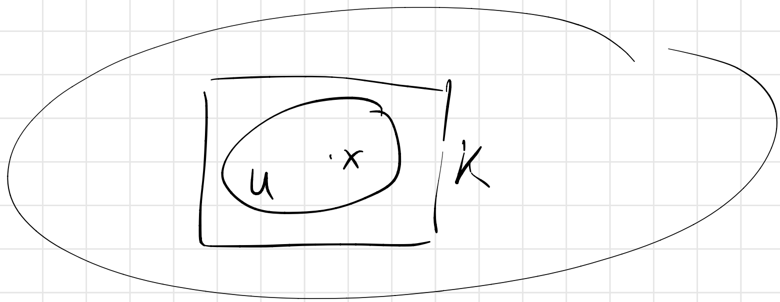
Lokalkompaktheit

Def: Ein Hausdorffraum X heißt lokal kompakt falls für alle $x \in X$ eine offene Menge U und eine kompakte Menge K existieren s.d.

$$x \in U \subseteq K$$



Beispiele:
- kompakter Hausdorffraum (Übungen)
- diskreter top Raum
- $(0,1)$
- $\mathbb{R}^n$

<u>Lemma</u> Sei X Hausdorff

Dann gilt X ist lokalkompakt genau dann, wenn $\forall x \in X$ und $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit $x \in U$ ex K kompakt und $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ offen mit $x \in V \subseteq K \subseteq U$

<u>Beweis</u> "$\Leftarrow$" $\overset{\text{easy}}{\text{"}\forall\text{"}}$ $x \in X$ ist eine offene Umgebung $\Rightarrow \exists$ $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$

$K \subseteq X$ kompakt

mit $x \in V \subseteq K$.

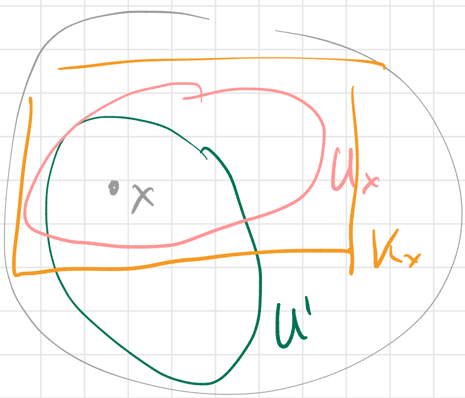
"$\Rightarrow$" Sei $x \in X$ und U' eine Umgebung.

X lokalkompakt

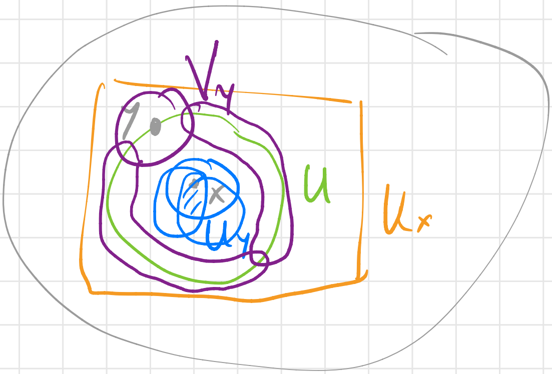
$\Rightarrow \exists$ $U_x \subseteq X$ offen

und K_x kompakt mit

$x \in U_x \subseteq K_x$



$U := U' \cap U_x \subseteq K_x$, Sei $y \in \partial U$



X Hausdorff

$\Rightarrow \exists\, V_y, U_y \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$

s.d. $U_y \cap V_y = \emptyset$

$y \in V_y$, $x \in U_y$

$$\partial U \subseteq \bigcup_{y \in \partial U} V_y$$

∂U kompakt

$\Rightarrow \exists\, y_1, \dots, y_n \in \partial U$ sd $\partial U \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$

(abg TM einer kp Menge)

$V := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ ist offen in X

$K := \left(V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \cup (\overline{U})^c\right)^c$ ist eine abg TM einer kp Menge, also kp.

Außerdem gilt

$x \in V \subseteq K$

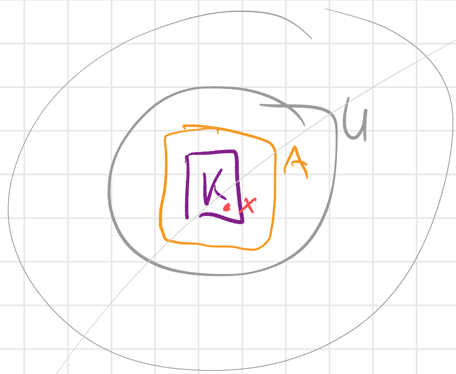
Korollar: Sei X lokalkompakt und $U \subseteq X$ offen.
Dann ist U mit der Teilraumtop lokalkompakt.

