Letztes Mal: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Unser Beweis benutzte die Überlagerung $\begin{array}{c}\mathbb{R}\\ \downarrow\\ S^1\end{array}$

Lebesgue's Überdeckungslemma

Für einen kompakten metrischen Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für jede Teilmenge $E \subset X$ mit $\operatorname{diam}(E) < \lambda$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert, so dass $E \subset U$.

$\ulcorner$ $$\operatorname{diam}(E) = \sup_{p,q \in E} d(p,q)$$ $\lrcorner$

<u>Beweis</u> Für jedes $x \in X$ wähle ein $U(x) \in \mathcal{U}$ mit $x \in U(x)$ und $\varepsilon(x)$ mit $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset U(x)$.

Dann ist $\{ B_{\varepsilon(x)/2}(x) : x \in X \}$ eine offene Überdeckung von X und es gibt eine endliche Teilüberdeckung

$$X = B_{\varepsilon(x_1)/2}(x_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon(x_n)/2}(x_n)$$

Setze $\lambda = \min\{ \varepsilon(x_1)/2, \dots, \varepsilon(x_n)/2 \} > 0$.

Sei $E \subset X$ mit $\operatorname{diam}(E) < \lambda$, $p \in E$.

Dann ist $p \in B_{\varepsilon(x_i)/2}(x_i)$ für ein i.

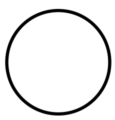
Für $q \in E$ ist dann

$$d(x_i, q) \leq d(x_i, p) + d(p, q)$$

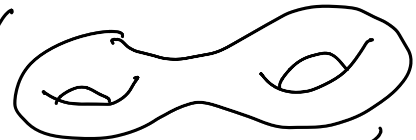
$$\leq \varepsilon(x_i)/2 + \frac{\varepsilon(x_i)}{2} = \varepsilon(x_i),$$

also $E \subset B_{\varepsilon(x_i)}(x_i) \subset U(x_i)$. $\square$

Satz von Seifert-van Kampen

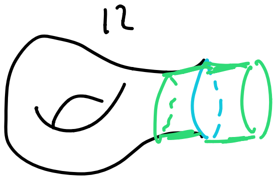
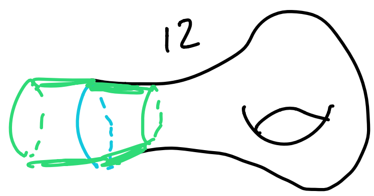
$\pi_1($  $) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \pi_1($  $) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\cong S^1 \times S^1$

Wie können wir $\pi_1($  $)$ berechnen?

$=: \Sigma_2$

$T^2 \setminus \{x\}$ $\cong$ $\quad$ $T^2 \setminus \{x\}$ $\cong$

$\Sigma_2 =$  $\cup$ 

Schnitt $\simeq S^1$

Seifert-van Kampen liefert ein Rezept um $\pi_1(\Sigma_2)$ aus $\pi_1(T^2 \setminus \{x\})$ und $\pi_1(S^1)$ zu berechnen.

<u>Satz</u> (Seifert-van Kampen)

Sei X ein topologischer Raum mit einer offen Überdeckung $X = U \cup V$, so dass $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Dann induzieren für $x_0 \in U \cap V$ die Inklusionen $U \hookrightarrow X$ und $V \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\underbrace{\pi_1(U,x_0) \underset{\pi_1(U\cap V,x_0)}{*} \pi_1(V,x_0)} \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,x_0).$$

Freie Produkt mit Amalgamation

(amalgamiertes Produkt, Pushout in Gruppen)

Freies Produkt von Gruppen

Def.: Sei S eine Menge. Eine Gruppe F mit $S \subset F$ heißt **frei auf S**, wenn es für jede Abbildung $S \xrightarrow{f} G$ in eine beliebige Gruppe G genau einen Gruppenhomomorphismus $F \xrightarrow{\varphi} G$ mit $\varphi|_S = f$ gibt.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ ist eine freie Gruppe auf $\{1\}$: für eine Gruppe G und einen Homomorphismus $\varphi: \mathbb{Z} \to G$

ist $\varphi(n) = \varphi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}) = \varphi(1)^n \in G$ für $n \geq 0$

$$\varphi(-n) = \varphi(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n \text{ mal}}) = \varphi(-1)^n$$
$$= (\varphi(1)^{-1})^n$$
$$= \varphi(1)^{-n} \in G$$

Und für jedes $g \in G$ definiert

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow G$$
$$n \longmapsto g^n$$

einen Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(1) = g$.

