Ankündigung:

Das 2. Hausübungsblatt ist online.

Abgabe: 11. 2. 2021 23:59

Wiederholung:

$p: E \to B$ heißt **Überlagerung** (mit typischer Faser F)

stetig top Räume

diskreter top Raum

falls zu jedem $b \in B$ eine Umgebung U von b existiert und ein Homöomorphismus $f: U \times F \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U)$

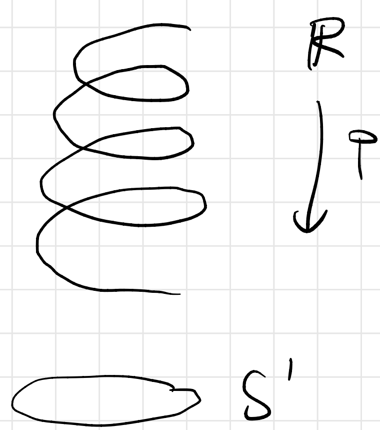
s.d.

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p|_{p^{-1}(U)}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein bekanntes Bsp:

$$\begin{array}{c} p: \mathbb{R} \to S^1 \\ \mathbb{R} = E, \quad S^1 = B \\ t \mapsto e^{2\pi i t} \end{array}$$



$F = \mathbb{Z}$

Lift von f →

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

← Überlagerung

↖ stetig

$p: E \to B$ Überlagerung

<u>Korollar</u>: (folgt aus Homotopieliftungseigenschaft)

(i) "Wegliftungseigenschaft"

Für $b \in B$ und $a \in p^{-1}(\{b\})$ und $\gamma: I \to B$ ein Weg mit $\gamma(0) = b$.

Dann $\exists!$ Lift $\gamma': I \to E$ von γ mit $\gamma'(0) = a$

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\gamma'"] \arrow[r, "\gamma"'] & B \end{tikzcd}$$

(ii) "Weghomotopieliftungseigenschaft"

Seien γ_0 und γ_1 Wege in B
und $H : I \times I \to B$ eine Homotopie
rel $\{0,1\}$ von γ_0 nach γ_1 $(\gamma_0 \simeq \gamma_1)$.
Für jeden Lift γ_0' von γ_0 gibt
es einen eindeutig Lift $H' : I \times I \to E$
von H sd. H' eine Homotopie rel $\{0,1\}$
von γ_0' zu einem Lift von γ_1' ist.

Déja vu: Für $p : \mathbb{R} \to S^1$
$t \mapsto e^{2\pi i t}$

haben wir damit gezeigt, dass
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Wie ging das nochmal?

Sei $\gamma : I \to S^1$ eine Schleife um 1
und $\gamma' : I \to \mathbb{R}$ ein Lift mit $\gamma'(0) = 0$

eindeutig

$$\begin{aligned} f : \pi_1(S^1, 1) &\to \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \gamma'(1) \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass f ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

Hier ist $\mathbb{Z} = F$ die typische Faser.

$\underset{\mathbb{Z}}{\overset{\parallel}{\pi_1(S^1, 1)}}$ wirkt auf $\underset{\mathbb{Z}}{\overset{\parallel}{F}}$

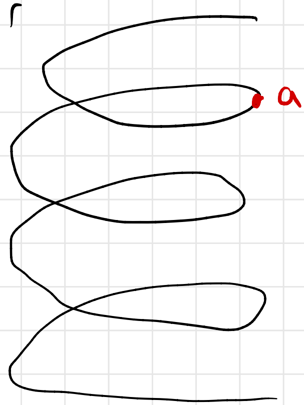
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1(S^1, 1) \times F \longrightarrow F \\ \quad \parallel \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) \longmapsto n+m \end{array}\right\} \text{Monodromy operation}$$

Wir wollen nun eine Monodromyoperation für eine beliebige Überlagerung definieren.

Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung mit typischer Faser $F = p^{-1}(\{b\})$ für $b \in B$.

Sei $\gamma: I \to B$ eine Schleife in B um b. Für $a \in F$ sei $\gamma_a': I \to E$ ein Lift von γ nach E mit $\gamma_a'(0) = a$.

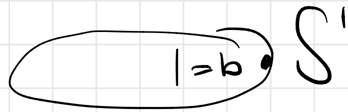
γ_a' ist eindeutig wegen der Wegliftungseigenschaft.



Das definiert eine Abbildung

$$\Psi_{[\gamma]} : F \to F$$

$$\Psi_{[\gamma]}(a) = \gamma_a'(1)$$



<u>Lemma</u>: Sei β eine Schleife um b homotop zu γ. Dann ist

$$\Psi_\gamma(a) = \Psi_\beta(a).$$

<u>Beweis</u>: Das folgt direkt aus der Weghomotopieliftungseigenschaft.

