Letzte Woche:

1) Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen zwei top Räumen X und Y.

Homotopie von f nach g

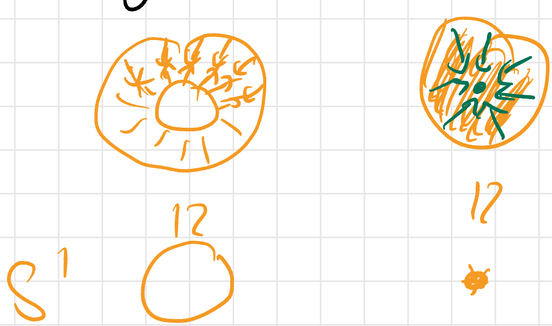
$$= H : X \times [0,1] \to Y \quad \text{stetig}$$

s.d. $$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x) \qquad \forall x \in X$$

Wenn es eine Homotopie von f nach g gibt schreiben wir $f \simeq g$ und sagen f ist **homotop** zu g und $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

2) Zwei top Räume sind **homotopie äquivalent** $X \simeq Y$ wenn es $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ stetig

s.d. $$f \circ g \simeq id_Y$$ und $$g \circ f \simeq id_X$$



Ein topologischer Raum X mit $X \simeq pt$ heißt **zusammenziehbar**

3) Homotopiekategorie $hTop = \begin{cases} \text{Objekte} = \text{top Räumen} \\ \text{Morphismen: } Mor(X,Y)/_{\simeq} \end{cases}$

Stetige Abbildungen mod Homotopie

4) Eine **Homotopieinvariante** ist ein Funktor $F: hTop \to C$

Kategorie

Bsp: $\pi_0 : hTop \to Set$

$$X \mapsto \pi_0(X)$$

Insbesondere wenn $X \simeq Y$ dann $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$

Heute lernen wir eine weitere Homotopieinvariante π_1 kennen.

Def Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum.
Eine **Homotopie** von $f: X \to Y$ nach $g: X \to Y$ **relativ A** ist eine Homotopie $H: X \times [0,1] \to Y$ von f nach g mit

$$H(a,t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A.$$

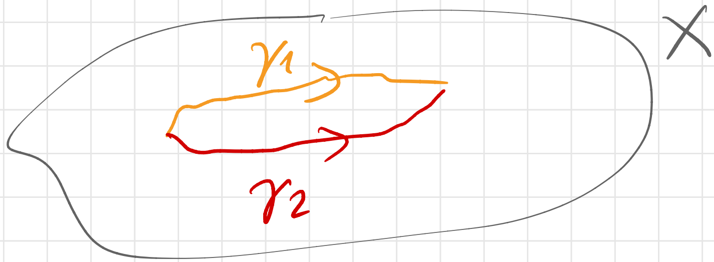
Notation: $f \simeq_A g$

Bemerkung: $\simeq_A$ ist natürlich auch eine Äquivalenzrelation.

Wege:

Zur Erinnerung: Ein **Weg** ist eine stetige Funktion $\gamma: [0,1] \to X$ ← top Raum.
Wir sagen, zwei Wege
$\gamma_1 : [0,1] \to X$
und $\gamma_2 : [0,1] \to X$
sind **homotop** $\gamma_1 \simeq \gamma_2 :\Leftrightarrow \gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2$

wenn sie homotop relativ $\{0,1\}$ sind.



Notation: $I := [0,1]$

Wir bezeichnen mit $[\gamma]$ die Homotopieklassen von $\gamma: I \to X$ (relativ $\{0,1\}$).

Beispiel: $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtop

Seien $\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Wege

$\gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$

Dann ist $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.

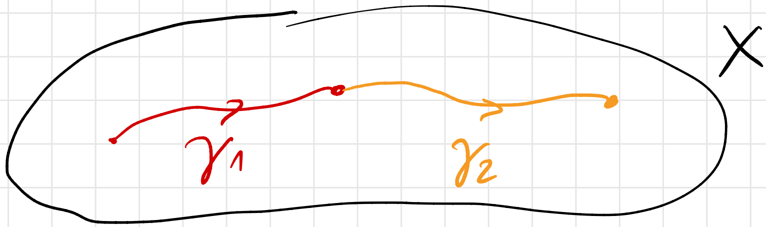
F: Beispiel für eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_2 (relativ $\{0,1\}$)

z.B. $H: I \times I \to \mathbb{R}^n$

$$H(s,t) = (1-t)\gamma_1(s) + t\gamma_2(s)$$

$\Rightarrow \quad H(s,0) = \gamma_1(s)$

$H(s,1) = \gamma_2(s)$



Def: Verknüpfung von Wegen:

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ Wege

mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

$$\gamma_1 * \gamma_2 (s) := \begin{cases} \gamma_1(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Das ist wieder ein Weg.