Achtung: Freie Gruppen sind fast nie

abelsch.

Konstruktion von freien Gruppen

Sei S eine Menge.

Definition Ein Wort in S ist ein formales Produkt

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

mit $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ und $x_i \in S$. Das leere Wort $()$ ist zulässig.

Eine elementare Reduktion ist

$$x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_i^{\varepsilon_i} y y^{-1} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \longrightarrow_e x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

oder $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_i^{\varepsilon_i} y^{-1} y\, x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \longrightarrow_e x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$.

Zwei Wörter $\vec{x}, \vec{y}$ in S heißen äquivalent wenn es eine Folge von elementaren Reduktionen

$$\vec{x} \to_e \vec{x}_1 \to_e \cdots \to_e \vec{y}$$

gibt.

<u>Lemma</u> (Konfluenz)

Für elementare Reduktionen $\vec{x} \to_e \vec{x}_1$ und $\vec{x} \to_e \vec{x}_2$ gibt es immer elementare Reduktionen $\vec{x}_1 \to_e \vec{z}$ und $\vec{x}_2 \to_e \vec{z}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{x} \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\vec{x}_1 \arrow[dr, "e"'] & & \vec{x}_2 \arrow[dl, "e"] \\
 & \vec{z} &
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> Eine große Fallunterscheidung.

(1) $\vec{x} = \vec{u}_1 y y^{-1} \vec{u}_2 z z^{-1} \vec{u}_3$

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{x} = \vec{u}_1 y y^{-1} \vec{u}_2 z z^{-1} \vec{u}_3 \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\vec{u}_1 \vec{u}_2 z z^{-1} \vec{u}_3 \arrow[dr, "e"'] & & \vec{u}_1 y y^{-1} \vec{u}_2 \vec{u}_3 \arrow[dl, "e"] \\
 & \vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3 &
\end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \vec{u}_1 \, y \, y^{-1} \, y \, \vec{u}_2 \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\ \vec{u}_1 \, y \, \vec{u}_2 \arrow[rr, equal] & & \vec{u}_1 \, y \, \vec{u}_2 \end{tikzcd}$$

etc. $\square$

__Def.:__ Ein Wort $\vec{x}$ in S ist reduziert, wenn es keine elementare Reduktion $\vec{x} \to_e \vec{y}$ gibt.

__Def.:__ Die freie Gruppe auf S $F(S)$ ist die Menge aller reduzierten Wörter in S mit Gruppenoperation "nebeneinander schreiben und reduzieren".

Das ist wohldefiniert wegen dem Konfluenzlemma.

Zur Erinnerung: wir wollen definieren was $G \ast_A H$ heißt.

Definition Seien G, H, A Gruppen mit Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \\ H & \end{tikzcd}$$

Eine Gruppe F heißt amalgamiertes Produkt von G und H über A, wenn ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d] \\ H \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

existiert

und für jede Gruppe B in einem kommutativen Quadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d] \\ H \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

existiert genau ein Homomorphismus $F \xrightarrow{\eta} B$,

so dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ H \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & F \arrow[dr, "\eta"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

<u>Übung</u>: Bis auf Isomorphismus ist F eindeutig bestimmt.

<u>Frage</u> Existiert so ein amalgamiertes Produkt immer? Ja!

Konstruktion vom amalgierten Produkt

Def.: Eine (endliche) Präsentation einer Gruppe G ist $\langle g_1, \ldots, g_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ mit Gruppenelementen $g_1, \ldots, g_n \in G$ und $r_1, \ldots, r_n$ Wörter in $\{g_1, \ldots, g_n\}$, so dass ein Isomorphismus

$$F(\{g_1, \ldots, g_n\})/N \xrightarrow{\cong} G$$

existiert, wobei N die kleinste normale Untergruppe von $F(\{g_1, \ldots, g_n\})$ ist, die $r_1, \ldots, r_n$ enthält.

Eine Präsentation ist $\langle (g_i)_{i \in I} \mid (r_j)_{j \in J} \rangle$ mit analogen Eigenschaften.

