Vorlesung 2.11.2020

Topologie

Viktor Kleen & Sabrina Pauli

Di 10-12 Mo 12-14

Übung Fr 10-12

Jede Woche Präsenzübungen.
2 Hausübungen ⇝ Klausurbonus.

Überblick:

1. Hälfte

- Definitionen: Topologie,
  Stetigkeit,
  Basen
- Teilräumen, Produkträumen,
  Quotientenräume
- Trennungsaxiomen
  (zB Hausdorff)
- Separabilität
- Zusammenhängende Räume
- Kompaktheit

Algebraische Topologie

- Homotopie, Homotopieäquivalenz
- Wege, Fundamentalgruppe

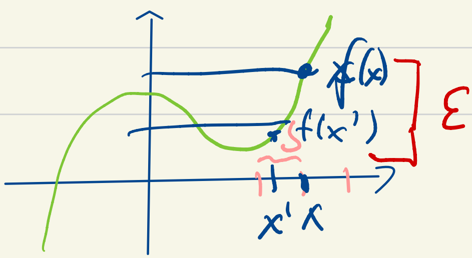
- Van Kampen
- Überlagerungen

<u>Wiederholung</u>: Offene Mengen, Stetigkeit in normierten / metrischen Räumen.

Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}^n$:

- Supremumsnorm
  $$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max(|x_1|,\dots,|x_n|)$$
- ℓ^p-Norm:
  $$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>Def</u> Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig bzgl eines Norm $\|\cdot\|$ falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt s.d. $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle x', $\|x - x'\| < \delta$



Satz: Je zwei Normen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h.
$\exists$ $c, C > 0$ s.t.

$$c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Korollar: $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ Normen auf $\mathbb{R}^n$.
Dann

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig bzgl $\|\cdot\|$
$\iff f$ stetig bzgl $\|\cdot\|'$

Frage: Gibt es einen von der Norm losgelösten Begriff von Stetigkeit?

Metrische Räume:

Def: Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ s.d. für alle $x, y, z \in X$

1) positiv Definitheit: $\cdot\ d(x,y) \geq 0$
   $\cdot\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$

3) Dreiecks-Ungleichung:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Ein metrischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik.

Bsp: Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum induziert die folgende Metrik

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Def: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) zwei metrische Räume.
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig falls für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt st. $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d_X(x', x) < \delta$.

Frage: Können wir Stetigkeit auch ohne Metrik definieren?

Def Sei (X,d) ein metrischer Raum. Der offene Ball um $x \in X$ mit Radius $r>0$ ist

$$B_r(x) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}.$$

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen wenn für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert s.t. $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Bsp: $X = \mathbb{R}$ $\quad d: X \times X \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \mapsto |x-y|$$

- (a,b) ist offen
- $(a,b) \cup (c,d)$ ist offen
- $(a,b) \cap (c,d)$ ist offen
- Beliebige Vereinigungen von offenen Intervallen offen.

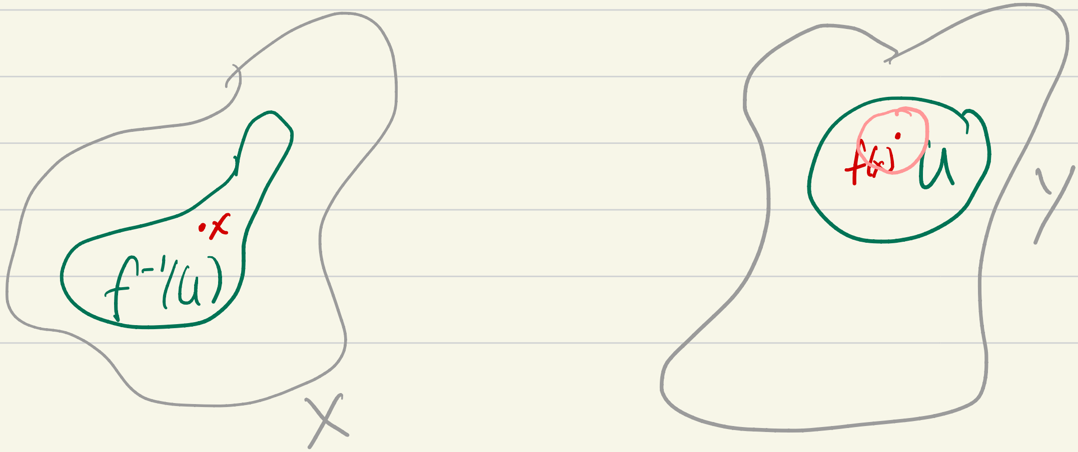
- $[a,b]$ ist nicht offen
  $[a,b)$ — " —

<u>Satz:</u> Seien (X, d_X), (Y, d_Y) zwei metrische Räumen und eine Abbildung $f: X \to Y$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) f ist stetig
2) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ offen.

<u>Beweis:</u> 1) $\Rightarrow$ 2) Sei $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also, dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ gibt es ein $\delta > 0$ s.d.

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}(U).$$



U offen $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

Stetigkeit impliziert, dass es ein $\delta > 0$ gibt s.d. für $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$

$\Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Das bedeutet

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$$

$$\Rightarrow B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$$

2) $\Rightarrow$ 1): Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$

Wir suchen $\delta > 0$ s.d.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$B_\varepsilon(f(x))$ ist offen in Y.

