Wiederholung:

$p: E \to B$ eine Überlagerung
$\phantom{p: E \to{}} \rotatebox{90}{$\in$}$
$\phantom{p: E \to{}} b$

Monodromieoperation

$\rightsquigarrow$ Gruppenoperation $\pi_1(B,b) \circlearrowleft p^{-1}(\{b\}) \ni x$

$[\gamma] \in \pi_1(B,b) \Rightarrow \exists$ Lift

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[dr, "\gamma"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

mit $\gamma'(0) = x$

Dann ist $x.[\gamma] = \gamma'(1) \in p^{-1}(\{b\})$

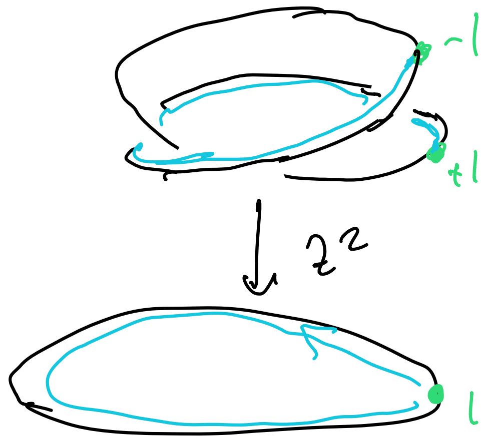
Das hängt nicht von der spezifischen Wahl von γ in $[\gamma]$ ab.

<u>Beispiele:</u> • $\exp: \mathbb{R} \to S^1$, Faser: $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \pi_1(S^1,1) &\to \mathbb{Z} \\ (x,n) &\mapsto x+n \end{aligned}$$

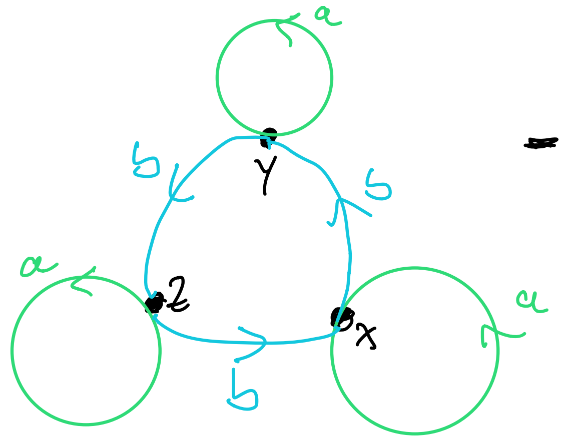
- $z^2 : S^1 \longrightarrow S^1$, Faser $\{\pm 1\}$

$$\{\pm 1\} \times \mathbb{Z} \cong \{\pm 1\} \times \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$(x, n) \longmapsto x \cdot (-1)^n$$



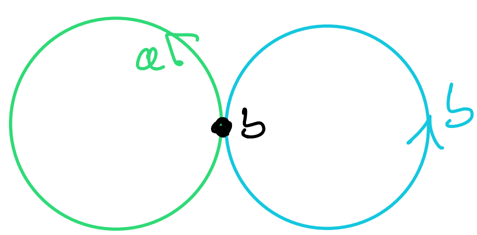
- $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid \ \rangle$

E



$\downarrow$

$S^1 \vee S^1$



- $a : \{x, y, z\} \to \{x, y, z\}$
  - $x \longmapsto x$
  - $y \longmapsto y$
  - $z \longmapsto z$
- $b : \{x, y, z\} \to \{x, y, z\}$
  - $x \longmapsto y$
  - $y \longmapsto z$
  - $z \longmapsto x$

Definition G eine Gruppe

Kategorie G-Set: Objekte: Mengen X mit einer G-Operation

$$G \circlearrowright X$$

Pfeile: G-äquivariante Abbildungen

$f: X \longrightarrow Y$ ist G-äquivariant, wenn

$$f(g\cdot x) = g\cdot f(x)$$

Definition Ein Morphismus von Überlagerungen

$p: E \longrightarrow B$, $q: E' \longrightarrow B$ ist eine stetige

Abbildung $E \xrightarrow{\varphi} E'$ so dass

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert

Kategorie Cov_B:

