Letztes Mal:

S eine Menge

1) Wort in S $= x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$

$x_i \in S \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$

Bsp: $S = \{1\}$ $\quad 1 \in \mathbb{Z}$

Was sind die Wörter?

$1^{+1} \quad 1^{-1}$

$(+1)(+1)\cancel{(+1)}\cancel{(-1)}\cancel{(-1)}\cancel{(+1)} \dots (-1)$

Notation: $1^{+1} = +1$

$1^{-1} = -1$

2) leeres Wort $()$

3) elementare Reduktion

$x_1^{\varepsilon_1} \dots x_i^{\varepsilon_i} \, y^{-1} y^{+1} \, x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \dots x_n$

$\xrightarrow{e} x_1^{\varepsilon_1} \dots x_i^{\varepsilon_i} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \dots x_n$

Bsp: Wie ist das im Beispiel?

4) 2 Wörter $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind äquivalent

wenn

$$\vec{x} \to_e \cdots \to_e \vec{y}$$

5) Konfluenzlemma

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{x} \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\vec{x}_1 \arrow[dr, dashed, "e"'] & & \vec{x}_2 \arrow[dl, dashed, "e"] \\
 & \vec{z} &
\end{tikzcd}$$

6) $\vec{z}$ heißt reduziert wenn es keine elementaren Reduktionen $\vec{z} \to_e \vec{y}$ gibt.

Bsp: Was sind die reduzierten Wörter im Beispiel?

$S = \{1\}$

entweder $\underbrace{(+1)(+1) \dots (+1)}_{n \text{ mal}} \leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$

oder $\underbrace{(-1)(-1) \dots (-1)}_{m \text{ mal}} \leftrightarrow -m \in \mathbb{Z}$

oder $()$

7) freie Gruppe auf S $\quad F(S)$

$= \{$ reduzierte Wörter in $S \}$

Gruppenoperation = nebeneinanderschreiben und reduzieren

Bsp: Wie ist das in unserem Beispiel?

Addition von ganzen Zahlen

$w_1 = n \qquad w_2 = m$

hintereinanderschreiben und reduzieren gibt $n + m$

8) Präsentation einer Gruppe G

$= \langle (g_i)_{i \in I} \mid (r_j)_{j \in J} \rangle$

$g_i \in G \qquad r_j$ Wörter in g_i's

$F((g_i)_{i \in I}) / N$

N = kleinste normale Untergruppe

von $F((g_i)_{i\in I})$ die alle r_j enthält

Fakt: Das geht immer

$$G = \langle\, g \in G \mid R \,\rangle$$

$$R \ni g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} = e$$

<u>Bsp</u>: $\mathbb{Z} = \langle\, 1 \mid \ \rangle$

g)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ H \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & F \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

A, G, H Gruppen
f, ψ Gruppenhom's

Amalgamiertes freies Produkt F existiert und ist eindeutig bis auf Iso

Konstruktion von $F =: G \underset{A}{*} H$

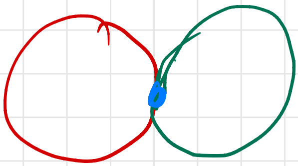
$$G \cong \langle (g_i)_{i\in I} \mid (r_j)_{j\in J} \rangle$$

$$H \cong \langle (h_i)_{i\in I'} \mid (s_j)_{j\in J'} \rangle$$

$$A \cong \langle (a_i)_{i\in I''} \mid (t_j)_{j\in J''} \rangle$$

$$G \underset{A}{\ast} H = \langle (g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I'} \mid (r_j)_{j\in J}, (s_j)_{j\in J''}, \left(\varphi(a_i)\psi(a_i)^{-1}\right)_{i\in I''}$$

Bsp aus der Übung



$$\pi_1(\bigcirc) \underset{\pi_1(\bullet)}{\ast} \pi_1(\bigcirc)$$

$$= \mathbb{Z} \underset{\{e\}}{\ast} \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z} = \langle 1 \mid \rangle$

$\mathbb{Z} = \langle 1 \mid \rangle$

$$= \langle 1, 1 \mid \rangle$$

ψ

hunlk ... z

Warum machen wir das alles?

<u>Satz</u> (Seifert-Van Kampen)

Sei X ein top Raum, $X = U \cup V$

$U, V \subseteq X$ offen in X, und

U, V, $U \cap V$ wegzusammenhängend.

