Universelle Überlagerungen

Def: Eine Überlagerung $p: E \to B$ ist eine universelle Überlagerung falls E einfach zusammenhängend ist.

also dh $\pi_0(E) = \pi_1(E) = \text{trivial}$

Ein topologischer Raum B ist

- lokal einfach zusammenhängend

  wenn für jedes $b \in B$ eine wegzusammenhängende Umgebung U existiert s.d

  $\pi_1(U, b) = \{e\}$

  Achtung: Manchmal heißt lokal einfach zusammenhängend auch, dass es für alle $b \in B$ eine Umgebungsbasis bestehend aus einfach zusammenhängenden Mengen gibt.

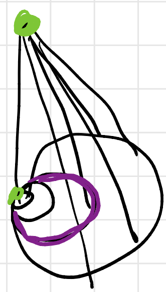
- semi lokal einfach zusammenhängend

wenn für jedes $b \in B$ eine Umgebung U existiert s.d.

$$inc_*(\pi_1(U,b)) = \{e\} \subseteq \pi_1(B,b)$$

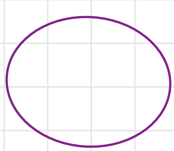
d.h. für alle $[\gamma] \in \pi_1(U,b)$ gilt, dass $inc_*[\gamma] = e \in \pi_1(B,b)$

d.h. im größeren Raum sind alle Schleifen zusammenziehbar aber nicht unbedingt in U



einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ lokal einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ semi lokal einfach zusammenhängend

$\not\Leftarrow$ $\qquad$ $\not\Leftarrow$



Bemerkung: Eine notwendige Bedingung $p: E \to B$ ✓
für die Existenz einer universellen Überlagerung
ist, dass B semi lokal einfach zusammenhängend
ist: Jedes $b \in B$ hat eine Umgebung U
s.d. $p^{-1}(U) \cong \bigsqcup_{f \in F} U_f$ mit $U_f \xrightarrow[p|_{U_f}]{\cong} U$

Eine Schleife γ in U um b
$\rightsquigarrow$ eine Schleife $s_f \circ \gamma$ in
U_f um b_f

Inverses $=: s_f$

E einfach zusammenhängend

$$\Rightarrow \quad [s_f \circ \gamma] = e \in \pi_1(E, b_f)$$

Sei H' eine Homotopie von $s_f \circ \gamma$
nach ε_{b_f} ← konstante Schleife

$\Rightarrow$ $p \circ H'$ ist eine Homotopie
von γ nach ε_b ← konstante Schleife um b

$$\Rightarrow \quad inc_* [\gamma] = e \in \pi_1(B, b)$$

Def: Ein top Raum B ist **lokal wegzusammenhängend** falls es für jedes $b \in B$ eine Umgebungsbasis bestehend aus offenen wegzusammenhängenden Teilmengen von B gibt,

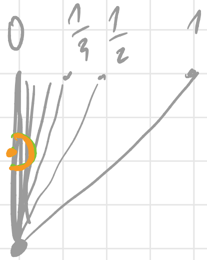
d.h. $\forall\, b \in B$ und $b \in U$ offen

$\exists\; b \in V \subseteq U$ mit $V \subseteq B$ offen und wegzusammenhängend.

Achtung: wegzusammenhängend

$$\not\Downarrow$$

lokal wegzusammenhängend



Konstruktion einer universellen Überlagerung

Motivation: Angenommen $p: \underset{e_0}{E} \to \underset{b_0}{B}$ ist eine universelle Überlagerung. ($e_0 \mapsto b_0$)

Dann existiert für $e_1 \in E$ eine eindeutige Homotopieklasse $[\gamma]$ von Wegen von e_0 nach e_1, weil E einfach zusammenhängend ist (siehe Hausübung 2)

$p \circ \gamma$ ist ein Weg in B von b_0 nach $p(e_1)$.

und $\underset{\text{in } E}{\gamma \simeq \gamma'} \iff p \circ \gamma \simeq p \circ \gamma'$

$\uparrow$ Homotopie Liftungseigenschaft

Also

Punkte in E $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Homotopieklassen von Wegen in B mit Startpunkt b_0

Konstruktion:

Sei B ein wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi lokal einfachzusammenhängend.

