Vorlesung 6, 17.11.2020

Wiederholung: Trennungsaxiome

- T_1: top. Raum X heißt T_1, wenn alle einpunktigen Mengen abg. sind

$\Uparrow$

- Hausdorff: Je zwei Punkte lassen sich durch disjunkte offene Mengen trennen:

$x \neq y \in X \Rightarrow \exists$ offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Uparrow$

- <u>regulär</u>: T_1 und $x \in X$, $A \subset X$ abg.

  $x \notin A \Rightarrow \exists$ offene Mengen $U, V \subset X$

  mit $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Uparrow$

- <u>normal</u>: T_1 und $A, B \subset X$ abg.

  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists$ offene Mengen $U, V \subset X$

  mit $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$

<u>Satz</u> (Urysohn-Tietze)

Es sind äquivalent:

(i) X ist normal

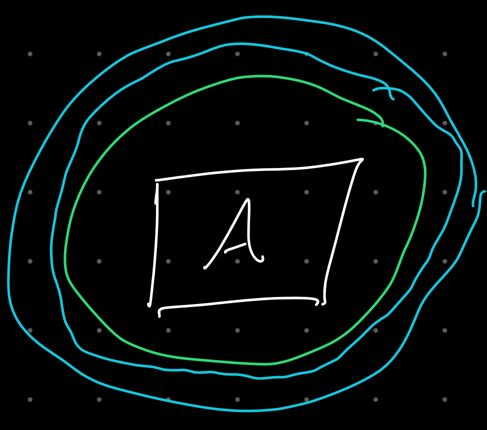
(ii) X ist T_1, $A, B \subset X$ abgeschlossen

$\Rightarrow \exists\ f : X \longrightarrow [0,1]$ stetig.

$f|_A = 0 \quad f|_B = 1$

(iii) X ist T_1 und für $A \subset X$ abgeschlossen mit $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig existiert eine stetige <u>Fortsetzung</u> $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$

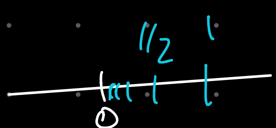
$$F|_A = f$$



<u>Beispiele</u>

- Hausdorff $\not\Rightarrow$ regulär

  Basis für eine Topologie auf $\mathbb{R}$:



$$(a,b) \text{ und } (a,b) \setminus \underbrace{\left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}}_{K}$$

$(a, b \in \mathbb{R})$

$\mathbb{R}$ mit der erzeugten Topologie: $\mathbb{R}_K$

Die Topologie auf $\mathbb{R}_K$ ist feiner als die euklidische

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_K$ Hausdorff

Beh.: $\mathbb{R}_K$ ist nicht regulär

$K \subset \mathbb{R}_K$ ist abgeschlossen und $0 \notin K$

Ang. es gäbe offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}_K$ mit $0 \in U$, $K \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

o.E. sei U ein Basiselement

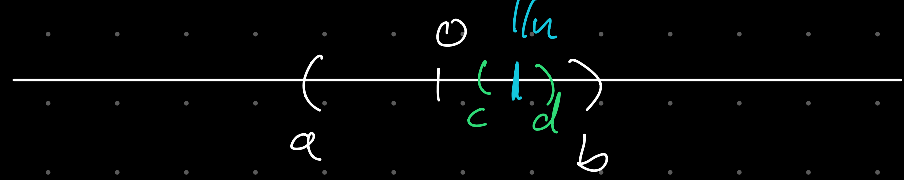
- $U = (a,b)$ ist unmöglich, weil $0 \in (a,b) \Rightarrow \exists N$ mit $\frac{1}{N} \in (a,b)$

$\Rightarrow$ $U = (a,b) \setminus K$ mit $a < 0 < b$

$\Rightarrow$ $\exists n$. mit $\frac{1}{n} \in (a,b) \Rightarrow \frac{1}{n} \in V$

$\Rightarrow$ $\exists (c,d) \subset V$ mit $1/n \in (c,d)$

$$\Rightarrow [(a,b) \setminus K] \cap (c,d) \neq \emptyset \quad ↯$$



- Produkt normaler Räume muss nicht normal sein!

