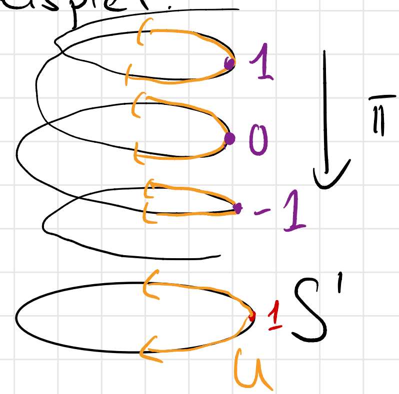
Überlagerungen

Motivierendes bekanntes Beispiel:

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t}$$



Def: Eine stetige Abbildung $\pi : E \to B$ ist **lokaltrivial mit typischer Faser** F top Raum

(locally trivial with typical fiber)

wenn für alle $b \in B$ es eine Umgebung U von b gibt und einen Homöomorphismus

$$\varphi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$$

gibt s.d.

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "\text{proj}"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& U \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

F: Was ist F in dem Beispiel?

A: $\mathbb{Z}$

Der Homöomorphismus f heißt
lokale Trivialisierung von $\pi: E \to B$.
Für $b \in B$ heißt $\pi^{-1}(\{b\}) \subseteq E$
Faser über b.
Bem: Jede Faser ist homöomorph zu F.

diskrete Topologie

Def: Falls F diskret, heißt
$\pi: E \to B$ Überlagerung (covering space)
B heißt Basis (base)
E heißt Totalraum (total space)
Falls F zusätzlich endlich mit n Elementen
sprechen wir von einer n-fachen / n-blättrigen
Überlagerung (n-sheeted covering).

Das Beispiel oben ist eine Überlagerung
F: Finden Sie eine andere Überlagerung
von $S^1 = B$
A: triviales Beispiel
Sei F ein diskreter topologischer Raum

Dann ist $\pi : S^1 \times F \to S^1$

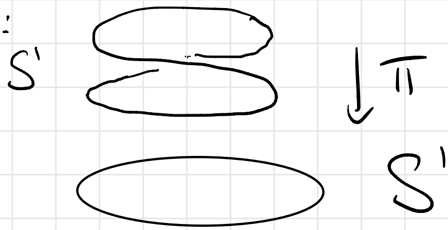
proj auf S^1

Ein weiteres Beispiel: $(S^1 \subset \mathbb{C})$

$\pi : S^1 \to S^1$

$$\pi(z) = z^n$$

$n = 2$:



F: Was ist F?

A: diskreter Raum mit n Elementen

Bemerkungen:

1) F diskret $\Rightarrow$ $U \times F \cong \bigsqcup_{f \in F} U \times \{f\}$

offen in B

Faser

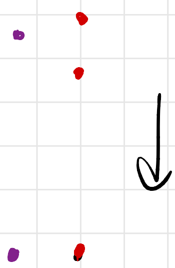
2) $\mathrm{proj}_U : U \times F \to U$ eingeschränkt auf $U \times \{f\}$ ist ein Homöomorphismus

$f \in F$

"Alternative Definition": Eine Überlagerung von B (Basis) ist ein topologischer Raum E (Totalraum) zusammen mit einer stetigen surjektive Abbildung $\pi: E \to B$, s.d. zu jedem $b \in B$ es eine Umgebung U gibt s.d. $\pi^{-1}(U) \subseteq E$ eine Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen S_i ist s.d. $\pi|_{S_i} \to U$ ein Homöomorphismus ist.
Die S_i heißen Blätter.

__Bem:__ Die beiden Definitionen stimmen überein für zusammenhängende B.

Bsp: $E =$



$B =$

Gruppenoperationen auf topologischen Räumen

Def Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe. Eine Gruppenoperation (-Aktion, -Wirkung) von G auf X ist eine Abbildung
$$\rho: G \times X \to X$$
$$(g,x) \mapsto g\cdot x$$
sd.
1) $g\cdot - : X \to X$ stetig $\forall g \in G$
$$x \mapsto g\cdot x$$
2) $e\cdot x = x \quad \forall x \in X$

3) $(g\cdot h)\cdot x = g\cdot(h\cdot x) \quad \forall g,h \in G \;\; \forall x \in X$

F: Finden Sie ein Beispiel!

2 Beispiele:

1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$(n,x) \mapsto x+n$$

2) $\mathbb{Z}/2 \cong \{\pm 1\}$
$$\{\pm 1\} \times S^n \to S^n$$
$$(\pm 1, x) \mapsto \pm x$$

Gruppenoperationen für Kategorien:

Sei C eine Kategorie und X ein Objekt in C und G eine Gruppe.

