Letztes Mal: Teilraumtopologie

Dieses Mal:
- Produkttopologie
- Quotiententopologie

Produkttopologie

Bsp: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Standardtopologie

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$= \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \times (a_i', b_i')$$

Frage: $X = \prod_{i \in I} X_i$ ← top Räume

Wie kann man eine Topologie auf X definieren?

Def Eine **Subbasis** auf eine Menge X ist eine Menge S von Teilmengen von X s.d.

$$\bigcup_{u \in S} U = X$$

Lemma: X Menge, S eine Subbasis
Die Menge der endlichen Schnitte von Elementen in S

$$\mathcal{B} = \{ S_1 \cap \dots \cap S_n \mid S_1, \dots, S_n \in S \}$$

ist eine Basis einer Topologie auf X.

Bew: 1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ✓

2) Wir wollen zeigen, dass
$B, B' \in \mathcal{B}$ dann gilt es für jedes $x \in B \cap B'$ ein $B'' \in \mathcal{B}$ s.d. $B'' \subset B \cap B'$

$$B = S_1 \cap \dots \cap S_n \quad S_j', S_i \in S$$
$$B' = S_1' \cap \dots \cap S_m'$$

$$B \cap B' = \underbrace{S_1 \cap \dots \cap S_n \cap S_1' \cap \dots \cap S_m'}_{=: B''}$$

$\square$

S eine Subbasis auf X erzeugt eine Topologie auf X.

F: Was sind die offenen Mengen?

A: $S \rightsquigarrow$ Basis $\mathcal{B} \ni S_1 \cap \ldots \cap S_n$

$\rightsquigarrow$ Topologie offenen Mengen

$$\bigcup_{i \in I} B_i \qquad B_i \in \mathcal{B}$$

$X = \prod_{i \in I} X_i \qquad X_i$ topologische Räume

Sei $\pi_j : X \to X_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor.

Dann ist

$$S = \{ \pi_j^{-1}(U) \mid j \in I \quad U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X_j \}$$

eine Subbasis für X.

Def: Die von S erzeugte Topologie auf X heißt **Produkttopologie**.

F: Wie sehen die Basiselemente dieser Topologie aus?

A: $\prod_{i \in I} U_i$ $\quad$ $U_i \subset X_i$ offen und $U_i \neq X_i$ für höchstens endlich viele $i \in I$

Bemerkung: In den Übungen lernen wir eine weitere Topologie auf $X = \prod X_i$ kennen, nämlich die **Boxtopologie**, mit Basis

$\prod_{i \in I} U_i$ $\quad$ $U_i \subseteq X_i$ offen ohne Endlichkeitsbeschränkung top Räume

Lemma: Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie.

(i) $\pi_i : X \to X_i$ ist stetig

(ii) Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf X für die alle π_i stetig sind, d.h. Sei τ eine Topologie für die alle π_i stetig sind gilt

U offen Produkttopologie

$\Rightarrow U \in \tau$

(iii) Y top Raum

für jedes $i \in I$ sei $f_i : Y \to X_i$ stetig.

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ s.d. $\pi_i \circ g = f_i \;\; \forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists! g"] \arrow[dr, "f_i"'] & X = \prod X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

$*$

Bew: (i) $U \subset X_i$ offen, dann ist $\pi_i^{-1}(U)$ offen in X per Definition ✓

(ii) Sei τ eine Topologie auf X s.d. $\pi_i : X \to X_i$ stetig sind.

$U \subseteq X_i \Rightarrow \pi_i^{-1}(U)$ offen bzgl Produktopologie und offen bzgl τ

$\mathcal{S} \subseteq \tau$

$\Rightarrow$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie $\subseteq \tau$ ✓

(iii) $g : Y \to X$

$g(y) := (f_i(y))_{i \in I} \in X$

g ist eindeutig und $(*)$ kommutiert.

g ist stetig: Es reicht zu zeigen, dass $g^{-1}(S)$ offen ist für $S \in \mathcal{S}$ ← Subbasis für Produkttopologie

Der Rest folgt

von den Axiomen in der Definition einer Topologie.

$S \in \mathcal{S}$ $\quad g^{-1}(S) = g^{-1}(\pi_i^{-1}(U))$

$\parallel$

$\pi_i^{-1}(U)$ $\quad = (\pi_i \circ g)^{-1}(U)$

$U \subseteq X_i$ offen

$$= \underbrace{f_i^{-1}(U)}_{\text{offen}}$$

f_i stetig

$\square$

<u>Bem</u>: Eigenschaft (iii) heißt auch universelle Eigenschaft der Produkttopologie. Insbesondere kann man die Produkttopologie darüber definieren.