- Jede Gruppe G hat eine Präsentation

$$\langle (g)_{g\in G} \mid R \rangle$$

mit $g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \in R \Leftrightarrow g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} = e \in G$

- $\mathbb{Z} \cong \langle 1 \mid \rangle$
- $\mathbb{Z}/2 \cong \langle g \mid g^2 \rangle$

Konstruktion von $G \underset{A}{*} H$

Sei
$$G \cong \langle (g_i)_{i\in I} \mid (r_j)_{j\in J} \rangle$$
$$H \cong \langle (h_i)_{i\in I'} \mid (s_j)_{j\in J'} \rangle$$
$$A \cong \langle (a_i)_{i\in I''} \mid (t_j)_{j\in J''} \rangle$$

mit Homomorphismen
$$\varphi: A \longrightarrow G$$
$$\psi: A \longrightarrow H.$$

Dann ist

$$G \underset{A}{*} H \cong \left\langle (g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i \in I'} \;\middle|\; \begin{array}{l} (r_j)_{j\in J} \\ \cup\, (s_j)_{j\in J'} \\ \cup\, \left(\varphi(a_i)\psi(a_i)^{-1}\right)_{i\in I''} \end{array} \right\rangle =: X$$

<u>Beweis</u> Wir zeigen die universelle Eigenschaft.

Sei B eine Gruppe mit

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\psi"'] & & G \arrow[dd, "f"] \arrow[dl] \\
& X \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
H \arrow[ur] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Definiere eine Abbildung

$h: X \longrightarrow B$

durch $h(g_i) := f(g_i)$, $h(h_i) := g(h_i)$ } Das ist notwendig wegen der Kommutativität von

Wenn dieses h existiert, ist es also eindeutig bestimmt durch Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dl] \arrow[dd, "f"] \\
 & X \arrow[dr] & \\
H \arrow[ur] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Wir müssen überprüfen, dass diese Def. von h kompatibel mit den Relationen ist.

$(r_j)_{j\in J}$: Involvieren nur g_i, also

ist $h(r_j) = f(r_j) = e \in B$

$(s_j)_{j\in J'}$: Involvieren nur h_i, also

ist $h(s_j) = g(s_j) = e$

Es bleibt:

$$h\big(\underbrace{\varphi(a_i)}_{\in G}\,\underbrace{\psi(a_i)}_{\in H}{}^{-1}\big) = f(\varphi(a_i))\, g(\psi(a_i))^{-1}$$
$$= f(\varphi(a_i))\, g(\psi(a_i))^{-1}$$
$$= e.$$

$$\begin{tikzcd}
F(\ldots) \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\
& X \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Also steigt h tatsächlich zu einem Homomorphismus auf X ab. $\square$

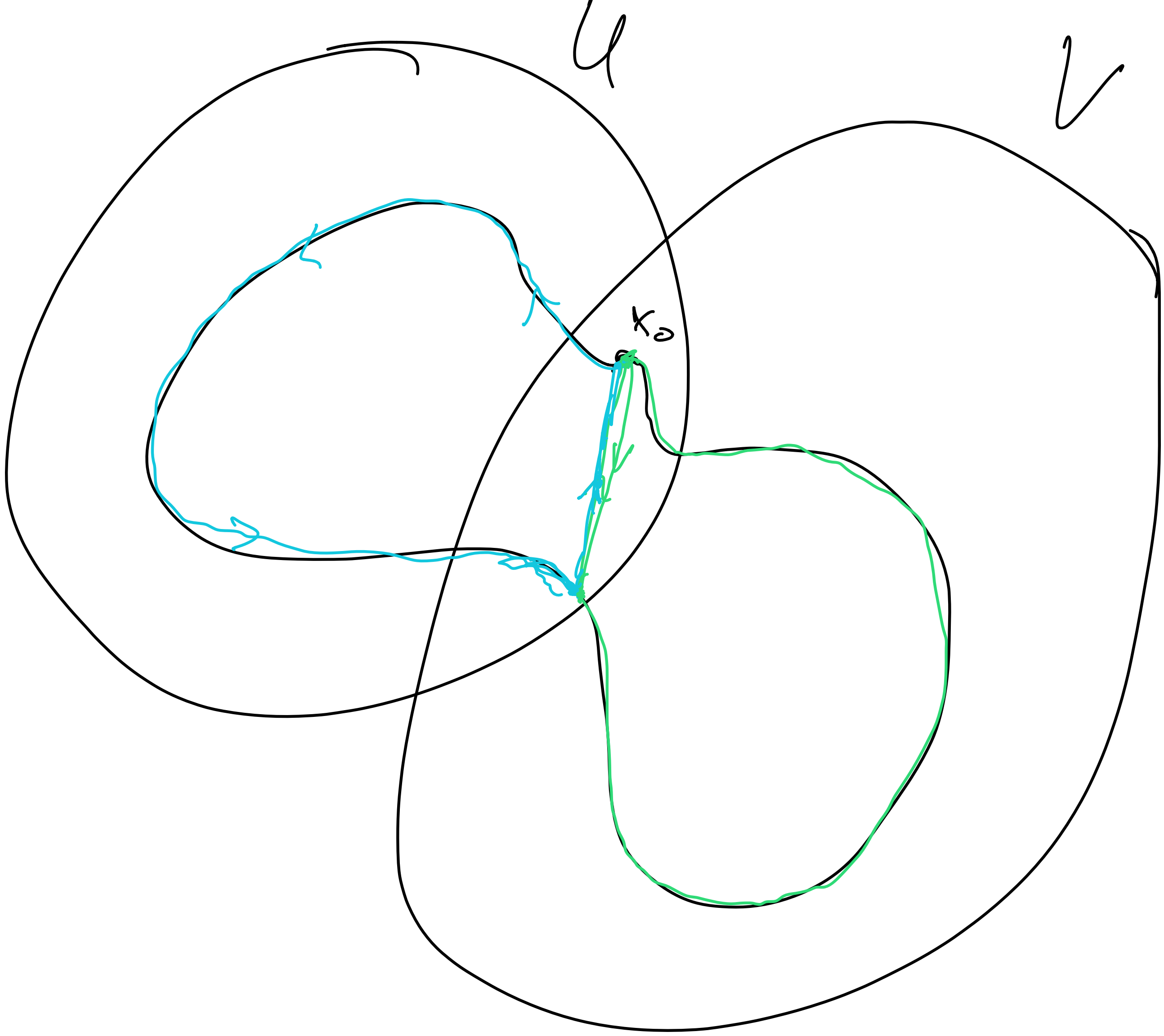
Satz (Seifert-van Kampen)