(Übungsaufgabe)

$\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ist offen.

$$x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \underset{\substack{\uparrow \\ f^{-1}(B_\varepsilon f(x)) \\ \text{offen}}}{\Rightarrow} \exists\ \delta > 0 \text{ s.t. } B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

Also für jedes $x' \in X$ mit
$d_X(x, x') < \delta$ $(x' \in B_\delta(x))$

gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

$\square$

Für 2) braucht man keine Metrik sondern nur den Begriff einer "offenen Teilmenge".

Grundbegriffe

Def: Sei X eine Menge. Eine **Topologie** auf X eine Menge τ von Teilmengen von X ist s.d.

1) $\emptyset, X \in \tau$

$\emptyset$, X sind offen.

2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.

Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

3) $M \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{U \in M} U \in \tau$

Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Die Elemente von X heißen Punkte.
Die Elemente von τ heißen offene Teilmengen.

Ein topologischer Raum ist eine Menge zusammen mit einer Topologie.

Def: Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig wenn für für jedes $U \in \tau_Y$, $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

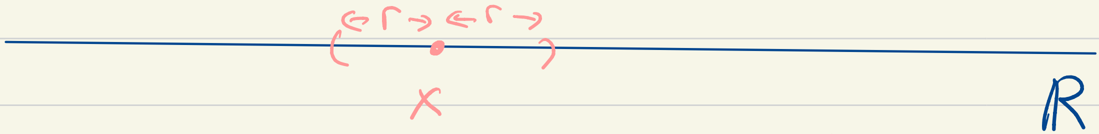
Mit anderen Worten: Urbilder offener Mengen sind offen.

Beispiele:

Standardtopologie auf $\mathbb{R}$:

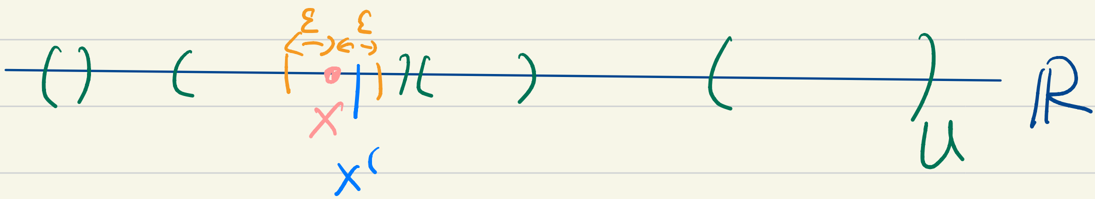
$$d(x,y) = |x-y|$$

Was sind die offenen Mengen?



$B_r(x) = \{x' \in \mathbb{R} \mid |x-x'| < r\}$

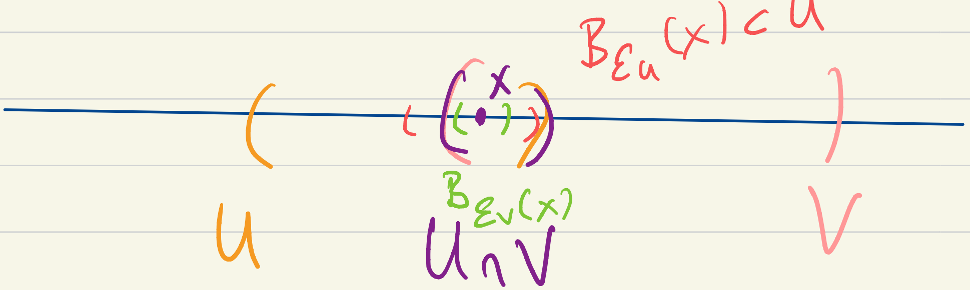
Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ist <u>offen</u> wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ existiert s.d. für $x' \in \mathbb{R}$ mit $|x-x'| <$ gilt $x' \in U$



$\Rightarrow x' \in U$

1) • $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ ist offen
• $\mathbb{R}$ ist offen
$x \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ beliebig
$B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}$ ✓

2) $U, V \subseteq \mathbb{R}$ zwei offene Teilmengen
Wir wollen zeigen, dass
$U \cap V$ offen ist.



$x \in U \cap V$
U offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_u > 0$ sd. $B_{\varepsilon_u}(x) \subseteq U$
V offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_v > 0$ sd $B_{\varepsilon_v}(x) \subseteq V$

$\Rightarrow$ $B_{\min(\varepsilon_u, \varepsilon_v)}(x) \subset U \cap V$ ✓

I Indexmenge

3) U_i offen

Zu zeigen $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen.

$x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ sd $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup U_i$

Das U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon_i > 0$ sd. $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i \subseteq \bigcup U_i$

✓

$X = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ eine Norm
$\rightarrow$ Metrik

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Was sind die offenen Mengen?

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen, falls für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\varepsilon > 0$ existiert s.d. für $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-x'\| < \varepsilon$ gilt $x' \in U$
Mit anderen Worten

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

1) $\emptyset$ offen ✓
$\mathbb{R}^n$ offen (beliebiges $\varepsilon > 0$) ✓

2) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Ist $U \cap V$ offen? Ja (siehe oben)

3) U_i offen $\Rightarrow \bigcup U_i$ offen ✓

(X, d) ein metrischer Raum.

U offen wenn für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert s.d.
$B_\varepsilon(x) \subset U$.

F: Sind die Axiome erfüllt?
1) $\emptyset$ ist offen ✓
X ist offen ✓
2) U, V offen $\overset{?}{\Rightarrow}$ $U \cap V$ offen
Ja (siehe oben)
3) U_i offen $\Rightarrow \bigcup U_i$ offen ✓