Topologie

Viktor Kleen* Sabrina Pauli†

1 Topologische Räume und stetige Funktionen

Zuerst wollen wir Begriffe aus der Analysis wiederholen um später die Definition von topologischen Räumen zu motivien. Die ersten metrischen Räume, die man typischerweise antrifft, sind die Vektorräume $\mathbb{R}^n$, die mit verschiedenen Normen ausgestattet werden können. Zum Beispiel definiert man die *Supremumsnorm*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

oder für $1 \leq p < \infty$ die ℓ^p-Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Definition 1.1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* bezüglich einer Norm $\|\_\|$ falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x'\| < \delta$ gilt.

Satz 1.2. *Je zwei Normen $\|_{\|}$ und $\|\_\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ sind* äquivalent*, d. h. es gibt Konstanten $c, C > 0$, so dass*

$$c\|x\| < \|x\|' < C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Korollar 1.3. *Der Stetigkeitsbegriff für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ hängt nicht von der gewählten Norm auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}$ ab.*

Dieses Korollar motiviert sofort die Frage, ob es einen Begriff von Stetigkeit gibt, der von der Wahl einer Norm losgelöst ist? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich ja, aber wir werden dafür zuerst den Begriff einer *Metrik* unter suchen.

Definition 1.4. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

*viktor.kleen@uni-due.de
†sabrinp@math.uio.no

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d auf X.

Zum Beispiel liefert jede Norm $\|\_\|$ auf einem Vektorraum V eine Metrik durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

DEFINITION 1.5. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, falls es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt.

Diese Definition sieht erstmal nicht besonders hilfreich aus für unser Ziel einen allgemeineren Begriff der Stetigkeit zu finden. Aber mit ihr können wir beginnen eine Definition zu finden, die die Metrik nicht mehr explizit erwähnt.

DEFINITION 1.6. Sei (X, d) ein metrische Raum. Der *offene Ball* um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Beispielsweise können wir $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ betrachten. Dann ist

- das offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen.
- die Vereinigung zweier offener Intervalle $(a, b) \cup (c, d)$ offen.
- das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *nicht* offen.

SATZ 1.7. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ offen.*

Beweis. Sei zuerst f stetig und $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Aber U ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Da f stetig ist, gibt es tatsächlich ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt. Das bedeutet, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, oder anders gesagt, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$.

Sei umgekehrt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Der offene Ball $B_\varepsilon(f(x))$ ist offen (Übungsaufgabe!) und nach der Annahme an f ist damit auch $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen und $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Oder anders gesagt, für jedes $x' \in B_\delta(x)$, d. h. $d(x, x') < \delta$, ist $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, d. h. $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. □

Mit diesem Satz haben wir einen vielversprechenden Kandidaten für einen Stetigkeitsbegriff, denn Bedingung (ii) braucht nicht mehr explizit eine Metrik, sondern nur noch den Begriff einer *offenen Teilmenge.*

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.8. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X mit

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(iii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{U \in M} U \subset \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen* von X und die Elemente von X heißen *Punkte*. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Definition 1.9. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}_Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist, d. h. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Unsere Beispiele von metrischen Räumen liefern sofort Beispiel von topologischen Räumen. Wir betrachten zuerst $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt dann offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Die Axiome sind erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist natürlich $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offen, und $x \in U \cap V$, so gibt es ein $\varepsilon_U > 0$ mit $(x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \subset U$ und ein $\varepsilon_V > 0$ mit $(x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset (x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \cap (x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen in $\mathbb{R}$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Aber U_j ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j$. Also ist dann auch

$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ganz ähnlich zeigt man, dass $\mathbb{R}^n$ mit der von einer Norm induzierten Metrik einen topologischen Raum definiert. Wieder heißt nämlich eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x - x'\| < \varepsilon\} \subset U$.

Allgemeiner definiert jede Metrik d auf einer Menge X eine Topologie. Sie heißt die von d induzierte *metrische Topologie* auf X: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wieder sind die Axiome erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in X$ ist natürlich $B_\varepsilon(x) \subset X$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

(ii) Sind $U \subset X$ und $V \subset X$ offen und $x \in U \cap V$, so gibt es $\varepsilon_U > 0$ und $\varepsilon_V > 0$ mit $B_{\varepsilon_U}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_V}(x) \subset V$. Aber dann ist

$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset B_{\varepsilon_U}(x) \cap B_{\varepsilon_V}(x) \subset U \cap V.$$

(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ und damit

$$B_\varepsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$