Beispiele:

1) Die Produkttopologie auf $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{m \text{ Mal}}$ ist gleich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^m$.

2) $\left.\begin{array}{l} +: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad (a,b) \mapsto a+b \\ \cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad (a,b) \mapsto a\cdot b \end{array}\right\}$ sind stetig

$\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist stetig

$a \mapsto a^{-1}$

3) $\mathbb{R}^{m^2} = \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) = \{ m\times m\text{-Matrizen}\}$

stetig $\left\{\begin{array}{l} +: \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})\times\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \\ \quad (A,B) \mapsto A+B \\ \cdot: \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})\times\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \\ \quad (A,B) \mapsto A\cdot B \end{array}\right.$

- $Gl_m(\mathbb{R}) \to Gl_m(\mathbb{R})$ ist stetig

$A \mapsto A^{-1}$

$\{A\in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

Def: Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe $(G, \cdot, e)$

Menge Verknüpfung Einheitselement

s.d. G ein topologischer Raum ist

und $\xleftarrow{}$ Produkttopologie

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

und
$$G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$
stetig sind

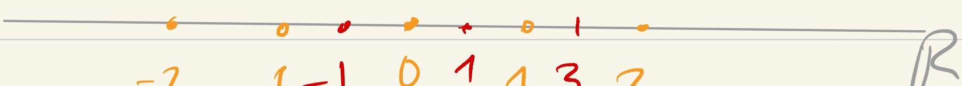
Bsp:
- $(\mathbb{R}, +, 0)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$
- $(\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}), +, \text{0-Matrix})$
- $(Gl_m(\mathbb{R}), \cdot, \text{Einheitsmatrix})$

Die Quotiententopologie

Bsp: Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}$$
$\rightsquigarrow$ neue Menge $\mathbb{R}/_\sim =: \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ von Äquivalenzklassen

F: Welchen topologischen Raum sollten wir dadurch erhalten?

A:



"S^1" =

Generell: Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $q: X \to X/\sim$ die Quotientenabbildung.

<u>Lemma</u>: $\tau := \{ U \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(U) \text{ offen in } X \}$ ist eine Topologie auf $X/\sim$.

<u>Def</u>: Wir nennen die Topologie τ auf $X/\sim$ **Quotiententopologie**.

<u>Bew</u>: Wir müssen die 3 Axiome überprüfen.

1) $\emptyset \in X/\sim$ ist offen in $X/\sim$, da $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ offen in X ist.
$X/\sim$ ist offen in $X/\sim$, da $q^{-1}(X/\sim) = X$ offen in X ist.

2) Seien $U, V \in \tau$.
Dann ist $q^{-1}(U \cap V) = \underbrace{q^{-1}(U)}_{\text{offen}} \cap \underbrace{q^{-1}(V)}_{\text{offen}}$

offen in X $\Rightarrow$ $U \cap V$ offen in $X/\sim$

3) $U_i \in \tau$ $i \in I$
Dann ist $q^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{q^{-1}(U_i)}_{\text{offen in } X}$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ offen in $X/\sim$

$\square$

Lemma: (i) $q: X \to X/\sim$ ist stetig
(ii) τ ist die feinste Topologie
τ: Quotiententopologie
s.d. q stetig ist, d.h.
$\tau' \supsetneq \tau \Rightarrow q$ nicht stetig bzgl τ'
bzw $q: X \to X/\sim$ ist stetig
$X/\sim$: Topologie τ'

$\Rightarrow \tau' \subseteq \tau$
(iii) $f: X \to Y$ stetig mit $f(x) = f(x')$
für alle $x \sim x'$, dann faktorisiert
f durch die Quotientenabbildung.

d.h. heißt es gibt genau eine stetige Abb $g: X/_\sim \longrightarrow Y$

Quotiententop

s.d.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\exists!\, g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Bew</u>: (i) per Definition

(ii) Sei τ' eine Topologie auf $X/_\sim$ s.d. $q: X \to X/_\sim$ stetig ist.

Dann gilt, dass wenn $U \in \tau'$ dann ist $q^{-1}(U)$ offen

$\Rightarrow U \in \tau$

$\Rightarrow \tau' \subseteq \tau$ ← Quotiententopologie

(iii) Definition von g:

$$g: X/_\sim \to Y$$
$$g(q(x)) = f(x)$$

g ist wohldefiniert, weil $f(x) = f(x')$ für $q(x) = q(x')$

also für $x \sim x'$

Außerdem ist g eindeutig.

g ist stetig:

Sei $U \subseteq Y$ offen

Ist $g^{-1}(U)$ offen in $X/\sim$?

