Wiederholung

Def.: Eine stetige Abbildung $p: E \to B$ heißt lokal trivial mit typischer Faser F, wenn es für jeden Punkt $b \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ von b mit einem Homöomorphismus

$$\varphi: U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$$

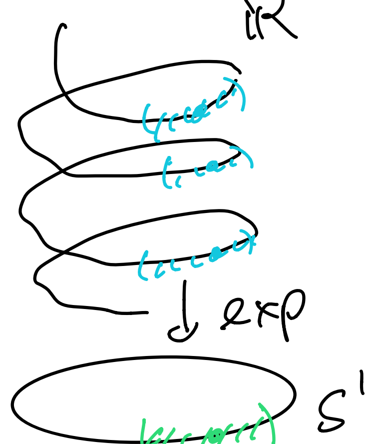
gibt, so dass

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_U"'] & p^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(U)}"] & E \arrow[d, "p"] \\
& U \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

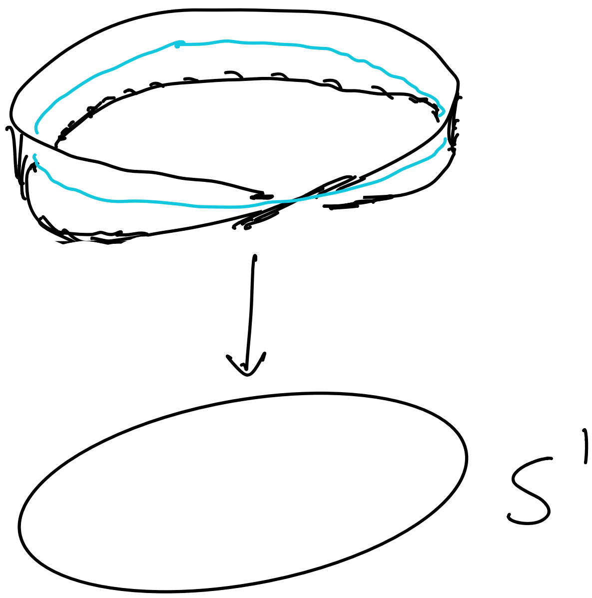
Beispiele: • $\exp: \mathbb{R} \to S^1$

Überlagerung



- Möbiusband (ohne Rand) lokal trivial mit typischer Faser $(0,1)$

keine Überlagerung



Def.: Eine Überlagerung $p: E \to B$ ist eine lokal triviale Abbildung mit diskreter Faser.

Gesehen: "Schöne" Gruppenoperation $G \times E \to E$ liefert eine Überlagerung $E \to E/G$.

Was haben wir benutzt um $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ zu bestimmen mit $\exp: \mathbb{R} \to S^1$?

Wir haben für Schleifen γ in S^1 Lifts betrachtet:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\gamma'"] \arrow[r, "\gamma"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

und dann definiert

Faser von exp

$$\pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$
$$[\gamma] \mapsto \gamma'(1)$$

Def Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung und $f: X \to B$ stetig. Ein Lift von f nach E ist eine stetige Abbildung $f': X \to E$, so dass

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(Achtung: Manchmal fordert man nur, dass es eine Homotopie $p \circ f' \simeq f$ gibt.)

Lemma Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung, $f: X \to B$ stetig und $x_0 \in X$. Angenommen $f', f'': X \to E$ sind Lifts von f und $f'(x_0) = f''(x_0)$. Dann

X zusammenhängend $\Rightarrow f' = f''$

Beweis Betrachte $A = \{x \in X : f'(x) = f''(x)\}$ $\ni x_0$

Wir zeigen, dass A sowohl offen als auch abgeschlossen in X ist.

A offen: Sei $x \in A$ und $\varphi: V \times F \to p^{-1}(V)$ eine lokale Trivialisierung über einer Umgebung V von $f(x)$.

$$\begin{tikzcd}
V\times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_V"'] & p^{-1}(V) \arrow[r] \arrow[dl, "p"] & E \arrow[d] \\
V \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, shift left, "f'"] \arrow[ur, shift right, "f''"'] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Dann ist $\varphi^{-1}(f'(x)) = \varphi^{-1}(f''(x)) \in V\times\{a\}$.

für ein $a\in F$.

