

Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

1 Topologische Räume und stetige Funktionen

Zuerst wollen wir Begriffe aus der Analysis wiederholen um später die Definition von topologischen Räumen zu motivieren. Die ersten metrischen Räume, die man typischerweise antrifft, sind die Vektorräume \mathbb{R}^n , die mit verschiedenen Normen ausgestattet werden können. Zum Beispiel definiert man die *Supremumsnorm*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

oder für $1 \leq p < \infty$ die ℓ^p -Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

DEFINITION 1.1. Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* bezüglich einer Norm $\|_\cdot\|$ falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x'\| < \delta$ gilt.

SATZ 1.2. Je zwei Normen $\|_\cdot\|$ und $\|_\cdot\|'$ auf \mathbb{R}^n sind äquivalent, d. h. es gibt Konstanten $c, C > 0$, so dass

$$c\|x\| < \|x\|' < C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

KOROLLAR 1.3. Der Stetigkeitsbegriff für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ hängt nicht von der gewählten Norm auf \mathbb{R}^n oder \mathbb{R} ab.

Dieses Korollar motiviert sofort die Frage, ob es einen Begriff von Stetigkeit gibt, der von der Wahl einer Norm losgelöst ist? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich ja, aber wir werden dafür zuerst den Begriff einer *Metrik* untersuchen.

DEFINITION 1.4. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für $x, y, z \in X$ gilt:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d auf X .

Zum Beispiel liefert jede Norm $\| \cdot \|$ auf einem Vektorraum V eine Metrik durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

DEFINITION 1.5. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig*, falls es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt.

Diese Definition sieht erstmal nicht besonders hilfreich aus für unser Ziel einen allgemeineren Begriff der Stetigkeit zu finden. Aber mit ihr können wir beginnen eine Definition zu finden, die die Metrik nicht mehr explizit erwähnt.

DEFINITION 1.6. Sei (X, d) ein metrische Raum. Der *offene Ball* um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Beispielsweise können wir $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ betrachten. Dann ist

- das offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen.
- die Vereinigung zweier offener Intervalle $(a, b) \cup (c, d)$ offen.
- das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *nicht* offen.

SATZ 1.7. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ offen.

Beweis. Sei zuerst f stetig und $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Aber U ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Da f stetig ist, gibt es tatsächlich ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt. Das bedeutet, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, oder anders gesagt, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$.

Sei umgekehrt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Der offene Ball $B_\varepsilon(f(x))$ ist offen (Übungsaufgabe!) und nach der Annahme an f ist damit auch $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen und $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Oder anders gesagt, für jedes $x' \in B_\delta(x)$, d. h. $d(x, x') < \delta$, ist $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, d. h. $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. \square

Mit diesem Satz haben wir einen vielversprechenden Kandidaten für einen Stetigkeitsbegriff, denn Bedingung (ii) braucht nicht mehr explizit eine Metrik, sondern nur noch den Begriff einer *offenen Teilmenge*.

1.1 Grundbegriffe

DEFINITION 1.8. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X mit

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(iii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{U \in M} U \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Teilmengen* von X und die Elemente von X heißen *Punkte*. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{T}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{T} auf X .

DEFINITION 1.9. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}_Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist, d. h. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Unsere Beispiele von metrischen Räumen liefern sofort Beispiel von topologischen Räumen. Wir betrachten zuerst \mathbb{R} . Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt dann *offen*, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Die Axiome sind erfüllt:

(i) Für \emptyset gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist natürlich $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offen, und $x \in U \cap V$, so gibt es ein $\varepsilon_U > 0$ mit $(x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \subset U$ und ein $\varepsilon_V > 0$ mit $(x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset (x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \cap (x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen in \mathbb{R} und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Aber U_j ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j$. Also ist dann auch

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ganz ähnlich zeigt man, dass \mathbb{R}^n mit der von einer Norm induzierten Metrik einen topologischen Raum definiert. Wieder heißt nämlich eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen*, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x - x'\| < \varepsilon\} \subset U$.

Allgemeiner definiert jede Metrik d auf einer Menge X eine Topologie. Sie heißt die von d induzierte *metrische Topologie* auf X : Eine Teilmenge $U \subset X$ ist *offen*, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wieder sind die Axiome erfüllt:

(i) Für \emptyset gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in X$ ist natürlich $B_\varepsilon(x) \subset X$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset X$ und $V \subset X$ offen und $x \in U \cap V$, so gibt es $\varepsilon_U > 0$ und $\varepsilon_V > 0$ mit $B_{\varepsilon_U}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_V}(x) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset B_{\varepsilon_U}(x) \cap B_{\varepsilon_V}(x) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ und damit

$$B_\varepsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Hier noch einige abstraktere Beispiele für topologische Räume: Jede Menge X kann mit der *trivialen Topologie*¹ $\{\emptyset, X\}$ versehen werden. Genauso kann jede Menge X mit der *diskreten Topologie* $\mathcal{P}(X)$, der Potenzmenge von X , versehen werden. Für beide sind die Axiome klar.

Seien verschachtelte topologische Räume $U_1 \subset U_2 \subset \dots$, so dass die Inklusionen $\iota_{i,j}: U_i \hookrightarrow U_j$ stetig sind, gegeben. Letzteres heißt, dass wann immer $V \subset U_j$ offen ist, so ist auch $\iota_{i,j}^{-1}(V) = V \cap U_i$

¹Oder der *indiskreten Topologie* oder der *Klumpentopologie*

offen. In dieser Situation trägt die Vereinigung $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ eine Topologie, genannt die *finale Topologie*. In ihr ist eine Teilmenge $V \subset U$ genau dann offen, wenn $V \cap U_i$ in U_i für alle i offen ist. Wir überprüfen die Axiome:

- (i) Natürlich sind \emptyset und U selbst offen.
- (ii) Seien $V, W \subset U$ offen. Dann ist $(V \cap W) \cap U_i = (V \cap U_i) \cap (W \cap U_i)$ und letzteres ist ein endlicher Schnitt offener Mengen in U_i . Also ist auch $V \cap W$ offen in U .
- (iii) Ist $\{V_j\}_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen in U , so ist wieder

$$U_i \cap \bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J} U_i \cap V_j$$

eine Vereinigung von offenen Teilmengen von U_i . Also ist auch $\bigcup_{j \in J} V_j$ offen in U .

DEFINITION 1.10. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Der Begriff „abgeschlossen“ hat nichts mit „nicht offen“ zu tun! Zum Beispiel sind in jedem topologischen Raum \emptyset und X sowohl abgeschlossen als auch offen.

SATZ 1.11. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle abgeschlossenen $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.

Beweis. Für jede Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

DEFINITION 1.12. Gegebenen einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$, definiere

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \bigcap_{\substack{A \supset M \\ \text{abgeschlossen}}} A, & \text{den Abschluss von } M \text{ in } X, \\ M^\circ &= \bigcup_{\substack{U \subset M \\ \text{offen}}} U, & \text{das Innere von } M \end{aligned}$$

und

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ, \quad \text{den Rand von } M.$$

Zum Beispiel ist für $M = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ in der euklidischen Topologie der Abschluss $\overline{M} = [0, 1]$, das Innere $M^\circ = (0, 1)$ und der Rand $\partial M = \{0, 1\}$. Für $M = \mathbb{Q}$ haben wir den Abschluss $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und das Innere $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ und damit auch den Rand $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Allgemein heißt eine Teilmenge $M \subset X$ in einem topologischen Raum X *dicht*, wenn $\overline{M} = X$.

1.2 Basen für Topologien

DEFINITION 1.13. Eine *Basis für eine Topologie* auf X ist eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit:

- (i) $\bigcup \mathcal{B} = X$, d. h. \mathcal{B} überdeckt X ,
 - (ii) für je zwei $U, U' \in \mathcal{B}$ und $x \in U \cap U'$ gibt es ein $U'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in U'' \subset U \cap U'$.
- Erfüllt \mathcal{B} nur die erste Bedingung, so ist \mathcal{B} eine *Subbasis für eine Topologie* auf X .

SATZ 1.14. Sei \mathcal{S} eine Subbasis für eine Topologie auf X . Dann bildet die Menge

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap \dots \cap S_n : n \in \mathbb{N} \text{ und } S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

aller endlichen Schnitte von Mengen in \mathcal{S} eine Basis für eine Topologie auf X .

Beweis. Nachdem $\bigcup \mathcal{S} = X$, überdeckt natürlich auch \mathcal{B} ganz X . Seien weiter $B = S_1 \cap \dots \cap S_n$ und $B' = S'_1 \cap \dots \cap S'_n$ Elemente von \mathcal{B} . Dann ist

$$B \cap B' = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap S'_1 \cap \dots \cap S'_n \in \mathcal{B}.$$

Insbesondere gibt es für jedes $x \in B \cap B'$ ein $B'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in B'' \subset B \cap B'$, nämlich etwa $B'' = B \cap B'$. \square

DEFINITION 1.15. Gegeben eine Basis oder Subbasis \mathcal{B} für eine Topologie auf X ist die von \mathcal{B} erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ die kleinste Topologie auf X , die alle Mengen in \mathcal{B} enthält.

SATZ 1.16. Für eine Basis \mathcal{B} ist die erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ gegeben durch

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \text{ beliebig und } B_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Beweis. Zuerst ist für jede Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ mit $B_i \in \mathcal{B}$ natürlich $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Das heißt, wir haben die Inklusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Nachdem $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ aber die kleinste Topologie ist, die \mathcal{B} enthält, und \mathcal{T} ebenso \mathcal{B} enthält, genügt es damit zu zeigen, dass \mathcal{T} bereits eine Topologie ist.

Dafür ist zunächst $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, denn es ist $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und, da \mathcal{B} eine Basis für eine Topologie ist, $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

Sei nun $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ mit $U_i, V_j \in \mathcal{B}$. Sei weiter $x \in U \cap V$, d. h. es gibt ein $i \in I$ und ein $j \in J$ mit $x \in U_i \cap V_j$. Da \mathcal{B} eine Basis für eine Topologie auf X ist, gibt es dann ein $W_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in W_x \subset U_i \cap V_j$. Aber dann ist $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}$.

