Die Fundamentalgruppe von S^1

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \subseteq \mathbb{C}$$

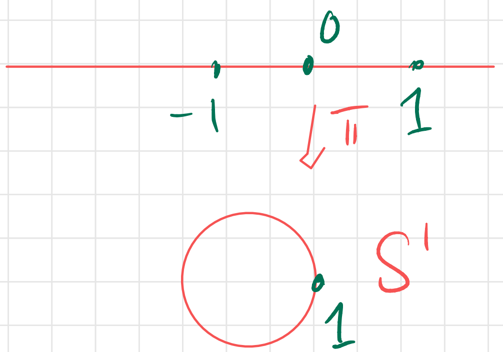
Wir zeigen heute, dass

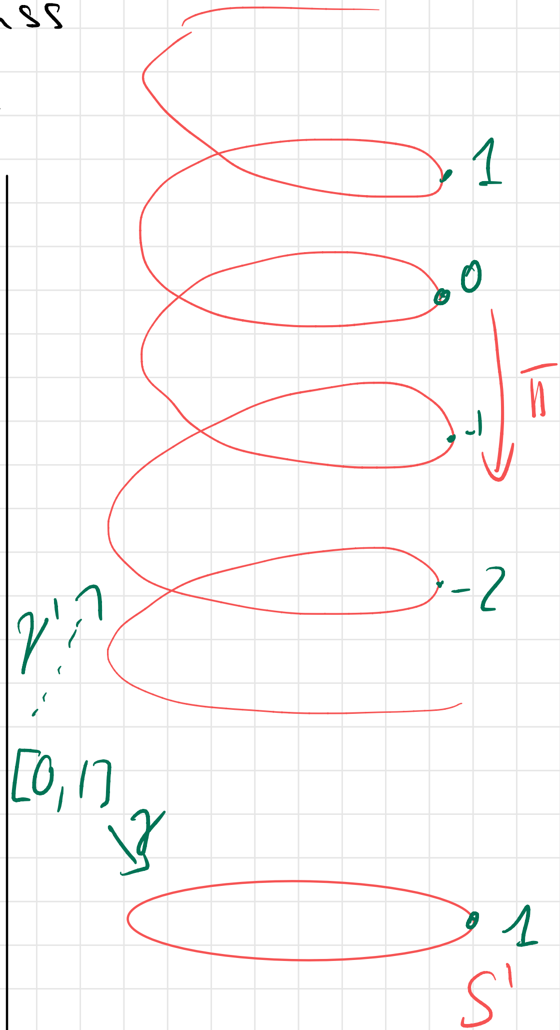
$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$$

Wir benutzen die Exponentialabbildung

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1$$

$$\pi(t) = e^{2\pi i t}$$





$$\varphi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$

$$\varphi([\gamma]) := \gamma'(1)$$

Wir werden das folgende zeigen:

1) Für $\gamma : [0,1] \to S^1$ eine Schleife mit Basispunkt 1, gibt es genau einen Weg $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}$ s.d. $\gamma'(0) = 0$ und

$$\gamma = \pi \circ \gamma'$$

2) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to S^1$ zwei homotope Schleifen mit Basispunkt 1 $(\gamma_1 \simeq \gamma_2)$.
Dann ist $\gamma_1' \simeq \gamma_2'$ $\quad \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = 0$

Lift zu γ_1 $\qquad$ Lift zu γ_2

$$\gamma_i = \pi \circ \gamma_i' \quad i = 1, 2$$

Jetzt können wir

$$\varphi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$
$$\varphi([\gamma]) = \gamma'(1)$$

3) Wir werden zeigen, dass φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Zur Erinnerung: $\pi : \mathbb{R} \to S^1$
$t \mapsto e^{2\pi i t}$

<u>Satz</u>: (Englisch: Path Lifting Property)
Deutsch: Weghochhebungseigenschaft
o. Weghebungseigenschaft
o. Wegliftungseigenschaft

Seien $z_0 \in S^1$ (zB $1 \in S^1$) und $z_0' \in \pi^{-1}(\{z_0\})$ (zB $0 \in \mathbb{R}$)

und $\gamma : I \to S^1$ ein Weg mit $\gamma(0) = z_0$

Dann $\exists!\ \gamma' : I \to \mathbb{R}$ mit $\gamma'(0) = z_0'$ und $\pi \circ \gamma' = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "z_0'"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!\gamma'"] & S^1 \end{tikzcd}$$

γ' heißt Lift von γ mit

Basispunkt / Startpunkt z_0'.