$b_0 \in B$

Homotopieklassen rel $\{0,1\}$

$$E := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ein Weg in } B \text{ mit } \gamma(0) = b_0 \}$$

$$p: E \to B$$
$$p([\gamma]) = \gamma(1)$$

Abbildung von Mengen

wohldefiniert weil $[\gamma]$

Homotopieklasse von Wegen, d.h. Homotopieklasse rel $\{0,1\}$

$\gamma \simeq \gamma' \Rightarrow \gamma(1) = \gamma'(1)$

Sei $\mathcal{U} := \{ U \subseteq B \mid U$ offen + wegzusammenhängend sd. $\pi_1(U) \xrightarrow{inc_*} \pi_1(B)$ ist trivial $\}$

<u>Bem</u>: Da $U \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend, ist $\pi_1(U) \xrightarrow{inc_*} \pi_1(B)$ unabhängig

von der Wahl des Basispunkts

Lemma 1: $\mathcal{U}$ ist eine Basis für die Topologie von B.

Beweis: 1) ZZ $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u = B$:

Jedes $b \in B$ hat eine Umgebung V sd. $\pi_1(V,b) \xrightarrow{inc_*} \pi_1(B,b)$ trivial ist

B lokal wegzusammenhängend

$\Rightarrow \exists$ wegzusammenhängende Umgebung W_b von b

mit $W_b \subseteq V$

Außerdem

$$\begin{tikzcd} \pi_1(W_b, b) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "inc_* \text{ trivial}"'] & \pi_1(V,b) \arrow[r, "trivial"] & \pi_1(B,b) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad W_b \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \quad B \subseteq \bigcup_{b \in B} W_b \subseteq \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u$

2) $U, V \in \mathcal{U}$, $b \in U \cap V$

Wir suchen $W \in \mathcal{U}$ mit $b \in W \subseteq U \cap V$

B lokal wegzusammenhängend

$\Rightarrow \exists$ wegzusammenhängende offene Menge W s.d.

$b \in W \subset U \cap V$

trivial

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(W,b) \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{inc}_*"'] & \pi_1(U \cap V, b) \arrow[r] & \pi_1(U,b) \arrow[r] & \pi_1(B,b)
\end{tikzcd}$$

trivial

$\Rightarrow W \in \mathcal{U}$

$\square$

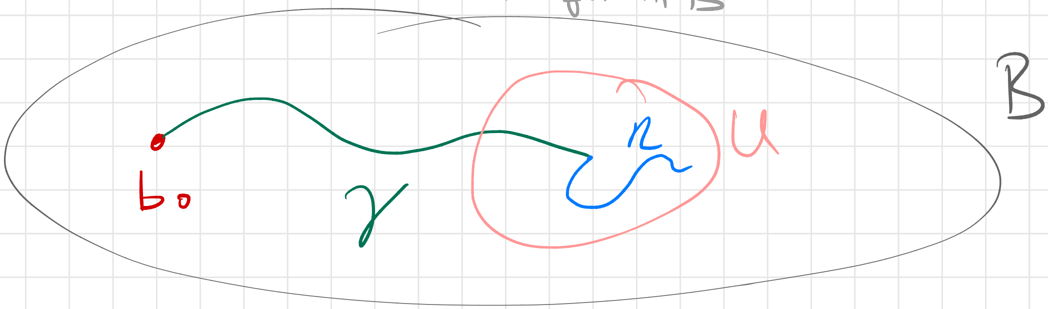
Topologie auf E:

Sei $U \in \mathcal{U}$ und γ ein Weg in B

mit $\gamma(0) = b_0$ und $\gamma(1) \in U$

$U_{[\gamma]} := \{ [\gamma * \eta] \mid \eta \text{ ist ein Weg in } U \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1) \}$

Homotopieklassen von Wegen in B



<u>Lemma 2:</u> $[\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$

<u>Bew.:</u> $\gamma' \simeq \gamma * \eta$ für einen Weg η in U.

$\Rightarrow$ Elemente in $U_{[\gamma']}$ sind von der Form $[\gamma * \eta * \mu)$ für μ einen Weg in U

$\Rightarrow$ $U_{[\gamma']} \subseteq U_{[\gamma]}$

$\eta * \mu$ ein Weg in U

$\eta^{-1}(s) := \eta(1-s)$

η rückwärts entlang laufen

Andererseits gilt, dass $\gamma \simeq \gamma' * \eta^{-1}$ und somit $U_{[\gamma]} \subseteq U_{[\gamma']}$ $\square$

Proposition: Die $U_{[\gamma]}$ formen eine Basis für eine Topologie auf E.

Beweis: 1) Offensichtlich ist

$$E = \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ein Weg in } B \text{ mit } \gamma(0) = b_0 \}$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$\bigcup_{[\gamma]\in E} U_{[\gamma]}$$

für ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\gamma(1) \in U$

2) Seien $U, V \in \mathcal{U}$ und $[\gamma], [\gamma'] \in E$

mit $\gamma(1) \in U$
$\gamma'(1) \in V$

$$[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 2}}}{=} U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']}$$

Weil $\mathcal{U}$ ein Basis für die Top auf B ist, gibt es ein $W \in \mathcal{U}$ mit $\gamma''(1) \in W \subseteq U \cap V$

$$\Rightarrow [\gamma''] \in W_{[\gamma'']} \subseteq U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} \qquad \square$$

Also haben wir einen topologischen Raum E.

