Wiederholung zu Galoisüberlagerungen:

$p: E \to B$ eine Überlagerung $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Aut}(E|B)$

$\mathrm{Aut}(E|B) \circlearrowright E$

$p$ faktorisiert als $E \to E/\mathrm{Aut}(E|B) \xrightarrow{\bar{p}} B$

<u>Def.</u>: Eine Überlagerung $p: E \to B$ heißt Galoisch falls $\bar{p}: E/\mathrm{Aut}(E|B) \xrightarrow{\cong} B$ ein Homöomorph. ist.

<u>Lemma</u> $p: E \to B$ mit $E$ zshgd. und $B$ lokal wegzshgd. ist genau dann Galoisch, falls $\mathrm{Aut}(E|B)$ auf jede Faser $p^{-1}(\{b\})$ transitiv operiert..

Das ist genau dann der Fall, wenn

$\mathrm{Aut}(E|B)$ transitiv auf einer Faser $p^{-1}(\{b_0\})$ operiert.

<u>Ziel</u>: Galoiskorrespondenz

Sei $B$ immer zshgd. und lokal wegzshgd. Für $p: E \to B$ eine Galoisüberlag. gibt es eine Bijektion

$$\{H \subset \mathrm{Aut}(E|B) \text{ Untergruppe}\}$$

$$\cong$$

$$\left\{ \underset{\text{zshgd.}}{Z \xrightarrow{q} B} \text{ Überlagerung mit } \begin{array}{c} E \xrightarrow{f} Z \\ {\scriptstyle p}\searrow \ \swarrow{\scriptstyle q} \\ B \end{array} \right\}$$

$Z \to B$ rechts ist genau dann Galoissch wenn die zugehörige Untergruppe $H$ normal ist und dann ist $\mathrm{Aut}(Z|B) \cong \mathrm{Aut}(E|B)/H$

Dann folgt der Klassifikationssatz:

Für $B$ zshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. und $b \in B$ ist $\mathrm{fib}_b : \mathrm{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B,b)^{op}\text{-Set}$ eine Äquivalenz.

Erinnerung: Jede Menge $M$ mit transitiven $\pi_1(B,b)^{op}$-Operation ist von der Form

$$H \backslash \pi_1(B,b) = \{ Hg : g \in \pi_1(B,b) \}$$

für $H \subset \pi_1(B,b)$ eine Untergruppe.

Stabilisator von einem $m \in M$.

**Lemma** Ang. $X$ lokal wegzshgd. und $q: Z \longrightarrow X$ eine Überlagerung mit $Z$ zshgd. und $f: Y \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung

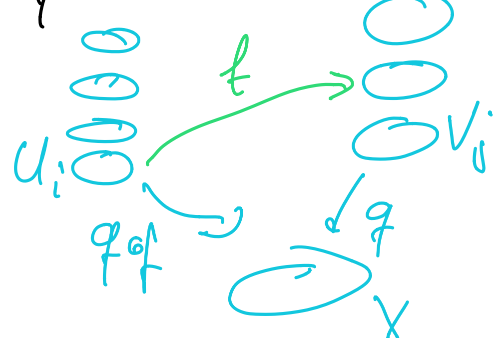
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q\circ f"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

← Überlagerung

Wenn $q\circ f$ eine Überlagerung ist, dann auch $f$.

Bew.: Sei $z \in Z$, $x = q(z)$.

Sei $V \subset X$ eine zshgd. Umgebung von $x$, so dass $q\circ f$ und $q$ beide über $V$ trivial sind:



$$q^{-1}(V) = \coprod V_j \qquad (q\circ f)^{-1} = \coprod U_i$$

$$\underbrace{f(\underbrace{U_i}_{\text{zshgd weil } \cong V})}_{\text{zshgd.}} \subset q^{-1}(V) \Rightarrow \exists j : f(U_i) \subset V_j$$

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, "f|_{U_i}"] \arrow[dr, "(q\circ f)|_{U_i}"', "\cong"] & & V_j \arrow[dl, "q|_{V_j}", "\cong"'] \\ & V & \end{tikzcd}$$

$f|_{U_i} : U_i \to V_j$ ist ein Homöom.

