Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

1 Topologische Räume und stetige Funktionen

Zuerst wollen wir Begriffe aus der Analysis wiederholen um später die Definition von topologischen Räumen zu motivien. Die ersten metrischen Räume, die man typischerweise antrifft, sind die Vektorräume $\mathbb{R}^n$, die mit verschiedenen Normen ausgestattet werden können. Zum Beispiel definiert man die *Supremumsnorm*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

oder für $1 \leq p < \infty$ die ℓ^p-Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Definition 1.1. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* bezüglich einer Norm $\|\_\|$ falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x'\| < \delta$ gilt.

Satz 1.2. *Je zwei Normen* $\|_{\|}$ *und* $\|\_\|'$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *sind* äquivalent*, d. h. es gibt Konstanten* $c, C > 0$*, so dass*

$$c\|x\| < \|x\|' < C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Korollar 1.3. *Der Stetigkeitsbegriff für Funktionen* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *hängt nicht von der gewählten Norm auf* $\mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{R}$ *ab.*

Dieses Korollar motiviert sofort die Frage, ob es einen Begriff von Stetigkeit gibt, der von der Wahl einer Norm losgelöst ist? Die Antwort auf diese Frage ist natürlich ja, aber wir werden dafür zuerst den Begriff einer *Metrik* unter suchen.

Definition 1.4. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d auf X.

Zum Beispiel liefert jede Norm $\|\_\|$ auf einem Vektorraum V eine Metrik durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Definition 1.5. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, falls es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt.

Diese Definition sieht erstmal nicht besonders hilfreich aus für unser Ziel einen allgemeineren Begriff der Stetigkeit zu finden. Aber mit ihr können wir beginnen eine Definition zu finden, die die Metrik nicht mehr explizit erwähnt.

Definition 1.6. Sei (X, d) ein metrische Raum. Der *offene Ball* um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Beispielsweise können wir $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ betrachten. Dann ist

- das offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen.
- die Vereinigung zweier offener Intervalle $(a, b) \cup (c, d)$ offen.
- das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *nicht* offen.

Satz 1.7. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ offen.*

Beweis. Sei zuerst f stetig und $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Aber U ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Da f stetig ist, gibt es tatsächlich ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt. Das bedeutet, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$, oder anders gesagt, $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$.

Sei umgekehrt $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Der offene Ball $B_\varepsilon(f(x))$ ist offen (Übungsaufgabe!) und nach der Annahme an f ist damit auch $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen und $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Oder anders gesagt, für jedes $x' \in B_\delta(x)$, d. h. $d(x, x') < \delta$, ist $f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$, d. h. $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. □

Mit diesem Satz haben wir einen vielversprechenden Kandidaten für einen Stetigkeitsbegriff, denn Bedingung (ii) braucht nicht mehr explizit eine Metrik, sondern nur noch den Begriff einer *offenen Teilmenge*.

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.8. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X mit

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Für $U, V \in \mathcal{T}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{T}$.
(iii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{U \in M} U \subset \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen* von X und die Elemente von X heißen *Punkte*. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Definition 1.9. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}_Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist, d. h. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Unsere Beispiele von metrischen Räumen liefern sofort Beispiel von topologischen Räumen. Wir betrachten zuerst $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt dann offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Die Axiome sind erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist natürlich $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.
(ii) Sind $U \subset \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offen, und $x \in U \cap V$, so gibt es ein $\varepsilon_U > 0$ mit $(x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \subset U$ und ein $\varepsilon_V > 0$ mit $(x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset V$. Aber dann ist
$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset (x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U) \cap (x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V) \subset U \cap V.$$
(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen in $\mathbb{R}$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Aber U_j ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j$. Also ist dann auch
$$B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ganz ähnlich zeigt man, dass $\mathbb{R}^n$ mit der von einer Norm induzierten Metrik einen topologischen Raum definiert. Wieder heißt nämlich eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x - x'\| < \varepsilon\} \subset U$.

Allgemeiner definiert jede Metrik d auf einer Menge X eine Topologie. Sie heißt die von d induzierte *metrische Topologie* auf X: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Wieder sind die Axiome erfüllt:

(i) Für $\emptyset$ gibt es nichts zu zeigen. Für jedes $x \in X$ ist natürlich $B_\varepsilon(x) \subset X$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.
(ii) Sind $U \subset X$ und $V \subset X$ offen und $x \in U \cap V$, so gibt es $\varepsilon_U > 0$ und $\varepsilon_V > 0$ mit $B_{\varepsilon_U}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_V}(x) \subset V$. Aber dann ist
$$B_{\min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}}(x) \subset B_{\varepsilon_U}(x) \cap B_{\varepsilon_V}(x) \subset U \cap V.$$
(iii) Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ und damit
$$B_\varepsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Hier noch einige abstraktere Beispiele für topologische Räume: Jede Menge X kann mit der *trivialen Topologie*[1] $\{\emptyset, X\}$ versehen werden. Genauso kann jede Menge X mit der *diskreten Topologie* $\mathcal{P}(X)$, der Potenzmenge von X, versehen werden. Für beide sind die Axiome klar.

Seien verschachtelte topologische Räume $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, so dass die Inklusionen $\iota_{i,j}\colon U_i \hookrightarrow U_j$ stetig sind, gegeben. Letzteres heißt, dass wann immer $V \subset U_j$ offen ist, so ist auch $\iota_{i,j}^{-1}(U_j) = V \cap U_i$

[1] Oder der *indiskreten Topologie* oder der *Klumpentopologie*

offen. In dieser Situation trägt die Vereinigung $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ eine Topologie, genannt die *finale Topologie*. In ihr ist eine Teilmenge $V \subset U$ genau dann offen, wenn $V \cap U_i$ in U_i für alle i offen ist. Wir überprüfen die Axiome:

(i) Natürlich sind $\emptyset$ und U selbst offen.

(ii) Seien $V, W \subset U$ offen. Dann ist $(V \cap W) \cap U_i = (V \cap U_i) \cap (W \cap U_i)$ und letzteres ist ein endlicher Schnitt offener Mengen in U_i. Also ist auch $V \cap W$ offen in U.