Lemma 1: Sei X ein top Raum

und $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ mit

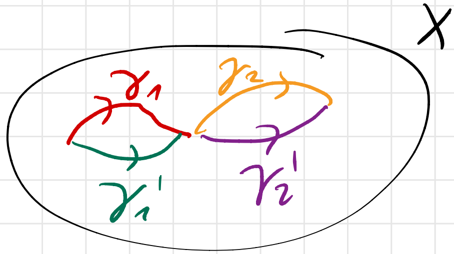
$\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

Außerdem seien $\gamma_1', \gamma_2' : I \to X$

mit $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$, $\gamma_2 \simeq \gamma_2'$ (relativ $\{0,1\}$)

Dann gilt

$$\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2'.$$



Insbesondere ist die Verknüpfung von Homotopieklassen

$$\circ : ([\gamma_1], [\gamma_2]) \longmapsto [\gamma_1 * \gamma_2]$$

wohldefiniert.

Notation: $[\gamma_1] \circ [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$

<u>Beweis:</u> Sei $H : I \times I \to X$ eine Homotopie von γ_1 nach γ_1'.

Wir definieren

$$H' : I \times I \longrightarrow X$$

$$H'(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Behauptung: H' ist eine Homotopie von $\gamma_1 * \gamma_2$ nach $\gamma_1' * \gamma_2$.

Bew: $H'(s,0) = \begin{cases} H(2s,0) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

$$= \begin{cases} \gamma_1(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \gamma_1 * \gamma_2 (s)$$

$$H'(s,1) = \begin{cases} H(2s,1) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\checkmark$

Sei G eine Homotopie von γ_2 nach γ_2'.

Wir definieren

$$G' : I \times I \to X$$

$$G(s,t) = \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Behauptung: G' ist eine Homotopie von $\gamma_1' * \gamma_2$ nach $\gamma_1' * \gamma_2'$.

Bew: $$G'(s,0) = \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1, 0) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\gamma_1' * \gamma_2(s) \longrightarrow = \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$G'(s,1) = \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2'(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$= \gamma_1' * \gamma_2'(s) \quad \checkmark$$

Also ist

$$\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2'$$

Äquivalenzrelation

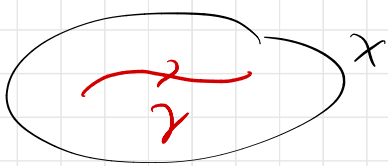
$$\Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2'$$

$\square$

Lemma 2: Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ← top Raum, ein Weg und $\varphi : \underbrace{[0,1]}_{= I} \to \underbrace{[0,1]}_{= I}$ stetig.

s.d. $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$

Dann $\gamma \simeq \gamma \circ \varphi$.



Bew: Wir suchen eine Homotopie ~~zwischen~~ von γ ~~und~~ nach $\gamma \circ \varphi$.

Sei $H: I \times I \to X$

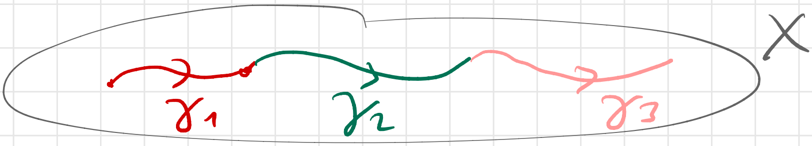
$$(s,t) \mapsto \gamma(t \cdot \varphi(s) + (1-t) \cdot s)$$

Dann ist $H(s,0) = \gamma(s)$
und $H(s,1) = \gamma(\varphi(s))$.

$\square$

Lemma 3 (Assoziativität):

Sei X ein top Raum und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \to X$ 3 Wege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$.