$\Rightarrow f^{-1}(V_{j_0}) = \coprod U_i$ für eine Teilmenge der $U_i$'s

mit $z \in V_{j_0}$

Insbesondere ist $f(Y) \subset Z$ offen.

Ang. $z \in Z \setminus f(Y)$ und $V$ eine Umgeb.$_{x=q(z)}$

mit einer lokalen Trivialisierung von $q$ und $q \circ f$ $\Longrightarrow$ $q^{-1}(V) = \coprod V_j$, etwa $z \in V_{j_0}$

$(q\circ f)^{-1}(V) = \coprod U_i$

Dann ist $f(Y) \cap V_{j_0} = \emptyset$:

andernfalls: gäbe es ein $U_i$ mit

$\boxed{\begin{array}{l} f(y) \in V_{j_0} \\ y \in (q\circ f)^{-1}(V) = \coprod U_i \end{array}}$ $f(U_i) = V_{j_0} \ni z$ $\lightning$

$\Longrightarrow V_{j_0} \subset Z \setminus f(Y) \underset{z \text{ beliebig}}{\Longrightarrow} Z \setminus f(Y)$ offen

$Z$ zshgd. $\Longrightarrow Z \setminus f(Y) = \emptyset$

d.h. $f$ ist surjektiv. $\square$

<u>Satz</u> Wenn $B$ zshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. ist mit universeller

Überlagerung $p: \tilde{B} \to B$, dann ist $p$ Galoisch.

<u>Bew.:</u> Wähle $b_0 \in B$ und nehme an, dass $\tilde{B}$ mit $b_0$ konstruiert wurde.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Aut}(\tilde{B}/B) \circlearrowright p^{-1}(\{b_0\})$ transitiv ist.

$$\tilde{b}_0 := [\varepsilon_{b_0}] \in p^{-1}(\{b_0\})$$

Sei $\gamma \in p^{-1}(\{b_0\}) \cong \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, \tilde{B})$.

Dann $\gamma \longmapsto \psi: \tilde{B} \to \tilde{B}$ mit

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde{B} \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \psi(\tilde{b}_0) = \gamma.$$

Wir zeigen, dass $\psi$ ein Homöomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{z} \in \tilde{B} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{B} \ni \tilde{b}_0 \arrow[dl, "p"] \\
& B \ni b_0 &
\end{tikzcd}$$

zshgd.

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $\psi$ ist eine Überlagerung

insb. ist $\psi$ surjektiv und offen.

Es bleibt zu zeigen, dass $\psi$ injektiv ist.

Wähle $\tilde{z} \in \psi^{-1}(\{\tilde{b}_0\})$.

$p \circ \psi$ ist eine Überlagerung und $\tilde{z} \in (p \circ \psi)^{-1}(\{b_0\})$

$\Rightarrow \exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}_B(p, p \circ \psi) .\ \varphi(\tilde{b}_0) = \tilde{z}$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{b}_0 \arrow[r, mapsto] & \tilde{z} \arrow[r, mapsto] & \tilde{b}_0 \\
\tilde{B} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\psi"] & \tilde{B} \arrow[dl, "p"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

D.h. $\psi \circ \varphi$ ist ein Lift von $p$ entlang $p$ mit $(\psi \circ \varphi)(\tilde{b}_0) = \mathrm{id}_{\tilde{B}}(\tilde{b}_0)$ und $\tilde{B}$ ist zshgd.

Eindeutigkeit von Lifts zeigt:

$$\psi \circ \underbrace{\varphi}_{\text{surjektiv}} = \mathrm{id}_{\tilde{B}}$$

$\Rightarrow$ $\psi$ ist injektiv. $\square$

Zur Galoiskorrespondenz.