(iii) Ist $\{V_j\}_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen in U, so ist wieder

$$U_i \cap \bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J} U_i \cap V_j$$

eine Vereinigung von offenen Teilmengen von U_i. Also ist auch $\bigcup_{j \in J} V_j$ offen in U.

Definition 1.10. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A^c = X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Der Begriff „abgeschlossen“ hat nichts mit „nicht offen“ zu tun! Zum Beispiel sind in jedem topologischen Raum $\emptyset$ und X sowohl abgeschlossen als auch offen.

Satz 1.11. *Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle abgeschlossenen $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.*

Beweis. Für jede Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

Definition 1.12. Gegebenen einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$, definiere

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \supset M \\ \text{abgeschlossen}}} A, \qquad \text{den } \textit{Abschluss} \text{ von } M \text{ in } X,$$

$$M^\circ = \bigcup_{\substack{U \subset M \\ \text{offen}}} U, \qquad \text{das } \textit{Innere} \text{ von } M$$

und

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ, \qquad \text{den } \textit{Rand} \text{ von } M.$$

Zum Beispiel ist für $M = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ in der euklidischen Topologie der Abschluss $\overline{M} = [0, 1]$, das Innere $M^\circ = (0, 1)$ und der Rand $\partial M = \{0, 1\}$. Für $M = \mathbb{Q}$ haben wir den Abschluss $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und das Innere $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ und damit auch den Rand $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Allgemein heißt eine Teilmenge $M \subset X$ in einem topologischen Raum X *dicht*, wenn $\overline{M} = X$.

1.2 Basen für Topologien

Definition 1.13. Eine *Basis für eine Topologie* auf X ist eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit:

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$, d. h. $\mathcal{B}$ überdeckt X,

(ii) für je zwei $U, U' \in \mathcal{B}$ und $x \in U \cap U'$ gibt es ein $U'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in U'' \subset U \cap U'$.

Erfüllt $\mathcal{B}$ nur die erste Bedingung, so ist $\mathcal{B}$ eine *Subbasis für eine Topologie* auf X.

Satz 1.14. *Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis für eine Topologie auf X. Dann bildet die Menge*

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap \cdots \cap S_n : n \in N \text{ und } S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine Basis für eine Topologie auf X.

Beweis. Nachdem $\bigcup \mathcal{S} = X$, überdeckt natürlich auch $\mathcal{B}$ ganz X. Seien weiter $B = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ und $B' = S_1' \cap \cdots \cap S_n'$ Elemente von $\mathcal{B}$. Dann ist

$$B \cap B' = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap S_1' \cap \cdots \cap S_n' \in \mathcal{B}.$$

Insbesondere gibt es für jedes $x \in B \cap B'$ ein $B'' \in \mathcal{B}$ mit $x \in B'' \subset B \cap B'$, nämlich etwa $B'' = B \cap B'$. □

Definition 1.15. Gegeben eine Basis oder Subbasis $\mathcal{B}$ für eine Topologie auf X ist die von $\mathcal{B}$ *erzeugte Topologie* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ die kleinste Topologie auf X, die alle Mengen in $\mathcal{B}$ enthält.

Satz 1.16. *Für eine Basis $\mathcal{B}$ ist die erzeugte Topoologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ gegeben durch*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \text{ beliebig und } B_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Beweis. Zuerst ist für jede Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ mit $B_i \in \mathcal{B}$ natürlich $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Das heißt, wir haben die Inklusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Nachdem $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ aber die kleinste Topologie ist, die $\mathcal{B}$ enthält, und $\mathcal{T}$ ebenso $\mathcal{B}$ enthält, genügt es damit zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ bereits eine Topologie ist.

Dafür ist zunächst $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, denn es ist $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und, da $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie ist, $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

Sei nun $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ mit $U_i, V_j \in \mathcal{B}$. Sei weiter $x \in U \cap V$, d. h. es gibt ein $i \in I$ und ein $j \in J$ mit $x \in U_i \cap V_j$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X ist, gibt es dann ein $W_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in W_x \subset U_i \cap V_j$. Aber dann ist $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}$.

Ist weiter $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmenen von X mit $U_i \in \mathcal{T}$, so können wir $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j$ mit $B_j \in \mathcal{B}$ schreiben. Aber dann ist

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j$$

eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ und deshalb in $\mathcal{T}$. □

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so nennt man $\mathcal{B}$ ein Basis für $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Zum Beispiel können wir, gegeben eine Metrik $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, eine Basis für die metrische Topologie finden: Sei

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}.$$

Dann ist $\bigcup \mathcal{B} = X$, denn für jedes $x \in X$ ist $x \in B_r(x)$ für alle $r > 0$. Ist weiter $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$, so ist $d(z, x) < \varepsilon$ und $d(z, y) < \delta$. Setze $r = \min\{\varepsilon - d(z, x), \delta - d(z, y)\}$. Mit dieser Wahl ist $B_r(z) \subset B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$: Für jedes $p \in B_r(z)$ ist

$$\begin{aligned} d(p, x) &\leq d(p, z) + d(z, x) < r + d(z, x) \\ &\leq \varepsilon - d(z, x) + d(z, x) = \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(p, y) &\leq d(p, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \\ &\leq \delta - d(z, y) + d(z, y) = \delta. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis für eine Topologie auf X. Dass die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie genau die metrische Topologie ist, folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 1.17. *Sei $\mathscr{B}$ eine Basis für eine Topologie auf einer Menge X. Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind dann äquivalent:*

(i) $U \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$

(ii) *Für jedes $x \in U$ gibt es ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \in V \subset U$.*

Beweis. Sei zuerst $U \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$, etwa $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathscr{B}$. Aber das heißt, dass es für jedes $x \in U$ ein $i \in I$ gibt, mit $x \in U_i \subset U$.

Sei andererseits für jedes $x \in U$ ein $V_x \in \mathscr{B}$ mit $x \in V_x \subset U$ gewählt. Dann ist $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. □

Mithilfe von Basen können wir Stetigkeit für Funktionen zwischen topologischen Räumen so umformulieren, dass die Bedingung der ursprünglichen ε-δ-Definition für metrische Räume ähnelt.

