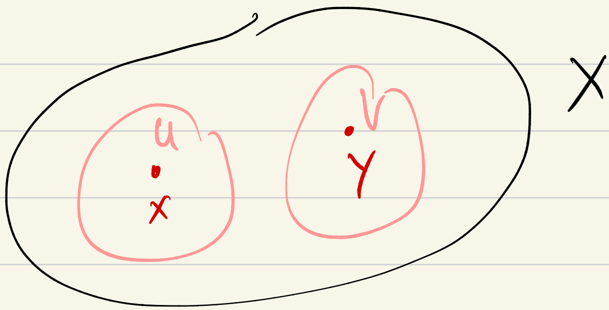
Heute: • Trennungsaxiome
• Satz von Urysohn-Tietze

Trennungsaxiome

Def Ein topologischer Raum X hat die **Hausdorffeigenschaft** / ist **Hausdorff** falls für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ es offene Mengen U und V in X gibt, s.d.

$$x \in U \quad , \quad y \in V \text{ und } V \cap U = \emptyset$$



Mit anderen Worten, verschiedene Punkte lassen sich durch offene Mengen trennen.

Beispiele: Welche der folgenden top Räume sind Hausdorff?

(i) $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie
ist Hausdorff

(ii) X eine Menge mit der diskreten Topologie ist Hausdorff

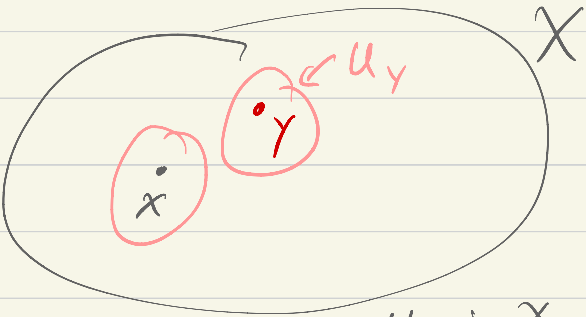
(iii) $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
ist nicht Hausdorff

(iv) $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}\}$
ist nicht Hausdorff

<u>Lemma</u>: (i) In einem Hausdorffraum sind einpunktige Mengen abgeschlossen
(ii) Teilräume oder Produkträume von Hausdorffräumen sind Hausdorff

<u>Beweis</u>: (i) $x \in X$ ← Hausdorff
<u>zu zeigen</u>: $X - \{x\}$ ist offen in X

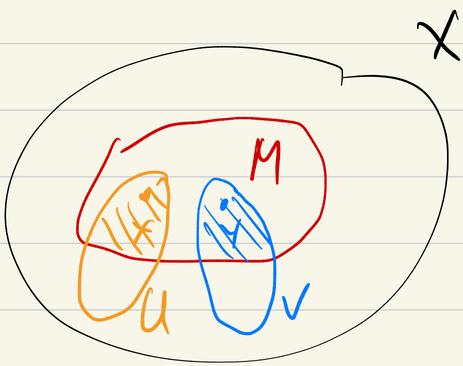
Für jedes $y \in X$ $y \neq x$ gibt es eine offene Menge U_y s.d. $x \notin U_y$ weil X Hausdorf ist.



$$\underbrace{\bigcup_{y \neq x} U_y}_{\text{offen in } X} = X - \{x\}$$

$\Rightarrow$ $X - \{x\}$ ist offen in X
$\Leftrightarrow$ $\{x\}$ ist abgeschlossen in X.

(ii) Teilräume: $M \subseteq X$ ← Hausdorff



Seien $x, y \in M$
$x \neq y$.

Da X Hausdorff

ist, gibt es offene Mengen
U und V in X s.d. $x \in U$
$y \in V$
$U \cap V \neq \emptyset$

$M \cap U$ ist offen in M
$M \cap V$ — " — M

$x \in M \cap U$ $y \in M \cap V$

$$(M \cap U) \cap (M \cap V) = M \cap (U \cap V) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ M ist Hausdorff.
^ Teilraumtopologie

Produkte: X_i Hausdorff für $i \in I$

Ist $\prod_{i \in I} X_i$ auch Hausdorff?

Sei $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$

mit $(x_i)_{i\in I} \neq (y_i)_{i\in I}$.

Dann gibt es ein $j \in I$ s.d.
$x_j \neq y_j$

Weil X_j Hausdorff ist, gibt es offene U_j und V_j in X_j mit $x_j \in U_j$ $y_j \in V_j$ und
$U_j \cap V_j = \emptyset$.