Ist weiter $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $U_i \in \mathcal{T}$, so können wir $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j$ mit $B_j \in \mathcal{B}$ schreiben. Aber dann ist

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j$$

eine Vereinigung von Mengen in \mathcal{B} und deshalb in \mathcal{T} . \square

Ist \mathcal{B} eine Basis für eine Topologie auf X und \mathcal{T} eine Topologie auf X , so nennt man \mathcal{B} ein Basis für \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Zum Beispiel können wir, gegeben eine Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, eine Basis für die metrische Topologie finden: Sei

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}.$$

Dann ist $\bigcup \mathcal{B} = X$, denn für jedes $x \in X$ ist $x \in B_r(x)$ für alle $r > 0$. Ist weiter $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$, so ist $d(z, x) < \varepsilon$ und $d(z, y) < \delta$. Setze $r = \min\{\varepsilon - d(z, x), \delta - d(z, y)\}$. Mit dieser Wahl ist $B_r(z) \subset B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$: Für jedes $p \in B_r(z)$ ist

$$\begin{aligned} d(p, x) &\leq d(p, z) + d(z, x) < r + d(z, x) \\ &\leq \varepsilon - d(z, x) + d(z, x) = \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(p, y) &\leq d(p, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \\ &\leq \delta - d(z, y) + d(z, y) = \delta. \end{aligned}$$

Also ist \mathcal{B} tatsächlich eine Basis für eine Topologie auf X . Dass die von \mathcal{B} erzeugte Topologie genau die metrische Topologie ist, folgt aus dem nächsten Satz.

SATZ 1.17. Sei \mathcal{B} eine Basis für eine Topologie auf einer Menge X . Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind dann äquivalent:

- (i) $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
- (ii) Für jedes $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset U$.

Beweis. Sei zuerst $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, etwa $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{B}$. Aber das heißt, dass es für jedes $x \in U$ ein $i \in I$ gibt, mit $x \in U_i \subset U$.

Sei andererseits für jedes $x \in U$ ein $V_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in V_x \subset U$ gewählt. Dann ist $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. \square

Mithilfe von Basen können wir Stetigkeit für Funktionen zwischen topologischen Räumen so umformulieren, dass die Bedingung der ursprünglichen ε - δ -Definition für metrische Räume ähnelt.

SATZ 1.18. Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion und \mathcal{B}_X eine Basis für eine Topologie auf X und \mathcal{B}_Y eine Basis für eine Topologie auf Y . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_X}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y}$.
- (ii) Für aller $U \in \mathcal{B}_Y$ ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_X}$.
- (iii) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{B}_Y$ mit $f(x) \in U$ existiert ein $V \in \mathcal{B}_X$ mit $x \in V$ und $f(V) \subset U$.

Beweis. Die Richtung (i \Rightarrow ii) ist klar. Für (ii \Rightarrow iii) sei $U \in \mathcal{B}_Y$ mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen in $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_X}$ und $x \in f^{-1}(U)$. Also gibt es nach **Satz 1.17** ein $V \in \mathcal{B}_X$ mit $x \in V \subset f^{-1}(U)$, d. h. $f(V) \subset U$. Das ist aber genau (iii).

Für (iii \Rightarrow i) sei $U \subset Y$ offen in $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y}$ und $x \in f^{-1}(U)$, d. h. $f(x) \in U$. Es gibt also nach **Satz 1.17** ein $U' \subset U$ mit $f(x) \in U'$ und $U' \in \mathcal{B}_Y$. Wegen (iii) gibt es dann ein $V \subset X$ mit $V \in \mathcal{B}_X$, $x \in V$ und $f(V) \subset U'$, d. h. $V \subset f^{-1}(U') \subset f^{-1}(U)$. Aber wieder nach **Satz 1.17** genügt das, um zu sehen, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_X}$. \square

Mit **Satz 1.17** können wir einen topologischen Beweis für **Korollar 1.3** geben. Insbesondere sehen wir, dass die euklidische Topologie auf \mathbb{R}^n tatsächlich den Begriff der Stetigkeit charakterisiert, unabhängig von der gewählten Norm.

SATZ 1.19. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ zwei äquivalente Normen auf V . Dann sind die entsprechenden metrischen Topologien gleich: $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|'}$.

Beweis. Da $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind, seien Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ für alle $x \in V$ gegeben. Schreiben wir

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \varepsilon\}$$

und

$$B'_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\|' < \varepsilon\},$$

so bilden $\{B_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ und $\{B'_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ Basen für $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ beziehungsweise $\mathcal{T}_{\|\cdot\|'}$.

- (i) Jeder Ball $B'_\varepsilon(x)$ ist offen in $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$: Sei $y \in B'_\varepsilon(x)$ und $\delta = (\varepsilon - \|y - x\|')/C$. Für $z \in B_\delta(y)$ ist dann

$$\|z - x\|' \leq \|z - y\|' + \|y - x\|' \leq C\|z - y\| + \|y - x\|' < C\delta + \|y - x\|' = \varepsilon,$$

also $y \in B_\delta(y) \subset B'_\varepsilon(x)$.

(ii) Sei $U \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Setze $\delta = c\varepsilon$. Für $y \in B'_\delta(x)$ ist dann

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{c} \|y - x\|' < \frac{\delta}{c} = \varepsilon,$$

also $y \in B_\varepsilon(x)$. Es folgt also, dass $B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$, und insgesamt nach **Satz 1.17**, dass $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|'}$. \square

DEFINITION 1.20. Ein topologischer Raum X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn die Topologie auf X von einer höchstens abzählbar unendlichen Basis erzeugt wird.

1.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wie in metrischen Räumen können wir im Allgemeinen Folgen und ihre Konvergenz betrachten. Allerdings ist der Begriff in allgemeinen topologischen Räumen weit weniger hilfreich, wie wir bald sehen werden.

DEFINITION 1.21. Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, in Symbolen $x_n \rightarrow x$, falls für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele der x_n in U liegen.

Im Gegensatz zu unserer Erfahrung in metrischen Räumen muss der Grenzwert einer konvergenten Folge einem allgemeinen topologischen Raum nicht eindeutig bestimmt sein. Sei zum Beispiel $X = \{0, 1\}$ mit der Topologie $\{\emptyset, X, \{0\}\}$ und betrachte die konstante Folge $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar $x_n \rightarrow 0$, aber $\{x_n\}_n$ konvergiert auch gegen 1! Die einzige offene Menge in X , die 1 enthält, ist nämlich der ganze Raum X .

Nichtsdestotrotz lassen sich einige Sätze über konvergente Folgen für allgemeine topologische Räume übertragen. Zum Beispiel ließen sich in metrischen Räume stetige Funktionen als genau die folgenstetigen Funktionen charakterisieren.

SATZ 1.22. *Stetige Funktionen sind folgenstetig: Wenn $x_n \rightarrow x$ in X und $f: X \rightarrow Y$ stetig ist, dann ist $f(x_n) \rightarrow f(x)$ in Y .*

Beweis. Sei $U \subset Y$ offen mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Weil $x_n \rightarrow x$ liegen dann alle bis auf endlich viele der x_n in $f^{-1}(U)$ und damit auch alle bis auf endlich viele der $f(x_n)$ in U . \square

In allgemeinen topologischen Räumen ist der Umkehrschluss aber falsch! Sei zum Beispiel X eine überabzählbar unendliche Menge. Man definierte die *ko-abzählbare Topologie* auf X , indem man eine Menge $U \subset X$ offen nennt, wenn entweder $U = \emptyset$ oder $X \setminus U$ höchstens abzählbar unendlich ist. Sei $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , die nicht schließlich konstant ist, d. h. es gibt kein $p \in X$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $p_n = p$ für alle $n \geq N$. Wir zeigen, dass dann $\{p_n\}_n$ nicht konvergent sein kann. Sei dafür $p \in X$ und setze $U = X \setminus \{p_n : p_n \neq p, n \in \mathbb{N}\}$. Da X die ko-abzählbare Topologie trägt ist dann U offen und $p \in U$. Außerdem gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $p_n \neq p$, d. h. $p_n \notin U$, denn ansonsten wäre $\{p_n\}_n$ schließlich konstant gleich p . Insbesondere kann $\{p_n\}_n$ nicht gegen p konvergieren.

Aber $p \in X$ war beliebig gewählt, also ist keine Folge $\{x_n\}_n$ in X konvergent, außer $\{x_n\}_n$ ist schließlich konstant. Natürlich ist jede schließlich konstante Folge in jedem topologischen Raum konvergent. Das bedeutet, dass jede Funktion $f: X \rightarrow Y$ folgenstetig ist, denn schließlich konstante Folgen werden immer auf schließlich konstante Folgen abgebildet. Hingegen ist es nicht schwer

eine Funktion auf X zu konstruieren, die nicht stetig ist. Zum Beispiel ist die Identitätsabbildung aufgefasst als Funktion von X mit der ko-abzählbaren Topologie nach X mit der diskreten Topologie nicht stetig: Da X überabzählbar unendlich ist, muss es eine Menge in X geben, die nicht offen ist.

Um ein Kriterium an einen topologischen Raum X zu finden, unter dem folgenstetige Funktionen $X \longrightarrow Y$ automatisch stetig sind, führen wir zuerst die folgende Variante von Basen für eine Topologie ein.

DEFINITION 1.23. Eine Familie von offenen Mengen \mathcal{U} , die allen einen Punkt $x \in X$ enthalten, heißt *Umgebungsbasis* für $x \in X$, falls für jede offene Menge $V \subset X$ mit $x \in V$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $x \in U \subset V$.

Zum Beispiel ist die Familie $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ für einen Punkt $x \in X$ in einem metrischen Raum X eine Umgebungsbasis. Oder allgemeiner ist, gegeben eine Basis \mathcal{B} für eine Topologie auf einer Menge X , die Familie $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$ bezüglich der erzeugten Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

DEFINITION 1.24. Ein topologischer Raum X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* wenn jedes $x \in X$ eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis hat.

SATZ 1.25. Angenommen X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist jede folgenstetige Funktion $f: X \longrightarrow Y$ stetig.

Beweis. Sei $x \in X$ und $f(x) \in U$ mit $U \subset Y$ offen. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$ und es gibt eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis für x . Wir können diese Umgebungsbasis $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ so wählen, dass

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \ni x,$$

denn ist $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige, höchstens abzählbare Umgebungsbasis für x , setze $V_i = \bigcap_{j \leq i} W_j$. Angenommen es wäre möglich, dass $V_n \not\subset f^{-1}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man dann $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(U)$ für $n \in \mathbb{N}$, erhält man eine Folge $\{x_n\}_n$, die gegen x konvergiert. Da f folgenstetig ist, konvergiert dann auch $\{f(x_n)\}$ gegen $f(x)$. Da U offen ist, gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist also $x_N \in f^{-1}(U)$, obwohl wir $x_N \in V_N \setminus f^{-1}(U)$ gewählt hatten.