Sei $H : I \times I \to B$ eine Homotopie von γ nach β und $\gamma_a' : I \to E$ der eindeutig bestimmte Lift von γ mit $\gamma_a'(0) = a$. Sei außerdem $H' : I \times I \to E$ ein Lift von H mit $\underset{= \gamma_a'}{H'(-,0) : I \to E}$

Dann ist $\beta_a' := H(-, 1) : I \to E$

ein Lift von β mit $\beta_a'(0) = a$

und H' eine Homotopie von γ_a' nach

β_a' (rel $\{0,1\}$)

eindeutig

$$\Rightarrow \quad \underset{\Psi_\beta(c)}{\underset{\shortparallel}{\beta_a'(1)}} = \underset{\Psi_\gamma(a)}{\underset{\shortparallel}{\gamma_a'(1)}}$$

$\square$

<u>Lemma</u>: Seien γ und δ Schleifen in B um b. Dann gilt

$$\Psi_{\gamma * \delta} = \Psi_\delta \circ \Psi_\gamma : F \to F$$

Außerdem ist $\Psi_{\varepsilon_b} = id_F$ wobei $\varepsilon_b : I \to B$ die konstante Schleife um b ist.

<u>Beweis</u>: Die konstante Schleife $\varepsilon_a : I \to E$ um a ist der eindeutige Lift von ε_b mit $\varepsilon_a(0) = a$

$F = p^{-1}(\{b\})$

$$\Rightarrow \Psi_{\varepsilon_b}(a) = \varepsilon_a(1) = a$$

Sei γ' ein Lift von γ mit $\gamma'(0)=a$

und δ' ein Lift von δ mit $\delta'(0)=\gamma'(1)$

$\Rightarrow$ $\gamma' * \delta'$ ist ein Lift von $\gamma * \delta$

mit $\gamma' * \delta'(0) = a$ (eindeutig).

$$\Rightarrow \quad \psi_{\gamma * \delta}(a) = (\gamma' * \delta')(1)$$
$$= \delta'(1)$$
$$= \psi_\delta(\gamma'(1))$$
$$= \psi_\delta(\psi_\gamma(a))$$
$$= \psi_\delta \circ \psi_\gamma(a)$$

$\square$

Also haben wir

$$\begin{array}{ccc} [\gamma] & \longmapsto & \psi_\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1(B,b) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(F) \end{array}$$

F: Ist das ein Gruppenhomomorphismus?

Gruppenoperation $\Leftrightarrow$ Gruppenhomomorphismus

$G \times X \to X$ $\qquad$ $G \to \mathrm{Aut}(X)$

A: Nicht ganz falsch herum, nur wenn $\pi_1(B,b)$ abelsch ist

Def Sei $(G, \cdot, e)$ ein Gruppe.
Die umgekehrte Gruppe G^{op} ist die Gruppe mit derselben zugrundeliegenden Menge G und Einheitselement e aber der Verknüpfung ist umgekehrt

$$\cdot^{op} : G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto h \cdot g = g \cdot^{op} h$$

Wir haben also einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(B,b)^{op} \to \mathrm{Aut}(F)$$

und somit eine Gruppenoperation

$$\pi_1(B,b)^{op} \times F \to F \quad \text{Monodromyoperation}$$
$$([\gamma], a) \mapsto \varphi_\gamma(a) = \gamma'_a(1)$$

Bem: • G ist isomorph zu G^{op}

via $g \overset{\varphi}{\longmapsto} g^{-1}$

Test: $\varphi(g \cdot h) = (g \cdot h)^{-1}$

$$= h^{-1} \cdot g^{-1}$$

$$= \varphi(h) \cdot \varphi(g)$$

$$= \varphi(g) \cdot^{op} \varphi(h)$$

• Eine (Links-) Gruppenoperation der Umgekehrten Gruppe ist das Gleiche wie eine Rechtsoperation

$$X \times G \to X$$

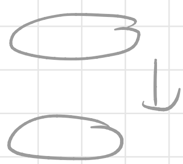
$$(x, y) \longmapsto x \cdot g$$

sd. $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$

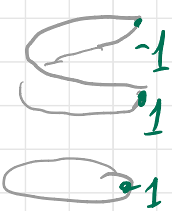
und $x \cdot e = x$

<u>Bsp</u>: Wir betrachten die 3 folgenden Überlagerungen von S^1

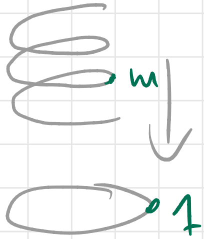
1) $E_1 = S^1$
$\quad p_1 = id \downarrow$
$\quad S^1$



2) $E_2 = S^1_z$
$\downarrow \; J$
$S^1{}_{z^2}$



3) $\begin{array}{c} E_3 = \mathbb{R} \\ {\scriptstyle p_3 = e^{2\pi i(-)}} \big\downarrow \\ S^1 \end{array}$



F 1: Was sind die typischen Fasern?