Basis für eine Topologie auf $\mathbb{R}$:

$[a,b) \qquad a,b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ mit der erzeugten Topologie ist die Sorgenfreygerade $\mathbb{R}_{sf}$

$\mathbb{R}_{sf}$ ist normal: $A, B \subset \mathbb{R}_{sf}$ abg. $A \cap B = \emptyset$

Für jedes $b \in B$ wähle ein b' mit $[b,b') \subset \mathbb{R}_{sf} \setminus A$

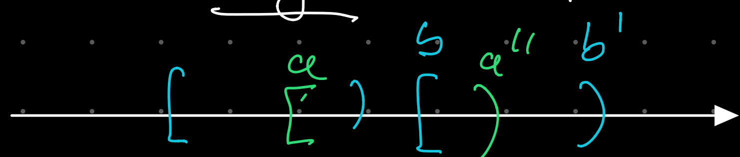
$\Rightarrow$ $V = \bigcup_{b \in B} [b, b')$ ist offen

mit $B \subset V$

Analog wähle für jedes $a \in A$ ein a'' mit $[a, a'') \subset \mathbb{R}_{sf} \setminus B$

$\Rightarrow$ $U = \bigcup_{a \in A} [a, a'')$ offen und $A \subset U$

<u>Ang.</u> $U \cap V \neq \emptyset$: $\exists\, a, b$ mit



$[a, a'') \cap [b, b') \neq \emptyset$

Das ist ein Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

<u>Behauptung</u> $\mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf} =: \mathbb{R}^2_{sf}$ ist nicht normal

<u>Schritt 1</u> $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2_{sf}$ ist dicht

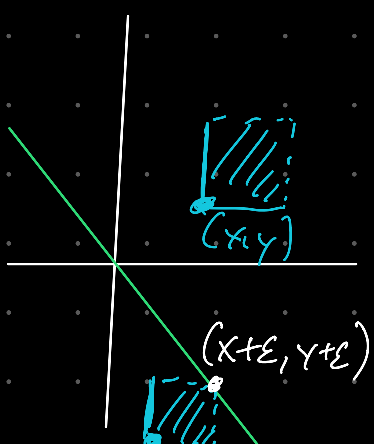
$\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^2_{sf}$ offen $\Rightarrow [a,b) \times [c,d) \subset U$

$[a,b) \times [c,d) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$ //

<u>Schritt 2</u> $\Delta' = \{ (x,-x) : x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2_{sf}$

ist abgeschlossen.

$(x,y) \subset \mathbb{R}^2_{sf}$, $x \neq -y$



- $x > -y$: $[x, x+1) \times [y, y+1) \subset \mathbb{R}^2_{sf} \setminus \Delta'$
- $x < -y$: $\varepsilon := -\frac{(x+y)}{2} > 0$

$\Rightarrow [x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon) \subset \Delta'^{c}$

<u>Schritt 3</u> Δ' ist diskret in der Teilraumtopologie: $\{(x,-x)\}$

$= \Delta' \cap [x, x+1) \times [-x, -x+1)$

Angenommen $\mathbb{R}^2_{sf}$ wäre normal.

Für $A \subset \Delta'$ ist A abgeschlossen in $\mathbb{R}^2_{sf}$ und es gäbe

$U_A, V_A \subset \mathbb{R}^2_{sf}$ offen mit

$$A \subset U_A \qquad \Delta' \setminus A \subset V_A$$

$$U_A \cap V_A = \emptyset$$

Definiere $\varphi: \{A \subset \Delta' : \emptyset, \Delta' \neq A\} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$,

$$A \longmapsto U_A \cap \mathbb{Q}^2$$

Beh.: φ ist injektiv:

$A, B \subset \Delta'$, $A \neq B \Rightarrow z \in A, z \notin B$

$\Rightarrow z \in U_A,\ z \in \Delta' \setminus B \subset V_B$

$\Rightarrow U_A \cap V_B \neq \emptyset$, offen in $\mathbb{R}^2_{sf}$

$$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}^2 \cap U_A \cap V_B \rightsquigarrow q \notin U_B$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_A \cap \mathbb{Q}^2}_{=\psi(A)} \neq \underbrace{U_B \cap \mathbb{Q}^2}_{=\psi(B)}$$

ψ kann aber aus Kardinalitätsüberlegungen nicht injektiv

Insbesondere: $\mathbb{R}^2_{sf}$ ist nicht metrisierbar

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_{sf}$ ist nicht metrisierbar aber normal.

