Klassifikationssatz für Überlagerungen

Für B wegzusammenhgd., lokal wegzshgd und semilokal einfach zshgd. ist

$$\mathrm{fib}_b : \mathrm{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B,b)^{op}\text{-}\mathrm{Set}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd} \longmapsto p^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{\varphi|_{p^{-1}(\{b\})}} q^{-1}(\{b\})$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Zusammenhgde Überlagerungen entsprechen transitiven $\pi_1(B,b)^{op}$-Operationen.

<u>Def.</u>: Gegeben Funktoren $F, G : C \longrightarrow D$ ist eine natürliche Transformation η von F nach G:

für jedes Objekt $x \in C$ ein Morphismus

$$\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$$

so dass für jeden Pfeil $\varphi : x \to y$ in C

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\
G(x) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(y)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein natürlicher Isomorphismus ist eine natürliche Transformation η, für die jeder Pfeil η_x ein Isomorphismus in D ist.

<u>Alternativ</u>: natürlicher Isomorphismus

$\Leftrightarrow$ invertierbare natürliche Transformation

Stichwort: 2-Kategorien

<u>Def.:</u> Eine Äquivalenz von Kategorien ist ein Funktor $F: C \longrightarrow D$ mit einem Pseudoinversen $G: D \to C$, so dass natürliche Isomorphismen $\eta: G \circ F \overset{\sim}{\Rightarrow} id_C$

$\varepsilon: F \circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} id_D$

existieren.

<u>Def.:</u> Ein Funktor $F: C \longrightarrow D$ heißt

- essentiell surjektiv, wenn für jedes Objekt $d \in D$ ein $c \in C$ existiert mit einem Isomorphismus $F(c) \xrightarrow{\sim} d$.

- volltreu, wenn für Objekte $c, c' \in C$ die Abbildung

$$\mathrm{Mor}(c,c') \xrightarrow{F} \mathrm{Mor}(F(c), F(c'))$$

bijektiv ist.

<u>Lemma</u> Ein Funktor $F: C \to D$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn F essentiell surjektiv und volltreu ist.

<u>Bew.:</u>

„$\Rightarrow$" essentiell surjektiv: Sei $G: D \to C$ ein Pseudoinverses mit $\eta: G\circ F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_C$

$$\varepsilon: F\circ G \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_D$$

Für $d \in D$ ist $F(G(d)) \xrightarrow[\varepsilon]{\sim} d$.

volltreu: η ist eine natürliche Transf.:

Für $x \xrightarrow{\varphi} y$ in C ist

$$\begin{tikzcd} G(F(x)) \arrow[r, "G(F(\varphi))"] \arrow[d, "\eta_x"', "\cong"] & G(F(y)) \arrow[d, "\eta_y", "\cong"'] \\ x \arrow[r, "\varphi"'] & y \end{tikzcd}$$

kommutativ.

D.h.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_C(x,y) \arrow[r, "F"] & \mathrm{Mor}_D(F(x),F(y)) \arrow[r, "G"] & \mathrm{Mor}_C(G(F(x)),G(F(y))) \arrow[d] \\ & & \mathrm{Mor}_C(x,y) \end{tikzcd}$$

$\psi \longmapsto \eta_y \circ \psi \circ \eta_x^{-1}$

ist die Identität. D.h. $\uparrow$ ist injektiv.

Surjektivität geht ähnlich.

„$\Leftarrow$" Sei $F: C \longrightarrow D$ essentiell surj. und volltreu.

Wähle für jedes $d \in D$ ein $a_d \in C$ mit einem Isomorphismus $\psi_d : F(a_d) \xrightarrow{\cong} d$

Definiere einen Funktor $G: D \longrightarrow C$ durch $G(d) := a_d$ für $d \in D$

und für $\varphi: d \longrightarrow d'$ setze

$$G(\varphi) := F^{-1}\left(\psi_{d'}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_d\right)$$

$$\begin{tikzcd}
G(d) \arrow[r, "G(\varphi)"] \arrow[d, equal] & G(d') \arrow[d, equal] & & F(G(d)) \arrow[r, "F(G(\varphi))"] \arrow[d, equal] & F(G(d')) \arrow[d, equal] \\
a_d \arrow[r] & a_{d'} \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\longmapsto}"] & {} & F(a_d) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_d"', "\cong"] & F(a_{d'}) \arrow[d, "\psi_{d'}"] \\
 & & & d \arrow[r, "\varphi"] & d'
\end{tikzcd}$$

Dann ist automatisch $\psi : F \circ G \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{id}_D$ eine natürliche Transformation.

Funktorialität von G sieht man durch nachrechnen; z.B.

$$G(\mathrm{id}_d) = F^{-1}(\psi_d^{-1} \circ \mathrm{id}_d \circ \psi_d) = F^{-1}(\mathrm{id}_d)$$
$$= \mathrm{id}_{d_d} = \mathrm{id}_{G(d)}.$$

Was noch fehlt ist eine natürliche Transformation $\eta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_C$

Für $c \in C$ definiere

$$\eta_c := F^{-1}(\underbrace{\psi_{F(c)}}_{F(G(F(c))) \to F(c)}) : G(F(c)) \longrightarrow c$$

Um zu sehen, dass

$$\begin{tikzcd}
G(F(c)) \arrow[r, "G(F(\varphi))"] \arrow[d, "\eta_c"'] & G(F(c')) \arrow[d, "\eta_{c'}"] \\
c \arrow[r, "\varphi"'] & c'
\end{tikzcd}$$

kommutiert, wende $F: \mathrm{Mor}(G(F(c)), c')$

$$\downarrow \cong$$

$$\mathrm{Mor}(F(G(F(c))), F(c'))$$

an:

$$\begin{tikzcd}
F(G(F(c))) \arrow[r, "F(G(F(\varphi)))"] \arrow[d, "\psi_{F(c)}"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "//"] & F(G(F(c'))) \arrow[d, "\psi_{F(c')}", "\cong"'] \\
F(c) \arrow[r, "F(\varphi)"'] & F(c')
\end{tikzcd}$$

Das kommutiert, weil ψ eine nat. Transf. definiert.