$x_0 \in U \cap V$

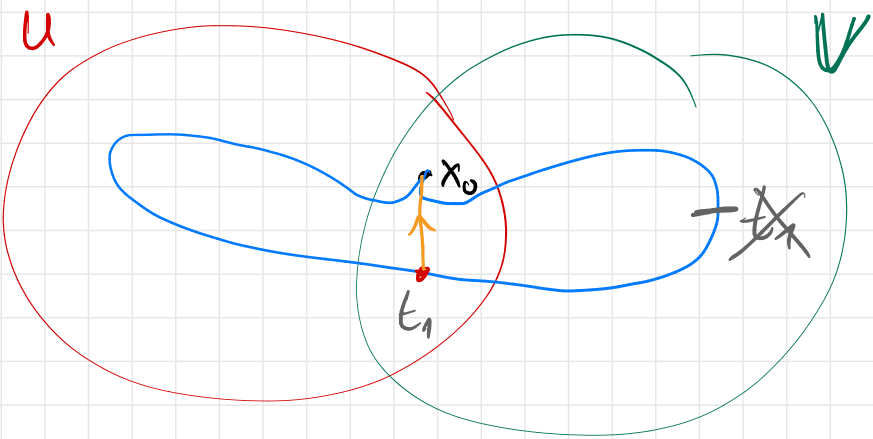
Dann $U \hookrightarrow X$, $V \hookrightarrow X$

induzieren

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\pi_1(V) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \pi_1(U) * _{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \arrow[dr, "\cong"] & \\
 & & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

einen Isomorphismus

$$f: \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$$



Beweis: Was macht φ?

$$\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \to \pi_1(X)$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ [\gamma_1][\gamma_2] \dots [\gamma_n] & \mapsto & [\gamma_1 * \dots * \gamma_n] \end{array}$$

$[\gamma_i] \in \pi_1(U)$
oder $\in \pi_1(V)$

Surjektiv:
Sei γ eine Schleife in X um x_0
Wir suchen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sd.
γ_i eine Schleife in U um x_0
oder —— " —— V —— " ——
für $i = 1, \dots, n$
und $\gamma_1 * \dots * \gamma_n \simeq \gamma$.

⌜Lebesgue's Überdeckungslemma:

X = kompakter metrischer Raum

zB $[0,1]$ (später $[0,1]\times[0,1]$)

$\mathcal{U}$ offene Überdeckung von X

$\shortparallel$
$\{\{U_i\}_{i\in I}\}$

Dann ex $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ s.d.

$\forall\ E \subset X$ mit $\operatorname{diam} < \lambda$

ein $U \in \mathcal{U}$ s.d. $E \subset U$ ⌟

$$[0,1] = \bigcup_{t\in[0,1]} (\alpha_t, \beta_t)$$

s.d. $\gamma((\alpha_t, \beta_t)) \subseteq U$

oder $\gamma((\alpha_t, \beta_t)) \subseteq V$

$t \in (\alpha_t, \beta_t)$

Sei λ wie in dem Überdeckungslemma

$\varepsilon = \frac{\lambda}{3}$

Überdeckungslemma $\Rightarrow$ $$[0,1] = \bigcup_{s\in[0,1]} B_\varepsilon(s)$$

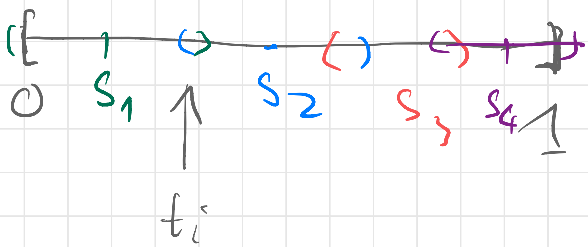
$$\gamma(B_\varepsilon(s)) \subseteq U$$
$$\text{oder } \subseteq V$$

$[0,1]$ kompakt

$$\Rightarrow \quad [0,1] = B_\varepsilon(s_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(s_n)$$
$$s_1 < \dots < s_n$$

