Topologie

Viktor Kleen* Sabrina Pauli†

1 Topologische Räume und stetige Funktionen

Zuerst wollen wir Begriffe aus der Analysis wiederholen um später die Definition von topologischen Räumen zu motivien. Die ersten metrischen Räume, die man typischerweise antrifft, sind die Vektorräume $\mathbb{R}^n$, die mit verschiedenen Normen ausgestattet werden können. Zum Beispiel definiert man die *Supremumsnorm*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

oder für $1 \leq p < \infty$ die ℓ^p-Norm

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Definition 1.1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* bezüglich einer Norm $\|\_\|$ falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x'\| < \delta$ gilt.

Satz 1.2. *Je zwei Normen $\|_\|$ und $\|\_\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ sind* äquivalent*, d. h. es gibt Konstanten $c, C > 0$, so dass*

$$c\|x\| < \|x\|' < C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Korollar 1.3. *Der Stetigkeitsbegriff für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ hängt nicht von der gewählten Norm auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}$ ab.*

Dieses Korollar motiviert sofort die Frage, ob es einen Begriff von Stetigkeit gibt, der von der Wahl einer Norm losgelöst ist? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich ja, aber wir werden dafür zuerst den Begriff einer *Metrik* unter suchen.

Definition 1.4. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

*viktor.kleen@uni-due.de
†sabrinp@math.uio.no

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d auf X.

Zum Beispiel liefert jede Norm $\|\_\|$ auf einem Vektorraum V eine Metrik durch

$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

Definition 1.5. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, falls es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt.

Diese Definition sieht erstmal nicht besonders hilfreich aus für unser Ziel einen allgemeineren Begriff der Stetigkeit zu finden. Aber mit ihr können wir beginnen eine Definition zu finden, die die Metrik nicht mehr explizit erwähnt.

Definition 1.6. Sei (X, d) ein metrische Raum. Der *offene Ball* um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Beispielsweise können wir $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$ betrachten. Dann ist

- das offene Intervall $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen.
- die Vereinigung zweier offener Intervalle $(a,b) \cup (c,d)$ offen.
- das abgeschlossene Intervall $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *nicht* offen.

Satz 1.7. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ offen.*

Beweis. Sei zuerst f stetig und $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Aber U ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Da f stetig ist, gibt es tatsächlich ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt. Das bedeutet, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, oder anders gesagt, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$.

Sei umgekehrt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Der offene Ball $B_\varepsilon(f(x))$ ist offen (Übungsaufgabe!) und nach der Annahme an f ist damit auch $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen und $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Oder anders gesagt, für jedes $x' \in B_\delta(x)$, d. h. $d(x, x') < \delta$, ist $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, d. h. $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. □

Mit diesem Satz haben wir einen vielversprechenden Kandidaten für einen Stetigkeitsbegriff, denn Bedingung (ii) braucht nicht mehr explizit eine Metrik, sondern nur noch den Begriff einer *offenen Teilmenge*.

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.8. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X mit

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(iii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{U \in M} U \subset \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen* von X und die Elemente von X heißen *Punkte*. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Definition 1.9. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}_Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist, d. h. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Unsere Beispiele von metrischen Räumen liefern sofort Beispiel von topologischen Räumen. Wir betrachten zuerst $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt dann offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Die Axiome sind erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist natürlich $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offen, und $x \in U \cap V$, so gibt es ein $\varepsilon_U > 0$ mit $(x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \subset U$ und ein $\varepsilon_V > 0$ mit $(x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset (x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \cap (x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen in $\mathbb{R}$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Aber U_j ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j$. Also ist dann auch

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ganz ähnlich zeigt man, dass $\mathbb{R}^n$ mit der von einer Norm induzierten Metrik einen topologischen Raum definiert. Wieder heißt nämlich eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x - x'\| < \varepsilon\} \subset U$.