Zusammenhang

Def $X \neq \emptyset$ ist **zusammenhängend**, wenn

für $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$
und $U \cap V = \emptyset$

schon $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Alternativ:

$X \neq \emptyset$ ist **unzusammenhängend**, wenn

es eine nicht triviale offene

und abgeschlossene Menge $A \subset X$ gibt.

$A \neq \emptyset, A \neq X$

$X \neq \emptyset$ ist **wegzusammenhängend** wenn

es für alle $x, y \in X$ eine stetige

Funktion $f: [0,1] \longrightarrow X$ gibt mit

$f(0)=x$ $f(1)=y$ Weg von x nach y

Satz (Zwischenwertsatz)

X zusammenhängend, $f: X \to Y$ stetig

$\Rightarrow$ $f(X)$ ist zusammenhängend in (der Teilraumtopologie)

Bew.: $U, V \subset Y$ offen

mit $U \cap V = \emptyset$ und $f(X) \subset U \cup V$.

$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{offen}} = X$

$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$

$\underset{X \text{ zshgd.}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{f^{-1}(U) = \emptyset}_{\text{o.E. dieser Fall}}$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$

$\Rightarrow \quad f(X) \cap U = \emptyset$. $\square$

<u>Satz</u> $M \subset X$ zusammenhängend

$M \subset N \subset \overline{M}$

Dann ist N auch zusammenhängend

<u>Bew.:</u> $U, V \subset X$ offen, $U \cap V = \emptyset$,

$U \cup V \supset N \supset M$

$\underset{M \text{ zshgd.}}{\Longrightarrow}$ o.E. $U \cap M = \emptyset$

$M \subset \underbrace{X \setminus U}_{\text{abgeschlossen}} \Rightarrow N \subset \overline{M} \subset X \setminus U$

$\Rightarrow U \cap N = \emptyset$ $\square$

<u>Lemma</u> $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X, $u_n \in U \subset X$

$u_n \longrightarrow u \Rightarrow u \in \overline{U}$.

<u>Bew.:</u> Ang. $A \supset U$ abgeschlossen in X.

Wäre $u \notin A \Rightarrow u \in \underbrace{X \setminus A}_{\text{offen}}$

$\Rightarrow \exists n.\ u_n \in X \setminus A$ ↯ $u_n \in U$.

$\Rightarrow u \in A. \Rightarrow u \in \bigcap_{\substack{A \supset U \\ A \text{ abg.}}} A = \overline{U}$. $\square$

<u>Satz</u> In $\mathbb{R}$ sind Intervalle zusammenhgd.

<u>Bew.:</u> Wegen vorigem Satz können wir annehmen, dass das Intervall von der Form (a,b) ist.

Sei $U, V \subset (a,b)$ offen, $U \cap V = \emptyset$

$(a,b) = U \cup V$.

<u>Ang.</u> $U \neq \emptyset \neq V$. Setze $v = \sup V$

Dann gibt $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n \in V$

und $v_n \longrightarrow v$

$V = (a,b) \setminus U \Rightarrow V$ ist abgeschlossen in (a,b)

$\Rightarrow v \in V \Rightarrow (v,b) \subset U$

Aber dann gibt es eine Folge

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \in (v,b) \subset U$ und

$u_n \longrightarrow v$

$U = (a,b) \setminus V$ ist abgeschlossen in (a,b)

$\Rightarrow v \in U$ $\lightning$ $U \cap V = \emptyset$. $\square$

<u>Satz</u> X wegzusammenhgd. $\Rightarrow X$ zusammenhgd.