Sei $\pi_j : X \to X_j$ die Projektion

Dann sind $\pi_j^{-1}(U_j)$ und $\pi_j^{-1}(V_j)$ offen in $\prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie.

Außerdem $(x_i)_{i\in I} \in \pi_j^{-1}(U_j)$
und $(y_i)_{i\in I} \in \pi_j^{-1}(V_j)$

und $\pi_j^{-1}(U_j) \cap \pi_j^{-1}(V_j)$

$$= \pi_j^{-1}(U_j \cap V_j) = \emptyset$$

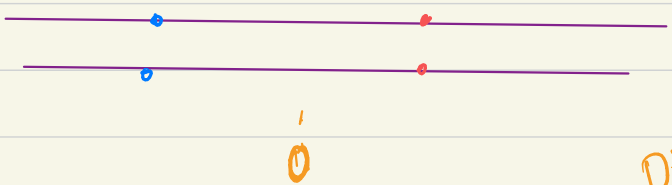
$$\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad \text{ist Hausdorff} \qquad \square$$

F: Sind Quotienten von Hausdorffräumen auch Hausdorff?

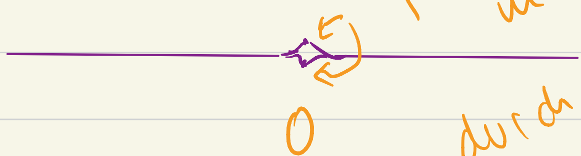
A: Nein.

z.B. $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \sim (x',y') :\Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \text{ oder } x = x' \neq 0$$



$\rightsquigarrow X/\sim$



Diese beiden Punkte kann man nicht durch offene Mengen trennen.

Def: Ein topologischer Raum heißt **T_1-Raum**, falls 1-punktige Mengen abgeschlossen sind.

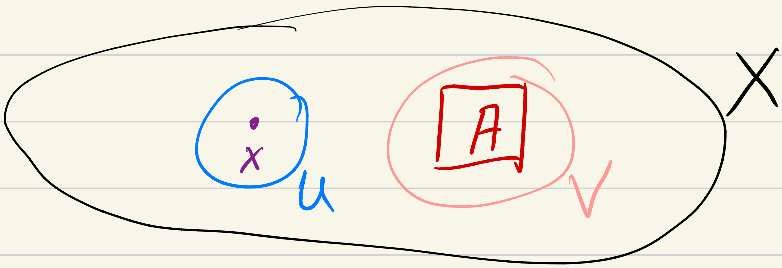
Bemerkung: Hausdorff $\overset{\text{Lemma (i)}}{\Longrightarrow}$ T_1
Aber die Umkehrung ist falsch.

Bsp: $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie ist T_1 aber nicht Hausdorff.

- T_1: endliche Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind abgeschlossen, insbesondere 1-punktmengen
- nicht Hausdorff: Man kann zwei Punkte nicht durch offene Mengen trennen, weil der Schnitt zweier offener Mengen nie leer ist.
  $\neq \emptyset$

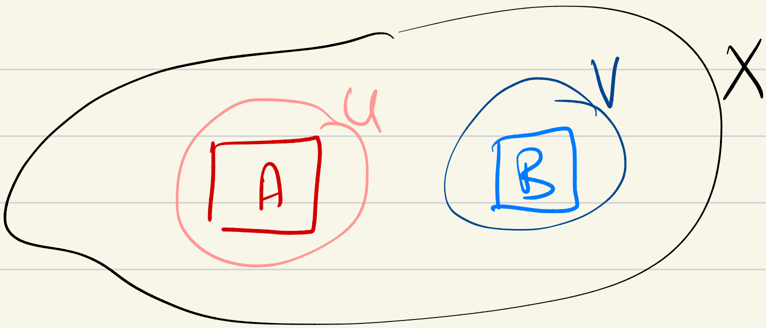
Def: Sei X ein T_1-Raum.

(i) X heißt **regulär**, falls es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ offene Mengen U und V in X gibt s.d. $x \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$



(ii) Wir nennen X **normal** falls sich disjunkte abgeschlossene Mengen A und B durch disjunkte offene Mengen trennen lassen, also für $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ s.d.

$$A \subseteq U \quad \text{und} \quad B \subseteq V$$



Bemerkung: Einige Autoren fordern nicht, dass reguläre oder normale Räume T_1 sind.