F 2: Was sind die Monodromy operationen

$$\pi_1(S^1,1)^{op} \times F \to F \quad ?$$

$$\begin{array}{c} \pi_1(S^1,1) \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathbb{Z}^{op} \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

A 1: $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \{1, -1\}$

$F_3 = \mathbb{Z}$

A 2: $\mathbb{Z} \times \{1\} \to \{1\}$

$(n, 1) \mapsto 1$

$\mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \to \{\pm 1\}$

$(n, \pm 1) \mapsto (\pm 1) \cdot (-1)^n$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(n, m) \mapsto n + m$

Die Gruppenoperationen in dem Beispiel sind transitiv, dh es gibt nur eine Bahn (also ~~…~~ $G \times X \to X$ transitiv falls

$$\underset{\substack{\| \\ X}}{G \cdot x} = \{ y \in X \mid g \cdot x = y \text{ für ein } g \in G \} \;)$$

Beobachtung: Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung und E wegzusammenhängend.

$\Rightarrow$ Die Monodromyoperation ist transitiv.

Beweis: Sei $a \in F = p^{-1}(\{b\})$ $b \in B$.

Weil E wegzusammenhängend ist ex ein Weg γ_c' von a nach $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{beliebig}}}{c} \in F$.

$$\Rightarrow \quad [p \circ \gamma_c'] \in \pi_1(B, b)$$

und
$$\underset{\substack{\shortparallel \\ [p\circ\gamma_c'] \cdot a}}{\Psi_{p \circ \gamma_c'}(a)} = \gamma_c'(1) = c$$

$\Rightarrow$ Die Bahn von a ist F

$\square$

Sei $p: E \to B$ eine Überlagerung mit typischer Faser $F = p^{-1}(\{b\})$, $b \in B$, s.d. E wegzusammenhängend ist, und
$\pi_1(B,b)^{op} \times F \to F$ die dazugehörige Monodromyoperation
transitiv

Dann ist der Stabilisator von $a \in F$
$$(\pi_1(B,b)^{op})_a = \{ g \in \pi_1(B,b)^{op} \mid g \cdot a = a \}$$
eine Untergruppe von $\pi_1(B,b)^{op}$.

Wenn wir die Monodromyoperation als Rechtsoperation schreiben, dann bekommen wir eine Untergruppe
$$\{ g \in \pi_1(B,b) \mid a \cdot g = a \}$$
von $\pi_1(B,b)$ isomorph zu $(\pi_1(B,b)^{op})_a$.

Aus der Gruppentheorie wissen wir
$$[G : G_x] = |G \cdot x|$$
$$\overset{\shortparallel}{[\pi_1(B,b)^{op} : (\pi_1(B,b)^{op})_a]} = |\pi_1(B,b)^{op} \cdot a| \overset{\text{transitiv}}{=} |F|$$

F: Was sind die Untergruppen von $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1)$ in den 3 Bsp oben?

A: $p_1: S^1 \xrightarrow{id} S^1 \rightsquigarrow \rho_1: \mathbb{Z} \times \{1\} \to \{1\}$

$(n, 1) \longmapsto 1$

$\rightsquigarrow \pi_1(S^1, 1)_1 = \mathbb{Z}$

$p_2: S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^2} S^1 \rightsquigarrow \rho_2: \mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \to \{\pm 1\}$

$(n, \pm 1) \mapsto (\pm 1) \cdot (-1)^n$

$\pi_1(S^1, 1)_1 = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

$p_3: \mathbb{R} \to S^1 \rightsquigarrow \rho_3: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$t \mapsto e^{2\pi i t}$

$(n, m) \longmapsto n + m$

$\pi_1(S^1, 1)_1 = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$

<u>Beobachtung</u>: $p: E \to B$ eine Überlagerung

$\rightsquigarrow \quad p_*: \pi_1(E, a) \to \pi_1(B, b)$

$a \in F = p^{-1}(\{b\})$ ist injektiv.

Insbesondere ist $p_*(\pi_1(E, a))$ eine Untergruppe von $\pi_1(B, b)$.