Dann ist $[(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3] = [\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)]$

Achtung: Man kann die Klammern nicht weglassen, $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \neq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

Beweis: Zur Erinnerung

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(s) = \begin{cases} \gamma_1(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \gamma_2(4s-1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma_3(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(4s-2) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma_3(4s-3) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Sei $\varphi : I \to I$

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ s - \frac{1}{4} & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2s - 1 & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) \circ \varphi(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(4s-2) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma_3(4s-3) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$= \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(s)$$

Lemma 2 $\Rightarrow$

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \simeq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$$

$\square$

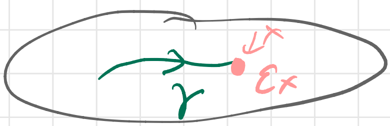
Lemma 4 (Neutrales Element)

Sei $\varepsilon_x : [0,1] \to X$ der konstante Weg
$\varepsilon(s) = x \in X \quad \forall s \in [0,1]$.

und $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg.

1) Falls $\gamma(1) = x = \varepsilon_x(0)$

Dann ist $[\gamma * \varepsilon_x] = [\gamma]$



2) Falls $\gamma(0) = x = \varepsilon_x(1)$

Dann ist $[\varepsilon_x * \gamma] = [\gamma]$.

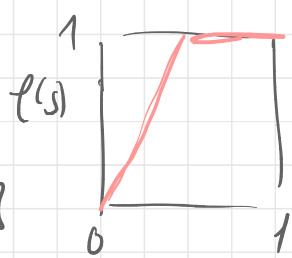
Achtung: Hier kann man die Klammern auch nicht weglassen.

Beweis: Wir zeigen 1)

2) geht genauso.

Sei $\varphi : I \to I$

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



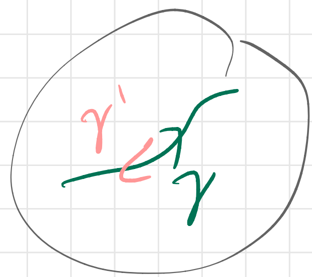
Dann $\gamma \circ f(s) = \gamma * \varepsilon_x(s)$

Lemma 2 $\Rightarrow$ Wir sind fertig $\square$

Lemma 5 (Inverses):

Sei ε_x wieder der konstante Weg $\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0,1]$ und $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg, und $\gamma' : [0,1] \to X$ der Weg definiert wie folgt

$$\gamma'(s) = \gamma(1-s).$$



1) Angenommen $\gamma(0) = x = \varepsilon_x(s)$
Dann $[\gamma * \gamma'] = [\varepsilon_x]$

2) Angenommen $\gamma(1) = x = \varepsilon_x(s)$
Dann ist $[\gamma' * \gamma] = [\varepsilon_x]$.

Achtung: Man kann die Klammern nicht weglassen.

Beweis: Sei $H : I \times I \to X$

mit $H(s,t) = \begin{cases} \gamma(2s(1-t)) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma(2(1-s)(1-t)) & s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

Dann ist $H(s,0) = \begin{cases} \gamma(2s) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma(2(1-s)) & s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

$$= \gamma * \gamma'(s)$$

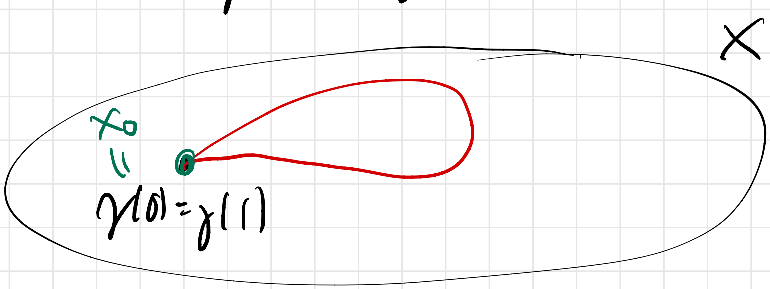
$$H(s,1) = \begin{cases} \gamma(0) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma(0) & s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$= \gamma(0) = x = \varepsilon_x(s)$$

$\Rightarrow$ H ist eine Homotopie von $\gamma * \gamma'$ nach ε_x

$\square$

Def: Sei X ein top Raum.
Eine **Schleife** $\gamma: [0,1] \to X$ ist ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$.