Eine Gruppenoperation von G auf X in C ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_C(X)$$

$$\text{Morphismus} \to \quad \overset{\psi}{f : X \to X} \quad \text{invertierbar}$$

d.h. $\exists\, g : X \to X$ s.d.

$$f \circ g = \mathrm{id}_X = g \circ f$$

F: Was ist $\mathrm{Aut}_{Top}(X)$? $=$ Homöomorphismen von $X \to X$

$\mathrm{Aut}_{Set}(X)$? $=$ bijektive Abb $X \to X$

$\mathrm{Aut}_{k\text{-}Vect}(X)$? $=$ invertierbare k-lineare Abb $X \to X$

endlich dim k-Vektorräume

F: Wie kommt man von

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{Top}(X)$$

nach $\rho : G \times X \to X$ und umgekehrt?

A: $\rho(g, x) = \varphi(g)(x)$

und andersherum:

$$\varphi(g) = g \cdot (-) : X \to X$$

$\lrcorner$

Def: Sei $\rho: G \times X \to X$ eine Gruppenoperation auf einem top Raum X.

- Die Operation ist **frei** falls $\forall x \in X$ und $g \in G \setminus \{e\}$ gilt, dass $g \cdot x \neq x$.
- Sei $x \in X$. Der **Stabilisator** der Operation im Punkt x ist die Untergruppe
$$G_x := \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$$
von G.
- Für $x \in X$ ist
$$G \cdot x := \{ g \cdot x \mid g \in G \} \subseteq X$$
die **Bahn (Orbit)** von x.
- Der Quotient $X/G := \{ G \cdot x \mid x \in X \}$

(manchmal $G \backslash X$)

ist der **Bahnenraum** ausgestattet mit der Quotientopologie

$$q: X \to X/G = X/\sim$$

wobei $x \sim y \iff \exists g \in G$ s.d. $g \cdot x = y$

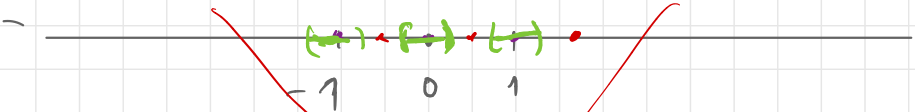
Beispiele: 1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n, x) \mapsto x + n$

2) $\{\pm 1\} \times S^n \to S^n$, $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$

F:
- Sind die Operationen frei?
- Was sind die Bahnenräume?

A: Beide Operationen sind frei.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$, $S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$



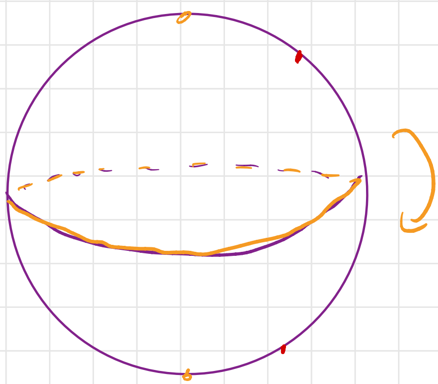
Spoiler alert:

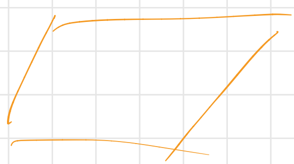
Das sind die Fundamentalgruppen von S^1 bzw $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ für $n \geq 2$

F: Gruppenoperation, die nicht frei ist?

A:

$G = \{\pm 1\}$

$S^2 =$ 



Def: Eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ (Gruppe G, top Raum X)

heißt **Überlagerungsoperation (covering space action)**

falls für alle $x \in X$ eine Umgebung U

ex sd. $gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{e\}$

$(g \cdot (\,) : X \to X$

Bem: Überlagerungsoperationen sind immer frei.

Aber die Umkehrung gilt nicht:

zB für $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad z_0 := e^{2\pi i \xi_0}$

$\mathbb{Z} \times S^1 \to S^1$ $\quad$ ist frei

$(n, z) \mapsto z_0^n \cdot z$ $\quad z_0^n \cdot z = z \iff n = 0$

aber keine Überlagerungsoperation.

Warum?

Bahn von $1 \in S^1$

$\mathcal{O} = \{ z_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \} \subset S^1$

Dirichlet's Approximationssatz:

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$

$\exists\, q \in \mathbb{N}$ $\quad 1 \leq q \leq N$ $\quad$ und $\quad p \in \mathbb{Z}$

sd. $|q \cdot \alpha - p| < \frac{1}{N+1}$

Dh für $\alpha = \varphi_0$ und $N >> 0$ ist $z_0^q = e^{2\pi i q \alpha}$ nahe bei $e^{2\pi i p} = 1$

$\Rightarrow$ Für jede nicht leere offene Teilemenge U von S^1 mit $1 \in U$ gibt es $n \neq 0$ sd. $z_0^n \in U$.

Tatsächlich ist G dicht in S^1.