Satz 1.18. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $\mathscr{B}_X$ eine Basis für eine Topologie auf X und $\mathscr{B}_Y$ eine Basis für eine Topologie auf Y. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig bezüglich $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$ und $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_Y}$.*

(ii) *Für aller $U \in \mathscr{B}_Y$ ist $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$.*

(iii) *Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathscr{B}_Y$ mit $f(x) \in U$ existiert ein $V \in \mathscr{B}_X$ mit $x \in V$ und $f(V) \subset U$.*

Beweis. Die Richtung (i⇒ii) ist klar. Für (ii⇒iii) sei $U \in \mathscr{B}_Y$ mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen in $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$ und $x \in f^{-1}(U)$. Also gibt es nach Satz 1.17 ein $V \in \mathscr{B}_X$ mit $x \in V \subset f^{-1}(U)$, d. h. $f(V) \subset U$. Das ist aber genau (iii).

Für (iii⇒i) sei $U \subset Y$ offen in $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_Y}$ und $x \in f^{-1}(U)$, d. h. $f(x) \in U$. Es gibt also nach Satz 1.17 ein $U' \subset U$ mit $f(x) \in U'$ und $U' \in \mathscr{B}_Y$. Wegen (iii) gibt es dann ein $V \subset X$ mit $V \in \mathscr{B}_X$, $x \in V$ und $f(V) \subset U'$, d. h. $V \subset f^{-1}(U') \subset f^{-1}(U)$. Aber wieder nach Satz 1.17 genügt das, um zu sehen, dass $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_{\mathscr{B}_X}$. □

Mit Satz 1.17 können wir einen topologischen Beweis für Korollar 1.3 geben. Insbesondere sehen wir, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ tatsächlich den Begriff der Stetigkeit charakterisiert, unabhängig von der gewählten Norm.

Satz 1.19. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\_\|$, $\|\_\|'$ zwei äquivalente Normen auf V. Dann sind die entsprechenden metrischen Topologien gleich: $\mathscr{T}_{\|\_\|} = \mathscr{T}_{\|\_\|'}$.*

Beweis. Da $\|\_\|$ und $\|\_\|'$ äquivalent sind, seien Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\| \le \|x\|' \le C\|x\|$ für alle $x \in V$ gegeben. Schreiben wir

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \varepsilon\}$$

und

$$B'_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|x - y\|' < \varepsilon\},$$

so bilden $\{B_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ und $\{B'_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$ Basen für $\mathscr{T}_{\|\_\|}$ beziehungsweise $\mathscr{T}_{\|\_\|'}$.

(i) Jeder Ball $B'_\varepsilon(x)$ ist offen in $\mathscr{T}_{\|\_\|}$: Sei $y \in B'_\varepsilon(x)$ und $\delta = (\varepsilon - \|y - x\|')/C$. Für $z \in B_\delta(y)$ ist dann

$$\|z - x\|' \le \|z - y\|' + \|y - x\|' \le C\|z - y\| + \|y - x\|' < C\delta + \|y - x\|' = \varepsilon,$$

also $y \in B_\delta(y) \subset B'_\varepsilon(x)$.

(ii) Sei $U \in \mathcal{T}_{\|\_\|}$ und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Setze $\delta = c\varepsilon$. Für $y \in B'_\delta(x)$ ist dann

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{c}\|y - x\|' < \frac{\delta}{c} = \varepsilon,$$

also $y \in B_\varepsilon(x)$. Es folgt also, dass $B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$, und insgesamt nach Satz 1.17, dass $\mathcal{T}_{\|\_\|} = \mathcal{T}_{\|\_\|'}$. □

Definition 1.20. Ein topologischer Raum X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn die Topologie auf X von einer höchstens abzählbar unendlichen Basis erzeugt wird.

1.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wie in metrischen Räumen können wir im Allgemeinen Folgen und ihre Konvergenz betrachten. Allerdings ist der Begriff in allgemeinen topologischen Räumen weit weniger hilfreich, wie wir bald sehen werden.

Definition 1.21. Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, in Symbolen $x_n \to x$, falls für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele der x_n in U liegen.

Im Gegensatz zu unserer Erfahrung in metrischen Räumen muss der Grenzwert einer konvergenten Folge einem allgemeinen topologischen Raum nicht eindeutig bestimmt sein. Sei zum Beispiel $X = \{0, 1\}$ mit der Topologie $\{\emptyset, X, \{0\}\}$ und betrachte die konstante Folge $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar $x_n \to 0$, aber $\{x_n\}_n$ konvergiert auch gegen 1! Die einzige offene Menge in X, die 1 enthält, ist nämlich der ganze Raum X.

Nichtsdestotrotz lassen sich einige Sätze über konvergente Folgen für allgemeine topologische Räume übertragen. Zum Beispiel ließen sich in metrischen Räume stetige Funktionen als genau die folgenstetigen Funktionen charakterisieren.

Satz 1.22. *Stetige Funktionen sind* folgenstetig*: Wenn $x_n \to x$ in X und $f : X \longrightarrow Y$ stetig ist, dann ist $f(x_n) \to f(x)$ in Y.*

Beweis. Sei $U \subset Y$ offen mit $f(x) \in U$. Dann ist $f^{-1}(U)$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Weil $x_n \to x$ liegen dann alle bis auf endlich viele der x_n in $f^{-1}(U)$ und damit auch alle bis auf endlich viele der $f(x_n)$ ind U. □

In allgemeinen topologischen Räumen ist der Umkehrschluss aber falsch! Sei zum Beispiel X eine überabzählbar unendliche Menge. Man definierte die *ko-abzählbare Topologie* auf X, indem man eine Menge $U \subset X$ offen nennt, wenn entweder $U = \emptyset$ oder $X \setminus U$ höchstens abzählbar unendlich ist. Sei $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die nicht schließlich konstant ist, d. h. es gibt kein $p \in X$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $p_n = p$ für alle $n \geq N$. Wir zeigen, dass dann $\{p_n\}_n$ nicht konvergent sein kann. Sei dafür $p \in X$ und setze $U = X \setminus \{p_n : p_n \neq p, n \in \mathbb{N}\}$. Da X die ko-abzählbare Topologie trägt ist dann U offen und $p \in U$. Außerdem gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $p_n \neq p$, d. h. $p_n \notin U$, denn ansonsten wäre $\{p_n\}_n$ schließlich konstant gleich p. Insbesondere kann $\{p_n\}_n$ nicht gegen p konvergieren.