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit:

Angenommen γ' und γ'' sind beide Lifts von γ mit

$\gamma'(0) = \gamma''(0) = z_0'$

$\Rightarrow \gamma'(t) - \gamma''(t) \in \mathbb{Z}$

$\gamma' - \gamma''$ ist stetig $\Rightarrow$ $\gamma' - \gamma''$ ist konstant

und $\gamma'(0) = \gamma''(0)$

$\Rightarrow \gamma' = \gamma''$

Existenz:

Behauptung: Es gibt $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $z_1, \ldots, z_n \in S^1$

s.d. $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq S^1 \setminus \{z_i\}$

Bew: Für jedes $s \in [0,1]$ gibt es

$0 \le \alpha_s < s < \beta_s \le 1$ und $y_s \in S'$

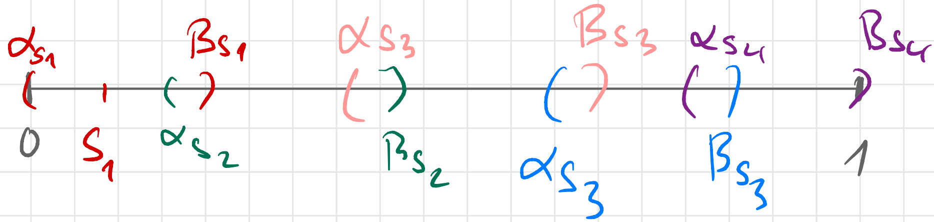
sd. $\gamma((\alpha_s, \beta_s)) \subseteq S' \setminus \{y_s\}$

$$[0,1] = \bigcup_{s \in [0,1]} (\alpha_s, \beta_s) \quad \text{hat}$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$[0,1] = (\alpha_{s_1}, \beta_{s_1}) \cup \dots \cup (\alpha_{s_n}, \beta_{s_n})$$

ObdA $s_1 < s_2 < \dots < s_n$



$t_0 = 0$

$t_n = 1$ $\qquad t_i \in (\alpha_{s_i}, \beta_{s_i}) \cap (\alpha_{s_{i+1}}, \beta_{s_{i+1}})$

Wir löschen überflüssige t_i und $(\alpha_{s_i}, \beta_{s_i})$

Dann ist $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \gamma((\alpha_{s_{i+1}}, \beta_{s_{i+1}}))$

$$\subseteq S' - \{\underbrace{y_{s_{i+1}}}_{=: z_i}\}$$

Jetzt können wir $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}$ konstruieren.

Angenommen wir haben bereits $\gamma'|_{[0,t_i]}$ konstruiert.

Notation: Für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\pi_\xi := \pi \Big|_{(\xi, \xi+1)} : (\xi, \xi+1) \to S^1 \setminus \pi\{\xi\}$$

Homöomorphismus

Sei $\xi_i \in \pi^{-1}(z_i)$

s.d. $\gamma'(t_i) \in (\xi_i, \xi_i + 1)$

$$\gamma'|_{[t_i, t_{i+1}]} := \pi_{\xi_i}^{-1} \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

$\square$

Satz (Englisch: Homotopy Lifting Property)
(Deutsch: Homotopieliftungseigenschaft)
(hoch-)hebung

Seien $\gamma_0, \gamma_1 : I \to S^1$ zwei
zB $z_0 = z_1 = 1$
Wege von z_0 nach z_1
und H eine Homotopie von γ_0 nach γ_1
und γ_0' ein Lift von γ_0
(mit $\gamma_0'(0) = z_0'$).

$\Rightarrow$ $\exists!$ Homotopie

$$H' : I \times I \to \mathbb{R}$$

mit $H'(s, 0) = \gamma_0'(s)$

und $\pi \circ H' = H$

Insbesondere ist $\gamma_1'(s) := H'(s, 1)$
ein Lift von γ_1 und $\gamma_0' \simeq \gamma_1'$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\gamma_0'"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times 0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists! H'"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Beweis: Eindeutigkeit:

Für ein fixes $s_0 \in I$

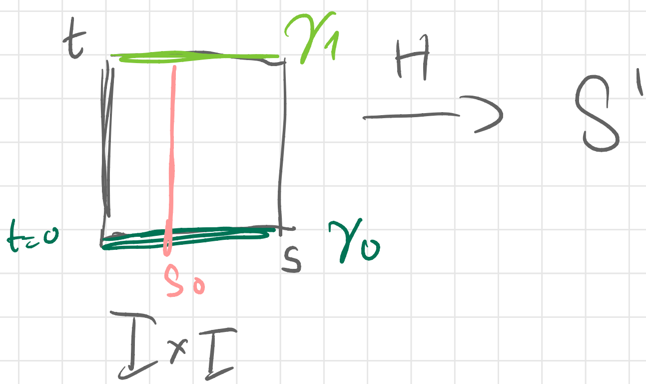
ist $H'(s_0, -) : I \to \mathbb{R}$

ein Lift von $H(s_0, -) : I \to S^1$

mit Startpunkt $\gamma_0'(s_0)$

$\Rightarrow$ $H'(s_0, -)$ eindeutig

$\Rightarrow$ H' ist eindeutig.



