für Objekte $c, c' \in C$ die Abbildung

$$\text{Mor}(c, c') \xrightarrow{F} \text{Mor}(F(c), F(c'))$$

bijektiv ist.

Lemma Ein Funktor $F: C \rightarrow D$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn F essentiell surjektiv und vollfrei ist.

Bew.!

" \Rightarrow " **essentiell surjektiv:** Sei $G: D \rightarrow C$ ein Pseudoinverses mit $\eta: G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_C$
 $\varepsilon: F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_D$

Für $d \in D$ ist $F(G(d)) \xrightarrow[\varepsilon]{} d$.

Volltron: φ ist eine natürliche Transf.:

Für $x \xrightarrow{\varphi} y$ in C ist

$$\begin{array}{ccc} G(F(x)) & \xrightarrow[G(F(\varphi))]{\quad \text{---} \varphi \text{ ---} \quad} & G(F(y)) \\ \gamma_x \downarrow \cong & & \cong \downarrow \gamma_y \\ x & \xrightarrow{\varphi} & y \end{array}$$

Kommutativ.

D.h.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mor}_c(x,y) & \xrightarrow{F} & \text{Mor}_D(F(x),F(y)) & \xrightarrow{G} & \text{Mor}_c(G(F(x)),G(F(y))) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & \text{Mor}_c(G(F(x)),G(F(y))) \\ & & \varphi \mapsto \gamma_y \circ \varphi \circ \gamma_x^{-1} & & \text{Mor}_c(x,y) \end{array}$$

ist die Identität. D.h. ist injektiv.

Surjektivität gelte ähnlich.

\Leftarrow Sei $F: C \rightarrow D$ essentiell surj-
und vollstet.

Wähle für jedes $d \in D$ ein $a_d \in C$
mit einem Isomorphismus $\varphi_d: F(a_d) \xrightarrow{\sim} d$

Definiere einen Funktor $G: D \rightarrow C$

durch $G(d) := a_d \quad \text{für } d \in D$

und für $\varphi: d \rightarrow d'$ setze

$$G(\varphi) := F(\varphi_{d'}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_d)$$

$$\begin{array}{ccc}
 G(d) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(d') \\
 \parallel & & \parallel \\
 a_d & \longrightarrow & a_{d'}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{F} & \\
 & F & \\
 & \downarrow &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(G(d)) & \xrightarrow{F(G(\varphi))} & F(G(d')) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \varphi_d & \downarrow \cong & \downarrow \varphi_{d'} \\
 d & \xrightarrow{\varphi} & d'
 \end{array}$$

Dann ist automatisch $\psi : F \circ G \xrightarrow{\cong} id_D$
 eine natürliche Transformation.

Funktionalität von G sieht man durch
 nachrechnen; z.B.

$$\begin{aligned} G(id_d) &= \tilde{F}'(\psi_d^{-1} \circ id_d \circ \psi_d) = \tilde{F}'(id_d) \\ &= id_{\tilde{F}'(d)} = id_{G(d)}. \end{aligned}$$

Was noch fehlt ist die natürliche
 Transformation $\eta : G \circ F \Rightarrow id_C$

Für $c \in C$ definire

$$\begin{aligned} \eta_c &:= \tilde{F}'(\underbrace{\psi_{F(c)}}_{F(G(F(c)))} : G(F(c)) \longrightarrow c \\ &\quad F(G(F(c))) \xrightarrow{\cong} F(c) \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass

$$\begin{array}{ccc} G(F(c)) & \xrightarrow{\quad G(F(\varphi)) \quad} & G(F(c')) \\ \gamma_c \downarrow & & \downarrow \gamma_{c'} \\ c & \xrightarrow{\qquad \varphi \qquad} & c' \end{array}$$

Kommutiert, wurde $F: \text{Mor}(G(F(c)), c') \rightarrow$

$$\downarrow \cong$$

$$\text{Mor}(F(G(F(c))), F(c'))$$

durch:

$$\begin{array}{ccc} F(G(F(c))) & \xrightarrow{\quad F(G(F(\varphi))) \quad} & F(G(F(c'))) \\ \varphi_{+c} \downarrow \cong & // & \cong \downarrow \varphi_{+c'} \\ F(c) & \xrightarrow{\quad F(\varphi) \quad} & F(c') \end{array}$$

Das kommuniziert, weil φ eine nat. Transf. definiert.

Bemerkung: Gegeben eine Gruppe G
und eine G -Operation $G \times M$ ist
 M eine disjunkte Vereinigung von Bäumen.

$$M = \coprod_x G \cdot x \quad x \text{ durchläuft}$$

Repräsentanten für M/G

Jedes $G \cdot x$ ist eine Menge mit transitiver
 G -Operation.

Lemma Sei M eine Menge mit transitiver
 G -Operation und $x \in M$. Dann ist

$$G/G_x \longrightarrow M$$

$$g G_x \longmapsto g \cdot x$$

$$h \cdot g G_x := h g G_x$$

eine äquivalente Bijektion.

Beweis Surjektiv und Äquivalenz sind klar.

Wohldefiniertheit: Ang. $gG_x = hG_x$

Dann ist $h^{-1}gG_x = G_x$, also

$h^{-1}g \in G_x$. Also $h^{-1}g \cdot x = x$, d.h.

$$g \cdot x = h \cdot x$$

Injectivität: $g \cdot x = h \cdot x \Rightarrow h^{-1}g \cdot x = x$

$$\Rightarrow h^{-1}g \in G_x$$

$$\Rightarrow gG_x = hG_x. \quad \square$$

Also ist jede transitive G -Operation von der Form G/H für eine Untergruppe

$H \subset G$.

