Gestern: Homotopie von Wegen

und Fundamentalgruppe

Weg in X: $\quad \gamma : [0,1] \longrightarrow X$

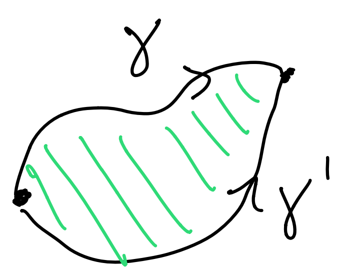
Homotopie von Wegen γ nach γ'

ist eine Homotopie relativ $\{0,1\}$:

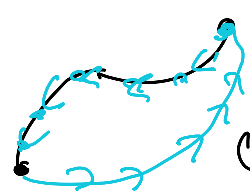
$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$s,t \longmapsto H(s,t)$$

$$H(\_,0) = \gamma; \quad H(\_,1) = \gamma'$$

$$H(0,t) = \underset{\gamma'(0)}{\underset{\shortparallel}{\gamma(0)}}; \quad H(1,t) = \underset{\gamma'(1)}{\underset{\shortparallel}{\gamma(1)}}$$



Endpunkte bewegen:



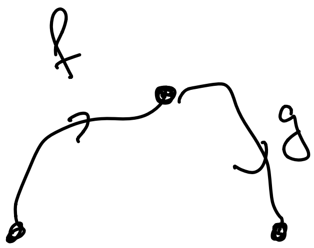
Je zwei Wege wären immer homotop

Fundamentalgruppe:

$$\pi_1(X, x) = \{ [\gamma] : \ \gamma : [0,1] \longrightarrow X \ \text{Schleife bei } x \}$$

mit Gruppenoperation Verknüpfung von Wegen:

$$f : [0,1] \longrightarrow X \qquad f(1) = g(0)$$
$$g : [0,1] \longrightarrow X$$



$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Funktorialität

Ein punktierter Raum (X, x) ist ein topologischer Raum X mit einem gewählten Basispunkt $x \in X$.

Eine punktierte stetige Abbildung

$$f:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$$

ist eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$

mit $f(x) = y$

⌈ Jede stetige stetige Abbildung $X \longrightarrow Y$ und $x \in X$ induziert eine punktierte stetige Abbildung $f: (X,x) \longrightarrow (Y, f(x))$ ⌋

<u>Def.:</u> Sei $f:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ eine punktierte Abbildung. Definiere

$$f_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$$

$$[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$$

• Das ist wohldefiniert:

$$\gamma \underset{\{0,1\}}{\simeq} \gamma' \Rightarrow f\circ\gamma \underset{\{0,1\}}{\simeq} f\circ\gamma'$$

⌜ $H : I\times I \longrightarrow X$

$H(\_,0)=\gamma$; $H(\_,1)=\gamma'$

$H(0,t)=x=H(1,t)$

$f\circ H : I\times I \longrightarrow Y$

$(f\circ H)(\_,0)=f\circ\gamma$; $(f\circ H)(\_,1)=f\circ\gamma'$

$(f\circ H)(0,t)=f(x)=y=(f\circ H)(1,t)$ ⌟

<u>Lemma</u> f_* ist ein Gruppenhomomorphismus.

<u>Beweis</u>: z.z. $f_*(\underbrace{[\gamma * \gamma']}_{\in\pi_1(X,x)}) = f_*([\gamma])\cdot f_*([\gamma'])$ $\in\pi_1(Y,y)$

In der Tat:

$$(f\circ(\gamma*\gamma'))(t) = f((\gamma*\gamma')(t))$$

$$= \begin{cases} f(\gamma(2t)) & t\in[0,\tfrac{1}{2}] \\ f(\gamma'(2t-1)) & t\in[\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$= ((f\circ\gamma) * (f\circ\gamma'))(t)$$