Es folgt also, dass es eine offene Menge V_N gibt mit $x \in V_N \subset f^{-1}(U)$. Da x beliebig gewählt war, muss damit nach **Satz 1.18** die Funktion f stetig sein. \square

SATZ 1.26. Gegeben topologische Räume X, Y und Z mit stetigen Funktionen $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow Z$, ist die Komposition $g \circ f: X \longrightarrow Z$ stetig.

Beweis. Wenn $U \subset Z$ offen ist, dann auch

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

also Urbild der offenen Menge $g^{-1}(U)$ unter f . \square

DEFINITION 1.27. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die \mathcal{T} induziert *Teilraumtopologie* auf Y die Familie

$$\mathcal{T}|_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}.$$

Dass $\mathcal{T}|_Y$ tatsächlich eine Topologie bildet überlassen wir dem Leser zur Übung. Für $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist in der euklidischen Topologie

$$\overline{[0, 1)} = [0, 1], \quad [0, 1)^\circ = (0, 1), \quad \partial[0, 1) = \{0, 1\},$$

aber bezüglich der induzierten Teilraumtopologie auf $[0, 1)$ haben wir

$$\overline{[0, 1)} = [0, 1), \quad [0, 1)^\circ = [0, 1), \quad \partial([0, 1)) = \emptyset,$$

da $[0, 1)$ in der Teilraumtopologie natürlich offen und abgeschlossen ist. Insbesondere sehen wir, dass eine Teilmenge $U \subset A \subset X$, die bezüglich der Teilraumtopologie auf A offen ist, nicht notwendigerweise in X offen sein muss.

Satz 1.28. *Seien X und Y topologische Räume und $A \subset Y$. Dann ist die Inklusion $\iota: A \hookrightarrow Y$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie auf A . Weiter ist eine Funktion $f: X \rightarrow A$ genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ f: X \rightarrow A \hookrightarrow Y$ stetig ist.*

Beweis. Eine Teilmenge $V \subset A$ ist genau dann offen, wenn es eine in Y offene Menge U gibt mit $V = U \cap A = \iota^{-1}(U)$. Insbesondere ist in diesem Fall $f^{-1}(V) = (\iota \circ f)^{-1}(U)$ offen. \square

Betrachten wir als Beispiel für eine stetige Funktion die Projektion $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\pi_1(x, y) = x$. Um direkt zu zeigen, dass π_1 stetig ist, genügt es nach **Satz 1.18** zu zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ der Zylinder $\pi_1^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ in \mathbb{R}^2 offen ist. Sei dafür $(a, b) \in \pi_1^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ und setze $\delta = \varepsilon - |x - a|$. Für $(c, d) \in B_\delta((a, b))$ haben wir dann

$$\begin{aligned} |c - x| &\leq |c - a| + |x - a| \leq \sqrt{|c - a|^2 + |d - b|^2} + |x - a| < \\ &< \delta + |x - a| = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $(c, d) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$. Das genügt um zu sehen, dass $\pi_1^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ in \mathbb{R}^2 offen ist. Später werden wir die so genannte Produkttopologie auf \mathbb{R}^2 definieren und sehen, dass sie gleich der metrischen Topologie ist. Damit werden wir sofort sehen können, dass π_1 stetig sein muss.

Andere Beispiele für stetigen Funktionen findet man leicht. Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und wähle auf Y die triviale Topologie. Dann ist f stetig, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ sind beide offen. Trägt X hingegen die diskrete Topologie und Y ist ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetig: jede Teilmenge von X ist offen, und damit insbesondere auch $f^{-1}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset Y$.

Nachdem wir gesehen haben, dass unser topologischer Begriff von Stetigkeit mit dem vorherigen Begriff zwischen metrischen Räumen übereinstimmt, erhalten wir sofort alle stetigen Funktionen zwischen metrischen Räumen als Beispiele stetiger Funktionen. Konkreter ist etwa die Funktion $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ bezüglich der euklidischen Topologie stetig. Besser noch, \tanh hat eine inverse Funktion $\operatorname{atanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, die ebenso stetig ist. Man sagt, \tanh ist ein Homöomorphismus zwischen \mathbb{R} und $(-1, 1)$.

Definition 1.29. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn eine weitere stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ existiert mit $g \circ f = \operatorname{id}_X$ und $f \circ g = \operatorname{id}_Y$.

Das Thema dieses Kurses wird sein, Methoden kennenzulernen, mit denen man erkennen kann ob zwei topologische Räume homöomorph sein können. Als erstes Beispiel betrachte die Exponentialfunktion $e^i: [0, 2\pi) \rightarrow S^1 = \{z : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Der Einheitskreis S^1 trägt hier wie das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$ die Teilraumtopologie. Diese Abbildung ist stetig und bijektiv, es gibt also eine Umkehrabbildung $\arg: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$. Diese Umkehrabbildung ist aber nicht stetig! Zum Beispiel ist $\arg^{-1}([0, \pi))$ nicht offen in S^1 , obwohl $[0, \pi) = (-1, \pi) \cap [0, 2\pi)$ in $[0, 2\pi)$ offen ist: Jeder offene Ball um $1 = e^{i0} \in S^1$ enthält ein $z \in S^1$ mit $\operatorname{Im}(z) < 0$, aber $\arg^{-1}([0, \pi))$ enthält nur solche $z \in S^1$ mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

Wir werden später sehen, dass nicht nur e^i kein Homöomorphismus zwischen $[0, 2\pi)$ und S^1 ist, sondern dass es überhaupt keinen solchen Homöomorphismus geben kann.

1.4 Konstruktionen von topologischen Räumen

Wir haben bisher die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gesehen. Ihre offenen Teilmengen können als beliebige Vereinigungen

$$\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \times (a'_i, b'_i)$$

geschrieben werden, d. h. Mengen der Form $(a, b) \times (a', b')$ bilden eine Basis für die euklidische Topologie auf \mathbb{R}^2 . Können wir analog eine Topologie auf einem Produktraum $X \times Y$ für beliebige topologische Räume X und Y definieren?

Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt beliebiger topologischer Räume X_i und sei $\pi_j: X \rightarrow X_j$ die Projektion auf den j -ten Faktor. Dann ist

$$\mathcal{S} = \{\pi_j^{-1}(U) : j \in I \text{ und } U \subset X_j \text{ offen}\}$$

eine Subbasis für eine Topologie auf X .

DEFINITION 1.30. Die von \mathcal{S} erzeugte Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ heißt *Produkttopologie*.

Man sieht leicht, dass die nach Satz 1.14 zu \mathcal{S} gehörige Basis aus den Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ besteht mit $U_i \subset X_i$ offen, aber mit nur endlich vielen der U_i verschieden von X_i . Man kann auch eine größere Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ definieren, wenn man diese letzte Bedingung vernachlässigt. Sie heißt *Boxtopologie*, erfüllt aber viele der guten Eigenschaften der Produkttopologie nicht.

LEMMA 1.31. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume X_i versehen mit der Produkttopologie. Dann:

- (i) Die Projektionen $\pi_i: X \rightarrow X_i$ sind stetig.
- (ii) Die Produkttopologie ist die kleinste Topologie auf X für die alle Projektionen $\pi_i: X \rightarrow X_i$ stetig sind, d. h. ist \mathcal{T} eine andere Topologie für die alle π_i stetig sind, so ist jede in der Produkttopologie offene Menge U bereits in \mathcal{T} enthalten.
- (iii) Sei Y ein topologischer Raum und für jedes $i \in I$ sei $f_i: Y \rightarrow X_i$ stetig. Dann existiert genau eine stetige Funktion $g: Y \rightarrow X$ mit $\pi_i \circ g = f_i$ für alle $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X = \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

Beweis.

- (i) Sei $U \subset X_i$ offen. Dann ist $\pi_i^{-1}(U)$ enthalten in der Subbasis, die die Produkttopologie auf X definiert. Insbesondere ist damit $\pi_i^{-1}(U)$ natürlich offen.
- (ii) Sei \mathcal{T} eine Topologie auf X , bezüglich der alle $\pi_i: X \rightarrow X_i$ stetig sind, und sei $U \subset X_i$ offen. Dann ist $\pi_i^{-1}(U)$ offen bezüglich der Produkttopologie und auch bezüglich \mathcal{T} . Das heißt, dass die Subbasis \mathcal{S} , die die Produkttopologie erzeugt, in \mathcal{T} enthalten ist. Das bedeutet dann aber, dass auch die von \mathcal{S} erzeugte Topologie in \mathcal{T} enthalten ist, was zu zeigen war.
- (iii) Die Abbildung $g: Y \rightarrow X$ ist definiert durch $g(y) = (f_i(y))_{i \in I}$ und durch die Bedingung $\pi_i \circ g = f_i$ für alle $i \in I$ eindeutig bestimmt. Es bleibt zu sehen, dass g stetig ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass die Urbilder der Elemente der Subbasis \mathcal{S} in Y offen sind. Sei dafür $i \in I$ und $U \subset X_i$ offen, so dass $\pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$g^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = (\pi_i \circ g)^{-1}(U) = f_i^{-1}(U)$$

offen in Y , denn $f_i: Y \rightarrow X_i$ war als stetig angenommen. \square

Eigenschaft (iii) **Lemma 1.31** nennt man auch die *universelle Eigenschaft* der Produkttopologie. Ein erstes Beispiel für die Produkttopologie haben wir schon mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ gesehen. Man sieht leicht, dass sie tatsächlich mit der Produkttopologie übereinstimmt. Einfache Beispiele stetiger Funktionen bezüglich der Produkttopologie sind etwa die Addition $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Multiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Genauso trägt die Menge $\text{Mat}_m(\mathbb{R})$ von $m \times m$ -Matrizen die Produkttopologie, wir fassen sie als \mathbb{R}^{m^2} auf. Hier gibt es ebenso stetige Funktion $+: \text{Mat}_m(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_m(\mathbb{R})$ und $\cdot: \text{Mat}_m(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_m(\mathbb{R})$. In den beiden letzten Beispielen gibt es zusätzlich stetige Abbildungen $(_)^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(_)^{-1}: \text{GL}_m(\mathbb{R}) \times \text{GL}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{R})$. Damit haben wir auch Beispiele der folgenden Definition.

DEFINITION 1.32. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe (G, \cdot, e) zusammen mit einer Topologie auf G bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

und

$$G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Dabei versteht sich $G \times G$ als mit der Produkttopologie versehen.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R} indem wir für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann $x \sim y$ schreiben, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Damit können wir die Quotientenmenge $\mathbb{R}/\sim =: \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bilden. Dann können wir \mathbb{R}/\mathbb{Z} auch mit einer Topologie versehen, bezüglich der die Projektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, die eine reelle Zahl x auf ihre Äquivalenzklasse $[x]$ in \mathbb{R}/\mathbb{Z} abbildet, stetig ist. Allgemeiner definieren wir wie folgt.