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ q)^{-1}(U)$$

$$= f^{-1}(U)$$

ist offen, weil f stetig

$\overset{\text{Definition der Quotiententopologie}}{\Rightarrow}$ $U \subseteq X/\sim$ offen in $X/\sim$

$\square$

<u>Bem</u>: Eigenschaft (iii) heißt universelle Eigenschaft der Quotiententopologie. Man könnte die Quotiententopologie auch darüber definieren.

<u>Def</u>: Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt offen falls $f(U)$ offen in Y

für U offen in X.

= "Bilder offener Mengen sind offen."

<u>Bem</u>: Eine stetige Bijektion ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen ist.

<u>Bsp</u>: (i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ also $x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$

Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zu S^1 ist.

$$f : \mathbb{R} \to S^1 \qquad f(x) = e^{2\pi i x}$$

universelle Eigenschaft der Quotiententop
$\Rightarrow \exists!\, g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$

st

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$g \Leftarrow$ stetig

g ist surjektiv, da f surjektiv ist.
g ist injektiv:
$f(x) = f(x') \Leftrightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x'}$
$\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$

D.h. g ist eine stetige Bijektion und um zu zeigen, dass g ein Homöomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass g offen ist.

f ist offen:

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ← offene Intervalle bilden eine Basis

$f((-\varepsilon, \varepsilon)) \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

das ist offen.

Außerdem $f(x+x') = f(x) f(x')$
$f(0) = 1$

$\Rightarrow$ Wir können annehmen, $(a,b) = (-\varepsilon, \varepsilon)$

da man (a,b) verschieben kann,

$\Rightarrow f$ offen.

$U \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ offen

$$g(U) = f(\underbrace{q^{-1}(U)}_{\text{offen}})$$

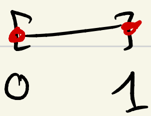
$\Rightarrow g$ ist offen

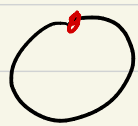
und $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \underset{\text{homöo}}{\cong} S^1$

(ii) $X = [0,1]$ ← Teilraumtopologie induziert von Standardtopologie auf $\mathbb{R}$

Äquivalenzrelation auf X:

$x \sim x' :\Leftrightarrow x = x'$ oder $x, x' \in \{0,1\}$



$\rightsquigarrow \quad S^1 =$ 

$f: [0,1] \to S^1$

$f(x) = e^{2\pi i x}$ faktorisiert

$\rightsquigarrow$ universelle Eigenschaft $\quad g: [0,1]/\sim \; \to S^1$

Das ist wieder ein Homöomorphismus.

(iii) $X = [0,1]^2$

Äquivalenzrelation:

