

Übungsblatt 6

Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

AUFGABE 6.1. Seien X und Y topologische Räume mit Punkten $x \in X$ und $y \in Y$. Zeigen Sie, dass die Projektionen $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ bzw. $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ einen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \quad [\gamma] \mapsto ([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma])$$

induzieren.

AUFGABE 6.2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Finden Sie eine Homotopieäquivalenz $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \simeq S^{n-1}$ und folgern Sie, dass es keinen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ geben kann.

AUFGABE 6.3. Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\gamma: S^1 \rightarrow X$ eine Schleife bei x . Zeigen Sie, dass genau dann $[\gamma] = e$ in $\pi_1(X, x)$ gilt, wenn es eine stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow X$ gibt mit $f|_{S^1} = \gamma$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \downarrow & \nearrow f & \\ D^2 & & \end{array}$$

Hier ist D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ mit Rand $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

AUFGABE 6.4. Sei G eine topologische Gruppe. Wir wollen zeigen, dass dann $\pi_1(G, e)$ immer abelsch ist. Sei dafür M eine Menge mit zwei Operationen $\times: M \times M \rightarrow M$ und $\circ: M \times M \rightarrow M$, die jeweils ein Einheitselement e_\times bzw. e_\circ besitzen. Das heißt, es ist $e_\times \times x = x \times e_\times = x$ und $e_\circ \circ x = x \circ e_\circ = x$ für alle $x \in M$. Wir nehmen außerdem an, dass

$$(a \circ b) \times (c \circ d) = (a \times b) \circ (c \times d)$$

für alle $a, b, c, d \in M$ gilt. Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $e_\times = e_\circ$.
- (ii) Es gilt $a \circ b = b \times a = b \circ a = a \times b$ für alle $a, b \in M$.
- (iii) Sei $\times: G \times G \rightarrow G$ die Gruppenoperation auf G . Dann induziert \times eine binäre Operation $\times: \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \rightarrow \pi_1(G, e)$ auf $\pi_1(G, e)$.
- (iv) Für die Operation \times aus (iii) gilt $(\alpha \cdot \beta) \times (\gamma \cdot \delta) = (\alpha \times \beta) \cdot (\gamma \times \delta)$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \pi_1(G, e)$. Hier bezeichnet \cdot die übliche Gruppenstruktur auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$.
- (v) Die Gruppe $\pi_1(G, e)$ ist abelsch.