Allgemeiner definiert jede Metrik d auf einer Menge X eine Topologie. Sie heißt die von d induzierte *metrische Topologie* auf X: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wieder sind die Axiome erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in X$ ist natürlich $B_\varepsilon(x) \subset X$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset X$ und $V \subset X$ offen und $x \in U \cap V$, so gibt es $\varepsilon_U > 0$ und $\varepsilon_V > 0$ mit $B_{\varepsilon_U}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_V}(x) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset B_{\varepsilon_U}(x) \cap B_{\varepsilon_V}(x) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ und damit

$$B_\varepsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Hier noch einige abstraktere Beispiele für topologische Räume: Jede Menge X kann mit der *trivialen Topologie*[1] $\{\emptyset, X\}$ versehen werden. Genauso kann jede Menge X mit der *diskreten Topologie* $\mathscr{P}(X)$, der Potenzmenge von X, versehen werden. Für beide sind die Axiome klar.

Seien verschachtelte topologische Räume $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, so dass die Inklusionen $\iota_{i,j} \colon U_i \hookrightarrow U_j$ stetig sind, gegeben. Letzteres heißt, dass wann immer $V \subset U_j$ offen ist, so ist auch $\iota_{i,j}^{-1}(U_j) = V \cap U_i$ offen. In dieser Situation trägt die Vereinigung $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ eine Topologie, genannt die *finale Topologie*. In ihr ist eine Teilmenge $V \subset U$ genau dann offen, wenn $V \cap U_i$ in U_i für alle i offen ist. Wir überprüfen die Axiome:

(i) Natürlich sind $\emptyset$ und U selbst offen.

(ii) Seien $V, W \subset U$ offen. Dann ist $(V \cap W) \cap U_i = (V \cap U_i) \cap (W \cap U_i)$ und letzteres ist ein endlicher Schnitt offener Mengen in U_i. Also ist auch $V \cap W$ offen in U.

(iii) Ist $\{V_j\}_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen in U, so ist wieder
$$U_i \cap \bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J} U_i \cap V_j$$
eine Vereinigung von offenen Teilmengen von U_i. Also ist auch $\bigcup_{j \in J} V_j$ offen in U.

Definition 1.10. Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A^c = X \setminus A \in \mathscr{T}$.

Der Begriff „abgeschlossen“ hat nichts mit „nicht offen“ zu tun! Zum Beispiel sind in jedem topologischen Raum $\emptyset$ und X sowohl abgeschlossen als auch offen.

Satz 1.11. *Eine Funktion $f \colon X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle abgeschlossenen $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.*

Beweis. Für jede Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

Definition 1.12. Gegebenen einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$, definiere
$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \supset M \\ \text{abgeschlossen}}} A, \qquad \text{den } \textit{Abschluss} \text{ von } M \text{ in } X,$$
$$M^\circ = \bigcup_{\substack{U \subset M \\ \text{offen}}} U, \qquad \text{das } \textit{Innere} \text{ von } M$$
und
$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ, \qquad \text{den } \textit{Rand} \text{ von } M.$$

Zum Beispiel ist für $M = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ in der euklidischen Topologie der Abschluss $\overline{M} = [0, 1]$, das Innere $M^\circ = (0, 1)$ und der Rand $\partial M = \{0, 1\}$. Für $M = \mathbb{Q}$ haben wir den Abschluss $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und das Innere $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ und damit auch den Rand $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Allgemein heißt eine Teilmenge $M \subset X$ in einem topologischen Raum X *dicht*, wenn $\overline{M} = X$.

[1] Oder der *indiskreten Topologie* oder der *Klumpentopologie*

1.2 Basen für Topologien

Definition 1.13. Eine *Basis für eine Topologie* auf X ist eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit:

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$, d. h. $\mathcal{B}$ überdeckt X,

(ii) für je zwei $U, U' \in \mathcal{B}$ und $x \in U \cap U'$ gibt es ein $U'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in U'' \subset U \cap U'$.

Erfüllt $\mathcal{B}$ nur die erste Bedingung, so ist $\mathcal{B}$ eine *Subbasis für eine Topologie* auf X.

Definition 1.14. Gegeben eine Basis oder Subbasis $\mathcal{B}$ für eine Topologie auf X ist die von $\mathcal{B}$ *erzeugte Topologie* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ die kleinste Topologie auf X, die alle Mengen in $\mathcal{B}$ enthält.