Aber $p \in X$ war beliebig gewählt, also ist keine Folge $\{x_n\}_n$ in X konvergent, außer $\{x_n\}_n$ ist schließlich konstant. Natürlich ist jede schließlich konstante Folge in jedem topologischen Raum konvergent. Das bedeutet, dass jede Funktion $f : X \longrightarrow Y$ folgenstetig ist, denn schließlich konstante Folgen werden immer auf schließlich konstante Folgen abgebildet. Hingegen ist es nicht schwer eine Funktion auf X zu konstruieren, die nicht stetig ist. Zum Beispiel ist die Identitätsabbildung aufgefasst als Funktion von X mit der ko-abzählbaren Topologie nach X mit der diskreten Topologie nicht stetig: Da X überabzählbar unendlich ist, muss es eine Menge in X geben, die nicht offen ist.

Um ein Kriterium an einen topologischen Raum X zu finden, unter dem folgenstetige Funktionen $X \longrightarrow Y$ automatisch stetig sind, führen wir zuerst die folgende Variante von Basen für eine Topologie ein.

Definition 1.23. Eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{U}$, die allen einen Punkt $x \in X$ enthalten, heißt *Umgebungsbasis* für $x \in X$, falls für jede offene Menge $V \subset X$ mit $x \in V$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $x \in U \subset V$.

Zum Beispiel ist die Familie $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ für einen Punkt $x \in X$ in einem metrischen Raum X eine Umgebungsbasis. Oder allgemeiner ist, gegeben eine Basis $\mathcal{B}$ für eine Topologie auf einer Menge X, die Familie $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$ bezüglich der erzeugten Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

Definition 1.24. Ein topologischer Raum X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* wenn jedes $x \in X$ eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis hat.

Satz 1.25. *Angenommen X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist jede folgenstetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $f(x) \in U$ mit $U \subset Y$ offen. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$ und es gibt eine höchstens abzählbar unendliche Umgebungsbasis für x. Wir können diese Umgebungsbasis $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ so wählen, dass

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \ni x,$$

denn ist $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige, höchstens abzählbare Umgebungsbasis für x, setze $V_i = \bigcap_{j \leq i} W_j$. Angenommen es wäre möglich, dass $V_n \not\subset f^{-1}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man dann $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(U)$ für $n \in \mathbb{N}$, erhält man eine Folge $\{x_n\}_n$, die gegen x konvergiert. Da f folgenstetig ist, konvergiert dann auch $\{f(x_n)\}$ gegen $f(x)$. Da U offen ist, gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq N$. Insbesondere ist also $x_N \in f^{-1}(U)$, obwohl wir $x_N \in V_N \setminus f^{-1}(U)$ gewählt hatten.

Es folgt also, dass es eine offene Menge V_N gibt mit $x \in V_N \subset f^{-1}(U)$. Da x beliebig gewählt war, muss damit nach Satz 1.18 die Funktion f stetig sein. □

Satz 1.26. *Gegeben topologische Räume X, Y und Z mit stetigen Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$, ist die Komposition $g \circ f : X \longrightarrow Z$ stetig.*

Beweis. Wenn $U \subset Z$ offen ist, dann auch

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

also Urbild der offenen Menge $g^{-1}(U)$ unter f. □

Definition 1.27. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die $\mathcal{T}$ induziert *Teilraumtopologie* auf Y die Familie

$$\mathcal{T}|_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}.$$

Dass $\mathcal{T}|_Y$ tatsächlich eine Topologie bildet überlassen wir dem Leser zur Übung. Für $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ist in der euklidischen Topologie

$$\overline{[0,1)} = [0,1], \quad [0,1)^\circ = (0,1), \quad \partial[0,1) = \{0,1\},$$

aber bezüglich der induzierten Teilraumtopologie auf $[0,1)$ haben wir

$$\overline{[0,1)} = [0.1), \quad [0,1)^\circ = [0,1), \quad \partial([0,1)) = \emptyset,$$

da $[0,1)$ in der Teilraumtopologie natürlich offen und abgeschlossen ist. Insbesondere sehen wir, dass eine Teilmenge $U \subset A \subset X$, die bezüglich der Teilraumtopologie auf A offen ist, nicht notwendigerweise in X offen sein muss.

Satz 1.28. *Seien X und Y topologische Räume und $A \subset Y$. Dann ist die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow Y$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie auf A. Weiter ist eine Funktion $f\colon X \longrightarrow A$ genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ f\colon X \longrightarrow A \hookrightarrow Y$ stetig ist.*

Beweis. Eine Teilmenge $V \subset A$ ist genau dann offen, wenn es eine in Y offene Menge U gibt mit $V = U \cap A = \iota^{-1}(U)$. Insbesondere ist in diesem Fall $f^{-1}(V) = (\iota \circ f)^{-1}(U)$ offen. □

Betrachten wir als Beispiel für eine stetige Funktion die Projektion $\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\pi_1(x,y) = x$. Um direkt zu zeigen, dass π_1 stetig ist, genügt es nach Satz 1.18 zu zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ der Zylinder $\pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist. Sei dafür $(a,b) \in \pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ und setze $\delta = \varepsilon - |x-a|$. Für $(c,d) \in B_\delta((a,b))$ haben wir dann

$$\begin{aligned} |c-x| \le |c-a| + |x-a| &\le \sqrt{|c-a|^2 + |d-b|^2} + |x-a| < \\ &< \delta + |x-a| = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $(c,d) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$. Das genügt um zu sehen, dass $\pi_1^{-1}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist. Später werden wir die so genannte Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$ definieren und sehen, dass sie gleich der metrischen Topologie ist. Damit werden wir sofort sehen können, dass π_1 stetig sein muss.

Andere Beispiele für stetig Funktionen findet man leicht. Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und wähle auf Y die triviale Topologie. Dann ist f stetig, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ sind beide offen. Trägt X hingegen die diskrete Topologie und Y ist ein beliebiger topologischer Raum, so ist auch jede Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig: jede Teilmenge von X ist offen, und damit insbesondere auch $f^{-1}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset Y$.