$t_0 = 0 \quad t_n = 1$

$$t_i \in B_\varepsilon(s_i) \cap B_\varepsilon(s_{i+1})$$



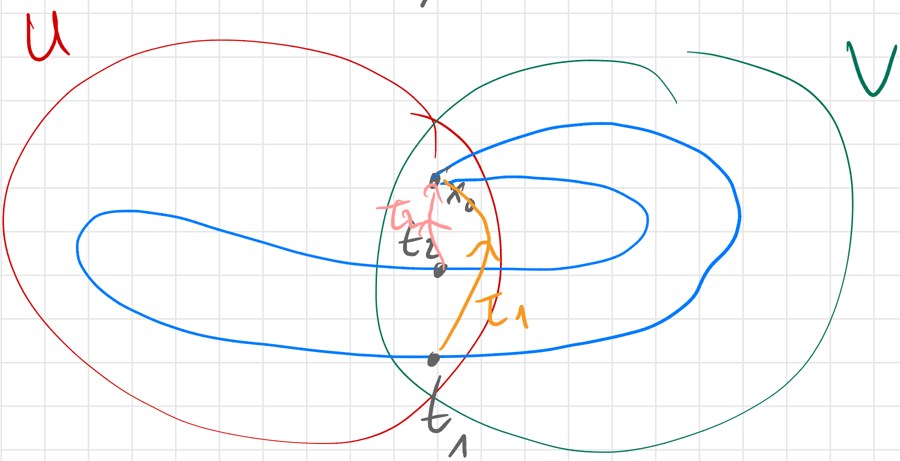
Dann ist $\gamma([t_i, t_{i+1}])$
$$\subseteq \gamma(B_\varepsilon(s_{i+1}))$$
$$\begin{cases} \subseteq U \\ \text{oder } \subseteq V \end{cases}$$

Falls $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$ (bzw V)
$\gamma([t_{i+1}, t_{i+2}]) \subseteq U$ (bzw V)
löschen wir t_{i+1} aus unserer Partition.

Also haben wir

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

sd. Falls $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$ (bzw V)
$\gamma([t_{i+1}, t_i]) \subseteq V$ (bzw U)
und $\gamma([t_{i-1}, t_i] \subseteq V$ (bzw U)



Sei τ_i ein Weg von $\gamma(t_i)$ nach x_0 der komplett in $U \cap V$ liegt.

$\gamma_i' := (\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ reparametrisiert zu einem Weg $[0,1] \to X)$

Dann

$$\gamma \simeq \underbrace{\gamma_0' * \tau_1}_{=\gamma_1} * \tau_1^{-1} * \gamma_1' * \tau_2 * \tau_2^{-1} \; \dots \dots * \underbrace{\tau_{n-1}^{-1} * \gamma_{n-1}}_{=\gamma_n}$$

Injektivität:

$$\pi_1(U) = \langle (g_i)_{i \in I} \mid (r_j)_{j \in J} \rangle$$

i_U

$$\pi_1(V) = \langle (h_i)_{i \in I'} \mid (s_j)_{j \in J'} \rangle$$

i_V

$$\pi_1(U \cap V) = \langle (a_i)_{i \in I''} \mid (t_j)_{j \in J''} \rangle$$

$$\pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) = \langle (g_i)_{i \in I} \cup (h_i)_{i \in I'} \mid (r_j)_{j \in J}, (s_j)_{j \in J'}, i_U(a_i)\, i_V(a_i)^{-1} \rangle$$

N := kleinste normale Untergruppe von

$F((g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I'})$

die $(r_j)_{j\in J}, (s_j)_{j\in J'}$, enthält.

$i_u(a_i)\, i_v(a_i)^{-1}$

$$\pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) = \frac{F((g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I'})}{N}$$

Sei $[\gamma] \in \pi_1(X)$

Eine Faktorisation von $[\gamma]$

$[\gamma_1] \dots [\gamma_n]$

s.d. γ_i eine Schleife in U oder V ist und

$\gamma \simeq \gamma_1 * \dots * \gamma_n$

$[\gamma_1] \dots [\gamma_n]$ ist ein (nicht unbedingt reduziertes Wort) in

$\pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V)$ und $\varphi([\gamma_1] \dots [\gamma_n]) = [\gamma]$

Wir nennen 2 Faktorisationen von $[\gamma]$ äquivalent wenn ~~man~~ die eine ~~sie~~ folgendermaßen ~~da~~ von der anderen erhalten kann.

1) $[\gamma_i][\gamma_{i+1}] \rightarrow [\gamma_i * \gamma_{i+1}]$

beide in $\pi_1(U)$

oder $\pi_1(V)$

2) Angenommen γ_i ist eine Schleife im $U \cap V$, dann kann man $[\gamma_i]$ als Element von $\pi_1(U)$ betrachten als auch von $\pi_1(V)$ und das ist äquivalent.

Beh: Operation 1) und 2) verändern $[\gamma_1] \cdot \ldots \cdot [\gamma_n]$ in $\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ nicht

Warum? • 1) verändert $[\gamma_1] \cdot \ldots \cdot [\gamma_n]$ nicht

- 2) $i_u[\gamma_i] \, i_u([\gamma_i])^{-1} i_v([\gamma_i]) = i_v[\gamma_i]$

$\uparrow$ als Element von $\pi_1(U)$ $\qquad \in N$

Operation 2) verändert das Wort bis auf ein Element in N.