Def: Sei X ein top Raum und $x_0 \in X$. Die **Fundamentalgruppe** von (X, x_0) die Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \{ [\gamma] \mid \gamma : [0,1] \to X \text{ ist eine Schleife mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$$

x_0 heißt **Basispunkt**.

Satz: $\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe mit Verknüpfung

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$$

und neutralem Element

$$[\varepsilon_{x_0}] =: e$$

konstante Schleife $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0 \quad \forall s \in [0,1]$

Beweis: Lemma 1 $\Rightarrow$ wohldefinierte Verknüpfung

Lemma 3 $\Rightarrow$ Assoziativität

Lemma 4 $\Rightarrow$ neutrales Element

Lemma 5 $\Rightarrow$ Inverse

$\Box$

Beispiel: Was ist die Fundamentalgruppe von $(\mathbb{R}^n, 0)$?

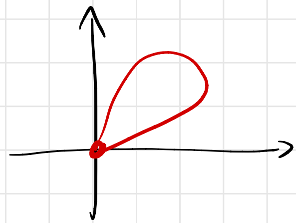
Basispunkt

A: Wir haben bereits gesehen, dass je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop sind.

Das gilt insbesondere für Schleifen:

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Schleifen

mit
$$\gamma_1(0) = 0 = \gamma_2(0), \quad \gamma_1(0) = \gamma_1(1), \quad \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$$



Dann ist $\gamma_1 \simeq \cancel{\gamma_2}\ \varepsilon_0$

$$\Rightarrow \quad \pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{[\varepsilon_0]\} = \{e\}.$$

F: Was passiert, wenn man einen anderen Basispunkt wählt?

Angenommen X ist wegzusammenhängend.
top Raum

Seien $x_0, x_1 \in X$.

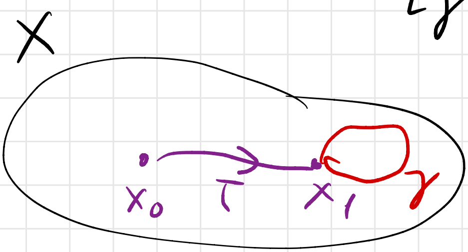
Dann gibt es einen Weg $\tau : I \to X$

von $\underset{\tau(0)}{\underset{\shortparallel}{x_0}}$ nach $\underset{\tau(1)}{\underset{\shortparallel}{x_1}}$.

Dieser Weg induziert eine Abbildung

$$c(\tau) : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

$$[\gamma] \longmapsto [\tau * \gamma * \tau']$$



<u>Lemma 6</u>: $c(\tau)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Für wegzusammenhängende Räume hängt die (Isomorphismusklasse der) Fundamentalgruppe <u>nicht</u> vom Basispunkt ab.

Notation: $\pi_1(X)$

<u>Beweis</u>: Gruppenhomomorphismus

$$c(\tau)(\underbrace{[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]}_{[\gamma_1 * \gamma_2]}) = [\tau * \gamma_1 * \gamma_2 * \tau']$$

$$= [\tau * \gamma_1 * \tau' * \tau * \gamma_2 * \tau']$$

$$= [\tau * \gamma_1 * \tau'] \cdot [\tau * \gamma_2 * \tau']$$

$$= (c(\tau)[\gamma_1]) \cdot (c(\tau)[\gamma_2])$$

Warum Iso?

Inverses: $c(\tau')$

$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$

Warum? $c(\tau) \circ c(\tau')([\gamma])$

$$= c(\tau)[\tau' * \gamma * \tau]$$

$$= [\tau * \tau' * \gamma * \tau * \tau']$$

$$= [\gamma]$$

und $c(\tau') \circ c(\tau)([\gamma])$

$$= [\gamma]$$

$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ $\square$

Def: Ein wegzusammenhängender top Raum X mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \{e\}$ heißt **einfach zusammenhängend**

Beispiel aus Übungen:

Falls $X \cong Y$,

Homöo

$f: X \to Y$

Sei $x_0 \in X$

Dann ist $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow[\cong]{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$

Gruppenisomorphismus.

Wäre $S^n \underset{\text{homöo}}{\cong} \mathbb{RP}^n$ $\quad n \geq 2$

Dann wäre auch

$$\pi_1(S^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n)$$

Aber $\quad \begin{matrix} \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \{e\} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{matrix}$

$n = 2$