Bemerkung: Gegeben eine Gruppe G und eine G-Operation $G \circlearrowright M$ ist M eine disjunkte Vereinigung von Bahnen.

$$M = \coprod_{x} G.x \qquad x \text{ durchläuft Representanten für } M/G$$

Jedes $G.x$ ist eine Menge mit transitiver G-Operation.

Lemma Sei M eine Menge mit transitiver G-Operation und $x \in M$. Dann ist

$$\begin{aligned} G/G_x &\longrightarrow M \\ g\,G_x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

$h.gG_x := hgG_x$

eine äquivariante Bijektion.

<u>Beweis</u> Surjektiv und Äquivarianz sind klar.

Wohldefiniertheit: Ang. $gG_x = hG_x$

Dann ist $h^{-1}gG_x = G_x$, also

$h^{-1}g \in G_x$. Also $h^{-1}g.x = x$, d.h.

$$g.x = h.x.$$

Injektivität: $g.x = h.x \Rightarrow h^{-1}g.x = x$

$$\Rightarrow h^{-1}g \in G_x$$

$$\Rightarrow gG_x = hG_x. \qquad \square$$

Also ist jede transitive G-Operation von der Form G/H für eine Untergruppe

$H \subset G$.

D.h. Jede Menge M mit G-Operation

lässt sich als $\coprod_{i\in I} G/H_i$

für $H_i \subset G$ Untergruppen schreiben.

Konstruktion von Überlagerungen

Wir hatten schon gesehen, dass für G

eine Gruppe und $G \circlearrowright X$ eine Überlagerungs-

operation auf einem top. Raum X die Quotienten-

abbildung $X \longrightarrow X/G$

eine Überlagerung ist.

Def.: Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung.

$$\mathrm{Aut}(E|B) := \left\{ \text{Isomorphismen } \begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd} \text{ in } \mathrm{Cov}_B \right\}$$

ist die Gruppe der Decktransformation.

$\mathrm{Aut}(E|B)$ operiert von links auf E.

Lemma Wenn $p: E \to B$ eine zshgd. Überlagerung ist und B lokal zshgd. ist, dann ist $\mathrm{Aut}(E|B) \curvearrowright E$ eine Überlagerungsoperation.

Bew.: Sei $y \in E$ und $x = p(y)$. Wähle eine lokale Trivialisierung von p über einer Umgebung U von x, so dass U zshgd. ist. Dann ist $p^{-1}(U) = \coprod_{f \in F} U_f$ mit $F = p^{-1}(\{x\})$ und $y \in U_y$.

Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(E|B)$ und ang.

$$y' \in U_y \cap \phi(U_y)$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "///"] & B \end{tikzcd}$$

Also ist ϕ ein Lift von p entlang p und E ist zshgd.

<u>Beh.:</u> Wenn $y' \in U_y \cap \phi(U_y)$ hat

ϕ einen Fixpunkt.

Dann ist $\phi(z) = z$ für ein $z \in E$

und $id_E(z) = z$ und

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "id_E"] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd},$$

Wegen Eindeutigkeit von Lifts ist dann

$\phi = id_E$.

Zur Behauptung: $\phi(U_y) = U_f$

für ein $f \in F$.

Das folgt, weil

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$ kommutiert

und $p|U_f : U_f \to U$ ein Homöomorphismus ist. $\square$

<u>Def.:</u> Eine Überlagerung $p: E \to B$ heißt **Galoisch**, falls die induzierte Abbildung

$$E/\mathrm{Aut}(E|B) \xrightarrow{\bar{p}} B$$

ein Homöomorphismus ist.

<u>Lemma</u> Eine zshgd. Überlagerung $p: E \to B$ ist genau dann Galoisch, wenn $\mathrm{Aut}(E|B)$ transitiv auf <u>jeder</u> Faser $p^{-1}(\{b\})$. Das ist genau dann

der Fall, wenn $\mathrm{Aut}(E|B)$ schon transitiv auf einer Faser $\bar{p}^{-1}(\{b\})$ operiert.

<u>Bew.:</u> Die Menge $E/\mathrm{Aut}(E|B)$ ist die Menge von Orbits; also ist

$$\bar{p} : E/\mathrm{Aut}(E|B) \longrightarrow B$$

genau dann injektiv, wenn jeder Orbit gleich einer Faser ist.
Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Aut}(E|B)$ transitiv auf den Fasern operiert.

Wenn $\mathrm{Aut}(E|B)$ transitiv auf einer Faser operiert, dann ist

$$\bar{p}^{-1}(\{b\}) = \{\bar{e}\}$$

für ein $b \in B$.

Aber $\bar{p} : E/\mathrm{Aut}(E|B) \longrightarrow B$ ist automatisch eine Überlagerung (!)

Also sind alle Fasern von $\bar{p}$ homöomorph, also $\bar{p}$ injektiv. $\square$