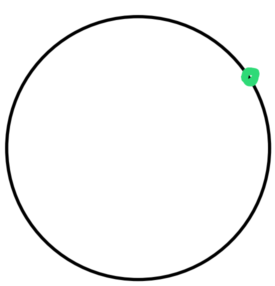
Algebraische Topologie

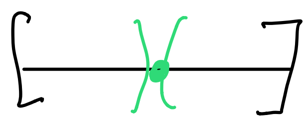
Ziel: algebraische Invarianten von topologischen Räumen

Invarianten: z.B. $\# \pi_0(X)$ ist invariant unter Homöomorphismus

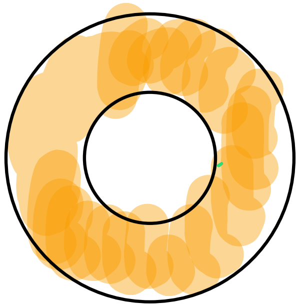
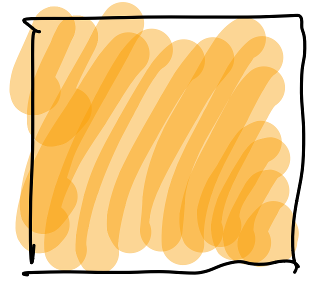
algebraisch: die Invariante sollte algebraische Struktur besitzen

Wir hatten schon gesehen, dass man mit $\# \pi_0(X)$ den Kreis S^1 vom Intervall $[0,1)$ unterscheiden kann





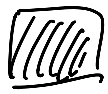
Können wir denselben Trick

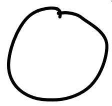
 und 

unterscheiden? Das wird schwierig.

<u>Später</u>: $\pi_1($  $) \cong \mathbb{Z}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \not\cong$

$\pi_1($  $) \cong 1$

sogar: $\pi_1($  $) \cong \mathbb{Z}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \not\cong$

$\pi_1([0,1]) \cong 1$

<u>Erinnerung</u> Warum ist $\#\pi_0(X)$ invariant unter Homöomorphismus?

Wir definieren für jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung

$$f_*: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$
$$[x] \longmapsto [f(x)]$$

<u>Lemma</u> Für zwei stetige Abbildungen

$f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Z)$$

<u>Beweis</u>

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_0(Y) & \xrightarrow{g_*} & \pi_0(Z) \\ [x] & \longmapsto & [f(x)] & \longmapsto & [g(f(x))] \\ & & & & \shortparallel \\ [x] & & \longmapsto & & [(g \circ f)(x)] \end{array}$$ $\square$

<u>Lemma</u> Für die Identität $id: X \to X$

ist $\quad id_* = id: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(X)$

<u>Bew.:</u> $\quad id_*([x]) = [id(x)] = [x] \qquad \square$

Lemma Ist $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus so ist $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ eine Bijektion

Beweis Sei $f^{-1}: Y \to X$ die stetige Umkehrabbildung. Dann ist $f \circ f^{-1} = id$, $f^{-1} \circ f = id$, also

$$id = id_* = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ f^{-1}_*$$

$$id = id_* = (f^{-1} \circ f)_* = f^{-1}_* \circ f_* \, ,$$

d.h. f^{-1}_* ist die Umkehrabbildung zu f_*. $\square$

Man sagt π_0 ein Funktor von der Kategorie der top. Räume in die Kategorie von Mengen ist.

Def.: Eine **Kategorie** C besteht aus

einer Menge von Objekten $Ob(C)$

und einer Menge von Morphismen $Mor(C)$,

mit Identitätsmorphismen $id_X \in Mor(X,X)$

und Verknüpfungen

$$\circ : Mor(Y,Z) \times Mor(X,Y) \longrightarrow Mor(X,Z)$$
$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

so dass • $id_Y \circ f = f \circ id_X = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "id_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop right, "id_Y"] \end{tikzcd}$$

• $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

Beispiel • Kategorie Top der topologischen Räume mit stetigen Funktionen als Morphismen

- Kategorie Set der Mengen mit Abbildungen
- Gegeben eine Gruppe G definiere die Kategorie $\underline{BG}$:

$$\mathrm{Ob}(BG) = \{*\}$$

$$\mathrm{Mor}(*, *) = G$$

Verknüpfung von Morphismen ist die Gruppenoperation

<u>Defi:</u> Gegeben Kategorien C, D ist ein Funktor $F: C \longrightarrow D$ gegeben durch

- $\mathrm{Ob}(F): \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$

$$c \longmapsto F(c)$$

- Für $c, d \in Ob(\mathcal{C})$

$$Mor_{\mathcal{C}}(c, d) \longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(c), F(d))$$
$$\varphi \longmapsto F(\varphi)$$

so dass $F(id_X) = id_{F(X)}$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

<u>Beispiel</u>
- $\pi_0 : Top \longrightarrow Set$ ist ein Funktor.