X normal

$\Downarrow$

X regulär

$\Downarrow$

X Hausdorff

$\Downarrow$

X T_1

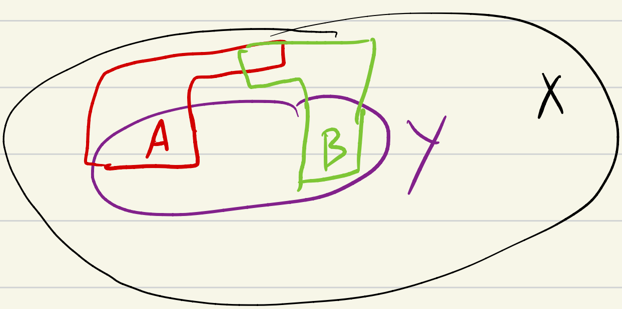
Lemma: i) X regulär $\Rightarrow$ $Y \subset X$ ist regulär mit der Teilraumtopologie

ii) X normal $\Rightarrow$ $Y \subset X$ ist normal mit der Teilraumtopologie

abgeschlossen in X

Beweis: funktioniert genau wie oben.

F: Warum brauchen wir $Y \subset X$ abgeschlossen in (ii) ?



Theorem (Satz von Urysohn-Tietze)
Sei X ein T_1-Raum.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent
1) X ist normal
2) Zu zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ existiert eine stetige Funktion

Urysohn-funktion $= f: X \to [0,1]$

s.d. $\quad f|_A = 0 \qquad f|_B = 1$

3) Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge und $f: A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung

$$F: X \to \mathbb{R}$$

mit $F|_A = f$

mit $\sup F = \sup f$ und $\inf F = \inf f$

Gilt ferner $|f(a)| < c \quad \forall a \in A$ lässt sich F so wählen, dass

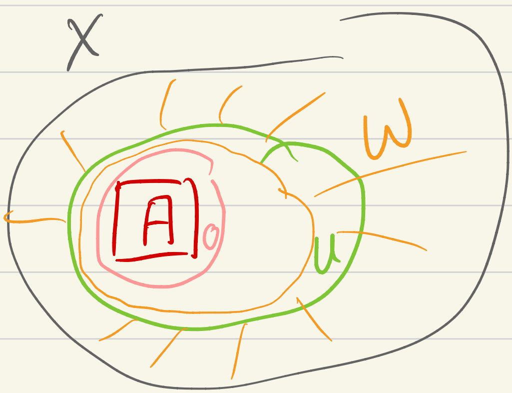
$$|F(x)| < c \qquad \forall x \in X$$

Bemerkung: • 1) $\Rightarrow$ 2) ist das Lemma von Urysohn

• 1) $\Rightarrow$ 3) ist der Fortsetzungssatz von Tietze

__Lemma__: Sei X normal.
Für $\underset{\text{abgeschlossen}}{A} \subseteq \underset{\text{offen}}{U}$
gibt es $\mathcal{O}$ offen in X s.d.
$$A \subset \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset U$$

__Beweis__: A ist abgeschlossen
und $X-U$ ist abgeschlossen
und $A \cap (X-U) = \emptyset$



X normal $\Rightarrow \exists\ A \subseteq \underset{\text{offen}}{\mathcal{O}}$

und $\underset{\text{offen}}{W} \supseteq X-U$

mit $W \cap \mathcal{O} = \emptyset$

Insbesondere $\mathcal{O} \subset U$

weil $\mathcal{O} \subset \underbrace{X - W}_{\text{abgeschlossen}} \subset X - (X - U) = U$

$$\overline{\mathcal{O}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{O} \subset K \\ \text{abg}}} K \subset X - W \subset U$$

$\Rightarrow A \subset \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset U$

$\square$

<u>**Beweis**</u> (Satz von Urysohn-Tietze)

2) $\Rightarrow$ 1): Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$.
Wir haben eine Urysohnfunktion

$$f : X \to \mathbb{R}$$
$$f|_A = 0 \qquad f|_B = 1.$$

$$\underset{\text{offen in } X}{U} := f^{-1}\big(\underbrace{[0, \tfrac{1}{2})}_{\text{offen in } [0,1]}\big)$$

$$\underset{\text{offen in } X}{V} := f^{-1}\big(\underbrace{(\tfrac{1}{2}, 1]}_{\text{offen in } [0,1]}\big)$$

und $A \subseteq \cancel{A} \; U$

$B \subseteq V$

und $U \cap V = \emptyset$ da

$[0, \tfrac{1}{2}) \cap (\tfrac{1}{2}, 1] = \emptyset$.