Satz 1.15. *Für eine Basis $\mathcal{B}$ ist die erzeugte Topoologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ gegeben durch*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \text{ beliebig und } B_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Beweis. Zuerst ist für jede Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ mit $B_i \in \mathcal{B}$ natürlich $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Das heißt, wir haben die Inklusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Nachdem $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ aber die kleinste Topologie ist, die $\mathcal{B}$ enthält, und $\mathcal{T}$ ebenso $\mathcal{B}$ enthält, genügt es damit zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ bereits eine Topologie ist.

Dafür ist zunächst $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, denn es ist $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und, da $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie ist, $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

Sei nun $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ mit $U_i, V_j \in \mathcal{B}$. Sei weiter $x \in U \cap V$, d. h. es gibt ein $i \in I$ und ein $j \in J$ mit $x \in U_i \cap V_j$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X ist, gibt es dann ein $W_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in W_x \subset U_i \cap V_j$. Aber dann ist $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}$.

Ist weiter $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmenen von X mit $U_i \in \mathcal{T}$, so können wir $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j$ mit $B_j \in \mathcal{B}$ schreiben. Aber dann ist

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j$$

eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ und deshalb in $\mathcal{T}$. □

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so nennt man $\mathcal{B}$ ein Basis für $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Zum Beispiel können wir, gegeben eine Metrik $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, eine Basis für die metrische Topologie finden: Sei

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}.$$

Dann ist $\bigcup \mathcal{B} = X$, denn für jedes $x \in X$ ist $x \in B_r(x)$ für alle $r > 0$. Ist weiter $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$, so ist $d(z, x) < \varepsilon$ und $d(z, y) < \delta$. Setze $r = \min\{\varepsilon - d(z, x), \delta - d(z, y)\}$. Mit dieser Wahl ist $B_r(z) \subset B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$: Für jedes $p \in B_r(z)$ ist

$$\begin{aligned} d(p, x) &\leq d(p, z) + d(z, x) < r + d(z, x) \\ &\leq \varepsilon - d(z, x) + d(z, x) = \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(p, y) &\leq d(p, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \\ &\leq \delta - d(z, y) + d(z, y) = \delta. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis für eine Topologie auf X. Dass die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie genau die metrische Topologie ist, folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 1.16. *Sei $\mathscr{B}$ eine Basis für eine Topologie auf einer Menge X. Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind dann äquivalent:*

(i) $U \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$
(ii) *Für jedes $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \in V \subset U$.*

Beweis. Sei zuerst $U \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$, etwa $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathscr{B}$. Aber das heißt, dass es für jedes $x \in U$ ein $i \in I$ gibt, mit $x \in U_i \subset U$.

Sei andererseits für jedes $x \in U$ ein $V_x \in \mathscr{B}$ mit $x \in V_x \subset U$ gewählt. Dann ist $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. □

Mithilfe von Basen können wir Stetigkeit für Funktionen zwischen topologischen Räumen so umformulieren, dass die Bedingung der ursprünglichen ε-δ-Definition für metrische Räume ähnelt.

Satz 1.17. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $\mathscr{B}_X$ eine Basis für eine Topologie auf X und $\mathscr{B}_Y$ eine Basis für eine Topologie auf Y. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig bezüglich $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$ und $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_Y}$.*
(ii) *Für aller $U \in \mathscr{B}_Y$ ist $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$.*
(iii) *Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathscr{B}_Y$ mit $f(x) \in U$ existiert ein $V \in \mathscr{B}_X$ mit $x \in V$ und $f(V) \subset U$.*

Beweis. Die Richtung (i⇒ii) ist klar. Für (ii⇒iii) sei $U \in \mathscr{B}_Y$ mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen in $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$ und $x \in f^{-1}(U)$. Also gibt es nach Satz 1.16 ein $V \in \mathscr{B}_X$ mit $x \in V \subset f^{-1}(U)$, d. h. $f(V) \subset U$. Das ist aber genau (iii).

Für (iii⇒i) sei $U \subset Y$ offen in $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_Y}$ und $x \in f^{-1}(U)$, d. h. $f(x) \in U$. Es gibt also nach Satz 1.16 ein $U' \subset U$ mit $f(x) \in U'$ und $U' \in \mathscr{B}_Y$. Wegen (iii) gibt es dann ein $V \subset X$ mit $V \in \mathscr{B}_X$, $x \in V$ und $f(V) \subset U'$, d. h. $V \subset f^{-1}(U') \subset f^{-1}(U)$. Aber wieder nach Satz 1.16 genügt das, um zu sehen, dass $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$. □

Mit Satz 1.16 können wir einen topologischen Beweis für Korollar 1.3 geben. Insbesondere sehen wir, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ tatsächlich den Begriff der Stetigkeit charakterisiert, unabhängig von der gewählten Norm.