<u>Bew.:</u> <u>Ang.</u> $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$

und $U \cap V = \emptyset$

aber $U \neq \emptyset \neq V$,

etwa $u \in U$, $v \in V$

$\underset{X \text{ wegzshgd.}}{\Longrightarrow}$ $\exists f: [0,1] \longrightarrow X$ stetig

mit $f(0) = u$, $f(1) = v$

Dann ist $\overset{M}{\overbrace{f([0,1])}}$ ist zusammenhängend

Aber $(M \cap U) \cap (M \cap V) = \emptyset$

$(M \cap U) \cup (M \cap V) = M$

$M \cap U \ni u$ $v \in M \cap V$

$\lightning$ zu M zshgd. $\square$

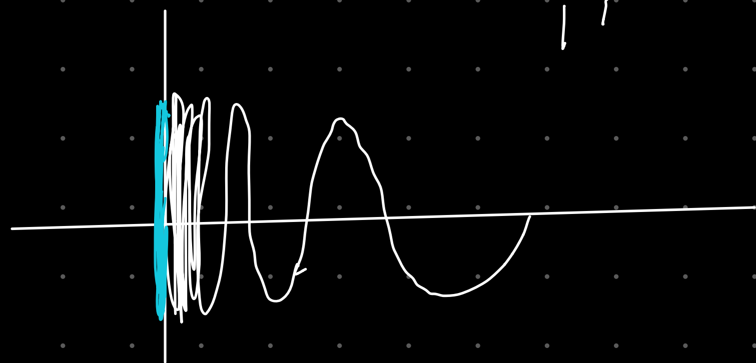
Wir haben:

"X zusammenhängend"

$\Longleftarrow$ "X weg zusammenhängend"

<u>Beispiel</u> „$\Longrightarrow$" gilt nicht

$$X = \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) : \underbrace{x \in (0,1]\}}_{\Gamma} \cup \{0\} \times [-1,1]$$



<u>Beh.:</u> X ist zusammenhängend

<u>Bew.:</u> Γ ist wegzshgd $\Rightarrow$ Γ zshgd.

$X = \overline{\Gamma}$ ist also auch zshgd.

<u>Beh.:</u> X ist nicht wegzshgd:

Es gibt keine stetige Funktion

$f : [0,1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = (0,0)$

$f(1) = (1, \sin(1))$ //

<u>Def</u> X ist ein top. Raum

$x \sim y \iff \exists\, f:[0,1] \to X$ stetig

$f(0)=x \quad f(1)=y$

(*) Das ist eine Äquivalenzrelation!

$\pi_0(X) = X/\sim$ die Menge der Wegzusammenhangskomp.

$\#\pi_0(X)$ ist eine Homöomorphie-invariante:

Wenn $X \xrightarrow{\varphi} Y$ Homöomorphismus,

dann $\varphi_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$

$[x]_\sim \longmapsto [\varphi(x)]_\sim$

<u>wohldefiniert</u>: $x \sim y$ entlang $f:[0,1]\to X$

dann $\varphi\circ f: [0,1] \to Y$ ein

Weg von $f(x)$ nach $f(y)$

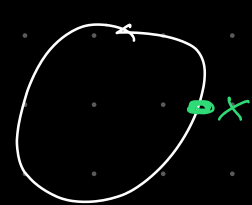
und φ_* ist bijektiv mit Inversen

$(\varphi^{-1})_*$

Insbesondere $\# \pi_0(X) = \# \pi_0(Y)$

<u>Beispiel</u> $[0, 2\pi) \not\cong S^1$

$S^1 \setminus \{x\}$ ist immer wegzusammenhgd.



aber $[0, 2\pi) \setminus \{\pi\} = [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

ist nicht zusammenhängend

Gäbe es einen Homöomorphismus

$\varphi : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$, dann wäre

$$\varphi|_{[0,2\pi)\setminus\{\pi\}} : [0,\pi)\cup(\pi,2\pi) \longrightarrow S^1\setminus\{\varphi(\pi)\}$$

ein Homöomorphismus.

Aber $\#\pi_0(S^1\setminus\{\varphi(\pi)\}) = 1$

$\#\pi_0([0,\pi)\cup(\pi,2\pi)) = 2$

$\neq$ $\lightning$