DEFINITION 1.33. Sei X ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Wir bezeichnen mit X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich \sim und mit $q: X \rightarrow X/\sim$ die Quotientenabbildung. Dann ist

$$\mathcal{T} = \{U \subset X/\sim : q^{-1}(U) \text{ offen in } X\}$$

eine Topologie auf X/\sim . Sie heißt die *Quotiententopologie*.

LEMMA 1.34. Mit der Notation wie in Definition 1.33 ist die Quotiententopologie \mathcal{T} tatsächlich eine Topologie. Weiterhin gilt:

- (i) Die Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow X/\sim$ ist stetig.
- (ii) Die Quotiententopologie \mathcal{T} ist die größte Topologie bezüglich der q stetig ist, d. h. ist \mathcal{T}' eine weitere Topologie auf X/\sim bezüglich der q stetig ist, so ist $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
- (iii) Ist $f: X \longrightarrow Y$ stetig mit $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \sim y$, so existiert genau eine stetige Abbildung $g: X/\sim \longrightarrow Y$ mit $g \circ q = f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Beweis. Natürlich sind $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $q^{-1}(X/\sim) = X$ offen in X . Sind $U, V \subset X/\sim$ offen in der Quotiententopologie, so ist $q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ offen in X und damit auch $U \cap V$ offen im Quotienten.

Ist schließlich $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X/\sim , so ist $q^{-1}(U_i)$ offen in X für jedes $i \in I$ und deshalb auch $q^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(U_i)$ offen in X . Das heißt, $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen im Quotienten X/\sim .

- (i) folgt direkt aus der Definition der Quotiententopologie.
- (ii) Sei \mathcal{T}' eine Topologie auf X/\sim bezüglich der q stetig ist. Dann ist für jede Menge $U \in \mathcal{T}'$ das Urbild $q^{-1}(U)$ offen in X . Aber das heißt genau, dass $U \in \mathcal{T}$. Da U beliebig war, bedeutet das $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
- (iii) Gegeben eine Äquivalenzklasse $[x] \in X/\sim$ definieren wir $g([x]) = f(x)$. Das ist möglich, denn wäre $[x] = [y]$, d. h. $x \sim y$, für ein weiteres $y \in X$, so wäre $f(x) = f(y)$ und es gibt keine Mehrdeutigkeit in dieser Definition von g . Damit haben wir auch sofort, dass $(g \circ q)(x) = g([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$ und g ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass g stetig ist. Sei dafür $U \subset Y$ offen. Dann ist

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ q)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

offen in X und damit $g^{-1}(U)$ offen in X/\sim . □

Auch hier nennt man Eigenschaft (iii) in Lemma 1.34 die *universelle Eigenschaft* der Quotiententopologie auf X/\sim . Sie charakterisiert die Quotiententopologie bis auf Homöomorphismus.

DEFINITION 1.35. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ das Bild $f(U) \subset Y$ offen ist.

Mithilfe dieser Definition können wir charakterisieren, wann eine stetige Bijektion ein Homöomorphismus ist. In der Tat ist eine solche stetige Bijektion $f: X \longrightarrow Y$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen ist. Denn für alle Mengen $U \subset X$ ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ und damit eine bijektive Abbildung genau dann offen, wenn ihr Inverses stetig ist.

Wir hatten die Quotiententopologie am Beispiel \mathbb{R}/\mathbb{Z} eingeführt, wobei in \mathbb{R}/\mathbb{Z} genau die reellen Zahlen identifiziert wurden, deren Differenz eine ganze Zahl ist. Wir wollen nun zeigen, dass \mathbb{R}/\mathbb{Z} mit der Quotiententopologie homöomorph zum Einheitskreis S^1 ist. Man betrachte dafür die stetige Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad f(x) = e^{2\pi i x}.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $g: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$, so dass

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q \downarrow & \nearrow g & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

kommutiert. Diese g ist surjektiv, denn f war bereits surjektiv. Außerdem ist g injektiv, denn $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x'}$ ist genau dann der Fall, wenn $x - x' \in \mathbb{Z}$. Das heißt, um zu sehen, dass g ein Homöomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass g eine offene Abbildung ist. Zuerst sehen wir, dass f selbst eine offene Abbildung ist. Ist nämlich $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ mit $\varepsilon \leq 1/2$ ein offenes Intervall, so sieht man leicht, dass $f((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset S^1$ offen ist. Außerdem ist $f(x + x') = f(x)f(x')$ und $f(0) = 1$ und damit sind auch die Bilder aller Intervalle der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mit $\varepsilon \leq 1/2$ offen in S^1 . Diese offenen Intervalle bilden eine Basis für die euklidische Topologie auf \mathbb{R} und deshalb sehen wir, dass f eine offene Abbildung sein muss. Ist weiter $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ offen, so ist $g(U) = f(q^{-1}(U))$ offen. Also ist g eine offene Abbildung und nach unserer vorherigen Bemerkung folgt, dass g ein Homöomorphismus ist.

Für ein weiteres Beispiel sei $X = [0, 1]$ mit der von \mathbb{R} induzierten Teilraumtopologie. Wir führen eine Äquivalenzrelation \sim auf X ein, indem wir $x \sim x'$ genau dann schreiben, wenn entweder $x = x'$ oder $x, x' \in \{0, 1\}$. Dann ist der Quotient X/\sim ebenfalls homöomorph zum Einheitskreis S^1 . Wir können nämlich unser Argument von oben mit der Einschränkung von f auf $[0, 1]$ wortgleich wiederholen.

Sei nun $X = [0, 1]^2$ mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Teilraumtopologie mit der Äquivalenzrelation \sim , bezüglich der genau dann $(x, y) \sim (x', y')$ gilt, wenn entweder $(x, y) = (x', y')$ gilt, oder $x, x' \in \{0, 1\}$ mit $y = y'$, oder $x = x'$ mit $y, y' \in \{0, 1\}$, oder wenn $\{x, x'\} = \{y, y'\} = \{0, 1\}$. Der Quotient X/\sim ist dann homöomorph zum Torus $S^1 \times S^1$.

Für ein etwas exotischeres Beispiel sei $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Teilraumtopologie. Wir definieren wieder eine Äquivalenzrelation \sim auf X , indem wir $(x, y) \sim (x', y')$ genau dann schreiben, wenn entweder $(x, y) = (x', y')$ oder $x = x' \neq 0$. Der Quotient X/\sim ähnelt dann der reellen Geraden \mathbb{R} , enthält aber zwei Punkte, die sich wie der Ursprung in \mathbb{R} verhalten. Entsprechend nennt man X/\sim die *Gerade mit zwei Ursprüngen*.

DEFINITION 1.36. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim_A auf X , indem wir genau dann $x \sim_A x'$ schreiben, wenn entweder $x = x'$ oder $x, x' \in A$. Den Quotienten X/\sim_A bezeichnen wir dann kurz als X/A .

Letzere Definition haben wir bereits in einem Beispiel gesehen. Nämlich ist $X/\{0, 1\}$ homöomorph zu S^1 . Betrachten wir andererseits etwa $X/[0, 1]$, so stellen wir fest, dass dieser Quotient wieder homöomorph zu \mathbb{R} ist. Wir haben nämlich eine stetige Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \in [0, 1] \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

die die Äquivalenzrelation $\sim_{[0,1]}$ auf \mathbb{R} respektiert. Die universelle Eigenschaft der Quotiententopo-

logie liefert dann wieder eine stetige Abbildung $g: \mathbb{R}/[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow g & \\ \mathbb{R}/[0, 1] & & \end{array}$$

kommutiert. Dann ist g augenscheinlich bijektiv und sogar ein Homöomorphismus. Sei dafür $U \subset \mathbb{R}/[0, 1]$ offen in der Quotiententopologie und sei $V = q^{-1}(U)$. Dann gibt es verschiedenen Fälle:

- (i) Ist $V \cap [0, 1] = \emptyset$ so ist $f(V) = g(U)$ offen.
- (ii) Ist $[0, 1] \subset V$, so ist $f(V) = g(U)$ ebenso offen.
- (iii) Ist $[0, 1] \cap V \neq \emptyset$ aber $[0, 1] \not\subset V$, so ist $V = ([0, 1] \cap V) \cup (V \setminus [0, 1])$ und man sieht ebenso leicht, dass $f(V) = g(U)$ offen ist.

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}/[0, 1]$ ist $\mathbb{R}/(0, 1)$ nicht homöomorph zu \mathbb{R} : Sei $q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/(0, 1)$ die Quotientenabbildung. Dann ist die einelementige Menge $\{q(1/2)\}$ offen in $\mathbb{R}/(0, 1)$, denn das Urbild $q^{-1}(\{q(1/2)\}) = (0, 1)$ ist offen in \mathbb{R} . Aber keine offene Menge in \mathbb{R} enthält nur ein Element.

1.5 Trennungsaxiome

DEFINITION 1.37. Ein topologischer Raum X hat die *Hausdorffeigenschaft* (oder ist *Hausdorff*), falls für verschiedene Punkte $x \neq y \in X$ offene Mengen $U, V \subset X$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Zum Beispiel ist \mathbb{R} mit der Standardtopologie Hausdorff. Seien nämlich $x, y \in \mathbb{R}$ verschieden. Dann ist $\delta = |x - y| > 0$ und wir setzen $U = B_\varepsilon(x)$ und $V = B_\varepsilon(y)$ mit $\varepsilon = \delta/2$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ und $y \in V$.

Jede Menge X mit der diskreten Topologie ist Hausdorff. Tatsächlich sind für verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ offen und disjunkt. Hingegen ist die Topologie $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ auf $X = \{a, b\}$ nicht Hausdorff, denn es gibt in dieser Topologie keine offene Menge die a aber nicht b enthält. Genauso ist $X = \{a, b\}$ mit der trivialen Topologie $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ nicht Hausdorff.

LEMMA 1.38.

- (i) In einem Hausdorffraum sind einpunktige Mengen abgeschlossen.
- (ii) Teilräume und Produkträume von Hausdorffräumen sind Hausdorff.

Beweis.