Korollar: Sei X lokalkompakt und $K \subseteq X$ kompakt, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit $K \subseteq U$.
Dann ex $A \subseteq X$ kompakt mit

$$K \subseteq \mathring{A} \subseteq A \subseteq U$$

Beweis:

$x \in K$



(1) $\forall x \in K \ \exists U_x \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$, K_x kp

s.d. $x \in U_x \subset K_x \subset U$ (Lemma vorher)

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$

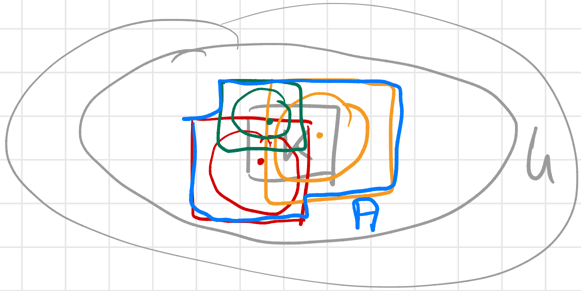
(2) $\exists$ $x_1, \dots, x_n \in K$ s.d.

$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ (K kompakt)

③ $A := K_{x_1} \cup \dots \cup K_{x_n}$ ist kompakt,

$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \subseteq \mathring{A} \subseteq A$

und $A \subseteq U$



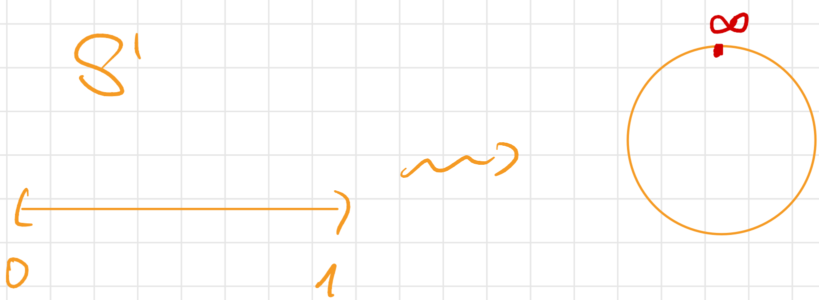
Einpunktkompaktifizierung

Beispiel: $(0,1)$ mit der Standardtop ist nicht kompakt.

Behauptung: Man kann zu $(0,1)$ einen Punkt hinzufügen und so einen kompakten Raum bekommen.

Welchen kompakten Raum?

A: S^1



Def Sei X ein Hausdorffraum.

$$X^* := X \cup \{\infty\} \quad \text{wobei } \infty \notin X$$

$$\tau_\infty := \left\{ U \subseteq X^* : \begin{array}{l} U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X \text{ oder} \\ U = X^* \setminus K \text{ wobei} \\ K \subseteq X \text{ kompakt} \end{array} \right\}$$

(X, τ_∞) heißt **Einpunktkompaktifizierung** von X.

Lemma: τ_∞ ist eine Topologie auf X^*.

Beweis: 1) $\emptyset \in \tau_\infty$ und

$$X^* = X \setminus \underset{\text{kompakt}}{\emptyset} \in \tau_\infty$$

2) beliebige Vereinigungen: $\bigcup_{i \in I} U_i$

3 Fälle: 1) Alle U_i sind offene Teilmengen von X

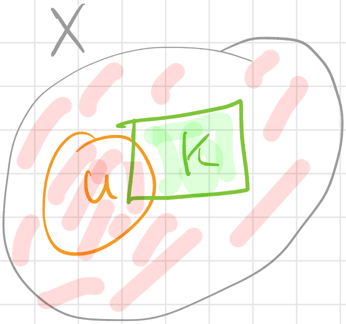
$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ offen in X und somit in τ_∞

2) Alle U_i sind von der Form $X^* \setminus \underset{\text{kompakt}}{K_i} = U_i$

TM von X

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} (X^* \setminus K_i)$$

$$= X^* \setminus \underbrace{\bigcap_{i \in I} K_i}_{\text{kompakt TM von } X} \in \tau_\infty$$



3) U offen in X

K kompakte TM von X

$$\Rightarrow U \cup (X^* \setminus K)$$

$$= X^* \setminus (K \setminus (K \cap U))$$

$$K \setminus (K \cap U)$$

$$= \underbrace{K \cap (X \setminus U)}_{\text{abg TM eine kp Menge}}$$

$\Rightarrow$ kompakt

$$\Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) \in \tau_\infty$$

Endliche Schnitte:

3 Fälle: 1. $U_1, U_2 \subseteq X$ offen
$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \subseteq X$ offen
und in τ_∞

2. $U \subseteq X$ offen, $X^* - K$ $K \subseteq X$ kompakt

Ist $U \cap (X^* - K) \in \tau_\infty$?

$$U \cap (X^* - K) = U \cap \underbrace{(X - K)}_{\text{offen, weil } K \text{ abg weil } X \text{ Hausdorff}}$$

$\Rightarrow U \cap (X - K) \subseteq X$ offen $\Rightarrow$ in τ_∞

3. $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt

Ist $(X^* - K_1) \cap (X^* - K_2)$ in τ_∞?

$$(X^* - K_1) \cap (X^* - K_2) = X^* - \underbrace{(K_1 \cup K_2)}_{\text{kompakt in } X} \in \tau_\infty$$

Lemma: $X \subseteq X^*$ ist ein Teilraum

dh X trägt die Teilraumtopologie induziert durch τ_∞.