Insbesondere

$$f_*([\gamma*\gamma']) = [f\circ(\gamma*\gamma')]$$

$$= [(f\circ\gamma)*(f\circ\gamma')] = [f\circ\gamma]\cdot[f\circ\gamma']$$

$$= f_*([\gamma])\cdot f_*([\gamma']) .$$ $\square$

Top_*

<u>Def.:</u> Die Kategorie von punktierten Räumen

hat • Objekte punktierte Räume (X,x)

• Morphismen punktierte stetige Abbildungen $(X,x)\longrightarrow(Y,y)$

<u>Satz</u> Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor $\pi_1 : Top_* \longrightarrow Grp$

Kategorie von Gruppen

<u>Beweis</u> Zu zeigen: ① $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

② $(id_{(X,x)})_* = id_{\pi_1(X,x)}$

① $(f \circ g)_*([\gamma]) = [(f \circ g) \circ \gamma]$

$= [f \circ (g \circ \gamma)] = f_*([g \circ \gamma])$

$= f_*(g_*([\gamma]))$

② $(id_{(X,x)})_*([\gamma]) = [id_{(X,x)} \circ \gamma] = [\gamma]$ $\square$

„Die Fundamentalgruppe ist eine Invariante von punktierten topologischen Räumen"

D.h. π_1 bildet (punktiert) homöomorphe Räume auf Isomorphe Gruppen ab.

punktiert homöomorph

$\Leftrightarrow$ homöomorph

$\ulcorner$ $f: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ eine punktierte Bijektion

$\Rightarrow f^{-1}: Y \longrightarrow X$ ist auch punktiert

$f(x) = \cancel{y} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ $\lrcorner$

Aber Basispunkte sind wichtig für Homotopien!

z.B. X ein wegzusammenhängender Raum und $x \in X$, $y \in X$

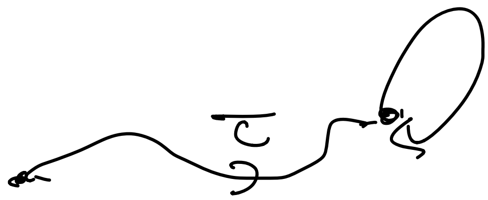
Dann haben wir gesehen, dass

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$$

entlang einer nichttrivialen Abbildung

$$c(\tau)([\gamma]) = [\tau * \gamma * \tau']$$

für $\tau : x \rightsquigarrow y$



Aber $c(\tau)$ hängt von τ ab!

<u>Lemma</u> Seien $f,g : X \longrightarrow Y$ homotop und $x \in X$. Dann kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,x) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\
\pi_1(Y,f(y)) & & \pi_1(Y,g(y)) \arrow[ll, "c(\tau)", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

mit $\tau : f(y) \rightsquigarrow g(y)$ gegeben durch

$\tau = H(x, -)$ für $H : X \times I \longrightarrow Y$ die

Homotopie von f nach g.

<u>Beweis</u> Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$.

$$
\begin{tikzcd}
& {[\gamma]} \arrow[dr, mapsto] & \\
{[\tau * (g\circ\gamma) * \tau']} & & {[g \circ \gamma]} \arrow[ll, leftrightarrow]
\end{tikzcd}
$$

D.h. wir müssen zeigen, dass $[f \circ \gamma]$
$= [\tau * (g\circ\gamma) * \tau']$

Definiere $I \times I \longrightarrow Y$

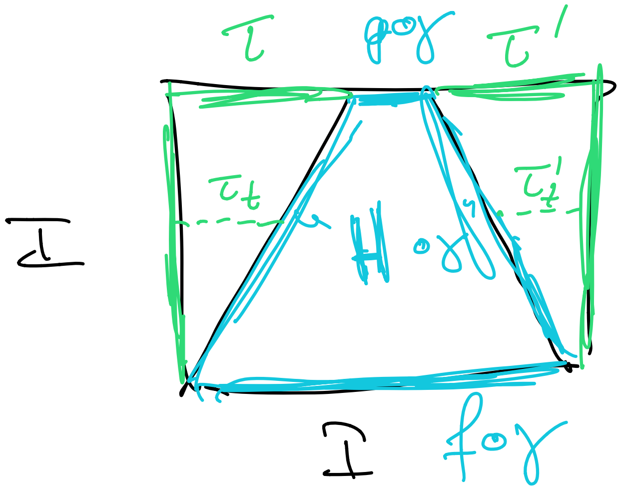
$$K(-, t) = \tau_t * (H_t \circ \gamma) \circ \tau_t'$$