Sei γ_s' ein Lift von
$H(s,-): I \to S^1$ mit Startpunkt
$\gamma_0'(s)$.

Dann ist $H'(s,0) = \gamma_0'(s)$

und $\pi \circ H'(s,t) = \pi \circ \gamma_s'(t)$
$= H(s,t)$

Ist H' stetig?

Behauptung: Für $s_0 \in I$ gibt es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $z_1, \dots, z_n \in S^1$ und eine zusammenhängende Umgebung U von s_0 s.d.

$$H(U \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq S^1 \setminus \{z_i\}$$

Beweis: Für jedes $r \in [0,1]$ gibt y_r und $0 \leq a_r < s_0 < b_r \leq 1$

$0 \leq \alpha_r < r < \beta_r \leq 1$

$H((a_r, b_r) \times (\alpha_r, \beta_r)) \subseteq S^1 \setminus \{y_r\}$

$I = \bigcup_{r \in I} (\alpha_r, \beta_r)$ hat eine endliche Teilüberdeckung

$I = (\alpha_{r_1}, \beta_{r_1}) \cup \ldots \cup (\alpha_{r_n}, \beta_{r_n})$

$0 < r_1 < \ldots < r_n$

Wir wählen wieder $t_i \in (\alpha_{r_i}, \beta_{r_i}) \cap (\alpha_{r_{i+1}}, \beta_{r_{i+1}})$

$t_0 = 0 \qquad i = 1, \ldots, n-1$

$t_n = 1$

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} (a_{r_i}, b_{r_i})$$

Dann ist $H(U \times [t_i, t_{i+1}])$

$\subseteq H((a_{r_{i+1}}, b_{r_{i+1}}) \times (\alpha_{r_{i+1}}, \beta_{r_{i+1}}))$

$\subseteq S^1 \setminus \{\underbrace{y_{r_{i+1}}}_{z_i}\}$

Angenommen wir haben gezeigt, dass $H'|_{U \times [0, t_i]}$ stetig ist.

Wir wissen dass

$H'(U \times \{t_i\}) \subseteq (\xi_i, \xi_i + 1)$

$\pi|_{\xi_i} \downarrow \cong$

für ein $\xi_i \in \pi^{-1}(z_i)$ $\quad S^1 - \{z_i\}$

$H'|_{U \times [t_i, t_{i+1}]} = \pi_{\xi_i}^{-1} \circ H|_{U \times [t_i, t_{i+1}]}$ ~~auf $U \times [t_i, t_{i+1}]$~~

und somit stetig auf $U \times [0, t_{i+1}]$

$\Rightarrow$ H' stetig auf $U \times [0,1]$

So ist beliebig $\Rightarrow$ H' ist überall stetig.

$\square$

<u>Satz:</u> $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$

$$\varphi([\gamma]) = \gamma'(1)$$

ist Gruppenisomorphismus.

Lift von $\gamma : [0,1] \to S^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$

und $\gamma'(0) = 0$

Beweis: f ist wohldefiniert
(wegen path lifting property ex γ'
und $\gamma'(1)$ ist eindeutig wegen
homotopy lifting property)

Homomorphismus:
Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to S^1$ zwei
Schleifen mit Basispunkt 1.
Sei γ_1' ein Lift von γ_1 mit $\gamma_1'(0) = 0$
und γ_2' ein Lift von γ_2 mit $\gamma_2'(0) = \gamma_1'(1)$

Dann ist $\gamma_1' * \gamma_2'$ ein Lift
von $\gamma_1 * \gamma_2$,
also $f([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) = f([\gamma_1 * \gamma_2])$

$$= (\gamma_1' * \gamma_2')(1)$$

$$= \gamma_2'(1)$$

Was ist $\ell([\gamma_1]) + \ell([\gamma_2])$?

$$= \gamma_2'(1)$$

$$\ell([\gamma_1]) = \gamma_1'(1)$$

$$\ell([\gamma_2]) = \gamma_2'(1) - \gamma_1'(1)$$

✓

Surjektiv: Sei $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto nt$

$\leadsto$ Schleife in S^1

$\gamma := \pi \circ \gamma' : [0,1] \to S^1$

mit Basispunkt 1

Dann ist $\ell([\gamma]) = \gamma'(1) = n$

Injektivität: Sei $\gamma : I \to S^1$ eine Schleife mit Basispunkt 1 s.d. $\ell([\gamma]) = 0$

Sei γ' ein Lift von γ mit $\gamma'(0) = 0$.