Beweis: Sei τ die Topologie auf X und $\tau_\infty|_X$ die Teilraumtopologie.

$\tau \subseteq \tau_\infty|_X$: per Definition

$\tau_\infty|_X \subseteq \tau$: Sei $U \in \tau_\infty|_X$

$U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$

$U = (X^* \setminus K) \cap X$ mit $K \subseteq X$ kompakt

X Hausdorff $\Rightarrow$ K abgeschlossen in X und somit ist $U = X \setminus K$ offen

$\square$

Lemma: X^* ist kompakt.

Sei $X^* = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

Es ex $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$

also $U_{i_0} = X^* \setminus K$, $K \subseteq X$ kompakt

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{j \neq i_0} \underbrace{(U_j \cap X)}_{\text{offen in } X}$

$\Rightarrow \exists\ j_1, \dots, j_n$ mit

$K \subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n}$

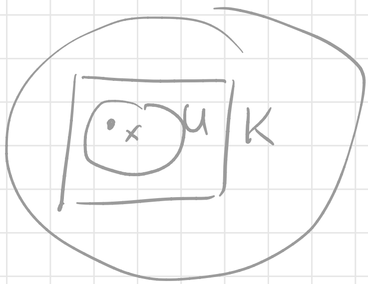
$\Rightarrow X^* = U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n} \cup U_{i_0}$

Lemma: Sei X lokalkompakt.
Dann ist X^* Hausdorff.

Beweis: Seien $x, y \in X^*$ mit $x \neq y$

Falls $x, y \in X \Rightarrow \exists\, U, V \subseteq X$ offen mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ weil X Hausdorff.

Falls $y = \infty$, $x \in X$



X lokalkompakt

$\Rightarrow \exists\, U \subseteq X$ offen, $K \subseteq X$ kompakt mit $x \in U \subseteq K$

$V := X^* \setminus K$ ist offen in X^*, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

$\square$

Wir haben also bewiesen.

<u>Satz</u>: Sei X ein Hausdorffraum,

$X^* = X \cup \{\infty\}$ mit

$\tau_\infty = \{ U \subseteq X^* : U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ oder $U = X^* \setminus K$, $K \subseteq X$ kompakt$\}$

Dann a) τ_∞ ist eine Topologie auf X^* und $X \subset Y$ ist ein Teilraum.

b) X^* ist kompakt

c) Wenn X lokalkompakt ist, ist X^* Hausdorff.

<u>Lemma</u>: Sei Y ein kompakter Hausdorffraum und $X \subseteq Y$ ein Teilraum s.d. $Y \setminus X = \{pt\}$. Dann ist X lokalkompakt

<u>Beweis</u>: $pt =: \infty$

Sei $x \in X$.

Y Hausdorff $\Longrightarrow \exists\, U, V \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y$ $x \in U$, $\infty \in V$

$U \cap V = \emptyset$

$K := Y \setminus V$ ist kompakt

(abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge)

$\Rightarrow x \in U \subseteq K$

$\Rightarrow X$ ist lokal kompakt $\square$

<u>Bem</u>: X ist lokalkompakt

$\Leftrightarrow$ offene TM eines kp Hausdorffraums.

<u>Lemma</u>: Sei X lokal kompakt.

X^* die Einpunktkompaktifizierung

Angenommen Y ist ein kompakter Hausdorffraum sd.

und $X \subseteq Y$ und $Y - X = \{pt\}$.

Teilraum

Dann ist

$$\varphi : Y \to X^*$$

$$\varphi|_X = id_X$$

$$\varphi(pt) = \infty$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis: • Bijektion ✓

• Stetigkeit: Sei $U \in \tau_\infty$

1) $U \subseteq X$ offen

$\Rightarrow \varphi^{-1}(U) = \underset{\text{offen}}{U \subseteq} \underset{\text{offen}}{X \subseteq} Y$

Y ist Hausdorff und 1-punkt menge sind abgeschlossen

$\Rightarrow \underset{\text{offen}}{U \subseteq} Y$

2) $U = X^* \setminus K$, $K \subseteq X$ kompakt

$\Rightarrow \varphi^{-1}(U) = Y \setminus \varphi^{-1}(K)$

$= \underbrace{Y \setminus K}$

offen in Y weil K eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist und somit abgeschlossen

Stetige Bijektion von kompakt nach Hausdorff ist Homöo. $\square$ } Fragen

Satz.: Ein Hausdorffraum X ist lokalkompakt $\Longleftrightarrow$ Einpunktkompaktifizierung ist Hausdorff

Beispiele:

Einpunktkompaktifizierung von
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$

$S^1 \setminus \{pt\} \cong (0,1) \cong \mathbb{R}$

S^n