wobei $H_t = H(-, t)$

$$\tau_t : I \longrightarrow Y, \quad s \longmapsto \tau(ts)$$

Das gibt eine Homotopie zwischen

$f \circ \gamma$ und $\tau * (g \circ \gamma) * \tau'$



$\square$

<u>Definition</u> Seien $f, g : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ punktierte stetige Abbildungen. Eine punktierte Homotopie von f nach g ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

mit $H(-,0) = f$; $H(-,1) = g$

$$H(x,t) = f(x) = g(x) = y .$$

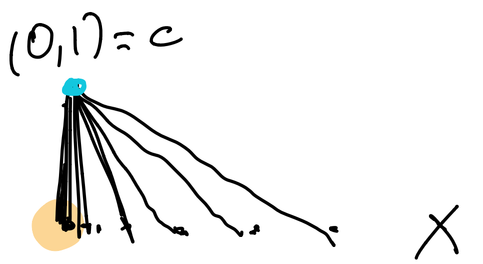
D.h. H ist genau eine Homotopie relativ $\{x\}$.

Die punktierte Homotopiekategorie $hTop_*$ hat

- Objekte punktierte Räume (X,x)
- Morphismen $\mathrm{Mor}((X,x),(Y,y))/\simeq_{\{x\}}$

<u>Bemerkung</u> Es ist wichtig, <u>punktierte</u> Homotopien zu nehmen.

Sei $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$

und $CX =$ 

$\subset \mathbb{R}^2$

$= \bigcup \{ \dots \}$

Dann ist (CX, c) zusammenziehbar

aber $(CX, (0,0))$ ist nicht zusammenziehbar

$\ulcorner$ Andernfalls gäbe es eine Homotopie

$$H: CX \times I \longrightarrow CX$$

$$H((0,0), t) = (0,0)$$

$$H(x, 0) = x$$

$$H(x, 1) = (0,0)$$

Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$: $CX \setminus \{c\}$ ist unzusammenhängend

und $(0,0)$, $(\frac{1}{n}, 0)$ sind in verschiedenen

Wegzusammenhangskomponenten.

$H(\frac{1}{n}, -)$ ist ein Weg von $(\frac{1}{n}, 0)$ nach $(0,0)$

Also gibt es ein $t_n \in [0,1]$ mit

$H(\frac{1}{n}, t_n) = c$.

$[0,1]$ ist Kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{t_{n_k}\}$ mit $t_{n_k} \longrightarrow t_0$

Also $\left((\tfrac{1}{n_k},0),\, t_{n_k}\right) \longrightarrow ((0,0)\, t_0)$

und $H\Big(\underbrace{(\tfrac{1}{n_k},0)}_{CX},\, \underbrace{t_{n_k}}_{I}\Big) \longrightarrow H((0,0),t_0)$

$H\left((\tfrac{1}{n_k},0),\, t_{n_k}\right) = c = (0,1)$, $\quad H((0,0),t_0) = (0,0)$

$\lightning$

<u>Satz</u> $\pi_1 : Top_* \longrightarrow Grp$ steigt zu einem Funktor $\pi_1 : hTop_* \longrightarrow Grp$

<u>Beweis</u> Wir müssen nur zeigen, dass punktiert homotope Abbildungen dieselben Homomorphismen von Fundamentalgruppen induzieren.