Nachdem wir gesehen haben, dass unser topologischer Begriff von Stetigkeit mit dem vorherigen Begriff zwischen metrischen Räumen übereinstimmt, erhalten wir sofort alle stetigen Funktionen zwischen metrischen Räumen als Beispiele stetiger Funktionen. Konkreter ist etwa die Funktion $\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ bezüglich der euklidischen Topologie stetig. Besser noch, tanh hat eine inverse Funktion $\operatorname{atanh}\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, die ebenso stetig ist. Man sagt, tanh ist ein Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und $(-1,1)$.

Definition 1.29. Eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn eine weitere stetige Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Das Thema dieses Kurses wird sein, Methoden kennenzulernen, mit denen man erkennen kann ob zwei topologische Räume homöomorph sein können. Als erstes Beispiel betrachte die Exponentialfunktion $e^{i-}\colon [0,2\pi) \longrightarrow S^1 = \{z : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Der Einheitskreis S^1 trägt hier wie das halboffene Intervall $[0,2\pi)$ die Teilraumtopologie. Diese Abbildung ist stetig und bijektiv, es gibt also eine Umkehrabbildung $\arg\colon S^1 \longrightarrow [0,2\pi)$. Diese Umkehrabbildung ist aber nicht stetig! Zum Beispiel ist $\arg^{-1}([0,\pi))$ nicht offen in S^1, obwohl $[0,\pi) = (-1,\pi) \cap [0,2\pi)$ in $[0,2\pi)$ offen ist: Jeder offene Ball um $1 = e^{i0} \in S^1$ enthält ein $z \in S^1$ mit $\mathrm{Im}(z) < 0$, aber $\arg^{-1}([0,\pi))$ enthält nur solche $z \in S^1$ mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

Wir werden später sehen, dass nicht nur e^{i-} kein Homöomorphismus zwischen $[0,2\pi)$ und S^1 ist, sondern dass es überhaupt keinen solchen Homöomorphismus geben kann.

1.4 Konstruktionen von topologischen Räumen

Wir haben bisher die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gesehen. Ihre offenen Teilmengen können als beliebige Vereinigungen

$$\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \times (a_i', b_i')$$

geschrieben werden, d. h. Mengen der Form $(a,b) \times (a',b')$ bilden eine Basis für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2$. Können wir analog eine Topologie auf einem Produktraum $X \times Y$ für beliebige topologische Räume X und Y definieren?

Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt beliebiger topologischer Räume X_i und sei $\pi_j\colon X \longrightarrow X_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor. Dann ist

$$\mathcal{S} = \{\pi_j^{-1}(U) : j \in I \text{ und } U \subset X_j \text{ offen}\}$$

eine Subbasis für eine Topologie auf X.

Definition 1.30. Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ heißt *Produkttopologie.*

Man sieht leicht, dass die nach Satz 1.14 zu $\mathcal{S}$ gehörige Basis aus den Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ besteht mit $U_i \subset X_i$ offen, aber mit nur endlich vielen der U_i verschieden von X_i. Man kann auch eine größere Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ definieren, wenn man diese letzte Bedingung vernachlässigt. Sie heißt *Boxtopologie*, erfüllt aber viele der guten Eigenschaften der Produkttopologie nicht.

Lemma 1.31. *Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt topologischer Räume X_i versehen mit der Produkttopologie. Dann:*

(i) *Die Projektionen $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ sind stetig.*
(ii) *Die Produkttopologie ist die kleinste Topologie auf X für die alle Projektionen $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ stetig sind, d. h. ist $\mathcal{T}$ eine andere Topologie für die alle π_i stetig sind, so ist jede in der Produkttopologie offene Menge U bereits in $\mathcal{T}$ enthalten.*
(iii) *Sei Y ein topologischer Raum und für jedes $i \in I$ sei $f_i\colon Y \longrightarrow X_i$ stetig. Dann existiert genau eine stetige Funktion $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $\pi_i \circ g = f_i$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[dr, "f_i"'] & X = \prod_{i \in I} X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Beweis.

(i) Sei $U \subset X_i$ offen. Dann ist $\pi_i^{-1}(U)$ enthalten in der Subbasis, die die Produkttopologie auf X definiert. Insbesondere ist damit $\pi_i^{-1}(U)$ natürlich offen.

(ii) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, bezüglich der alle $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ stetig sind, und sei $U \subset X_i$ offen. Dann ist $\pi_i^{-1}(U_i)$ offen bezüglich der Produkttopologie und auch bezüglich $\mathcal{T}$. Das heißt, dass die Subbasis $\mathcal{S}$, die die Produkttopologie erzeugt, in $\mathcal{T}$ enthalten ist. Das bedeutet dann aber, dass auch die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie in $\mathcal{T}$ enthalten ist, was zu zeigen war.

(iii) Die Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ ist definiert durch $g(y) = (f_i(y))_{i\in I}$ und durch die Bedingung $\pi_i \circ g = f_i$ für alle $i \in I$ eindeutig bestimmt. Es bleibt zu sehen, dass g stetig ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass die Urbilder der Elemente der Subbasis $\mathcal{S}$ in Y offen sind. Sei dafür $i \in I$ und $U \subset X_i$ offen, so dass $\pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$g^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = (\pi_i \circ g)^{-1}(U) = f_i^{-1}(U)$$

offen in Y, denn $f_i\colon Y \longrightarrow X_i$ war als stetig angenommen. □

Eigenschaft (iii) Lemma 1.31 nennt man auch die *universelle Eigenschaft* der Produkttopologie. Ein erstes Beispiel für die Produkttopologie haben wir schon mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ gesehen. Man sieht leicht, dass sie tatsächlich mit der Produkttopologie übereinstimmt. Einfache Beispiele stetiger Funktionen bezüglich der Produkttopologie sind etwa die Addition $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Genauso trägt die Menge $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ von $m \times m$-Matrizen die Produkttopololgie, wir fassen sie als $\mathbb{R}^{m^2}$ auf. Hier gibt es ebenso stetige Funktion $+\colon \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ und $\cdot\colon \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$. In den beiden letzten Beispielen gibt es zusätzlich stetige Abbildungen $(\_)^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(\_)^{-1}\colon \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. Damit haben wir auch Beispiele der folgenden Definition.

