

# Übungsblatt 1

## Topologie

Viktor Kleen\*

Sabrina Pauli†

AUFGABE 1.1. Für welche der folgenden Mengen  $X$  und  $\mathcal{T}$  ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum?

- (i)  $X = \mathbb{Q}$  und  $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{Q} : 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$
- (ii)  $X = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{T} = \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
- (iii)  $X = \mathbb{R}^2$  und  $\mathcal{T} = \{V : V \text{ ist ein Untervektorraum von } \mathbb{R}^2\}$

AUFGABE 1.2. Für eine zwei- bzw. dreielementige Menge  $X$ , wie viele verschiedene Topologien gibt es jeweils auf  $X$ ?

AUFGABE 1.3. Sei  $X$  eine Menge mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie, dass  $X$  *metrisierbar* ist, d. h. es gibt eine Metrik  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass die von  $d$  erzeugte metrische Topologie auf  $X$  gleich der diskreten Topologie ist.

AUFGABE 1.4. Sei  $p \in \mathbb{Z}$  prim. Für  $0 \neq x \in \mathbb{Z}$  sei eine Primfaktorisierung  $x = \pm p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$  mit verschiedenen Primzahlen  $p_1, \dots, p_n$  und  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  gegeben. Wir definieren eine Funktion  $v_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  durch  $v_p(0) = \infty$  und

$$v_p(x) = \begin{cases} k_i, & \text{falls } p = p_i \text{ für ein } i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erweitern diese Funktion zu einer Funktion auf  $\mathbb{Q}$  durch die Vorschrift

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b),$$

wobei  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  rationale Zahl ist und  $a, b \in \mathbb{Z}$  teilerfremde ganze Zahlen sind. Zeigen Sie, dass durch

$$d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$$

mit der Konvention  $p^{-\infty} = 0$  eine Metrik auf  $\mathbb{Q}$  definiert wird. Man nennt sie die *p-adische Metrik* und die zugehörige metrische Topologie heißt *p-adische Topologie* auf  $\mathbb{Q}$ .

---

\*viktor.kleen@uni-due.de

†sabrinp@math.uio.no