$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y')$

oder $x, x' \in \{0,1\}$

$y = y'$

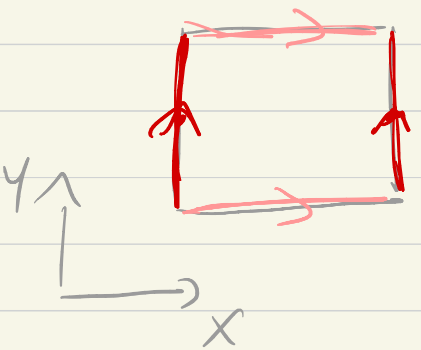
oder $y, y' \in \{0,1\}$

und $x = x'$

oder

$\{x, x'\} = \{y, y'\}$

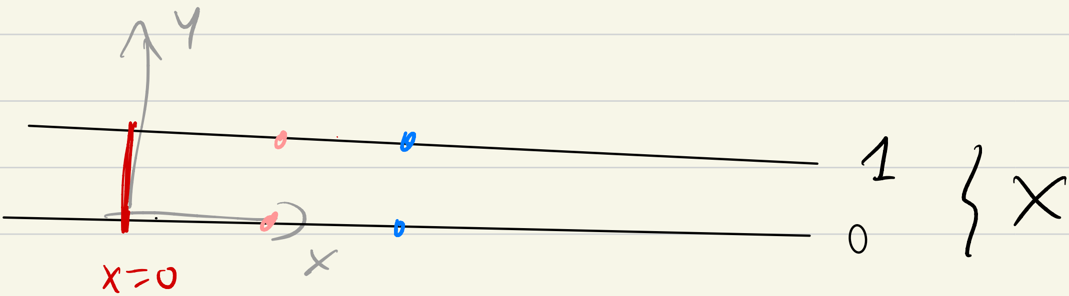
$= \{0,1\}$



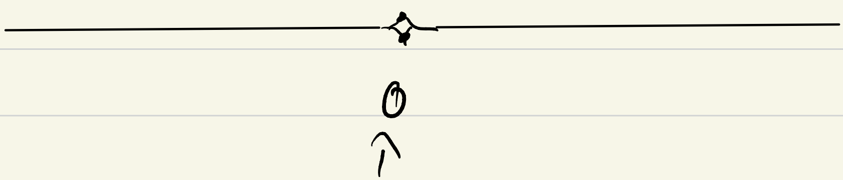
$[0,1]^2/\sim$ ist homöomorph zum Torus

$S^1 \times S^1$.

(iv) $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$(x,y) \sim (x',y') :\Longleftrightarrow (x,y) = (x',y')$
oder
$x = x' \neq 0$

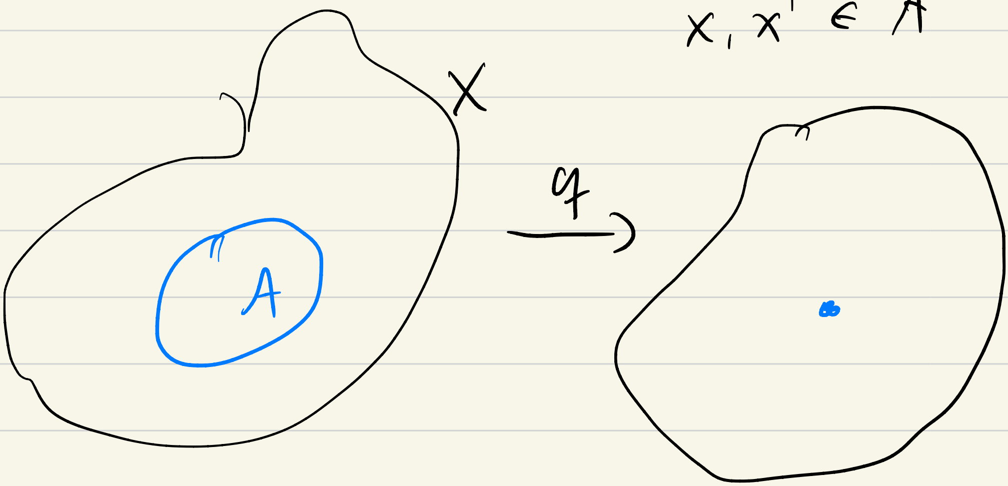


Spoiler: Dieser Raum ist nicht Hausdorff.

Def: Sei X ein topologischer Raum, und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.
Wir defieren

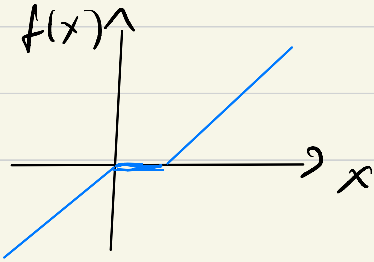
$$X/A := X/\sim$$

wobei $x \sim x' :\Leftrightarrow x = x'$ oder $x, x' \in A$



Bsp: (i) $\mathbb{R}/[0,1]$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \in [0,1] \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$



$\rightsquigarrow g: \mathbb{R}/[0,1] \to \mathbb{R}$

stetig

und
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "q"'] \arrow[rd, "f"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\circ"] & \\ \mathbb{R}/[0,1] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

g ist bijektiv.

g ist Homöomorphismus (g ist offen):

$U \subseteq \mathbb{R}/_{[0,1]}$ offen in Quotiententop

Ist $V = q^{-1}(U)$ offen?

1) $V \cap [0,1] = \emptyset \Rightarrow f(V)$ ist offen

2) $[0,1] \subseteq V \Rightarrow f(V)$ ist offen

$\Rightarrow f$ offen und $\mathbb{R}/_{[0,1]}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$

ii) $\mathbb{R}/(0,1) \overset{?}{\cong} \mathbb{R}$?

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/(0,1)$

$\{q(\frac{1}{2})\} \subseteq \mathbb{R}/(0,1)$

1-Punktmenge

ist offen, weil $q^{-1}(\{q(\frac{1}{2})\}) = (0,1)$ ~~ist~~ offen ist.

D.h. $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}/(0,1)$, weil in $\mathbb{R}$ 1-Punktmengen nicht offen sind.