Definition 1.32. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ zusammen mit einer Topologie auf G bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longmapsto g \cdot h$$

und

$$G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto g^{-1}$$

stetig sind. Dabei versteht sich $G \times G$ als mit der Produkttopologie versehen.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$ indem wir für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann $x \sim y$ schreiben, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Damit können wir die Quotientenmenge $\mathbb{R}/\!\sim \;=: \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bilden. Dann können wir $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auch mit einer Topologie versehen, bezüglich der die Projektion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, die eine reelle Zahl x auf ihre Äquivalenzklasse $[z]$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abbildet, stetig ist. Allgemeiner definieren wir wie folgt.

Definition 1.33. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit $X/\!\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ und mit $q\colon X \longrightarrow X/\!\sim$ die Quotientenabbildung. Dann ist

$$\mathcal{T} = \{U \subset X/\!\sim \,:\, q^{-1}(U) \text{ offen in } X\}$$

eine Topologie auf $X/\!\sim$. Sie heißt die *Quotiententopologie*.

Lemma 1.34. *Mit der Notation wie in Definition 1.33 ist die Quotiententopologie $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie. Weiterhin gilt:*

(i) *Die Quotientenabbildung $q\colon X \longrightarrow X/{\sim}$ ist stetig.*

(ii) *Die Quotiententopologie $\mathcal{T}$ ist die größte Topologie bezüglich der q stetig ist, d. h. ist $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf $X/{\sim}$ bezüglich der q stetig ist, so ist $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.*

(iii) *Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig mit $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \sim y$, so existiert genau eine stetige Abbildung $g\colon X/{\sim} \longrightarrow Y$ mit $g \circ q = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/{\sim} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Natürlich sind $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $q^{-1}(X/{\sim}) = X$ offen in X. Sind $U, V \subset X/{\sim}$ offen in der Quotiententopologie, so ist $q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ offen in X und damit auch $U \cap V$ offen im Quotienten.

Ist schließlich $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in $X/{\sim}$, so ist $q^{-1}(U_i)$ offen in X für jedes $i \in I$ und deshalb auch $q^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(U_i)$ offen in X. Das heißt, $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen im Quotienten $X/{\sim}$.

(i) folgt direkt aus der Definition der Quotiententopologie.

(ii) Sei $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf $X/{\sim}$ bezüglich der q stetig ist. Dann ist für jede Menge $U \in \mathcal{T}'$ das Urbild $q^{-1}(U)$ offen in X. Aber das heißt genau, dass $U \in \mathcal{T}$. Da U beliebig war, bedeutet das $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

(iii) Gegeben eine Äquivalenzklasse $[x] \in X/{\sim}$ definieren wir $g([x]) = f(x)$. Das ist möglich, denn wäre $[x] = [y]$, d. h. $x \sim y$, für ein weiteres $y \in X$, so wäre $f(x) = f(y)$ und es gibt keine Mehrdeutigkeit in dieser Definition von g. Damit haben wir auch sofort, dass $(g \circ q)(x) = g([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$ und g ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass g stetig ist. Sei dafür $U \subset Y$ offen. Dann ist

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ q)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

offen in X und damit $g^{-1}(U)$ offen in $X/{\sim}$. □

Auch hier nennt man Eigenschaft (iii) in Lemma 1.34 die *universelle Eigenschaft* der Quotiententopologie auf $X/{\sim}$. Sie charakterisiert die Quotiententopologie bis auf Homöomorphismus.

Definition 1.35. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ das Bild $f(U) \subset Y$ offen ist.

Mithilfe dieser Definition können wir charakterisieren, wann eine stetige Bijektion ein Homöomorphismus ist. In der Tat ist eine solche stetige Bijektion $f\colon X \longrightarrow Y$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen ist. Denn für alle Mengen $U \subset X$ ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ und damit eine bijektive Abbildung genau dann offen, wenn ihr Inverses stetig ist.

Wir hatten die Quotiententopologie am Beispiel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eingeführt, wobei in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ genau die reellen Zahlen identifiziert wurden, deren Differenz eine ganze Zahl ist. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Quotiententopologie homöomorph zum Einheitskreis S^1 ist. Man betrachte dafür die stetige Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad f(x) = e^{2\pi i x}.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $g\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese g ist surjektiv, denn f war bereits surjektiv. Außerdem ist g injektiv, denn $e^{2\pi ix} = e^{2\pi ix'}$ ist genau dann der Fall, wenn $x - x' \in \mathbb{Z}$. Das heißt, um zu sehen, dass g ein Homöomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass g eine offene Abbildung ist. Zuerst sehen wir, dass f selbst eine offene Abbildung ist. Ist nämlich $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ mit $\varepsilon \leq 1/2/$ ein offenes Intervall, so sieht man leicht, dass $f((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset S^1$ offen ist. Außerdem ist $f(x + x') = f(x)f(x')$ und $f(0) = 1$ und damit sind auch die Bilder aller Intervalle der Form $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mit $\varepsilon \leq 1/2$ offen in S^1. Diese offenen Intervalle bilden eine Basis für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und deshalb sehen wir, dass f eine offene Abbildung sein muss. Ist weiter $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ offen, so ist $g(U) = f(q^{-1}(U))$ offen. Also ist g eine offene Abbildung und nach unserer vorherigen Bemerkung folgt, dass g ein Homöomorphismus ist.

Für ein weiteres Beispiel sei $X = [0, 1]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Teilraumtopologie. Wir führen eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ein, indem wir $x \sim x'$ genau dann schreiben, wenn entweder $x = x'$ oder $x, x' \in \{0, 1\}$. Dann ist der Quotient $X/{\sim}$ ebenfalls homöomorph zum Einheitskreis S^1. Wir können nämlich unser Argument von oben mit der Einschränkung von f auf $[0, 1]$ wortgleich wiederholen.

Sei nun $X = [0, 1]^2$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Teilraumtopologie mit der Äquivalenzrelation $\sim$, bezüglich der genau dann $(x, y) \sim (x', y')$ gilt, wenn entweder $(x, y) = (x', y')$ gilt, oder $x, x' \in \{0, 1\}$ mit $y = y'$, oder $x = x'$ mit $y, y' \in \{0, 1\}$, oder wenn $\{x, x'\} = \{y, y'\} = \{0, 1\}$. Der Quotient $X/{\sim}$ ist dann homöomorph zum Torus $S^1 \times S^1$.