$p: E \to B$ Galoisch

(1) Sei $H \subset \mathrm{Aut}(E|B) =: G$ eine Untergruppe. Für $V \subset B$ eine "kleine" offene Menge ist $p^{-1}(V) \cong V \times F$

und $H \circlearrowright F$

<u>Erinnerung</u>: $\mathrm{Aut}(E|B) \circlearrowright E$ ist eine Überlagerungsoperation,

$\Rightarrow H \circlearrowright E$ ist auch eine Überlagerungsoperation

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "///"] & E/H \arrow[dl, "p_H"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$\bar{p}_H$ ist lokal trivial über $V$:

$$\bar{p}_H^{-1}(V) \cong V \times F/H$$

Das ist die eine Richtung in der Galoiskorrespondenz.

Andere Richtung: Ang.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \arrow[ll, phantom, "///" description, shift right=4] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Lemma $\Rightarrow$ $f$ ist eine Überlagerung

$$H := \mathrm{Aut}(E|Z) \subset \mathrm{Aut}(E|B) = G$$

---

$H \subset \mathrm{Aut}(E|Z) \rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr] & E/H \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow \mathrm{Aut}(E|E/H) = H$

**Lemma** $G \circlearrowright E$ Überlagerungsoperation und $E$ zshgd. ; $\pi : E \to E/G$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(E \mid E/G) \xleftarrow{\cong} G$$

**Bew.:** $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(E \mid E/G)$ weil $G \circlearrowright E$ als Überlagerungsoperation treu ist.

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow \mathrm{Aut}(E \mid E/G) \\ g &\longmapsto g \cdot \_ \end{aligned}$$

Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(E \mid E/G)$. Wähle $y \in E$

$$\phi(y) \in \pi^{-1}(\{\pi(y)\}) = G \cdot \pi(y)$$

d.h. $\exists\, g \in G$ mit $\phi(y) = g \cdot y$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ E \arrow[ur, shift left, "\phi \circ (g^{-1} \cdot \_)"] \arrow[ur, shift right, "\mathrm{id}_E"'] \arrow[r, "\pi"'] & E/G \end{tikzcd}$$

beides Lifts und $E$ zshgd.

$\Rightarrow \quad \phi \circ (g^{-1} \circ \_) = id$

$\Rightarrow \quad \phi = g \circ \_$ $\square$

Andere Richtung:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd} \rightsquigarrow H = Aut(E|Z) \rightsquigarrow \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & E/H \arrow[d, "\overline{p}_H"] \\ & B \end{tikzcd}$$

z.z. $E \xrightarrow{f} Z$ ist Galoisch:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \arrow[ddl, bend left, "\varphi"] \\ & E/H \arrow[ur, "\overline{f}"', "\cong"] \arrow[d, "\overline{p}_H"'] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

Genügt zu zeigen: $Aut(E|Z) \circlearrowright f^{-1}(\{z_0\})$ transitiv

Wähle $y_1, y_2 \in p^{-1}(\{q(z_0)\}) = f^{-1}(\{z_0\})$

$\underset{p \text{ Galoissch}}{\Longrightarrow} \exists\, \phi \in \mathrm{Aut}(E|B)$ mit $\phi(y_2) = y_1$.

Wir müssen zeigen, dass $\phi \in H = \mathrm{Aut}(E|Z)$

d.h. $f \circ \phi = f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & E \arrow[dl, "f"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Wir haben $f(\phi(y_2)) = f(y_1) = z_0 = f(y_2)$

$f \circ \phi$, $f$ sind beides Lifts in:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[ur, shift left, "f \circ \phi"] \arrow[ur, shift right, "f"'] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

$E$ zshgd. $\Rightarrow f \circ \phi = f$.

Die Aussage über normale Untergruppen kommt später.

Zum Klassifikationssatz:

$$\mathrm{fib}_b : \mathrm{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B,b)^{op}\text{-}\mathrm{Set}$$

(1) $\mathrm{fib}_b$ ist volltreu

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$$F : \mathrm{Hom}_B(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)^{op}}\left(p^{-1}(\{b\}), q^{-1}(\{b\})\right)$$

Wir nehmen zuerst an, dass $Y$ zshgd. ist.