Satz 1.18. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\_\|$, $\|\_\|'$ zwei äquivalente Normen auf V. Dann sind die entsprechenden metrischen Topologien gleich: $\mathscr{T}_{\|\_\|} = \mathscr{T}_{\|\_\|'}$.*

Beweis. Da $\|\_\|$ und $\|\_\|'$ äquivalent sind, seien Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ für alle $x \in V$ gegeben. Schreiben wir

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \varepsilon\}$$

und

$$B'_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\|' < \varepsilon\},$$

so bilden $\{B_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ und $\{B'_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ Basen für $\mathscr{T}_{\|\_\|}$ beziehungsweise $\mathscr{T}_{\|\_\|'}$.

(i) Jeder Ball $B'_\varepsilon(x)$ ist offen in $\mathscr{T}_{\|\_\|}$: Sei $y \in B'_\varepsilon(x)$ und $\delta = (\varepsilon - \|y - x\|')/C$. Für $z \in B_\delta(y)$ ist dann

$$\|z - x\|' \leq \|z - y\|' + \|y - x\|' \leq C\|z - y\| + \|y - x\|' < C\delta + \|y - x\|' = \varepsilon,$$

also $y \in B_\delta(y) \subset B'_\varepsilon(x)$.

(ii) Sei $U \in \mathcal{T}_{\|\_\|}$ und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Setze $\delta = c\varepsilon$. Für $y \in B'_\delta(x)$ ist dann
$$\|y - x\| \leq \frac{1}{c}\|y - x\|' < \frac{\delta}{c} = \varepsilon,$$
also $y \in B_\varepsilon(x)$. Es folgt also, dass $B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$, und insgesamt nach Satz 1.16, dass $\mathcal{T}_{\|\_\|} = \mathcal{T}_{\|\_\|'}$. □

Definition 1.19. Ein topologischer Raum X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn die Topologie auf X von einer höchstens abzählbar unendlichen Basis erzeugt wird.

1.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wie in metrischen Räumen können wir im Allgemeinen Folgen und ihre Konvergenz betrachten. Allerdings ist der Begriff in allgemeinen topologischen Räumen weit weniger hilfreich, wie wir bald sehen werden.

Definition 1.20. Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, in Symbolen $x_n \to x$, falls für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele der x_n in U liegen.

Im Gegensatz zu unserer Erfahrung in metrischen Räumen muss der Grenzwert einer konvergenten Folge einem allgemeinen topologischen Raum nicht eindeutig bestimmt sein. Sei zum Beispiel $X = \{0, 1\}$ mit der Topologie $\{\emptyset, X, \{0\}\}$ und betrachte die konstante Folge $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar $x_n \to 0$, aber $\{x_n\}_n$ konvergiert auch gegen 1! Die einzige offene Menge in X, die 1 enthält, ist nämlich der ganze Raum X.

Nichtsdestotrotz lassen sich einige Sätze über konvergente Folgen für allgemeine topologische Räume übertragen. Zum Beispiel ließen sich in metrischen Räume stetige Funktionen als genau die folgenstetigen Funktionen charakterisieren.

Satz 1.21. *Stetige Funktionen sind* folgenstetig*: Wenn $x_n \to x$ in X und $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig ist, dann ist $f(x_n) \to f(x)$ in Y.*

Beweis. Sei $U \subset Y$ offen mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Weil $x_n \to x$ liegen dann alle bis auf endlich viele der x_n in $f^{-1}(U)$ und damit auch alle bis auf endlich viele der $f(x_n)$ ind U. □