<u>Satz</u>: Seien B, E und $p: E \to B$ wie oben.
$\downarrow$
b_0

1) $p: E \to B$ ist stetig
2) $p: E \to B$ ist eine Überlagerung
3) E ist einfach zusammenhängend

$\Big\}$ $p: E \to B$ ist eine universelle Überlagerung

<u>Beweis</u>:

↙ Basis für B

1) Sei $U \in \mathcal{U}$

Wir wollen zeigen, dass $p^{-1}(U)$ offen in E ist.

$$p^{-1}(U) = \left\{ [\gamma] \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma \text{ ein Weg in } B \\ \text{mit } \gamma(0) = b_0 \\ \text{und } \gamma(1) \in U \end{array} \right\}$$

$$= \bigcup U_{[\gamma]} \qquad \text{ist offen}$$

↗
Vereinigung über Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen von b_0 nach U

2) Weil B wegzusammenhängend ist, ist p surjektiv.

$U \in \mathcal{U}$

Wir zeigen, dass $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen in E homöomorph zu U.

Wir wissen bereits, dass $p^{-1}(U) = \bigcup U_{[\gamma]}$

Lemma 2 $\Rightarrow$ $[\delta] \in U_{[\gamma]}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{U_{[\gamma]} = U_{[\delta]}}$

Wir wollen diese in der Vereinigung zusammenfassen

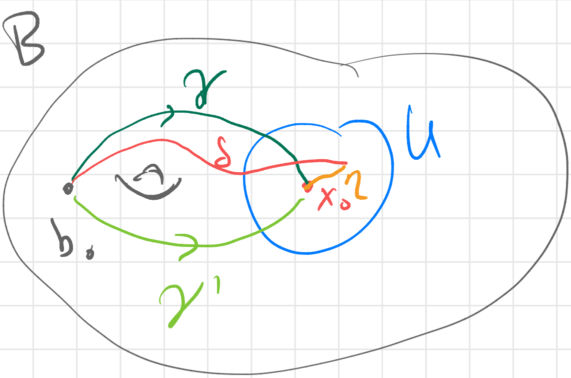
Sei $x_0 \in U$.

Behauptung: a) Jedes $[\delta] \in p^{-1}(U)$ liegt in einem $U_{[\gamma]}$ mit γ ein Weg von b_0 nach x_0

b) $\gamma \not\simeq \gamma'$

γ und γ' beides Wege von b_0 nach x_0

Dann gilt $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} = \emptyset$



Beweis:

a) U wegzusammenhängend

$\Rightarrow \exists$ Weg η von $\delta(1)$ nach x_0

Weil

$\underbrace{\delta * \eta}_{\text{Weg von } b_0 \text{ nach } x_0} * \eta^{-1} \simeq \delta$

$\Rightarrow [\delta] \in U_{[\delta * \eta]}$

b) Angenommen $[\delta] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$

$\Rightarrow$ (Lemma 2) $\quad U_{[\gamma]} = U_{[\delta]} \qquad U_{[\gamma']} = U_{[\delta]}$

$\Rightarrow [\gamma'] \in U_{[\gamma]}$

und $\gamma' \simeq \gamma * \eta$ $\quad$ η eine ~~Weg~~ Schleife in U um x_0

$x_0 = \gamma(1) = \gamma'(1)$

$\mathrm{inc}_* [\eta] = e \in \pi_1(B, x_0)$

$\Rightarrow \gamma' \simeq \gamma$ $\quad$ ↯

Es folgt $\quad p^{-1}(U) = \bigsqcup U_{[\gamma]}$

disjunkte Vereinigung über Homotopieklassen von Wegen von b_0 nach x_0

Es bleibt zu zeigen, dass

$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ ein Homöomorphismus ist

- stetig ✓
- surjektiv: U ist wegzusammenhängend
- injektiv:

Angenommen η, μ Wege in U

$$p([\gamma * \eta]) = p([\gamma * \mu])$$
$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$
$$\eta(1) \qquad\qquad \mu(1)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\gamma * \eta \simeq \gamma * \mu$$

$\eta * \mu^{-1}$ ist eine Schleife in U um $\gamma(1)$.