<u>$F$ injektiv:</u> Ang. $F(\phi) = F(\psi)$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, shift left, "\phi"] \arrow[ur, shift right, "\psi"'] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Wähle $y \in p^{-1}(\{b\})$

Dann ist $\phi(y) = \psi(y)$

Eindeutigkeit von Lifts $\Longrightarrow$ $\phi = \psi$

**F surjektiv** Sei $f: p^{-1}(\{b\}) \to q^{-1}(\{b\})$

$\pi_1(B,b)^{op}$ - äquivariant.

$Y$ zshgd. $\Rightarrow$ $\pi_1(B,b)^{op} \circlearrowright p^{-1}(\{b\})$ transitiv

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\{b\}) & \cong & \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, Y) \\ \circlearrowright & & \circlearrowright \\ G := \pi_1(B,b)^{op} & \cong & \mathrm{Aut}(\tilde{B}|B)^{op} \end{array}$$

$\tilde{B} \xrightarrow{\varphi} Y$ ist eine Überlagerung

Fixiere $y \in p^{-1}(\{b\})$ $\cong$ $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, Y)$. Dann ist

$$G/G_y \to p^{-1}(\{b\})$$ eine äquivariante

$$gG_y \mapsto g \cdot y$$ Bijektion

Beh.: $G_y \cong \mathrm{Aut}(\tilde{B}|Y)^{op}$

$\Phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{B}|B)$ mit $\varphi \circ \Phi = \varphi$ :

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \tilde{B} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & Y & \end{tikzcd} \iff \Phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{B}|Y)$$

Wir haben gesehen, dass dann

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{B}/G_Y \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Sei $\psi_Y : Y \xrightarrow{\cong} \tilde{B}/G_Y$.

Wir hatten $y \in p^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{f} q^{-1}(\{b\})$

$$q^{-1}(\{b\}) \cong \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, Z)$$

$$\begin{array}{ccc} f(y) & \in & q^{-1}(\{b\}) \\ \downarrow & & \cong \\ \tilde{B} \xrightarrow{\pi} Z & & \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, Z) \end{array}$$

$\pi$ ist kompatibel mit der Operation von $G_y$ auf $\tilde{B}$:

für $g \in G_y$: 
$$\begin{array}{c} f(y \circ g) = f(y) \\ \shortparallel \\ f(y) \circ g \end{array}$$

d.h. Wenn $\Phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{B} \mid Y)$ einem $g \in G_y$ entspricht, ist

$$\pi \circ \Phi = \pi \iff f(y) \circ g = f(y)$$

D.h. Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi_y", "\cong"'] \arrow[dr, bend right, "p"'] & \tilde{B}/G_y \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d] & Z \arrow[dl, "q"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\pi} \circ \psi_y$ ist genau die richtige Abb. auf den Fasern: $\quad G = \pi_1(B,b)^{op}$

Geg. $x \in \tilde{p}^{-1}(\{b\}) \rightsquigarrow x = y \cdot g$ für ein $g \in G$

$$\begin{array}{ccc} x & \in & p^{-1}(\{b\}) \\ \downarrow & & \cong \\ \varphi_x & & \mathrm{Hom}_B(\tilde{B}, Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g & \longmapsto & \Phi \\ G & & \mathrm{Aut}(\tilde{B}/B) \end{array}$$

$\varphi_y := \varphi$

$$x = y \cdot g \quad \leftrightarrow \quad \varphi_x = \varphi_y \circ \Phi$$

$$x = \varphi_x(\tilde{b})$$

$$\tilde{\pi} \circ \psi_y(x) = \tilde{\pi} \circ \psi_y(\varphi_x(\tilde{b})) = \tilde{\pi} \circ \psi_y(\varphi_y(\Phi(\tilde{b})))$$

$$= \pi(\Phi(\tilde{b})) = \pi(\tilde{b}) \cdot g = f(y) \cdot g$$

$$= f(y \cdot g)$$

$$= f(x).$$

$\square$