Für ein etwas exotischeres Beispiel sei $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Teilraumtopologie. Wir definieren wieder eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, indem wir $(x, y) \sim (x'y')$ genau dann schreiben, wenn entweder $(x, y) = (x', y')$ oder $x = x' \neq 0$. Der Quotient $X/{\sim}$ ähnelt dann der reellen Geraden $\mathbb{R}$, enthält aber *zwei* Punkte, die sich wie der Ursprung in $\mathbb{R}$ verhalten. Entsprechend nennt man $X/{\sim}$ die *Gerade mit zwei Ursprüngen.*

Definition 1.36. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_A$ auf X, indem wir genau dann $x \sim_A x'$ schreiben, wenn entweder $x = x'$ oder $x, x' \in A$. Den Quotienten $X/{\sim_A}$ bezeichnen wir dann kurz als X/A.

Letzere Definition haben wir bereits in einem Beispiel gesehen. Nämlich ist $[0, 1]/\{0, 1\}$ homöomorph zu S^1. Betrachten wir andererseits etwa $\mathbb{R}/[0, 1]$, so stellen wir fest, dass dieser Quotient wieder homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Wir haben nämlich eine stetige Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \in [0, 1] \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

die die Äquivalenzrelation $\sim_{[0,1]}$ auf $\mathbb{R}$ respektiert. Die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie liefert dann wieder eine stetige Abbildung $g\colon \mathbb{R}/[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}/[0,1] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist g augenscheinlich bijektiv und sogar ein Homöomorphismus. Sei dafür $U \subset \mathbb{R}/[0,1]$ offen in der Quotiententopologie und sei $V = q^{-1}(U)$. Dann gibt es verschieden Fälle:

(i) Ist $V \cap [0,1] = \emptyset$ so ist $f(V) = g(U)$ offen.
(ii) Ist $[0,1] \subset V$, so ist $f(V) = g(U)$ ebenso offen.
(iii) Der Fall $[0,1] \cap V \neq \emptyset$ aber $[0,1] \not\subset V$ ist unmöglich. Das Urbild $q^{-1}(U)$ enthält immer entweder ganz $[0,1]$ oder ist disjunkt von $[0,1]$, da $[0,1]$ im Quotienten auf einen einzigen Punkt kollabiert wird.

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}/[0,1]$ ist $\mathbb{R}/(0,1)$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$: Sei $q\colon R \longrightarrow \mathbb{R}/(0,1)$ die Quotientenabbildung. Dann ist die einelementige Menge $\{q(1/2)\}$ offen in $\mathbb{R}/(0,1)$, denn das Urbild $q^{-1}(\{q(1/2)\}) = (0,1)$ ist offen in $\mathbb{R}$. Aber keine offene Menge in $\mathbb{R}$ enthält nur ein Element.

1.5 Trennungsaxiome

Definition 1.37. Ein topologischer Raum X hat die *Hausdorffeigenschaft* (oder ist *Hausdorff*), falls für verschiedene Punkte $x \neq y \in X$ offene Mengen $U, V \subset X$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie Hausdorff. Seien nämlich $x, y \in \mathbb{R}$ verschieden. Dann ist $\delta = |x - y| > 0$ und wir setzen $U = B_\varepsilon(x)$ und $V = B_\varepsilon(y)$ mit $\varepsilon = \delta/2$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ und $y \in V$.

Jede Menge X mit der diskreten Topologie ist Hausdorff. Tatsächlich sind für verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ offen und disjunkt. Hingegen ist die Topologie $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ auf $X = \{a,b\}$ nicht Hausdorff, denn es gibt in dieser Topologie keine offene Menge die a aber nicht b enthält. Genauso ist $X = \{a,b\}$ mit der trivialen Topologie $\{\emptyset, \{a,b\}\}$ nicht Hausdorff.

Lemma 1.38.

(i) *In einem Hausdorffraum sind einpunktige Mengen abgeschlossen.*
(ii) *Teilräume und Produkträume von Hausdorffräumen sind Hausdorff.*

Beweis.

(i) Sei $x \in X$ und X ein Hausdorffraum. Dann ist zu zeigen, dass $X \setminus \{x\}$ offen ist. Sei dafür $y \in X \setminus \{x\}$ beliebig. Dann gibt es eine offene Menge $U_y \subset X$ mit $y \in U_y$ und $x \notin U_y$. Damit ist $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$ eine Vereinigung offener Mengen und daher selbst offen.
(ii) Seien zuerst $M \subset X$ ein Teilraum eines Hausdorffraums X und $x, y \in M$ verschiedene Punkte. Dann gibt es disjunkte offene Menge $U \subset X$ und $V \subset X$ mit $x \in U$ und $y \in V$. Also ist $x \in U \cap M$ und $y \in V \cap M$ für die disjunkten, in M offenen Mengen $U \cap M$ und $V \cap M$.
Angenommen I ist eine beliebige Indexmenge und $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine Familie von Hausdorffräumen. Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ verschiedene Punkte in $\prod_{i \in I} X_i$, das heißt, es gibt ein $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorff ist, gibt es dann disjunkte offene Mengen $U_j, V_j \subset X_j$ mit $x_j \in U_j$ und $y_j \in V_j$. Für die Projektion $\pi\colon \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ sind dann die Urbilder $\pi^{-1}(U_i)$ und $\pi^{-1}(V_j)$ offen und disjunkt in $\prod_{i \in I} X_i$. Außerdem ist dann $(x_i)_i \in \pi^{-1}(U_j)$ und $(y_i)_i \in \pi^{-1}(V_j)$. □

Quotienten von Hausdorffräumen müssen nicht immer Hausdorff sein. Zum Beispiel ist die Gerade mit zwei Ursprüngen $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}/\sim$ kein Hausdorffraum, obwohl $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ Hausdorff ist. Seien $0 = [(0,0)]$ und $0' = [(0,1)]$ die beiden Ursprünge. Dann enthält jede offene Umgebung von 0 bzw. $0'$ eine Menge der Form $\pi((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{0\})$ bzw. $\pi((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{1\})$ für $\varepsilon > 0$ klein genug und wobei $\pi \colon \mathbb{R} \times \{0,1\} \longrightarrow X$ die Quotientenabbildung bezeichnet. Aber es ist immer

$$\pi((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{0\}) \cap \pi((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{1\}) \neq \emptyset.$$

Definition 1.39. Ein topologischer Raum X heißt T_1, falls jede einpunktige Menge in X abgeschlossen ist.