Außerdem ist $\gamma'(1) = f'([\gamma]) = 0$

$\Rightarrow$ γ' ist eine Schleife in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sind alle Schleifen homotop zur konstanten Schleife $\varepsilon_0 : I \to \mathbb{R}$

$\varepsilon_0(s) = 0$
$\forall s \in I$

$\rightsquigarrow$ Sei H' eine Homotopie von γ' nach ε_0.

Dann ist $H = \pi \circ H'$ eine Homotopie γ nach $\varepsilon_1 : I \to S^1$

$\uparrow$ konstante Schleife

$\Rightarrow$ $\gamma \simeq \varepsilon_1$

$\square$

Anwendungen

Korollar 1 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nicht-konstante Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Wurzel $z_0 \in \mathbb{C}$ (also $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$).

Beweis: OBdA: $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

Angenommen $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Für $r \in \mathbb{R}$

$$f_r : [0,1] \to S^1$$

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{\left| p(re^{2\pi i s})/p(r) \right|}$$

$f_r(0) = 1$

$f_r(1) = 1$

$\Rightarrow f_r$ ist eine Schleife mit Basispunkt 1.

Sei $r > \max\{1, |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\}$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$

ist $|z^n| = r^n > (|a_1| + \dots + |a_n|) \cdot |z^{n-1}|$

$$\geq |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|$$

Also hat

$$p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$$

keine Wurzeln für $0 \leq t \leq 1$

$$H : I \times I \to S^1$$

$$H(s,t) = \frac{p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)|}$$

ist eine Homotopie von

$$\omega_n(s) := e^{2\pi i n s}$$

(weil $H(s,0) = \dfrac{p_0(re^{2\pi i s})/p_0(r)}{|p_0(re^{2\pi i s})/p_0(r)|}$

$$= \frac{\cancel{r^n}\, e^{2\pi i n s}/\cancel{r^n}}{|\ 1\ |} = e^{2\pi i n s}$$
)

nach $f_r(s)$

Also $f_r(s) \simeq \omega_n(s)$

Sei $\varphi: \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$

wie oben

Dann ist $\varphi(\omega_n(s)) = n$

Sei $G: I \times I \to S^1$

$$G(s,t) = f_{t \cdot r}(s)$$

$$G(s,0) = \underbrace{f_{0 \cdot r}}_{0}(s) \leftarrow \text{konstant}$$

$$G(s,1) = f_r(s)$$

$\Rightarrow \quad f_r(s) \simeq \varepsilon_1$

Aber $\varphi([\varepsilon_1]) = 0 \neq n$ $\lightning$

Korollar 2 (Borsuk-Ulam in dim 2)

Sei $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig.

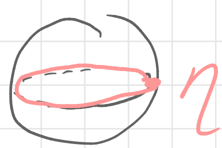
Dann gibt es $x \in S^2$

s.d. $f(x) = f(-x)$.

Beweis: Angenommen $f(x) \neq f(-x)$
$\forall x \in S^2$

$$g: S^2 \to S^1$$
$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

Sei $\eta: [0,1] \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$
$\eta(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$



Dann ist

$$h = g \circ \eta$$

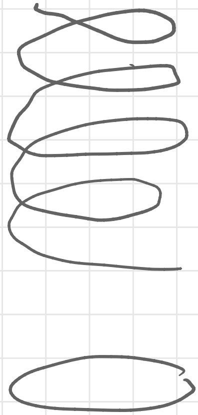
eine Schleife in S^1.

$g(-x) = -g(x) \quad \Rightarrow \quad h(s+\tfrac{1}{2}) = -h(s)$

$\forall x \in S^2 \qquad\qquad s \in [0, \tfrac{1}{2}]$

Sei $h' : I \to \mathbb{R}$ ein Lift von h

mit $h'(0) = 0$



Insbesondere ist

$$h'(s+\tfrac{1}{2}) = h'(s) + \frac{q(s)}{2}$$

$\underset{\in \mathbb{Z}}{q(s)}$ ungerade

q ist unabhängig von s also konstant, weil $q(s)$ stetig ist.

$$\Rightarrow \quad \underset{\varphi([h])}{\underset{\parallel}{h'(1)}} = h'(\tfrac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \underset{0}{\underset{\parallel}{h'(0)}} + q$$

$$\varphi([h]) = q \neq 0$$

↖ ungerade

Aber $h = g \circ \eta : I \to S^2 \to S^1$

Jetzt ist aber $\eta : I \to S^2$
homotop zur konstanten Schleife.
weil $\pi_1(S^2) = \{e\}$.

$\Rightarrow [h] \hat{=} e$

$\Rightarrow \varphi([h]) = 0 \neq 4$ ↯

$\square$