$\Rightarrow$ X normal ✓

3) => 2) Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$.

Dann ist $f: \overbrace{A \cup B}^{\text{abgeschlossen}} \to [0, 1]$

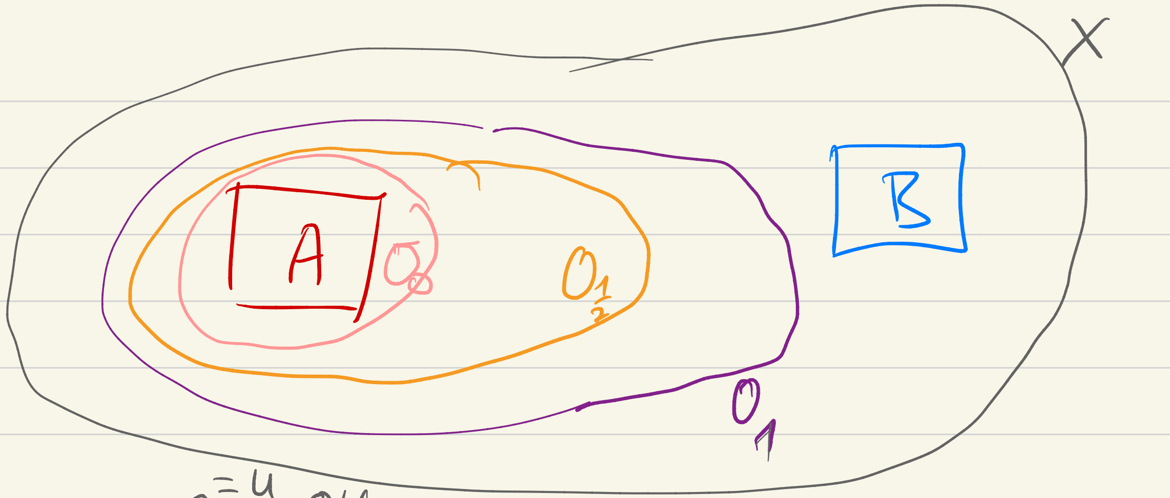
mit $f|_A = 0 \quad f|_B = 1$

stetig und kann zu einer Urysohnfunktion fortgesetzt werden.

1) => 2): Sei X normal, A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen.
Wir wollen eine Urysohnfunktion konstruieren, dh

$$f: X \to [0, 1]$$

mit $f|_A = 0 \quad f|_B = 1$



$A \subset \overbrace{X-B}^{=U}$ offen

$\Rightarrow$ $\exists\ O \subset X$ offen gibt mit

$$A \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset X-B$$

Wir wenden diesen Trick nochmal an

$$\rightsquigarrow \quad A \subset O_0 \subset \overline{O}_0 \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset X-B$$

$$\subset O_{\frac12} \subset O_{\frac12}$$

Und nochmal

$$A \subset O_0 \subset \overline{O}_0 \subset O_{\frac14} \subset \overline{O}_{\frac14} \subset O_{\frac12} \subset \overline{O}_{\frac12} \subset O_{3/4} \subset \overline{O}_{3/4} \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset X-B$$

$\circ \circ \circ$

Wir wiederholen unendlich mal!

$f : X \to [0,1]$

für $x \in O_1$ $\quad f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in O_t\}$

für $x \in X - O_1$ $\quad f(x) = 1$

Insbesondere $\quad f|_A = 0$

$f|_B = 1$

Ist f stetig?

Erinnerung: Letzter Satz in der Vorlesung vom 3.11.

$f : X \to Y = [0,1]$ ist stetig

$\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall U \in \mathcal{B}_Y$ s.d. $f(x) \in U$

ε-Bälle

$\exists\, V \in \underset{\underset{\tau_x}{\parallel}}{B_x}$ s.d. $f(V) \subset U$

"Stetigkeit in x"

Sei $x_0 \in X$ $\quad \varepsilon > 0 \leadsto B_\varepsilon(f(x)$

Dann gibt es d_1, d_2

$$f(x) - \varepsilon < \underset{\underset{\frac{p}{2^m}}{\parallel}}{d_1} < f(x_0) < \underset{\underset{\frac{q}{2^n}}{\parallel}}{d_2} < f(x_0) + \varepsilon$$

[illegible]

Sei $U := \underset{\text{offen}}{O_{d_2}} - \underset{\text{abgeschlossen}}{\overline{O_{d_1}}}$ ist offen.