Wir wollen nun zeigen, dass 2 Faktorisationen von $[\gamma] \in \pi_1(X)$ äquivalent sind.

Seien

$[\gamma_1] \dots [\gamma_n]$ und $[\gamma_1'] \dots [\gamma_m']$

2 Faktorisationen von $[\gamma]$.

Insbesonder $\gamma_1 * \dots * \gamma_n \simeq \gamma_1' * \dots * \gamma_m'$

Sei H eine Homotopie von

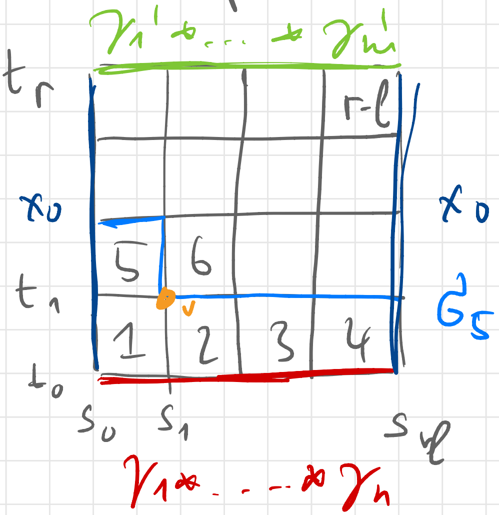
$\gamma_1 * \dots * \gamma_n$ nach $\gamma_1' * \dots * \gamma_m'$

Weil $I \times I$ kompakt ist, gibt

es $\quad 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_\ell = 1$

und $\quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$

sd $\quad H([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ ~~k~~komplett in U oder komplett in V liegen.



Wir numieren unsere Rechtecke wie im Bild.

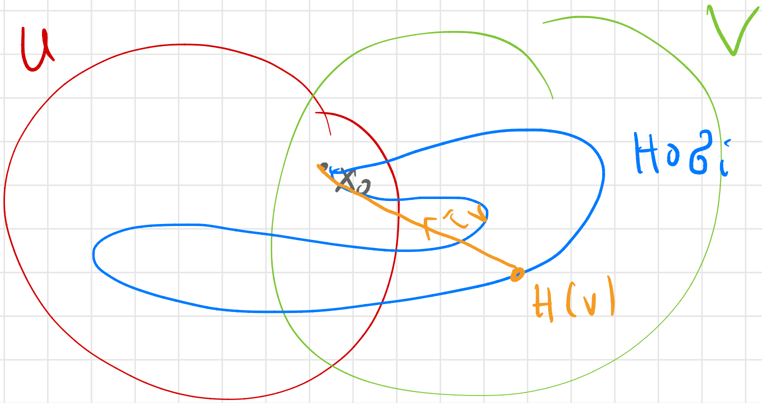
ObdA können wir annehmen, dass

γ_i = Reparametrisation von $H(-,0)|_{[s_{k_i}, s_{k_i'}]}$ $\quad k_i < k_i'$

γ_i' = — " — $H(-,1)|_{[s_{j_i}, s_{j_i'}]}$

$j_i < j_i'$

Sei ∂_i der Weg in $I \times I$ der die ersten i Rechtecken von den anderen trennt.



Für jede Ecke $\check{v}$ von einem Rechteck in $I \times I$ sei τ_v der Weg von $H(v)$ nach x_0

$$\begin{array}{llll} \text{Wenn} & H(v) \in U & \text{wählen wir} & \tau_v \subset U \\ & \phantom{H(v) \in{}} V & & \phantom{\tau_v \subset{}} V \\ & \phantom{H(v) \in{}} U \cap V & & \phantom{\tau_v \subset{}} U \cap V \end{array}$$

Wir erhalten eine Faktorisation von $H \circ \partial_i$ indem wir $\tau_v * \tau_v^{-1}$ bei allen Ecken die auf ∂_i liegen einfügen.

Behauptung: Die oben beschriebene Faktorisation von $H \circ \hat{\sigma}_i$ ist äquivalent zu der Faktorisation von $H \circ \hat{\sigma}_{i+1}$, die wir analog erhalten.

Erklärung: Angenommen das $(i+1)$te Rechteck bildet komplett nach V (bzw U) ab.

Falls ein Teil der Faktorisation von $H \circ \hat{\sigma}_i$ der das $(i+1)$te Rechteck beinhalten in $\pi_1(U)$ ~~GA~~ ist, betrachten wir ihn als Element von $\pi_1(V)$.

(Operation 2)

$H|_{R_{i+1}}$ gibt uns eine Homotopie zwischen den beiden Faktorisationen.