Objekte: Überlagerungen $p: E \to B$

Pfeile: Morphismen von Überlagerungen

Lemma Ein Morphismus $\varphi: E \to E'$ mit $q \circ \varphi = p$ ($p: E \to B$, $q: E' \to B$)

von Überlagerungen induziert eine

$\pi_1(B,b)^{op}$-äquivariante Abbildung

$$\varphi_\#: p^{-1}(\{b\}) \longrightarrow q^{-1}(\{b\})$$
$$x \longmapsto \varphi(x)$$

Beweis z.z. $\varphi_\#(x.[\gamma]) = \varphi_\#(x).[\gamma]$

für $x \in p^{-1}(\{b\})$ und $[\gamma] \in \pi_1(B,b)$

Sei $\gamma': I \to E$ ein Lift von γ entlang

p mit $\gamma'(0) = x$. Dann ist $x.[\gamma] = \gamma'(1)$

und $\varphi\circ\gamma' : I \longrightarrow E'$ ist ein Lift von γ

entlang q mit $(\varphi\circ\gamma')(0) = \varphi(x) = \varphi_\#(x)$

Also: $\varphi_\#(x.[\gamma]) = \varphi_\#(\gamma'(1)) = \varphi(\gamma'(1))$

$$= (\varphi\circ\gamma')(1) = \varphi_\#(x).[\gamma] \quad \square$$

Wir können jetzt ein Funktor

$$fib_b : Cov_B \longrightarrow \pi_1(B,b)^{op}\text{-}Set$$

$$\begin{array}{ccc} p: E \to B & \longmapsto & p^{-1}(\{b\}) \circlearrowleft \pi_1(B,b) \\ \varphi \downarrow \quad \| & & \varphi_\# \downarrow \\ q: E' \to B & \longmapsto & q^{-1}(\{b\}) \circlearrowleft \pi_1(B,b) \end{array}$$

<u>Definition</u> Seien C, D Kategorien und

$F, G : C \longrightarrow D$. Eine natürliche

Transformation $\eta : F \Rightarrow G$ besteht aus Pfeilen $\eta_c : F(c) \longrightarrow G(c)$ in D

so dass für jeden Pfeil $c \xrightarrow{\varphi} c'$ in C

kommutiert

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\eta_c"'] & F(c') \arrow[d, "\eta_{c'}"] \\ G(c) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(c') \end{tikzcd}$$

Notation

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & D \end{tikzcd}$$

<u>Beispiele</u>

- Identitätstransformation id_F
- Grp Kategorie von Gruppen

  dann gibt es eine natürliche Transformation

$$\begin{tikzcd} Grp \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "(-)^{op}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & Grp \end{tikzcd}$$

Für $G \in \mathrm{Grp}$ sei

$$\eta_G : G \longrightarrow G^{op}$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

$$\ulcorner\ \eta_G(g \cdot h) = (gh)^{-1} = h^{-1} g^{-1}$$
$$= \eta_G(g) \cdot^{op} \eta_G(h)\ \lrcorner$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_G"'] & H \arrow[d, "\eta_H"] \\
G^{op} \arrow[r, "\varphi^{op}"'] & H^{op}
\end{tikzcd}$$

$$g \longmapsto \varphi(g)$$
$$g \longmapsto g^{-1} \qquad \varphi(g) \longmapsto \varphi(g)^{-1}$$
$$g^{-1} \longmapsto \varphi(g^{-1})$$
$$\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$$

<u>Definition</u> Eine natürliche Transformation

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & D
\end{tikzcd}$$

ist ein natürlicher Isomorphismus

falls für jedes $c \in C$ die Komponente η_c ein Isomorphismus in D ist.

<u>Definition</u> Ein Funktor $F: C \to D$ ist eine Äquivalenz von Kategorien (mit Quasi-inversen $G: D \to C$), falls natürliche Isomorphismen $\eta: F \circ G \xRightarrow{\simeq} \mathrm{id}_D$

$$\varepsilon: G \circ F \xRightarrow{\simeq} \mathrm{id}_C$$

existieren.

<u>Beispiel</u> • $(-)^{op}: Grp \to Grp$ ist eine Äquivalenz von Kategorien mit Quasiinversen $(-)^{op}$.

- Sei Mat_k folgende Kategorie

Objekte: natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$

Pfeile: $n \longrightarrow m$ Matrizen in $k^{m \times n}$

Komposition ist Matrizenmultiplikation

$$\mathrm{Mat}_k \longrightarrow \mathrm{BFinVect}_k$$

endlich dimensionale Vektorräume mit gewählter Basis

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "M"'] & k^n \arrow[d, "x \mapsto M \cdot x"] \\ m \arrow[r, mapsto] & k^m \end{tikzcd}$$

Lineare Algebra I:

Das ist eine Äquivalenz von Kategorien.