Dann ist $x_0 \in U$ und
$f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$:

$x_0 \in U$: $x_0 \in \mathcal{O}_{d_2}$ da $f(x_0) < d_2$

und $x_0 \notin \overline{\mathcal{O}_{d_1}}$ weil $f(x_0) > d_1$

also $x_0 \notin \mathcal{O}_{d_1'} \supset \overline{\mathcal{O}_{d_1}}$

$\Rightarrow$ $f(x_0) \in U$

und $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$

$\Rightarrow$ f ist stetig.

✓

2) => 3): Sei A abgeschlossen und $f: A \to \mathbb{R}$ stetig.
Wir wollen f zu $F: X \to \mathbb{R}$ fortsetzen mit Hilfe von Urysohnfunktionen.

1. Angenommen f ist beschränkt also

$$|f(a)| < c \quad \forall a \in A$$

<u>Behauptung</u>: Es existiert eine Abbildung $h: X \to \mathbb{R}$ mit

$$|h(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot c \quad \forall x \in X$$

und $$|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$$

<u>Beweis</u>: $A_+ := \{a \in A \mid f(a) \geq \frac{1}{3} c\}$
und $A_- := \{a \in A \mid f(a) \leq -\frac{1}{3} c\}$
sind abgeschlossen und disjunkt

$\leadsto$ Urysohnfunktion

$$h : X \to \left[-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c\right]$$

mit $$h|_{A_+} = \frac{1}{3}c$$

$$h|_{A_-} = -\frac{1}{3}c$$

Außerdem ist $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$

$\forall a \in A$

<u>Behauptung 2:</u> $\forall n \in \mathbb{N}_0 \underset{0 \leq m \leq n}{\forall} \exists h_m : X \to \mathbb{R}$ stetig

s.d. für $|h_m(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^m c \quad \forall x \in X$

und $\left|f(a) - \sum_{m=0}^{n} h_m(a)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot c$

<u>Beweis</u>: $n = 0 \quad h_0 = h \quad \checkmark$

Induktionsschritt:

Wir wenden Behauptung 1 auf

$$f - \sum_{m=0}^{n} h_m : A \to \mathbb{R} \text{ an}$$

$$\rightsquigarrow h_{n+1} : X \to \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c \right]$$

$$\left| f(a) - \sum_{m=0}^{n+1} h_m(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c$$

$\tilde{f} := \sum_{m=0}^{\infty} h_m$ konvergiert gleichmäßig auf X

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist stetig

$\uparrow$

Analysis

und $\tilde{f}(a) = f(a) \quad \forall a \in A$

und $|\tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot c$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \cdot c = c$$

Also haben wir eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ gefunden falls

$f: A \to \mathbb{R}$ beschränkt ist

Angenommen $|f(a)| < c \quad \forall a \in A$

$A_0 := \{x \in X \mid |\tilde{f}(x)| = c\}$

abgeschlossen und $A_0 \cap A = \emptyset$

$\rightsquigarrow \quad u: X \to [0,1]$ Urysohn funktion

mit $u|_{A_0} = 0$

$u|_A = 1$

Jetzt kann man $\tilde{f}$ duch

$F = \tilde{f} \cdot m$ ersetzen

und dann ist

$$|F(x)| < c \quad .$$

2. $f : A \to \mathbb{R}$ nicht beschränkt.

Sei $\hat{f}(a) := \dfrac{f(a)}{1 + |f(a)|}$

$$\hat{f} : A \to (-1, 1)$$

ist stetig und beschränkt.

Fall 1 $\Longrightarrow$ $\exists\, \tilde{f} : X \to (-1, 1)$ stetig,

f beschränkt

das $\hat{f}$ fortsetzt.

$$F(x) := \frac{\tilde{f}(x)}{1 - |\tilde{f}(x)|}$$

ist eine stetige Funktion

$$F : X \to \mathbb{R}$$

und $a \in A$

$$F(a) = \frac{\tilde{f}(a)}{1 - |\tilde{f}(a)|} = \frac{\frac{f(a)}{1+|f(a)|}}{1 - \left|\frac{f(a)}{1+|f(a)|}\right|}$$

$$= \frac{\frac{f(a)}{\cancel{1+|f(a)|}}}{\frac{1 + \cancel{|f(a)|} - \cancel{|f(a)|}}{\cancel{1+|f(a)|}}} = f(a)$$

$\square$

Also setzt F, f fort

Korollar: Metrische Räume sind normal.

Beweis: Wir konstruieren Urysohnfunktionen für A, B abgeschlossen und disjunkt in den Übungen.

$\square$