In allgemeinen topologischen Räumen ist der Umkehrschluss aber falsch! Sei zum Beispiel X eine überabzählbar unendliche Menge. Man definierte die *ko-abzählbare Topologie* auf X, indem man eine Menge $U \subset X$ offen nennt, wenn entweder $U = \emptyset$ oder $X \setminus U$ höchstens abzählbar unendlich ist. Sei $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die nicht schließlich konstant ist, d. h. es gibt kein $p \in X$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $p_n = p$ für alle $n \geq N$. Wir zeigen, dass dann $\{p_n\}_n$ nicht konvergent sein kann. Sei dafür $p \in X$ und setze $U = X \setminus \{p_n : p_n \neq p, n \in \mathbb{N}\}$. Da X die ko-abzählbare Topologie trägt ist dann U offen und $p \in U$. Außerdem gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $p_n \neq p$, d. h. $p_n \notin U$, denn ansonsten wäre $\{p_n\}_n$ schließlich konstant gleich p. Insbesondere kann $\{p_n\}_n$ nicht gegen p konvergieren.

Aber $p \in X$ war beliebig gewählt, also ist keine Folge $\{x_n\}_n$ in X konvergent, außer $\{x_n\}_n$ ist schließlich konstant. Natürlich ist jede schließlich konstante Folge in jedem topologischen Raum konvergent. Das bedeutet, dass jede Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ folgenstetig ist, denn schließlich konstante Folgen werden immer auf schließlich konstante Folgen abgebildet. Hingegen ist es nicht schwer eine Funktion auf X zu konstruieren, die nicht stetig ist. Zum Beispiel ist die Identitätsabbildung aufgefasst als Funktion von X mit der ko-abzählbaren Topologie nach X mit der diskreten Topologie nicht stetig: Da X überabzählbar unendlich ist, muss es eine Menge in X geben, die nicht offen ist.

Um ein Kriterium an einen topologischen Raum X zu finden, unter dem folgenstetige Funktionen $X \longrightarrow Y$ automatisch stetig sind, führen wir zuerst die folgende Variante von Basen für eine Topologie ein.

Definition 1.22. Eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{U}$, die allen einen Punkt $x \in X$ enthalten, heißt *Umgebungsbasis* für $x \in X$, falls für jede offene Menge $V \subset X$ mit $x \in V$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $x \in U \subset V$.

Zum Beispiel ist die Familie $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ für einen Punkt $x \in X$ in einem metrischen Raum X eine Umgebungsbasis. Oder allgemeiner ist, gegeben eine Basis $\mathcal{B}$ für eine Topologie auf einer Menge X, die Familie $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$ bezüglich der erzeugten Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

Definition 1.23. Ein topologischer Raum X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* wenn jedes $x \in X$ eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis hat.

Satz 1.24. *Angenommen X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist jede folgenstetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $f(x) \in U$ mit $U \subset Y$ offen. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$ und es gibt eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis für x. Wir können diese Umgebungsbasis $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ so wählen, dass

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \ni x,$$

denn ist $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige, höchstens abzählbare Umgebungsbasis für x, setze $V_i = \bigcap_{j \leq i} W_j$. Angenommen es wäre möglich, dass $V_n \not\subset f^{-1}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man dann $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(U)$ für $n \in \mathbb{N}$, erhält man eine Folge $\{x_n\}_n$, die gegen x konvergiert. Da f folgenstetig ist, konvergiert dann auch $\{f(x_n)\}$ gegen $f(x)$. Da U offen ist, gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist also $x_N \in f^{-1}(U)$, obwohl wir $x_N \in V_N \setminus f^{-1}(U)$ gewählt hatten.

Es folgt also, dass es eine offene Menge V_N gibt mit $x \in V_N \subset f^{-1}(U)$. Da x beliebig gewählt war, muss damit nach Satz 1.17 die Funktion f stetig sein. □

Satz 1.25. *Gegeben topologische Räume X, Y und Z mit stetigen Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$, ist die Komposition $g \circ f : X \longrightarrow Z$ stetig.*

Beweis. Wenn $U \subset Z$ offen ist, dann auch

$$(g \circ f)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$$

also Urbild der offenen Menge $f^{-1}(U)$ unter g. □

Definition 1.26. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die $\mathcal{T}$ induziert *Teilraumtopologie* auf Y die Familie

$$\mathcal{T}|_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}.$$

Dass $\mathcal{T}|_Y$ tatsächlich eine Topologie bildet überlassen wir dem Leser zur Übung. Für $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ist in der euklidischen Topologie

$$\overline{[0,1)} = [0,1], \quad [0,1)^\circ = (0,1), \quad \partial[0,1) = \{0,1\},$$

aber bezüglich der induzierten Teilraumtopologie auf $[0,1)$ haben wir

$$\overline{[0,1)} = [0.1), \quad [0,1)^\circ = [0,1), \quad \partial([0,1)) = \emptyset,$$

da $[0,1)$ in der Teilraumtopologie natürlich offen und abgeschlossen ist. Insbesondere sehen wir, dass eine Teilmenge $U \subset A \subset X$, die bezüglich der Teilraumtopologie auf A offen ist, nicht notwendigerweise in X offen sein muss.