- (i) Sei $x \in X$ und X ein Hausdorffraum. Dann ist zu zeigen, dass $X \setminus \{x\}$ offen ist. Sei dafür $y \in X \setminus \{x\}$ beliebig. Dann gibt es eine offene Menge $U_y \subset X$ mit $y \in U_y$ und $x \notin U_y$. Damit ist $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$ eine Vereinigung offener Mengen und daher selbst offen.
- (ii) Seien zuerst $M \subset X$ ein Teilraum eines Hausdorffraums X und $x, y \in M$ verschiedene Punkte. Dann gibt es disjunkte offene Menge $U \subset X$ und $V \subset X$ mit $x \in U$ und $y \in V$. Also ist $x \in U \cap M$ und $y \in V \cap M$ für die disjunkten, in M offenen Mengen $U \cap M$ und $V \cap M$. Angenommen I ist eine beliebige Indexmenge und $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine Familie von Hausdorffräumen. Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ verschiedene Punkte in $\prod_{i \in I} X_i$, das heißt, es gibt ein $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorff ist, gibt es dann disjunkte offene Mengen $U_j, V_j \subset X_j$ mit $x_j \in U_j$ und $y_j \in V_j$. Für die Projektion $\pi: \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ sind dann die Urbilder $\pi^{-1}(U_j)$ und $\pi^{-1}(V_j)$ offen und disjunkt in $\prod_{i \in I} X_i$. Außerdem ist dann $(x_i)_i \in \pi^{-1}(U_j)$ und $(y_i)_i \in \pi^{-1}(V_j)$. \square

Quotienten von Hausdorffräumen müssen nicht immer Hausdorff sein. Zum Beispiel ist die Gerade mit zwei Ursprüngen $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim$ kein Hausdorffraum, obwohl $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ Hausdorff ist. Seien $0 = [(0, 0)]$ und $0' = [(0, 1)]$ die beiden Ursprünge. Dann enthält jede offene Umgebung von 0 bzw. $0'$ eine Menge der Form $\pi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\})$ bzw. $\pi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\})$ für $\varepsilon > 0$ klein genug und wobei $\pi: \mathbb{R} \times \{0, 1\} \longrightarrow X$ die Quotientenabbildung bezeichnet. Aber es ist immer

$$\pi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}) \cap \pi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\}) \neq \emptyset.$$

DEFINITION 1.39. Ein topologischer Raum X heißt T_1 , falls jede einpunktige Menge in X abgeschlossen ist.

Wir haben schon gesehen, dass jeder Hausdorffraum T_1 ist. Aber die Umkehrung ist falsch! Zum Beispiel ist die Gerade mit zwei Ursprüngen T_1 aber nicht Hausdorff. Genauso ist \mathbb{Z} mit der kofiniten Topologie T_1 aber nicht Hausdorff: alle endlichen Teilmengen von \mathbb{Z} sind abgeschlossen in der kofiniten Topologie. Aber keine zwei nichtleeren offenen Mengen in der kofiniten Topologie auf \mathbb{Z} sind disjunkt.

DEFINITION 1.40. Sei X ein T_1 -Raum.

- (i) X heißt *regulär*, falls es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene Mengen U und V in X gibt, so dass $x \in U$, $A \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.
- (ii) X heißt *normal*, falls es zu zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen U und V in X gibt, so dass $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Manche Autoren fordern nicht, dass reguläre bzw. normale Räume T_1 sind.

LEMMA 1.41.

- (i) Für X regulär ist jeder Teilraum $Y \subset X$ regulär.
- (ii) Für X normal ist ein Teilraum $Y \subset X$ normal, sobald $Y \subset X$ abgeschlossen ist. ■

SATZ 1.42 (Urysohn–Tietze). Sei X ein T_1 -Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist normal.
- (ii) Zu zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ existiert eine stetige Funktion $f: X \longrightarrow [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.
- (iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit einer stetigen Funktion $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine stetige Fortsetzung $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$ und

$$\sup_{x \in X} F(x) = \sup_{x \in A} f(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in X} F(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

Ist außerdem $|f(x)| < C$ für alle $a \in A$ lässt sich F so wählen, dass $|F(x)| < C$ für alle $x \in X$. Der Teil (i) \rightarrow (ii) ist das Lemma von Urysohn und eine Funktion f wie in (ii) heißt Urysohnfunktion. Der Teil (i) \rightarrow (iii) ist der Fortsetzungssatz von Tietze.

LEMMA 1.43. Sei X normal. Für $A \subset U$ mit A abgeschlossen und U offen gibt es eine offene Menge $V \subset X$, so dass $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Beweis. Da $X \setminus U$ abgeschlossen, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ und X normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subset X$, so dass $A \subset V$ und $X \setminus U \subset W$. Dann ist aber auch $V \subset X \setminus W \subset U$ und da $X \setminus W$ abgeschlossen ist, folgt $A \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U$. □

LEMMA 1.44. Sei X ein Raum, der das Urysohnlemma, **Satz 1.42** Teil (ii), erfüllt, und sei $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, etwa $|f(a)| \leq c$ für alle $a \in A$. Dann existiert eine stetig Abbildung $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$ für $x \in X$ und $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ für $a \in A$.

Beweis. Die Mengen

$$A_+ = \{a \in A : f(a) \geq c/3\} \quad \text{und} \quad A_- = \{a \in A : f(a) \leq -c/3\}$$

sind abgeschlossen und disjunkt. Also gibt es eine Urysohnfunktion $h: X \longrightarrow [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ mit $h|_{A_+} = \frac{1}{3}c$ und $h|_{A_-} = -\frac{1}{3}c$. Für dieses h sieht man leicht, dass $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ für alle $a \in A$. \square

Beweis von **Satz 1.42**. Wir zeigen zuerst (ii) \rightarrow (i). Seien dafür $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine Urysohnfunktion $f: X \longrightarrow [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Aber dann sind $U = f^{-1}([0, 1/2))$ und $V = f^{-1}((1/2, 1])$ offen in X und disjunkt. Außerdem ist $A \subset U$ und $B \subset V$.

Nun zu (iii) \rightarrow (ii); seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $f: A \cup B \longrightarrow [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$ stetig und nach (iii) gibt es eine Fortsetzung $F: X \longrightarrow [0, 1]$. Diese Fortsetzung ist dann eine Urysohnfunktion.

Für (i) \rightarrow (ii) sei X normal mit disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$. Da $A \subset X \setminus B$ gibt es nach **Lemma 1.41** eine offene Menge $O_1 \subset X$ mit $A \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset X \setminus B$. Dann gibt es wieder nach **Lemma 1.41** eine offene Menge $O_0 \subset X$ mit

$$A \subset O_0 \subset \overline{O_0} \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset X \setminus B.$$

Induktiv konstruieren wir dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq p \leq 2^n$ offene Teilmengen $O_{p/2^n} \subset X$ mit

$$A \subset O_{p/2^n} \subset \overline{O_{p/2^n}} \subset O_{q/2^n} \subset \overline{O_{q/2^n}} \subset B$$

für $0 \leq p \leq q \leq 2^n$. Ist nämlich $p = 2p'$ gerade, setze $O_{p/2^n} = O_{p'/2^{n-1}}$. Ist $p = 2p' + 1$, gibt es nach **Lemma 1.41** eine offene Menge $O_{p/2^n}$ mit

$$\overline{O_{p'/2^{n-1}}} \subset O_{p/2^n} \subset \overline{O_{p/2^n}} \subset X \setminus O_{(p'+1)/2^{n-1}}.$$

Damit können wir eine Funktion $f: X \longrightarrow [0, 1]$ definieren, indem wir

$$f(x) = \inf \left\{ \frac{p}{2^n} \in \mathbb{R} : x \in O_{p/2^n} \right\}$$

für $x \in O_1$ und $f(x) = 1$ für $x \notin O_1$ setzen. Die Funktion f ist stetig: sei $x \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $d_1 = p/2^m$ und $d_2 = q/2^n$ mit

$$f(x) - \varepsilon < d_1 < f(x) < d_2 < f(x) + \varepsilon.$$

Sei $U = O_{d_2} \setminus \overline{O_{d_1}}$. Dann ist $x \in U$ und $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x))$: zuerst ist $x \in O_{d_2}$, da $f(x) < d_2$, und $x \notin \overline{O_{d_1}}$, da $f(x) > d_1$. Für $y \in U$ gilt genauso $d_1 < f(y) < d_2$ und damit $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Insgesamt genügt das, um zu sehen, dass f stetig ist.

Für (ii) \rightarrow (iii) sei A abgeschlossen und $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen zuerst an, dass f beschränkt ist, etwa $|f(a)| < c$ für alle $a \in A$. Wir konstruieren induktiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq m \leq n$ eine stetige Funktion $h_m: X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|h_m(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^m c \quad \text{und} \quad \left| f(a) - \sum_{m=0}^n h_m(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c.$$

für $x \in X$ und $a \in A$. Setze $h_0 = h$ für h wie in Lemma 1.44. Für $n > 0$ wendet man Lemma 1.44 auf $f - \sum_{m=0}^n h_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ an und erhält so

$$h_{m+1}: X \rightarrow \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} c, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{m+1} c \right].$$

Dann konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ gleichmäßig auf X gegen eine stetige Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(a) = f(a)$ für $a \in A$ und

$$|F(x)| \leq \frac{c}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^m = \frac{c}{3} \cdot 3 = c.$$

Angenommen, es ist sogar $|f(a)| < c$ für alle $a \in A$. In diesem Fall ist

$$A_0 = \{x \in X : |F(x)| = c\}$$

abgeschlossen und $A_0 \cap A = \emptyset$. Es gibt also eine Urysohnfunktion $m: X \rightarrow [0, 1]$ mit $m|_{A_0} = 0$ und $m|_A = 1$. Ersetzt man dann F durch $F \cdot m$ erhält man eine Fortsetzung mit $|F(x)| < c$.