F diskret $\Rightarrow$ $V\times\{a\} \subset V\times F$ ist offen

$\varphi^{-1}\circ f'$ und $\varphi^{-1}\circ f''$ stetig

$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung $U\subset X$ von x

mit $(\varphi^{-1}\circ f')(U) \subset V\times\{a\}$

und $(\varphi^{-1}\circ f'')(U) \subset V\times\{a\}$

$$\begin{tikzcd}
 & V\times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_V"] & p^{-1}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(V)}"] & E \arrow[d, "P"] \\
V\times\{a\} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\cong"'] & & V \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'|_U = f''|_U}, \text{ denn für } y \in U$$

$$(p\circ\varphi)\Big(\overbrace{\varphi^{-1}(f'(y))}^{\in V\times\{a\}}\Big) = p(f'(y)) = f(y)$$

$$\shortparallel$$

$$(p\circ\varphi)\big(\varphi^{-1}(f''(y))\big) = p(f''(y)) = f(y)$$

$(p\circ\varphi)|_{V\times\{a\}}$ ist ein Homöomorphismus

$$V\times\{a\} \longrightarrow V$$

D.h. $\varphi^{-1}(f'(y)) = \varphi^{-1}(f''(y)) \Rightarrow f'(y) = f''(y)$.

$$f'|_U = f''|_U \Rightarrow x \in U \subset A$$

offen

$x \in A$ war beliebig $\Rightarrow$ A offen. $\lrcorner$

A abgeschlossen: Für $x \in X \setminus A$ gibt es wie oben eine Umgebung $U \subset X$ von x mit

- $V \ni f(x)$ Umgebung mit einer lokalen Trivialisierung $\varphi: V \times F \to p^{-1}(V)$
- $\varphi^{-1}(f'(U)) \subset V \times \{a\}$
- $\varphi^{-1}(f''(U)) \subset V \times \{b\}$
- $a \neq b$.

$\ulcorner$

$$\varphi^{-1}(f'(x)) \neq \varphi^{-1}(f''(x))$$

aber $(p \circ \varphi)(\varphi^{-1}(f'(x))) = (p \circ \varphi)(\varphi^{-1}(f''(x)))$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ & f(x) & \end{matrix}$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(f'(x)) \in V \times \{a\}$ $\quad \varphi^{-1}(f''(x)) \in V \times \{b\}$

$a \neq b$

$\lrcorner$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(f'(y)) \neq \varphi^{-1}(f''(y))$$

für $y \in U$.

$$\Rightarrow \quad U \subset X \setminus A$$

$x \in X \setminus A$ beliebig $\Rightarrow$ $X \setminus A$ offen, d.h. A abgeschl.

A offen und abgeschlossen, $x_0 \in A$

$A \subset X$ ← zusammenhängend

$$\Rightarrow \quad A = X, \text{ d.h. } f' = f''. \qquad \square$$

Satz Überlagerungen $p: E \to B$ haben die **Homotopieliftungseigenschaft**:

Für jede Homotopie $H: X \times I \longrightarrow B$ von $f: X \to B$ nach $g: X \to B$ und jeden Lift $f': X \longrightarrow E$ von f existiert eine eindeutig bestimmte Homotopie $H': X \times I \longrightarrow E$, die ein Lift von H ist, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "id \times 0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "H'"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Insbesondere ist $H' \circ (id \times 1)$ ein Lift von g.

<u>Erinnerung</u> (Lebesgue Lemma)

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X.

Dann existiert eine Lebesguezahl $\lambda > 0$, so dass für $E \subset X$ gilt

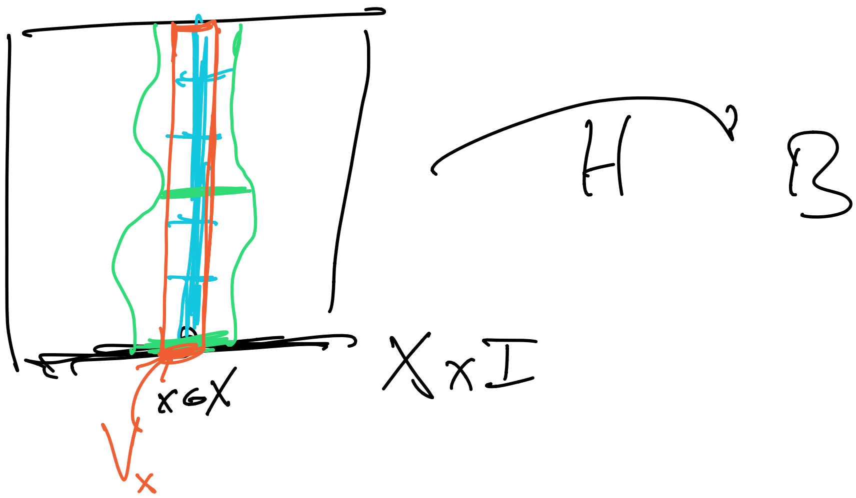
$$\operatorname{diam}(E) \leq \lambda \Rightarrow \exists i \in I.\ E \subset U_i.$$

<u>Beweis</u> Terminologie: $U \subset B$ zulässig, wenn $p: E \to B$ eine lokale Trivialisierung über U hat.

Sei $x \in X$ und $I_x = \{x\} \times [0,1] \subset X \times I$.

Die Überdeckung $\{H^{-1}(U) \cap I_x : U \text{ zulässig}\}$ hat eine Lebesguezahl $\lambda > 0$.

Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ eine Partition von $[0,1]$ mit $t_i - t_{i-1} < \lambda$. Dann gibt es für jedes $0 \leq i < n$ ein zulässiges $U_i \subset B$ mit $H(\{x\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.



Für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ existiert eine Umgebung

$V_{x,t} \subset X \times I$ von (x,t) mit $H(V_{x,t}) \subset U_i$.

Dann ist $\{V_{x,t} : (x,t) \in \{x\} \times I\}$ eine offene Überdeckung von $\{x\} \times I \subset X \times I$

$\{x\} \times I$ kompakt $\Rightarrow$ $\{x\} \times I \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_{x,s_j}$

für gewisse $s_1, \dots, s_k \in [0,1]$

Setze $V_x = \bigcap_{j=1}^{k} V_{x,s_j}$. Dann:

- V_x ist eine Umgebung von x in X
- Für jedes $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ist

$$H(V_x \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$$

für eine zulässige Teilmenge $U_i \subset B$.

Wir konstruieren induktiv einen Lift H' von H über $V_x \times [0,1]$. $H'(y, 0) := f'(y)$.

Ang. $H'|_{V_x \times [0,t_i]}$ ist konstruiert.

Sei $\varphi: U_i \times F \longrightarrow p^{-1}(U_i)$ eine lokale Trivialisierung.

Für $a \in F$ sei $V_{x,a} = H'(-, t_i)^{-1}(\varphi(U_i \times \{a\})) \cap V_x$

$$p|_{\varphi(U_i \times \{0\})} = p_a : \varphi(U_i \times \{0\}) \xrightarrow{\cong} U_i$$

Definiere $H'|_{V_{x,a} \times [t_i, t_{i+1}]}(y,t) := p_a^{-1}(H(y,t))$

Wir haben $V_x = \coprod_{a \in F} V_{x,a}$ und deshalb

setzen sich diese Definition zusammen zu

$$H'|_{V_x \times [t_i, t_{i+1}]} : V_x \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow p^{-1}(U_i)$$

$\Rightarrow$ Wir haben $H'|_{V_x \times I} : V_x \times I \longrightarrow E$

konstruiert.

Wir haben für jedes $x \in X$ einen Lift

$H'_x : V_x \times I \longrightarrow E$ von H über $V_x \times I$.

Für $y \in V_x \cap V_{x'}$ haben wir $H'_x : \{y\} \times I \longrightarrow E$

$H'_{x'} : \{y\} \times I \longrightarrow E$

beides Lifts von H auf $\underbrace{\{y\} \times I}_{\text{zusammenhängend}}$.

Aber $H'_x(y,0) = f'(y) = H'_{x'}(y,0)$

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad H'_x|_{\{y\} \times I} = H'_{x'}|_{\{y\} \times I}$

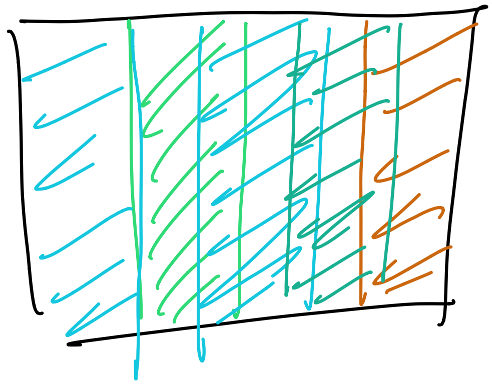
$y \in V_x \cap V_{x'}$ war beliebig

$\Rightarrow H'_x|_{V_x \cap V_{x'} \times I} = H'_{x'}|_{V_x \cap V_{x'} \times I}$

$\Rightarrow$ stetige Abbildung $H' : X \times I \longrightarrow E$

mit $H'|_{V_x \times I} = H'_x$

H' ist der gesuchte Lift. $\square$



Korollar $p: E \to B$ eine Überlagerung

(i) $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ und $\gamma: I \to B$ mit $\gamma(0) = b_0$

$\Rightarrow$ es existiert ein eindeutig bestimmter Lift γ':

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\gamma'"] & B
\end{tikzcd}$$

(ii) Seien $\gamma_0, \gamma_1: I \to B$ Wege in B mit einer Homotopie $H: I \times I \to B$ relativ $\{0,1\}$ von γ_0 nach γ_1.

Für jeden Lift $\gamma_0' : I \longrightarrow E$ von γ_0 existiert ein eindeutig bestimmter Lift $H' : I \times I \longrightarrow E$ von H, der eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ_0' zu einem Lift von γ_1 ist.

Insbesondere existiert ein Lift γ_1' von γ_1 mit $\gamma_1'(0) = \gamma_0'(0)$ und $\gamma_1'(1) = \gamma_0'(1)$.