Wenn $H : X \times I \longrightarrow Y$ eine punktierte

Homotopie ist, dann ist $H(x,-)$ ein konstanter Weg ε_y. Nach Lemma kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,x) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\
\pi_1(Y,y) & & \pi_1(Y,y) \arrow[ll, "\cong", "c(\varepsilon_y)"']
\end{tikzcd}$$

Aber $c(\varepsilon_y) = id_{\pi_1(Y,y)}$, weil

$$c(\varepsilon_y)([\gamma]) = [\varepsilon_y * \gamma * \varepsilon_y'] = [\gamma]. \quad \square$$

<u>Korollar</u> Punktierte Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen auf π_1.

<u>Satz</u> Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine (<u>nicht punktierte</u>) Homotopieäquivalenz und $x \in X$. Dann ist

$$f_*: \pi_1(X,x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x))$$

$f(x) \longmapsto g(f(x))$

Beweis: Sei $g: Y \longrightarrow X$ ein Homotopie inverses.

Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal, "id_*"'] & \pi_1(Y, f(x)) \arrow[d, "g_*"] \\
\pi_1(X,x) & \pi_1(X, g(f(x))) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ f_* injektiv

und

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, f(x)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, equal, "id_*"'] & \pi_1(X, g(f(x))) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(Y, f(x)) & \pi_1(X, f(g(f(x)))) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ $f_*: \pi_1(X, g(f(x))) \longrightarrow \pi_1(X, f(g(f(x))))$ ist surjektiv.

Außerdem kommutiert

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, g(f(x))) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1(X, f(g(f(x)))) \arrow[d, "\cong"] \\ \pi_1(X, x) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, f(x)) \end{tikzcd}$$ $\square$

Unser nächstes Ziel wird sein, zu beweisen, dass $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Am Ende werden wir sehen können, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2 \text{ für } n \geq 2.$$

<u>Satz</u> Für $n \geq 2$ ist $\pi_1(S^n) = \{e\}$.

<u>Beweis</u> Zuerst ist $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

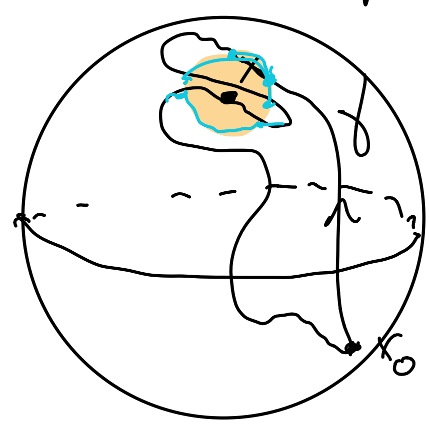
Ist also $\gamma : I \longrightarrow S^n$ eine Schleife mit $\gamma(I) \subset S^n \setminus \{x\}$, so ist γ nullhomotop.

also $[\gamma] = e \in \pi_1(S^n)$.

Es genügt also zu zeigen, dass es für jede Schleife $\gamma: I \longrightarrow S^n$ eine Schleife $\gamma': I \longrightarrow S^n$ gibt mit $\gamma'(I) \subset S^n \setminus \{x\}$ und $\gamma \simeq \gamma'$.

Sei B ein ε-Ball um x

(klein genug um nicht den Basispunkt zu enthalten).



Dann ist $\gamma^{-1}(B) \subset (0,1)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen $(a_i, b_i) \subset (0,1)$.

$\gamma^{-1}(\{x\})$ ist kompakt, also gibt es nur endlich viele (a_i, b_i) mit $x \in \gamma((a_i, b_i))$

Für jedes (a_i, b_i) gibt es einen Pfad $\gamma_i' : (a_i, b_i) \longrightarrow S^n$ mit $\gamma_i'((a_i, b_i)) \subset \partial \overline{B}$ und $\gamma|_{(a_i, b_i)} \simeq \gamma_i'$.

D.h. Wir ersetzen diese endlich vielen Abschnitte $\gamma|_{(a_i, b_i)}$ durch γ_i' und erhalten einen zu γ homotopen Pfad $\gamma' : I \to S^n$ mit $\gamma'(I) \subset S^n \setminus \{x\}$. $\square$