- Gegeben einen Gruppenhomomorphismus $f : G \longrightarrow H$ gibt es einen Funktor $Bf : BG \longrightarrow BH$

$$Bf(*) = *$$
$$Bf(* \xrightarrow{g} *) = * \xrightarrow{f(g)} *$$

Mit diesen Begriffen können wir formalisieren was Invarianten sind.

<u>Def.</u>: Eine Invariante von topologischen Räumen ist ein Funktor $\mathrm{Top} \to \mathcal{C}$.

z.B. ist $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ eine Invariante.

<u>Lemma</u> Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann bildet F Isomorphismen in $\mathcal{C}$ auf Isomorphismen in $\mathcal{D}$ ab

⌈ Ein Isomorphismus in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus $f : X \to Y$ für den es einen Morphismus $g : Y \to X$

gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_Y$, $f \circ g = \mathrm{id}_X$ $\lrcorner$

<u>Beweis</u> Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ mit Umkehrabbildung $g: Y \longrightarrow X$.

Dann ist $$\mathrm{id}_{F(Y)} = F(\mathrm{id}_Y) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

und $$\mathrm{id}_{F(X)} = F(\mathrm{id}_X) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$ $\square$

Wir werden häufig einen gröberen Begriff als Homöomorphismus benutzen.

<u>Def.:</u> Gegeben zwei stetige Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$ und $g: X \longrightarrow Y$ ist

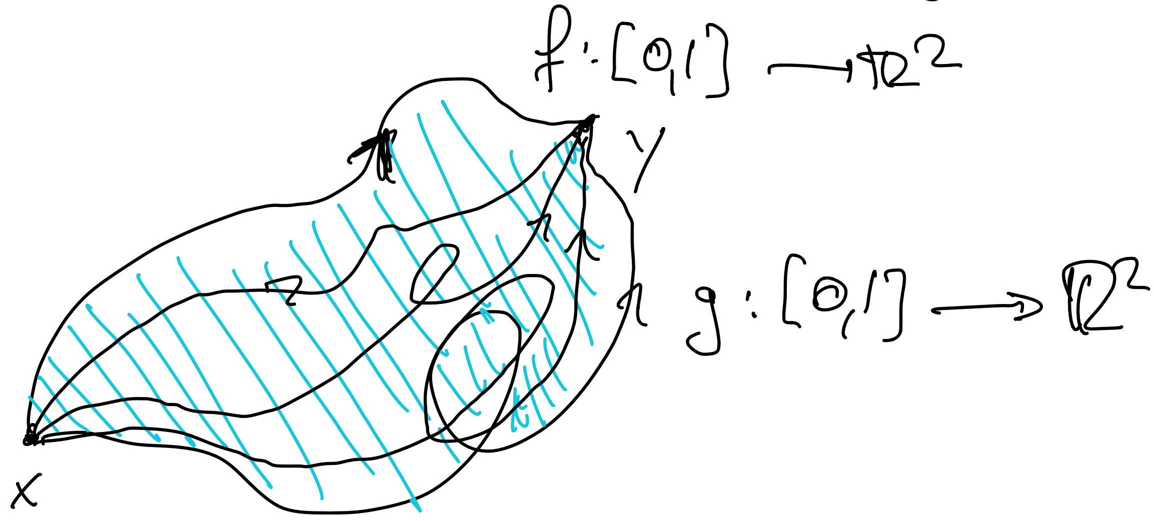
eine Homotopie von f nach g

eine stetige Abbildung

$$H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

mit $H(\_,0) = f$, $H(\_,1) = g$.

Beispiel:



$$H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$X \simeq Y$

Def.: Eine Homotopieäquivalenz zwischen top. Räumen X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ mit einer stetigen

Abbildung $g: Y \to X$ und Homotopien

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

Hier: $\varphi \simeq \psi$ heißt es gibt eine Homotopie von φ nach ψ.