Sei X ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung $X = U \cup V$, so dass $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Dann induzieren für $x_0 \in U \cap V$ die Inklusionen $U \hookrightarrow X$ und $V \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U\cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0).$$

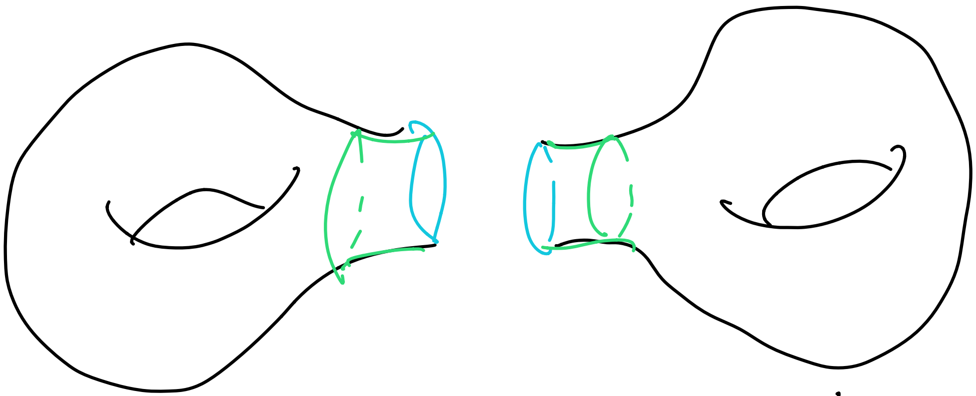
Warum könnte das funktionieren?

<u>Surjektivität:</u> Jede Schleife in X lässt sich als Verknüpfung von Schleifen in U und V schreiben



<u>Injektivität</u> Ähnliche Zerlegung von Homotopien anstatt nur von Wegen. Dabei sieht man dann warum man $\_ *_{\pi_1(U \cap V)} \_$ braucht.

Damit kann man dann $\pi_1(\Sigma_2)$ berechnen



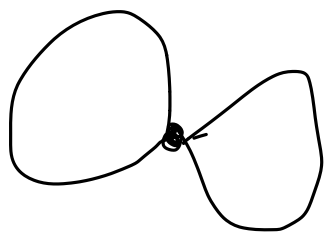
U $\qquad\qquad$ V

$U \simeq T^2 \setminus \{x\}$ $\qquad\qquad$ $V \simeq T^2 \setminus \{x\}$

$$U \cap V \simeq S^1$$

Behauptung:

$$T^2 \setminus \{x\} \simeq S^1 \vee S^1 =$$



Seifert-van Kampen

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F(\{a,b\})$$

Damit

$$\pi_1(\Sigma^2) \cong F(\{a,b\}) \underset{\mathbb{Z}}{*} F(\{c,d\})$$

Man muss jetzt "nur" noch die Abbildungen

$$\mathbb{Z} \longrightarrow F(\{a,b\})$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow F(\{c,d\})$$

bestimmen.