Ist $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ nicht beschränkt, sei $\hat{f}(a) = \frac{f(a)}{1+|f(a)|}$. Dann ist $\hat{f}: A \rightarrow (-1, 1)$ beschränkt und stetig. Es gibt also eine stetige Fortsetzung $\hat{g}: X \rightarrow (-1, 1)$ von \hat{f} . Damit definiert $F(x) = \frac{\hat{g}(x)}{1-|\hat{g}(x)|}$ eine stetige Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(a) = f(a)$, d. h. eine Fortsetzung von f . \square

KOROLLAR 1.45. *Metrische Räume sind normal.* ■

Natürlich ist nicht jeder Hausdorffraum regulär. Zum Beispiel kann man die folgende Basis für eine Topologie auf \mathbb{R} betrachten. Sie enthält zunächst alle offenen Intervalle der Form (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$, aber auch die Mengen $(a, b) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Wir schreiben vorübergehend $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ und \mathbb{R}_K für \mathbb{R} mit der erzeugten Topologie. Die Topologie auf \mathbb{R}_K ist feiner als die euklidische Topologie, also ist \mathbb{R}_K automatisch Hausdorff. Aber \mathbb{R}_K ist nicht regulär. Es ist nämlich $K \subset \mathbb{R}_K$ abgeschlossen und $0 \notin K$. Gäbe es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}_K$ mit $0 \in U$, $K \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$, so könnten wir zuerst ohne Einschränkung annehmen, dass U ein Basiselement für die Topologie auf \mathbb{R}_K ist. Aber $U = (a, b)$ ist unmöglich, weil $0 \in (a, b)$ implizieren würde, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{N} \in (a, b)$. Also ist $U = (a, b) \setminus K$ mit $a < 0 < b$. Dann existiert aber wieder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \in (a, b)$. Aber es ist $\frac{1}{n} \in V$ und nach der Definition der Topologie auf \mathbb{R}_K existiert dann ein offenes Intervall $(c, d) \subset V$ mit $\frac{1}{n} \in (c, d)$. Aber dann wäre $((a, b) \setminus K) \cap (c, d) \neq \emptyset$.

Wir hatten gesehen, dass Produkte von Hausdorffräumen wieder Hausdorffräume sind. Das gilt nicht für normale Räume. Zum Beispiel bilden die halboffenen Intervalle $[a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine Basis für eine Topologie auf \mathbb{R} und \mathbb{R} mit der erzeugten Topologie ist die *Sorgenfreygerade* \mathbb{R}_{sf} . Der Raum \mathbb{R}_{sf} ist normal, denn seien $A, B \subset \mathbb{R}_{sf}$ abgeschlossen und disjunkt. Für jedes $b \in B$ wähle ein b' mit $[b, b') \subset \mathbb{R}_{sf} \setminus A$. Dann ist $V = \bigcup_{b \in B} [b, b')$ offen in \mathbb{R}_{sf} und $B \subset V$. Analog wähle für jedes $a \in A$ ein a'' mit $[a, a'') \subset \mathbb{R}_{sf} \setminus B$. Dann ist auch $U = \bigcup_{a \in A} [a, a'') \subset \mathbb{R}_{sf}$ offen und $A \subset U$. Wäre nun aber $U \cap V \neq \emptyset$, dann gäbe es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $[a, a'') \cap [b, b') \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

Wir betrachten nun die *Sorgenfreyebene* $\mathbb{R}_{sf}^2 = \mathbb{R}_{sf} \times \mathbb{R}_{sf}$ mit der Produkttopologie. Dann ist \mathbb{R}_{sf}^2 nicht normal: Zuerst ist nämlich $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}_{sf}^2$ dicht, denn für jede nichtleere offene Menge $U \subset \mathbb{R}_{sf}^2$ existiert ein halboffenes Rechteck $[a, b) \times [c, d) \subset U$ und $[a, b) \times [c, d) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$. Weiter ist die Antidiagonale $\Delta' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_{sf}^2$ abgeschlossen, denn für $(x, y) \in \mathbb{R}_{sf}^2$ mit $x \neq -y$ gibt es zwei Fälle:

$x > -y$: Dann ist $[x, x+1) \times [y, y+1) \subset \mathbb{R}_{sf}^2 \setminus \Delta'$.

$x < -y$: Sei dann $\varepsilon = -(x + y)/2 > 0$. Dann ist $[x, x + \varepsilon) \times [y, y + \varepsilon) \subset \mathbb{R}_{\text{sf}}^2 \setminus \Delta'$.

Außerdem ist Δ' sogar diskret in der Teilraumtopologie, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Einpunktmenge $\{(x, -x)\} = \Delta' \cap [x, x + 1) \times [-x, -x + 1)$ offen in der Teilraumtopologie auf Δ' . Nehmen wir jetzt an, \mathbb{R}_{sf}^2 wäre doch normal. Dann ist jede Teilmenge $A \subset \Delta'$ abgeschlossen in \mathbb{R}_{sf}^2 und es gäbe *disjunkte* offene Mengen $U_A, V_A \subset \mathbb{R}_{\text{sf}}^2$ mit $A \subset U_A$ und $\Delta' \setminus A \subset V_A$. Definiere eine Abbildung

$$\psi: \{A \subset \Delta' : A \neq \emptyset, \Delta'\} \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad A \longmapsto U_A \cap \mathbb{Q}^2.$$

Diese Abbildung ist dann injektiv, denn seien $A, B \subset \Delta'$ mit $A \neq B$. Dann gibt es ein $z \in A$ mit $z \notin B$ und dafür ist dann $z \in U_A$ und $z \in \Delta' \setminus B \subset V_B$. Aber dann ist $U_A \cap V_B$ nichtleer und offen in \mathbb{R}_{sf}^2 . Also gibt es ein $q \in \mathbb{Q}^2 \cap U_A \cap V_B$ und für dieses q ist dann $q \notin U_B$. Also ist auch $\psi(A) = U_A \cap \mathbb{Q}^2 \neq U_B \cap \mathbb{Q}^2 = \psi(B)$. Aber ψ kann aus Kardinalitätsüberlegungen nicht injektiv sein; die Kardinalität von $\mathcal{P}(X)$ ist die Kardinalität des Kontinuums, aber die Kardinalität von $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, \Delta'\}$ ist die der Potenzmenge des Kontinuums, also strikt größer.

Insbesondere haben wir gezeigt, dass \mathbb{R}_{sf}^2 nicht metrisierbar sein kann. Daraus folgt auch, dass \mathbb{R}_{sf} selbst nicht metrisierbar ist, denn Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar. Aber \mathbb{R}_{sf} ist trotzdem normal.

1.6 Zusammenhang

DEFINITION 1.46. Ein nichtleerer topologischer Raum X ist *zusammenhängend*, für offene Menge $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$ bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Alternativ aber äquivalent heißt ein Raum X *unzusammenhängend*, wenn es eine nichttriviale offene und abgeschlossene Menge in X gibt, d. h. ein $U \subset X$ mit $U \neq \emptyset, U \neq X$, aber U offen und U abgeschlossen.

Ein nichtleerer topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ eine stetige Funktion $f: [0, 1] \longrightarrow X$ gibt mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$. Eine solche Funktion heißt *Weg* von x nach y .

SATZ 1.47 (Zwischenwertsatz). Sei X zusammenhängend und $f: X \longrightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subset Y$ mit der Teilraumtopologie zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset Y$ offen mit $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ und $f(X) \subset U \cup V$. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ mit den offenen Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$. Außerdem ist $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$. Also ist bereits $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. Dann ist aber entsprechend $f(X) \cap U = \emptyset$ oder $f(X) \cap V = \emptyset$. \square

SATZ 1.48. Sei $M \subset X$ zusammenhängend und $M \subset N \subset \overline{M}$. Dann ist auch N zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen mit $U \cap V \cap N = \emptyset$ und $N \subset U \cup V$. Aber dann ist auch $M \subset U \cup V$, also etwa ohne Einschränkung $U \cap M = \emptyset$. Also ist $M \subset X \setminus U$ und damit auch $N \subset \overline{M} \subset X \setminus U$, d. h. $U \cap N = \emptyset$. \square

LEMMA 1.49. Sei $U \subset X$ eine Teilmenge und $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $u_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen $u_n \rightarrow u$. Dann ist $u \in \overline{U}$.

Beweis. Sei $A \supset U$ abgeschlossen in X . Wäre $u \notin A$, so wäre $u \in X \setminus A$ und $X \setminus A$ ist offen. Also gäbe es insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u_n \in X \setminus A$ im Widerspruch zu $u_n \in U$. Also ist $u \in A$ und da A beliebig war schließen wir, dass $u \in \overline{U}$. \square

SATZ 1.50. In \mathbb{R} sind Intervalle zusammenhängend.

Beweis. Wegen Satz 1.48 können wir annehmen, dass das fragliche Intervall von der Form (a, b) ist. Seien $U, V \subset (a, b)$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und $(a, b) = U \cup V$. Angenommen, es wäre $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Setze $v = \sup V$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \in V$ und $v_n \rightarrow v$. Aber $V = (a, b) \setminus U$ ist abgeschlossen in (a, b) und deshalb ist dann $v \in V$. Also ist $(v, b) \subset U$. Aber dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \in (v, b) \subset U$ und $u_n \rightarrow v$. Aber $U = (a, b) \setminus V$ ist auch abgeschlossen in (a, b) , also wäre $v \in U$ im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$. \square

SATZ 1.51. Ein wegzusammenhängender Raum X ist zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$. Angenommen, es wären $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$, etwa $u \in U$ und $v \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = u$ und $f(1) = v$. Dann ist nach Satz 1.47 das Bild $M = f([0, 1])$ zusammenhängend. Aber es wäre dann $(M \cap U) \cap (M \cap V) = \emptyset$, $(M \cap U) \cup (M \cap V) = M$, obwohl $u \in M \cap U$ und $v \in M \cap V$. \square

Nicht jeder zusammenhängende Raum ist auch wegzusammenhängend. Sei zum Beispiel

$$X = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

die *topologist's sine curve*. Dann ist X zusammenhängend, denn für $\Gamma = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$ ist $X = \overline{\Gamma}$ und Γ ist das Bild der zusammenhängenden Menge $(0, 1]$ unter der stetigen Funktion $x \mapsto (x, \sin(1/x))$. Aber man überlegt sich, dass es keine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = (0, 0)$ und $f(1) = (1, \sin(1))$.

DEFINITION 1.52. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim auf X , für die $x \sim y$ genau dann, wenn es einen Weg von x nach y in X gibt. Der Quotient $\pi_0(X) = X/\sim$ ist die Menge der *Wegzusammenhangskomponenten*.

Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten $\#\pi_0(X)$ eines Raums X ist eine Homöomorphieinvariante. Ist nämlich $\varphi: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so haben wir eine Abbildung $\varphi_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ mit $\varphi_*([x]) = [\varphi(x)]$. Diese Abbildung ist tatsächlich wohldefiniert, denn für $x \sim y$ entlang eines Wegs $f: [0, 1] \rightarrow X$ ist $\varphi \circ f: [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg von $\varphi(x)$ nach $\varphi(y)$. Außerdem ist φ_* bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi^{-1})_*$. Insbesondere folgt, dass $\#\pi_0(X) = \#\pi_0(Y)$.