Beispiele: • $\mathbb{R}^2 \simeq *$ "$\mathbb{R}^2$ ist zusammenziehbar"

$$f: * \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$* \longmapsto (0,0)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow *$$
$$x \longmapsto *$$

$g \circ f = \mathrm{id}_*$ und $\underline{f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}}$

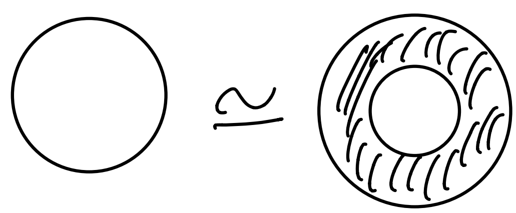
$$H: \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

will: $H(x,0) = (f \circ g)(x) = (0,0)$

$$H(x,1) = x$$

Zum Beispiel: $\boxed{H(x,t) = t\cdot x}$

- $\mathbb{R}^n \simeq *$ für jedes n.

- 

$\cong$ (!)

$S^1\times[0,1]$

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1\times[0,1] \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

<u>Lemma</u> Seien $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$,
$f': X\to Y$, $g': Y\to Z$
stetige Abbildungen mit Homotopien

$H_f : X \times [0,1] \longrightarrow Y \qquad f \simeq f'$

$H_g : Y \times [0,1] \longrightarrow Z \qquad g \simeq g'$

Dann ist:

(i) $f \circ id_X \simeq f \simeq id_Y \circ f$

(ii) $g \circ f \simeq g' \circ f'$

<u>Beweis</u> (i) $f \circ id_X = f = id_Y \circ f$ //

(ii) $H : X \times [0,1] \longrightarrow Z$

$H(x,t) = H_g(H_f(x,t), t)$

ist stetig und eine Homotopie

$g \circ f \simeq g' \circ f'$.

$H(x,0) = H_g(H_f(x,0), 0)$

$= g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$$H(x,1) = H_g(H_f(x,1),1)$$
$$= g'(f'(x)) = (g' \circ f')(x)$$ $\square$

<u>Lemma</u> Homotopie ist eine Äquivalenzrelation:

(i) $f \simeq f$ für $f: X \longrightarrow Y$ ✓

(ii) $f \simeq g \iff g \simeq f$ für $f, g: X \longrightarrow Y$

(iii) $f \simeq g,\ g \simeq h \implies f \simeq h$ für $f, g, h: X \to Y$.

<u>Beweis</u> (ii) Sei $H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g. Dann ist:

$$H': X \times [0,1] \longrightarrow Y$$
$$(x,t) \longmapsto H(x, 1-t)$$

eine Homotopie von g nach f!

$$H'(\_,0) = H(\_,1) = g$$
$$H'(\_,1) = H(\_,0) = f$$

(iii) Sei $H_1 : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie $f \simeq g$

und $H_2 : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie $g \simeq h$

Dann ist $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$

$$(x,t) \longmapsto \begin{cases} H_1(x,2t) & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H_2(x,2t-1) & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

stetig und eine Homotopie $f \simeq h$. $\square$

Def.: Die Homotopiekategorie hTop von topologische Räumen hat Objekte topologische Räume und $Mor_{hTop}(X,Y) = Mor_{Top}(X,Y)/\simeq$.

Eine Homotopieinvariante von topologischen Räumen ist ein Funktor $hTop \to C$.

Bemerkung Ein Isomorphismus in $hTop$ ist genau eine Homotopieäquivalenz.

Lemma Der Funktor $\pi_0 : Top \to Set$ steigt zu einer Homotopieinvariante

$$\pi_0 : hTop \to Set$$

ab.

Beweis: Sei $H : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie $f \simeq g$.

Es ist zu zeigen $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

(und dass $\pi_0(f)$ überhaupt wohldefiniert ist).

Sei $x \in X$ und einen Weg $\gamma : x \rightsquigarrow y$, d.h.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X \quad \text{mit } \gamma(0) = x$$
$$\gamma(1) = y.$$

Dann ist $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ ein Weg von $f(x)$ nach $f(y)$, also

$$\pi_0(f) = f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \text{ ist wohldef.}$$

Sei $[x] \in \pi_0(X)$. Dann ist $H(x, \_) : [0,1] \longrightarrow Y$ ein Weg von $f(x)$ nach $g(x)$.

Also ist $\underset{\pi_0(f)([x])}{[f(x)]} = \underset{\pi_0(g)([x])}{[g(x)]} \in \pi_0(Y)$.

$\square$