(postponed)

Lemma Ein Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn

- F volltreu ist, und

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c,c') \xrightarrow[\text{Bijektion}]{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(c),F(c'))$$

- F essentiell surjektiv ist

Für jedes $d \in \mathcal{D}$ existiert ein $c \in \mathcal{C}$ und ein Isomorphismus

$$F(c) \cong d$$

__Beweis__ "$\Rightarrow$" $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Quasi-inverses

Dann ist $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, also

$$F(\underbrace{G(d)}_{\in \mathcal{C}}) \cong d \qquad \underline{\text{essentiell surjektiv}}$$

$$F: \mathrm{Mor}(c, c') \longrightarrow \mathrm{Mor}(F(c), F(c'))$$

surjektiv: $\varphi: F(c) \longrightarrow F(c')$

$$\Rightarrow G(\varphi): \begin{tikzcd} G(F(c)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & G(F(c')) \arrow[d, "\cong"] \\ c \arrow[r, "\psi"'] & c' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(\psi)"] \arrow[d, "\cong", "F(\mathrm{id} \to G \circ F)"'] & F(c') \arrow[d, "\cong"] \\ F(G(F(c))) \arrow[r, "F(G(\varphi))"'] \arrow[d, "\cong", "F \circ G \to \mathrm{id}"'] & F(G(F(c'))) \arrow[d, "\cong"] \\ F(c) \arrow[r, "\varphi"'] & F(c') \end{tikzcd}$$

Hier fehlt etwas ....

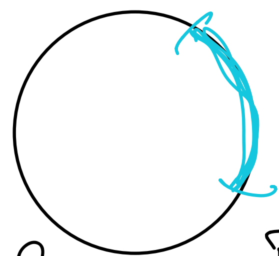
etc.

Satz Sei B ein wegzusammenhängender und semilokal einfach zshgd. topologischer Raum mit $b \in B$. Dann ist

$$\mathrm{fib}_b : \mathrm{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B,b)^{op}\text{-Set}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

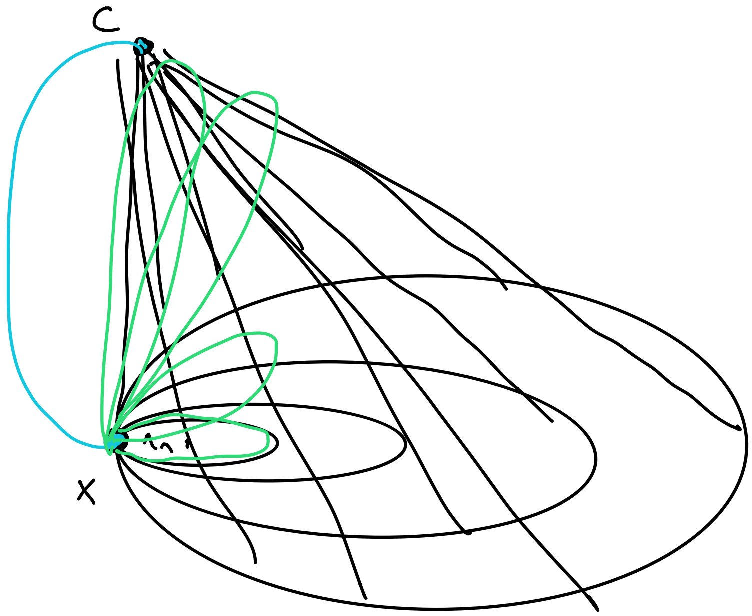
Außerdem entsprechen wegzusammenhängende Überlagerungen genau transitiven $\pi_1(B,b)^{op}$-Operationen.



Definition Ein topologischer Raum B heißt semilokal einfach zusammenhängend falls für jedes $b \in B$ eine Umgebung U von b in B existiert, sodass für jede Schleife γ in U bei b gilt

$e = i_*[\gamma] \in \pi_1(B, b) \qquad U \xhookrightarrow{i} B$

<u>Beispiel</u> C sei der Kegel auf den Hawaiian Earrings X: $(X \times [0,1]) / X \times \{1\}$



Sei $C' = C / \{x, c\}$

Dann ist C' semilokal einfach zshgd. aber nicht lokal einfach zshgd