$\Rightarrow$ $inc_*([\eta * \mu^{-1}]) = e \in \pi_1(B, \gamma(1))$

$\uparrow$

$\pi_1(U) \xrightarrow{inc_*} \pi_1(B)$

$\uparrow$

trivial

Daraus kann man folgern, dass
$\eta \simeq \mu$ (als Wege in B_1 nicht unbedingt in U)

$\Rightarrow \quad \gamma * \eta \simeq \gamma * \mu$

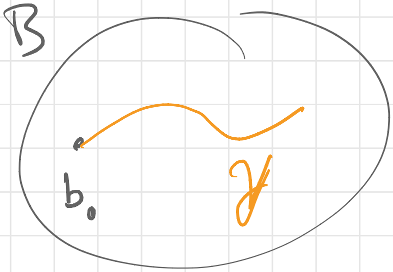
· offen: sei $V_{[\gamma']} \subseteq U_{[\gamma]}$
eine offene TM. Wir können annehmen
dass $V \in \mathcal{U}$ und $\gamma = \gamma'$.
Lemma 2

Dann $p(V_{[\gamma]}) = V \in$ offen in B.

3) E ist einfach zusammenhängend:
Eine natürliche Wahl eines Basispunktes in
E ist $[\varepsilon_{b_0}]$.
konstant b_0

E ist wegzusammenhängend:
Sei $[\gamma] \in E$

Wir suchen einen Weg in E von $[\varepsilon_{b_0}]$ nach $[\gamma]$



Sei $\Gamma : I \to E$

$\Gamma(t) = [\gamma_t]$

wobei γ_t eine Reparametrisierung von $\gamma|_{[0,t]}$ ist.

$\Gamma(0) = [\varepsilon_{b_0}]$ und $\Gamma(1) = [\gamma]$.

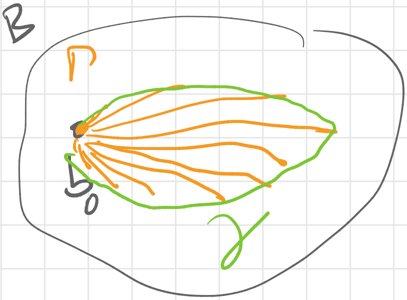
$\Rightarrow \Gamma$ ein Weg von $[\varepsilon_{b_0}]$ nach $[\gamma]$.

$\pi_1(E, [\varepsilon_{b_0}]) = \{e\}$:

Sei $[\Gamma] \in \pi_1(E, [\varepsilon_{b_0}])$

Dann ist $\gamma = p \circ \Gamma$ eine Schleife in B um b_0.

Sei γ_t = Reparametrisierung von $\gamma|_{[0,t]}$



und $\gamma' : I \to E$

$$\gamma'(t) = [\gamma_t]$$

Γ und γ' sind beides Lifts von γ mit

$$\Gamma(0) = \gamma'(0) = [\varepsilon_{b_0}]$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit des Lifts $\quad \gamma' = \Gamma$

$$\Rightarrow \quad [\gamma_1] = \gamma'(1) = \Gamma(1)$$

$$[\gamma_1] = [\gamma] = [p \circ \Gamma] = p_*([\Gamma])$$

$$\Gamma(1) = [\varepsilon_{b_0}] = e$$

$\Leftarrow$ Γ ist eine Schleife

Wir haben letzte Woche Montag gesehen, dass p_* injektiv ist.

$$\Rightarrow \quad [\Gamma] = e \in \pi_1(E, [\varepsilon_{b_0}]).$$

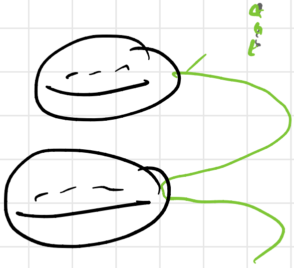
$\square$

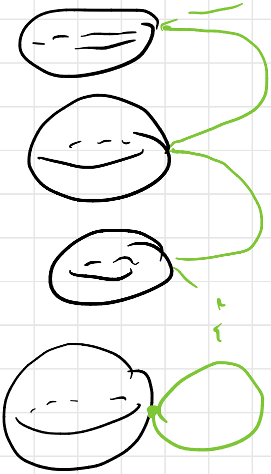
Konkrete Beispiele universeller Überlagerungen:

1. Für B einfach zusammenhängend ist $id: B \to B$ eine universelle Überlagerung (Bsp $B = S^2$)
   $B = S^n \quad n \geq 2$

2. Exponentialabbildung:
   $$p: \mathbb{R} \to S^1$$
   $$t \mapsto e^{2\pi i t}$$

3. universelle Überlagerung von $S^2 \vee S^1$





4. $S^n \to S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{RP}^n \qquad n \geq 2$