Beispiel: Sei G eine endliche Gruppe und X Hausdorff. Jede freie Gruppenoperation $G \times X \to X$ ist eine Überlagerungsoperation.

frei $\Rightarrow$ $g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x$

Beweis: Übungsaufgabe

Prop: Sei $\underset{\text{Gruppe}}{G} \times \underset{\text{top Raum}}{X} \longrightarrow X$ eine

Überlagerungsoperation.

Dann ist $q : X \to \underset{\text{Bahnenraum}}{X/G}$ eine Überlagerung

mit typischer Faser $\underset{\text{diskrete Top}}{G}$.

Beweis:

X/G = Bahnenraum

$\shortparallel$

$X/\sim$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G$

s.d. $x = g \cdot y$

und $q : X \to X/G$ ist die Quotientenabbildung.

Insbesondere ist q stetig und surjektiv.

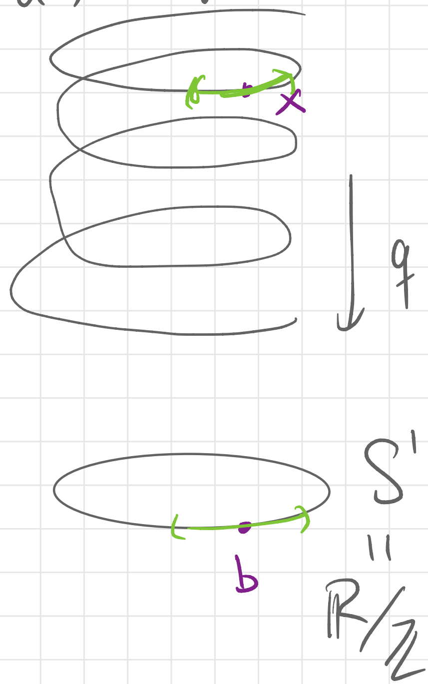
Sei $b \in X/G$ und $x \in q^{-1}(\{b\})$

Sei U eine Umgebung von x s.d.

$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{e\}$

Dann ist $q|_U : U \to q(U) =: V$

ein Homöomorphis.



- stetig ✓
- bijektiv: • surj ✓
  - inj:

    Angenommen

    $q|_U(y) = q|_U(z)$

    für $y, z \in U$

    Dann gibt es ein

    $g \in G$ s.d. $y = g \cdot z$

    $\Rightarrow$ $g = e$ und $y = z$

    $\uparrow$

    $U \cap gU = \emptyset$ falls $g \neq e$

- offen: Wir zeigen, dass q offen ist

Weil U offen ist, ist dann

auch $q|_U$ offen.

Sei $W \subset X$ offen.

$[0,1] \cup [2,3]$

$x \sim y \iff x = y$ oder $x, y \in \{1\} \cup [2,3]$

$\to [0,1]$

$q(W)$ ist offen falls

$q^{-1}(q(W)) \subseteq X$ offen ist

((Definition der Quotiententopologie).

$$\underbrace{\bigcup_{g\in G} \underbrace{g\cdot W}_{\text{offen in } X}}_{\text{offen in } X}$$

$g\cdot(-) : X \to X$ Homöomorphismus

$q^{-1}(q(W))$ ist offen in X

$\Rightarrow$ $q(W)$ ist offen in X/G

$\Rightarrow$ q ist offen

$\Rightarrow$ $q|_U$ ist offen

Sei s das Inverse von $q|_U$

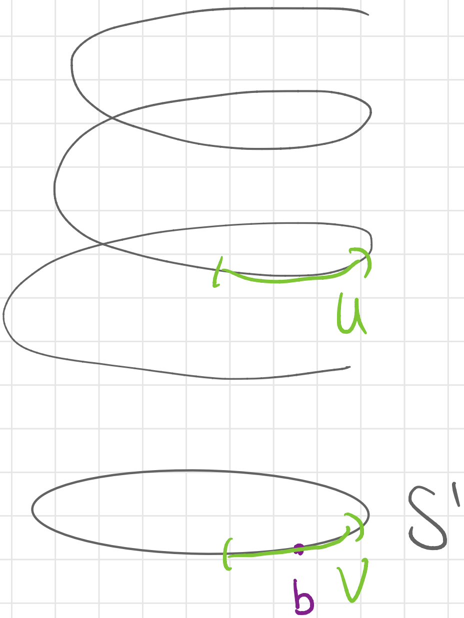
Wir suchen eine lokale Trivialisierung

$$\begin{tikzcd} \varphi : V \times G \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & q^{-1}(V) \arrow[d, "q|_{q^{-1}(V)}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

$V = q(U)$

diskrete Top

Sei $f(y,g) := g \cdot s(y)$



Das Diagramm kommutiert:

$$q(f(y,g)) = q(g \cdot s(y)) = q(s(y)) = y = \mathrm{proj}_V(y)$$

f ist Homöomorphismus:

- bijektiv: • surj.: $q^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU$
  - inj.: disjunkte Vereinigung
- stetig + offen: · s Homöo
  - $g \cdot (-)$ Homöo

$\square$