Zum Beispiel haben wir jetzt genügend technische Werkzeuge um zu sehen, dass es keinen Homöomorphismus $[0, 2\pi) \rightarrow S^1$ geben kann. Man überlegt sich nämlich, dass $S^1 \setminus \{x\}$ für jedes $x \in S^1$ wegzusammenhängend ist. Aber $[0, 2\pi) \setminus \{\pi\} = [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ist unzusammenhängend. Gäbe es nun einen Homöomorphismus $\varphi: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, dann wäre $\varphi|_{[0, 2\pi) \setminus \{\pi\}}$ ein Homöomorphismus $[0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \rightarrow S^1 \setminus \{\varphi(\pi)\}$. Aber $\#\pi_0(S^1 \setminus \{\varphi(\pi)\}) = 1$ während $\#\pi_0([0, 2\pi) \setminus \{\pi\}) = 2$.

1.7 Kompakte Räume

In \mathbb{R}^n heißt eine Teilmenge K *kompakt*, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. Allgemeiner heißt in einem metrischen Raum eine Teilmenge K kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K zulässt. Beide Definitionen können nicht ohne Weiteres auf allgemeine topologische Räume angewandt werden, da einerseits ein Abstandsbegriff fehlt und andererseits Folgen im Allgemeinen die Topologie nicht bestimmen. Stattdessen führt man folgenden Begriff ein.

DEFINITION 1.53. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Das heißt, gegeben eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset X$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt kompakt, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie ein kompakter Raum ist.

Manche Autoren fordern, dass kompakte Räume Hausdorff sind. Wir verzichten aber darauf. Mit dieser Konvention sind zum Beispiel alle endlichen topologischen Räume kompakt. Unendliche Mengen X mit der kofiniten Topologie sind auch kompakt. Ist nämlich $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $i_0 \in I$ mit $U_{i_0} \neq \emptyset$. Dann ist $X \setminus U_{i_0}$ endlich und $\{U_i \setminus U_{i_0}\}_{i \neq i_0}$ eine offene Überdeckung von $X \setminus U_{i_0}$. Aber $X \setminus U_{i_0}$ ist kompakt, also existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit

$$X \setminus U_{i_0} = \bigcup_{\substack{i \in J \\ i \neq i_0}} U_i \setminus U_{i_0}.$$

Aber dann ist $X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup U_{i_0}$.

Die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden mit der euklidischen Topologie keinen kompakten Raum. Etwa besitzt die Überdeckung

$$\mathbb{R} = \cdots \cup (-2, 0) \cup (-1, 1) \cup (0, 2) \cup \cdots$$

keine endliche Teilüberdeckung.

LEMMA 1.54. Sei X ein topologischer Raum.

- (i) Ist X kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ kompakt.
- (ii) Ist X Hausdorff, so ist jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ abgeschlossen.

Beweis.

- (i) Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Dann existieren offene Teilmengen $V_i \subset X$ mit $U_i = V_i \cap A$ und $X = \bigcup_{i \in I} V_i \cup X \setminus A$ ist eine offene Überdeckung von X . Folglich existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $X = \bigcup_{i \in J} V_i \cup X \setminus A$. Dann ist aber auch $A = X \cap A = \bigcup_{i \in J} U_i$.
- (ii) Sei $K \subset X$ kompakt und $x \in X \setminus K$. Dann existiert eine offene Menge $U \subset X \setminus K$ mit $U \cap K = \emptyset$: Da X Hausdorff ist, existiert nämlich für jedes $y \in K$ eine offene Umgebung U_y von x und eine offene Umgebung V_y von y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $K \subset \bigcup_{y \in K} V_y$ eine offene Überdeckung von K und folglich existiert eine endliche Teilmenge $K_0 \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{y \in K_0} V_y$. Dann ist aber $\bigcap_{y \in K_0} U_y \subset X \setminus K$ eine offene Umgebung von x . Das genügt um zu sehen, dass $X \setminus K$ offen ist. \square

DEFINITION 1.55. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, falls für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ das Bild $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

Ähnlich wie für offene Abbildungen ist eine stetige Bijektion genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie eine abgeschlossene Abbildung ist.

LEMMA 1.56. Seien X und Y topologische Räume, X kompakt und $f: X \longrightarrow Y$ stetig.

- (i) Ist f surjektiv, so ist Y kompakt.
- (ii) Ist Y Hausdorff, so ist f abgeschlossen.

(iii) Ist Y Hausdorff und f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Natürlich implizieren (i) und (ii) zusammen mit der vorstehenden Bemerkung Teil (iii).

- (i) Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Dann ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Also existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i) = X$. Da f surjektiv ist, gilt dann auch $Y = \bigcup_{i \in J} U_i$.
- (ii) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt nach Lemma 1.54 und damit nach (i) auch das Bild $f(A) \subset Y$ kompakt. Aber da Y Hausdorff ist, folgt nach Lemma 1.54, dass $f(A)$ abgeschlossen ist. \square

Im Allgemeinen sind Teilräume kompakter Räume nicht selbst kompakt. Zum Beispiel ist keine Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums, die nicht abgeschlossen ist, kompakt. Hingegen zeigt Lemma 1.56, dass Quotienten kompakter Räume immer selbst kompakt sind.

KOROLLAR 1.57 (Heine-Borel).

- (i) Das Intervall $[0, 1]$ ist kompakt.
- (ii) Eine Teilmenge von \mathbb{R}^m ist kompakt, genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis.

- (i) Sei $X = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ mit der diskreten Topologie. Dann ist X kompakt und wegen Satz 1.67 auch das Produkt $X^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} X$ kompakt. Definiere eine Abbildung

$$f: X^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, 1], \quad f(a_1, a_2, \dots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n} = 0.a_1 a_2 \dots$$

Dann ist f surjektiv und stetig(!). Wegen Lemma 1.56 ist dann $f(X^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$ kompakt.

- (ii) Sei zuerst $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A \subset [-n, n]^m$. Aber $[0, 1] \cong [-n, n]$ ist kompakt und damit ist nach Satz 1.67 auch $[-n, n]^m$ kompakt. Nach Lemma 1.54 ist dann auch A als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums selbst kompakt.
- (iii) Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann ist K nach Lemma 1.54 abgeschlossen. Außerdem ist $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0) = \mathbb{R}^m$ eine offene Überdeckung. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(0) = B_N(0)$. Anders gesagt muss K beschränkt sein. \square

DEFINITION 1.58. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Ein Häufungspunkt von A ist ein $p \in X$, so dass jede Umgebung von p einen Punkt $p' \in A$ mit $p' \neq p$ enthält.

SATZ 1.59. Ist X kompakt, so besitzt jede unendliche Teilmenge $A \subset X$ einen Häufungspunkt.

Beweis. Andernfalls ist zuerst A abgeschlossen: Wäre nämlich $p \in \overline{A} \setminus A$, so wäre für jede Umgebung U von p der Schnitt $U \cap A \neq \emptyset$. Aber dann wäre p ein Häufungspunkt von A .

Außerdem gibt es, falls A keinen Häufungspunkt besitzt, für alle $p \in A$ eine Umgebung U_p von p mit $A \cap U_p = \{p\}$. Folglich ist die Teilraumtopologie auf A diskret. Aber da X kompakt ist, ist nach Lemma 1.54 auch A kompakt. Aber jeder diskrete, kompakte Raum ist endlich. \square

DEFINITION 1.60. Ein topologischer Raum X heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Im Allgemeinen sind Folgenkompaktheit und Kompaktheit unabhängig voneinander. Es gibt folgenkompakte Räume, die nicht kompakt sind, und kompakte Räume, die nicht folgenkompakt sind.

SATZ 1.61. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist kompakt.
- (ii) Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.
- (iii) X ist folgenkompakt.

Beweis.

(1→2) Das ist Satz 1.59.

(2→3) Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ist A endlich, gibt es eine konstante und damit konvergente Teilfolge. Ist A unendlich, besitzt A einen Häufungspunkt $x \in X$. Dann existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $x_{n_m} \in A \cap B_{1/m}(x)$ mit $x_{n_m} \neq x$ und $n_m < n_{m+1}$. Dann konvergiert $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ gegen x .

(3→1) Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von X . Für eine beliebige Teilmenge $B \subset X$ schreiben wir

$$\text{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $B \subset X$ mit $\text{diam}(B) < \delta$ ein $i \in I$ existiert mit $B \subset U_i$. Andernfalls gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $\emptyset \neq C_n \subset X$ mit $\text{diam}(C_n) < \frac{1}{n}$ und $C_n \not\subset U_i$ für alle $i \in I$. Sei $x_n \in C_n$ und $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, etwa $x_{n_m} \rightarrow x$. Sei $j \in I$ mit $U = U_j \ni x$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Für $k \gg 0$ gilt dann $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aber dann wäre $C_{n_k} \subset B_{\varepsilon/2}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. Weiter gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Punkte $x_1, \dots, x_m \in X$, so dass $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_m)$. Andernfalls könnten wir induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X konstruieren. Wähle $x_1 \in X$ beliebig. Für $n > 1$ ist

$$B = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_{n-1}) \neq X.$$

Wähle $x_n \in X \setminus B$. Aber dann kann $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen.

Für δ wie oben sei $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$. Dann gibt es $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_m)$. Dann ist $\text{diam}(B_\varepsilon(x_i)) \leq 2\varepsilon < \delta$ und damit existiert für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $j_i \in I$ mit $B_\varepsilon(x_{j_i}) \subset U_{j_i}$. Aber dann ist

$$X = U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}. \quad \square$$

DEFINITION 1.62. Eine Teilmenge A in einem metrischen Raum (X, d) ist *totalbeschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge von Punkten $x_1, \dots, x_n \in A$ existiert, so dass $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

DEFINITION 1.63. Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für $m, n \geq N$.

Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Eine totalbeschränkte Teilmenge eines metrischen Raums ist natürlich auch beschränkt. Die Umkehrung gilt aber nicht. Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) ist totalbeschränkt: Für $\varepsilon > 0$ hat die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ nämlich eine endliche Teilüberdeckung.

Jede kompakte Teilmenge A ist auch vollständig. Ist nämlich $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A , so existiert eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$; etwa $x_{n_k} \rightarrow x \in A$. Dann konvergiert auch $\{x_n\}$ gegen x , denn sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(x_n, x_{n_N}) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$ und $d(x, x_N) < \varepsilon/2$.

Dann ist $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_n) < \varepsilon$ für $n \geq N$. Ohne Beweis erwähnen wir das folgende Resultat.