D.h. Jede Menge H mit G -Operation
lässt sich als $\coprod_{i \in I} G/H_i$
für $H_i \subset G$ Untergruppen schreiben.

Konstruktion von Überlagerungen

Wir hatten schon gesehen, dass für G
eine Gruppe und $G \subset X$ eine Überlagerungs-
operation auf einem top. Raum X die Quotienten-
abbildung $X \rightarrow X/G$
eine Überlagerung ist.

Def.: Sei $p:E \rightarrow B$ eine Überlagerung.

$\text{Aut}(E|B) := \{\text{Isomorphismen}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & \bar{E} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array} \quad \text{in } \text{Cov}_B \}$$

ist die Gruppe der Decktransformationen.

$\text{Aut}(E|B)$ operiert von links auf E .

Lemma Wenn $p:E \rightarrow B$ eine zsgd.

Überlagerung ist und B lokal zsgd.

ist, dann ist $\text{Aut}(E|B) \subset E$ eine

Überlagerungsoperation.

Bew.: Sei $y \in E$ und $x = p(y)$. Wähle

lokale
eine Trivialisierung von P über einer

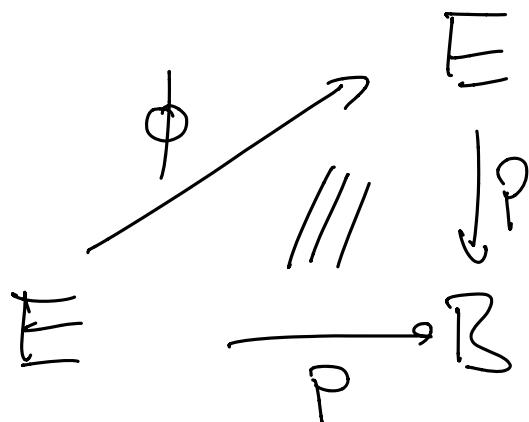
Umgebung U von x , so dass U zshgd.

ist. Dann ist $\bar{p}^{-1}(U) = \coprod_{f \in F} U_f$ mit

$F = \bar{p}^{-1}(\{x\})$ und $y \in U_y$.

Sie $\phi \in \text{Aut}(E|B)$ und ang.

$$y' \in U_y \cap \phi(U_y)$$



Also ist ϕ ein Lift von p entlang

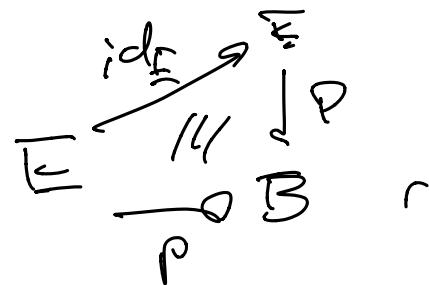
p und E ist zshgd.

Beh.: Wenn $y' \in U_y \cap \phi(U_y)$ hat

ϕ einen Fixpunkt.

Dann ist $\phi(z) = z$ für ein $z \in E$

und $\text{id}_E(z) = z$ und



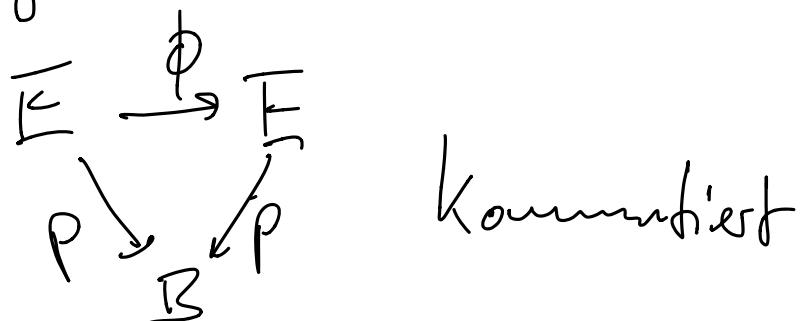
Wegen Endlichkeit von L^f ist dann

$$\phi = \text{id}_E.$$

Eine Behauptung: $\phi(U_f) = U_f$

für ein $f \in F$.

Das folgt, weil



und $p|_{U_f} : U_f \hookrightarrow U$ ein Homöomorphismus.

□

Def.: Eine Überlagerung $p: E \rightarrow B$ heißt Galoisch, falls die induzierte Abbildung

$$E/\text{Aut}(E|B) \xrightarrow{\bar{p}} B$$

ein Homöomorphismus ist.

Lemma: $p: E \rightarrow B$ ist genau dann Galoisch, wenn $\text{Aut}(E|B)$ transitive auf jeder Faser $\bar{p}^{-1}(\{b\})$. Das ist genau dann

der Fall, wenn $\text{Aut}(E/B)$ schon
transitiv auf einer Faser $\bar{p}'(\{b\})$
operiert.

Bew.: Die Menge $E/\text{Aut}(E/B)$ ist
die Menge von Orbits; also ist

$$\bar{p} : E/\text{Aut}(E/B) \longrightarrow B$$

dann dann injektiv, wenn jeder Orbit
gleich einer Faser ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn
 $\text{Aut}(E/B)$ transitiv auf den Fasern
operiert.

Wenn $\text{Aut}(E/B)$ transv auf einer Faser operiert, dann ist

$$\bar{p}^{-1}(\{b\}) = \{\bar{e}\}$$

für ein $b \in B$.

Aber $\bar{p}: E/\text{Aut}(E/B) \rightarrow B$ ist

automatisch eine Überlagerung (!)

Also sind alle Fasre von \bar{p} homöomorph,

also \bar{p} injektiv.