Beweis: Sei γ' eine Schleife in F um a s.d. $p_*[\gamma'] = [p \circ \gamma'] \in \pi_1(B,b)$

$$[p\circ\gamma'] = [\varepsilon_b]$$

Also $p \circ \gamma' \simeq \varepsilon_b$ ← konstante Schleife

Sei $H: I \times I \to B$ eine Homotopie von Schleifen von $p \circ \gamma'$ nach ε_b

Korollar (ii) (Weghomotopieliftungseigenschaft) $\Rightarrow$ $\gamma' \simeq \varepsilon_a$ ← konstante Schleife um a.

$\square$

Beobachtung: $p_*(\pi_1(E,a)) \subseteq \pi_1(B,b)$ ist der Stabilisator von $a \in F$ der Rechtsoperation $F \times \pi_1(B,b) \to F$.

Beweis:

„$\subseteq$" Sei $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,a))$

Es gibt also eine Schleife γ' in E um a s.d. $[p \circ \gamma'] = [\gamma]$

$$p \circ \gamma' \simeq \gamma$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a \cdot [\gamma]}_{\text{Rechtsmonodromy operation von } [\gamma] \text{ auf } a} = \Psi_\gamma(a) = \underbrace{\gamma'(1) = a}_{\gamma' \text{ ist eine Schleife}}$$

d.h. $[\gamma]$ fixiert a

$\Rightarrow$ $[\gamma]$ ist ein Element des Stabilisators.

"$\supseteq$" Angenommen $[\gamma]$ fixiert a.

$\Rightarrow$ Für den eindeutigen Lift γ' von γ mit $\gamma'(0) = a$ gilt, dass $\gamma'(1) = a$

$\Rightarrow$ γ' ist eine Schleife in E um a mit $p \circ \gamma' = \gamma$

$\Rightarrow$ $p_*([\gamma']) = [\gamma]$

$\Rightarrow \quad [\gamma] \in p_* \pi_1(E, a)$ $\square$

Wir haben gesehen,

wegzusammenhängende Überlagerung mit typischer Faser F $\rightsquigarrow$ transitive Monodromyoperation $\pi_1(B,b)^{op} \times F \to F$ $\overset{a \in F}{\rightsquigarrow}$ UG von $\pi_1(B,b)$

Stabilisator von a

2. Déja vu von heute: Das erinnert an Galoistheorie.

Tatsächlich werden wir Kategorien Cov_B und $\pi_1(B,b)^{op}$-Set von Überlagerungen von B bzw „$\pi_1(B,b)^{op}$-Mengen" definieren und zeigen, dass diese beiden Kategorien „äquivalent" sind für B zusammenhängend und „lokal einfach zusammenhängend!

(Weg-) zusammenhängende Überlagerungen korrespondieren zu transitiven $\pi_1(B,b)^{op}$-Mengen.

Sei G eine Gruppe und M_1 und M_2 Mengen mit einer G-Operation. Wir schreiben $G \circlearrowright M_1$ bzw $G \circlearrowright M_2$.
Also wir haben 2 Gruppenoperationen

$$\rho_1 : G \times M_1 \to M_2 \quad \text{und} \quad \rho_2 : G \times M_2 \to M_2$$

Ein Morphismus von $G \circlearrowright M_1$ nach $G \circlearrowright M_2$ ist eine Abbildung $\Phi : M_1 \to M_2$ die G-äquivariant ist d.h.

$$\Phi(g \cdot m_1) = g \cdot \Phi(m_1) \quad \forall g \in G \quad \forall m_1 \in M_1$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "g\cdot"] \arrow[d, "\Phi"'] & M_1 \arrow[d, "\Phi"] \\ M_2 \arrow[r, "g\cdot"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Bsp: $\rho_2 : \mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \xrightarrow{=F_2} \{\pm 1\}$
$(n, \pm 1) \longmapsto (\pm 1) \cdot (-1)^n$

und $\rho_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{=F_3} \mathbb{Z}$
$(n, m) \longmapsto n + m$

$$\begin{array}{ccccc} \Phi : & F_3 & \longrightarrow & F_2 & \text{ist } \mathbb{Z}\text{-äquivariant} \\ & \| & & \| & \\ & \mathbb{Z} & & \{\pm 1\} & \\ & m & \longmapsto & (-1)^m & \end{array}$$

Test: $\Phi(n \cdot m) = \Phi(n+m)$
$= (-1)^{n+m}$
$= (-1)^n \cdot (-1)^m$
$= n \cdot \Phi(m)$

Operation von n auf m

Def: Kategorie von G-Mengen

G ist eine Gruppen

Objekte = Mengen mit einer G-Operation $G \curvearrowright M$

Morphismen = G-äquivariante Abb

Exercise: Das ist wirklich eine Kategorie.