SATZ 1.64. *Ein totalbeschränkter und vollständiger metrischer Raum ist kompakt.* ■

1.8 Ultrafilter und der Satz von Tychonoff

TODO

DEFINITION 1.65. Für $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y und \mathcal{F} ein Filter auf X , definieren wir

$$f_*\mathcal{F} := \{M \subset Y : f^{-1}(M) \in \mathcal{F}\},$$

den *Pushforward-Filter*.

LEMMA 1.66. *Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y und \mathcal{F} ein Filter auf X .*

- (i) *Der Pushforward-Filter $f_*\mathcal{F}$ ist tatsächlich ein Filter auf Y .*
- (ii) *Wenn \mathcal{F} ein Ultrafilter ist, so ist auch $f_*\mathcal{F}$ ein Filter.*

Beweis.

- (i) Wir haben $Y \in f_*\mathcal{F}$, denn $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$, und $\emptyset \notin f_*\mathcal{F}$, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$. Für $M, N \in f_*\mathcal{F}$ ist $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \in \mathcal{F}$, also auch $M \cap N \in f_*\mathcal{F}$. Ist weiter $M \in f_*\mathcal{F}$ und $N \supset M$, so ist $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ und wegen $f^{-1}(N) \supset f^{-1}(M)$ auch $f^{-1}(N) \in \mathcal{F}$. Also ist auch $N \in f_*\mathcal{F}$.
- (ii) Sei $M \subset Y$. Dann ist entweder $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M) \in \mathcal{F}$. Aber das heißt, dass entweder $M \in f_*\mathcal{F}$ oder $Y \setminus M \in f_*\mathcal{F}$. □

SATZ 1.67 (Tychonoff). *Beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt in der Produkttopologie.*

Beweis. Sei I beliebige Indexmenge und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ nichtleer und $\pi_j: X \longrightarrow X_j$ die Projektion auf X_j für jedes $j \in I$. Wir zeigen, dass X kompakt ist, indem wir zeigen, dass jeder Ultrafilter in X konvergiert.

Sei also \mathcal{F} ein Ultrafilter auf X . Dann ist für jedes $i \in I$ der Pushforward-Filter $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X_i . Weil X_i kompakt ist, konvergiert $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ gegen ein $x_i \in X_i$. Wir zeigen, dass dann $(x_i)_{i \in I}$ ein Grenzwert von \mathcal{F} ist. Sei dafür $U \subset X$ eine offene Umgebung von x . Wegen dem dritten Filteraxiom können wir ohne Einschränkung U durch eine offene Menge der Form $\prod_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i)$ für offene Mengen $U_i \subset X_i$ mit $x_i \in U_i$ ersetzen, wobei aber nur endlich viele der U_i verschieden von X_i sind. Sei etwa $J \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $U_i = X_i$ für $i \notin J$.

Aber dann ist U_i für jedes $i \in I$ eine offene Umgebung von x_i . Da $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ gegen x_i konvergiert, ist dann $U_i \in (\pi_i)_*\mathcal{F}$, d. h. $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$. Aber dann ist $\bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$, da J endlich ist. Außerdem ist

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i).$$

Also konvergiert \mathcal{F} tatsächlich gegen $(x_i)_{i \in I}$. □

Der Beweis funktioniert nicht, wenn man die Produkttopologie durch die Boxtopologie ersetzt. Ist zum Beispiel X ein endlicher diskreter topologischer Raum, so ist $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ mit der Produkttopologie wie eben gezeigt kompakt. Aber die Boxtopologie auf $\prod_{n \in \mathbb{N}} X$ ist diskret!

1.9 Einpunktkompaktifizierung

Das offene Intervall $(0, 1)$ mit der euklidischen Topologie ist nicht kompakt. Aber es gibt eine stetige Funktion $(0, 1) \rightarrow S^1$ deren Bild nur einen Punkt in S^1 nicht enthält und S^1 ist kompakt. Das ist ein erstes Beispiel für eine Einpunktkompaktifizierung.

DEFINITION 1.68. Sei X ein Hausdorffraum und $X^* = X \cup \{\infty\}$, wobei $\infty \notin X$. Sei \mathcal{T}_∞ die folgende Menge von Teilmengen von X^* :

- (i) Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist $U \in \mathcal{T}_\infty$.
- (ii) Für $K \subset X$ kompakt ist $X^* \setminus K \in \mathcal{T}_\infty$.

Der topologische Raum (X, \mathcal{T}_∞) heißt *Einpunktkompaktifizierung* von X .

LEMMA 1.69. Die Familie \mathcal{T}_∞ ist eine Topologie auf X^* .

Beweis. Wir haben $\emptyset \in \mathcal{T}_\infty$, da $\emptyset \subset X$ offen ist. Außerdem ist $X^* \in \mathcal{T}_\infty$, denn $X^* \setminus \emptyset = X^*$ und $\emptyset \subset X$ ist kompakt.

Für $U_1, U_2 \subset X$ offen ist natürlich auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_\infty$. Ist $U \subset X$ offen und $V = X^* \setminus K$ mit $K \subset X$ kompakt, so ist $U \cap V = U \cap (X^* \setminus K) = U \cap (X \setminus K) \subset X$ offen in X , denn K ist als kompakte Menge in einem Hausdorffraum abgeschlossen. Sind weiter $K_1, K_2 \subset X$ kompakt, so ist $(X^* \setminus K_1) \cap (X^* \setminus K_2) = X^* \setminus (K_1 \cup K_2) \in \mathcal{T}_\infty$, da $K_1 \cup K_2 \subset X$ kompakt ist.

Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X , so ist natürlich auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_\infty$. Ist $\{K_i\}_{i \in I}$ eine Familie kompakter Teilmengen von X , so ist

$$\bigcup_{i \in I} (X^* \setminus K_i) = X^* \setminus \bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{T}_\infty,$$

da $\bigcap_{i \in I} K_i \subset X$ kompakt ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $U \cup (X^* \setminus K) \in \mathcal{T}_\infty$ für $U \subset X$ offen und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus K \cap U)$ und $K \setminus (K \cap U) = K \cap (X \setminus U) \subset K$ ist eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K . Also ist auch $U \cup (X^* \setminus K) \in \mathcal{T}_\infty$. \square

LEMMA 1.70. Die Teilraumtopologie auf $X \subset X^*$ stimmt der ursprünglichen Topologie auf X überein.

Beweis. Ist $U \subset X$ offen in der ursprünglichen Topologie auf X , so ist auch $U \subset X^*$ offen und $U = X \cap U$.

Sei $U \subset X^*$ eine beliebige offene Teilmenge. Ist $U \subset X$, so ist $X \cap U = U$ offen in der ursprünglichen Topologie auf X . Ist $U = X^* \setminus K$ für $K \subset X$ kompakt, so ist $X \cap U = X \setminus K$ auch offen in der ursprünglichen Topologie auf X , denn X ist Hausdorff und K ist als kompakte Menge in einem Hausdorffraum abgeschlossen. \square

LEMMA 1.71. Der Raum X^* ist kompakt.

Beweis. Sei $X^* = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X^*$ offen. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$ und dafür ist $U_{i_0} = X^* \setminus K$ für $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Aber dann ist $K \subset \bigcup_{i \in I} X \cap U_i$ und es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i \in J} X \cap U_i$. Aber dann ist $X^* = U_{i_0} \cup \bigcup_{i \in J} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung. \square

LEMMA 1.72. Sei X lokalkompakt, d. h. X ist Hausdorff und für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $x \in U \subset K$. Dann ist X^* ein Hausdorffraum.

Beweis. Seien $x \neq y$ Punkte in X^* . Sind $x, y \in X$, so gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da wir annehmen, dass X Hausdorff ist. Sei also einer der Punkte $\infty \in X^*$, etwa $x \in X$ und $y = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit $x \in U \subset K$. Aber dann ist $\infty \in X^* \setminus K$ und $X^* \setminus K \subset X^*$ ist offen. Außerdem ist $U \cap (X^* \setminus K) = \emptyset$. \square

Insgesamt haben wir folgenden Satz gezeigt.

SATZ 1.73. *Sei X ein Hausdorffraum und $X^* = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X . Dann gilt:*

- (i) *Die Teilraumtopologie auf $X \subset X^*$ stimmt mit der ursprünglichen Topologie auf X überein.*
- (ii) *X^* ist kompakt.*
- (iii) *Wenn X lokalkompakt ist, dann ist X^* Hausdorff.*

LEMMA 1.74. *Sei Y ein kompakter Hausdorffraum und $X \subset Y$ ein Teilraum, so dass $Y \setminus X = \{\text{pt}\}$ nur einen Punkt enthält. Dann ist X lokalkompakt.*

Beweis. Sei $x \in X$. Da Y Hausdorff ist, gibt es offene Teilmengen $U, V \subset Y$ mit $x \in U$, $\text{pt} \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Aber dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossen und als Teilmenge des kompakten Raums Y selbst kompakt. Außerdem ist $x \in X \cap U \subset Y \setminus V$. \square

LEMMA 1.75. *Sei X lokalkompakt und X^* die Einpunktkompaktifizierung. Angenommen, Y ist ein kompakter Hausdorffraum, so dass $X \subset Y$ ein Teilraum und $Y \setminus X = \{\text{pt}\}$ ist. Dann ist die Abbildung $\varphi: Y \longrightarrow X^*$ mit $\varphi|_X = \text{id}_X$ und $\varphi(\text{pt}) = \infty$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung φ ist offenbar eine Bijektion. Da Y kompakt und X^* nach **Lemma 1.74** Hausdorff ist, genügt es also zu zeigen, dass φ stetig ist. Sei dafür $U \subset X^*$ offen.

Ist $U \subset X$, so ist $\varphi^{-1}(U) = U \subset X \subset Y$ offen in der Teilraumtopologie auf X . Aber $X \subset Y$ ist offen, da $\{\text{pt}\} \subset Y$ abgeschlossen ist, also ist U auch offen in Y . Ist hingegen $U = X^* \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset X$, so ist $\varphi^{-1}(U) = Y \setminus \varphi^{-1}(K) = Y \setminus K$. Aber $K \subset Y$ ist kompakt (in der Teilraumtopologie) und damit abgeschlossen, da Y ein Hausdorffraum ist. Also ist auch dann $\varphi^{-1}(U)$ offen. \square

Mit diesem Lemma können wir auch sehen, dass $S^1 \cong (0, 1)^*$. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass $S^1 \setminus \{\text{pt}\} \cong (0, 1)$ für jeden Punkt $\text{pt} \in S^1$. Außerdem ist S^1 ein kompakter Hausdorffraum und $(0, 1)$ ist lokalkompakt. Ähnlich ist die Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^n homöomorph zur n -Sphäre S^n .