Beh: Wir sind fertig:

$\gamma_1 * \dots * \gamma_n \simeq$ Faktorisation von $H \circ G_1$

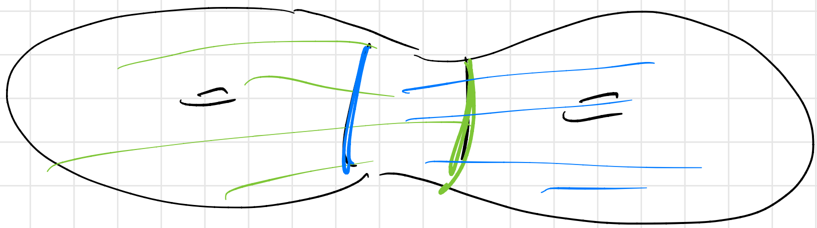
$\gamma_1' * \dots * \gamma_m' \simeq$ — " — $H \circ G_{r \cdot \varepsilon}$

und ~~allen~~ die Faktorisationen von den $H \circ G_i$ sind äquivalent

$\square$

Bsp: $\pi_1(S^n) = ?$ $n \geq 2$

$$\underset{\{e\}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(S^n)}}$$



(ii) Y lokalkompakt

$A \subset Y$ ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ $A \cap K$ kompakt $\forall$ $K \subset Y$ kompakt.

"$\Rightarrow$" $A \subset Y$ abg $\quad K \subset Y$ kompakt

ZZ: $A \cap K$ kompakt.

Y ist lokal kompakt

dh Hausdorff

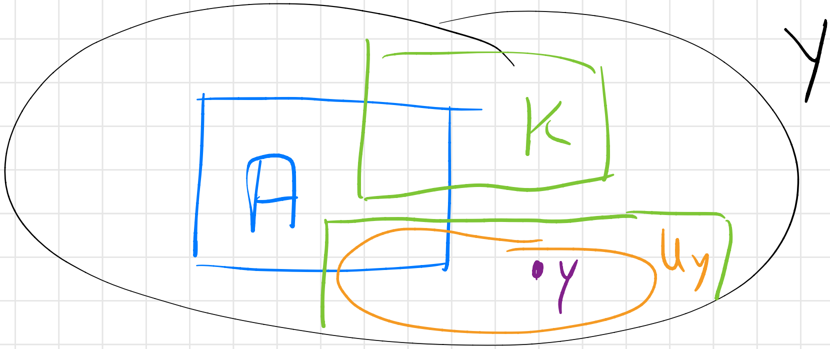
und $\forall y \in Y$ $\exists y \in \underset{\text{offen}}{U_y} \subset K_y$ kompakt

Hinweis:

1. Lemma aus der Vorlesung zu Kompaktheit

"$\Leftarrow$" $A \cap K$ ist kompakt $\forall$ $K \subset Y$ kompakt

Warum ist A abg?



Hinweis: $A \cap K$ kompakt benutzen

+ 1. Lemma aus der Vorlesung

(ii) $f: X \to Y$ ← lokalkompakt

Urbilder kp Mengen sind kp

+ stetig

z.z. $f(A)$ ist abg.

↑ abg

⇕

$\forall K \subset Y$ K kp

ist $A \cap K$ kp

Hinweis: 1. Lemma aus der Vorlesung.

+ 2. Lemma

$f^{-1}(f(M)) = M$ wenn f inj

$\supseteq$ ✓

$\subseteq$?

$f^{-1}(f(\bullet)) = f^{-1}(\bullet) = \{\bullet, \bullet\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & S^1 \times S^1 \\ X/\sim \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$f(x) = f(y)$ falls $x \sim y$

$f([x]) = f(x) = f(y)$

$[0, 2\pi) \to S^1$

$f: X \to Y$ Homöo

Teilräume

$W \subseteq X$

$Z := f(W)$

Dann ist $f|_W : W \to Z$

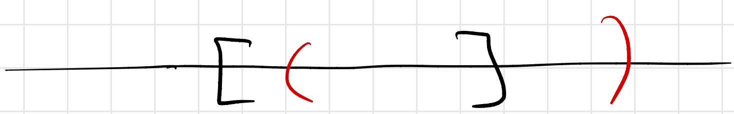
auch Homöo

Angenommen

zB: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Homöo

$f: \mathbb{R}^2 - \{x=0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 - \underbrace{f(\{x=0\})}_{W}$

Achtung Wir wissen nicht was das ist.



Was sind die kompakte Mengen in $\mathbb{Q}$?

In $\mathbb{Q}$ abg + beschränkt $\not\Rightarrow$ kompakt

$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$