Satz 1.27. *Seien X und Y topologische Räume und $A \subset Y$. Dann ist die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow Y$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie auf A. Weiter ist eine Funktion $f\colon X \longrightarrow A$ genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ f\colon X \longrightarrow A \hookrightarrow Y$ stetig ist.*

Beweis. Eine Teilmenge $V \subset A$ ist genau dann offen, wenn es eine in Y offene Menge U gibt mit $V = U \cap A = \iota^{-1}(U)$. Insbesondere ist in diesem Fall $f^{-1}(V) = (\iota \circ f)^{-1}(U)$ offen. □

Betrachten wir als Beispiel für eine stetige Funktion die Projektion $\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\pi_1(x,y) = x$. Um direkt zu zeigen, dass π_1 stetig ist, genügt es nach Satz 1.17 zu zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ der Zylinder $\pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist. Sei dafür $(a,b) \in \pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ und setze $\delta = \varepsilon - |x-a|$. Für $(c,d) \in B_\delta((a,b))$ haben wir dann

$$\begin{aligned} |c-x| \leq |c-a| + |x-a| &\leq \sqrt{|c-a|^2 + |d-b|^2} + |x-a| < \\ &< \delta + |x-a| = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $(c,d) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$. Das genügt um zu sehen, dass $\pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist. Später werden wir die so genannte Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$ definieren und sehen, dass sie gleich der metrischen Topologie ist. Damit werden wir sofort sehen können, dass π_1 stetig sein muss.

Andere Beispiele für stetig Funktionen findet man leicht. Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und wähle auf Y die triviale Topologie. Dann ist f stetig, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ sind beide offen. Trägt X hingegen die diskrete Topologie und Y ist ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch jede Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig: jede Teilmenge von X ist offen, und damit insbesondere auch $f^{-1}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset Y$.

Nachdem wir gesehen haben, dass unser topologischer Begriff von Stetigkeit mit dem vorherigen Begriff zwischen metrischen Räumen übereinstimmt, erhalten wir sofort alle stetigen Funktionen zwischen metrischen Räumen als Beispiele stetiger Funktionen. Konkreter ist etwa die Funktion $\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ bezüglich der euklidischen Topologie stetig. Besser noch, tanh hat eine inverse Funktion $\operatorname{atanh}\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, die ebenso stetig ist. Man sagt, tanh ist ein Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und $(-1,1)$.

Definition 1.28. Eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn eine weiter stetige Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Das Thema dieses Kurses wird sein, Methoden kennenzulernen, mit denen man erkennen kann ob zwei topologische Räume homöomorph sein können. Als erstes Beispiel betrachte die Exponentialfunktion $e^{i-}\colon [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 = \{z : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Der Einheitskreis S^1 trägt hier wie das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$ die Teilraumtopologie. Diese Abbildung ist stetig und bijektiv, es gibt also eine Umkehrabbildung $\arg\colon S^1 \longrightarrow [0, 2\pi)$. Diese Umkehrabbildung ist aber nicht stetig! Zum Beispiel ist $\arg^{-1}([0, \pi))$ nicht offen in S^1, obwohl $[0, \pi) = (-1, \pi) \cap [0, 2\pi)$ in $[0, 2\pi)$ offen ist: Jeder offene Ball um $1 = e^{i0} \in S^1$ enthält ein $z \in S^1$ mit $\mathrm{Im}(z) < 0$, aber $\arg^{-1}([0, \pi))$ enthält nur solche $z \in S^1$ mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

Wir werden später sehen, dass nicht nur e^{i-} kein Homöomorphismus zwischen $[0, 2\pi)$ und S^1 ist, sondern dass es überhaupt keinen solchen Homöomorphismus geben kann.