Wir haben schon gesehen, dass jeder Hausdorffraum T_1 ist. Aber die Umkehrung ist falsch! Zum Beispiel ist die Gerade mit zwei Ursprüngen T_1 aber nicht Hausdorff. Genauso ist $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie T_1 aber nicht Hausdorff: alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind abgeschlossen in der kofiniten Topologie. Aber keine zwei nichtleeren offenen Mengen in der kofiniten Topologie auf $\mathbb{Z}$ sind disjunkt.

Definition 1.40. Sei X ein T_1-Raum.
(i) X heißt *regulär*, falls es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene Mengen U und V in X gibt, so dass $x \in U$, $A \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.
(ii) X heißt *normal*, falls es zu zwei disjunkten, abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen U und V in X gibt, so dass $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Manche Autoren fordern nicht, dass reguläre bzw. normale Räume T_1 sind.

Lemma 1.41.
(i) *Für X regulär ist jeder Teilraum $Y \subset X$ regulär.*
(ii) *Für X normal ist ein Teilraum $Y \subset X$ normal, sobald $Y \subset X$ abgeschlossen ist.* ■

Satz 1.42 (Urysohn–Tietze). *Sei X ein T_1-Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) *X ist normal.*
(ii) *Zu zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ existiert eine stetige Funktion $f \colon X \longrightarrow [0,1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*
(iii) *Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit einer stetige Funktion $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine stetige Fortsetzung $F \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$ und*

$$\sup_{x\in X} F(x) = \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x\in X} F(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

Ist außerdem $|f(x)| < C$ für alle $a \in A$ lässt sich F so wählen, dass $|F(x)| < C$ für alle $x \in X$.
Der Teil (i$\to$ii) ist das Lemma von Urysohn und eine Funktion f wie in (ii) heißt Urysohnfunktion. *Der Teil (i$\to$iii) ist der Fortsetzungssatz von Tietze.*

Lemma 1.43. *Sei X normal. Für $A \subset U$ mit A abgeschlossen und U offen gibt es eine offene Menge $V \subset X$, so dass $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Beweis. Da $X \setminus U$ abgeschlossen, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ und X normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $V, W \subset X$, so dass $A \subset V$ und $X \setminus U \subset W$. Dann ist aber auch $V \subset X \setminus W \subset U$ und da $X \setminus W$ abgeschlossen ist, folgt $A \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U$. □

Lemma 1.44. *Sei X ein Raum, der das Ursyohnlemma, Satz 1.42 Teil (ii), erfüllt, und sei $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, etwa $|f(a)| \leq c$ für alle $a \in A$. Dann existiert eine stetig Abbildung $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$ für $x \in X$ und $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ für $a \in A$.*

Beweis. Die Mengen

$$A_+ = \{a \in A : f(a) \geq c/3\} \quad \text{und} \quad A_- = \{a \in A : f(a) \leq -c/3\}$$

sind abgeschlossen und disjunkt. Also gibt es eine Urysohnfunktion $h\colon X \longrightarrow [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ mit $h|_{A_+} = \frac{1}{3}c$ und $h|_{A_-} = -\frac{1}{3}c$. Für dieses h sieht man leicht, dass $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ für alle $a \in A$. □

Beweis von Satz 1.42. Wir zeigen zuerst (ii→i). Seien dafür $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine Urysohnfunktion $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Aber dann sind $U = f^{-1}([0,1/2))$ und $V = f^{-1}((1/2,1])$ offen in X und disjunkt. Außerdem ist $A \subset U$ und $B \subset V$.

Nun zu (iii→ii); seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $f\colon A \cup B \longrightarrow [0,1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$ stetig und nach (iii) gibt es eine Fortsetzung $F\colon X \longrightarrow [0,1]$. Diese Fortsetzung ist dann eine Urysohnfunktion.

Für (i→ii) sei X normal mit disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$. Da $A \subset X \setminus B$ gibt es nach Lemma 1.43 eine offene Menge $O_1 \subset X$ mit $A \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset X \setminus B$. Dann gibt es wieder nach Lemma 1.43 eine offene Menge $O_0 \subset X$ mit

$$A \subset O_0 \subset \overline{O_0} \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset X \setminus B.$$

Induktiv konstruieren wir dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq p \leq 2^n$ offene Teilmengen $O_{p/2^n} \subset X$ mit

$$A \subset O_{p/2^n} \subset \overline{O_{p/2^n}} \subset O_{q/2^n} \subset \overline{O_{q/2^n}} \subset X \setminus B$$

für $0 \leq p \leq q \leq 2^n$. Ist nämlich $p = 2p'$ gerade, setze $O_{p/2^n} = O_{p'/2^{n-1}}$. Ist $p = 2p' + 1$, gibt es nach Lemma 1.43 eine offene Menge $O_{p/2^n}$ mit

$$\overline{O_{p'/2^{n-1}}} \subset O_{p/2^n} \subset \overline{O_{p/2^n}} \subset O_{(p'+1)/2^{n-1}}.$$

Damit können wir eine Funktion $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ definieren, indem wir

$$f(x) = \inf\left\{\tfrac{p}{2^n} \in \mathbb{R} : x \in O_{p/2^n}\right\}$$

für $x \in O_1$ und $f(x) = 1$ für $x \notin O_1$ setzen. Die Funktion f ist stetig: sei $x \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $d_1 = p/2^m$ und $d_2 = q/2^n$ mit

$$f(x) - \varepsilon < d_1 < f(x) < d_2 < f(x) + \varepsilon.$$

Sei $U = O_{d_2} \setminus \overline{O_{d_1}}$. Dann ist $x \in U$ und $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x))$: zuerst ist $x \in O_{d_2}$, da $f(x) < d_2$, und $x \notin \overline{O_{d_1}}$, da $f(x) > d_1$. Für $y \in U$ gilt genauso $d_1 < f(y) < d_2$ und damit $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Insgesamt genügt das, um zu sehen, dass f stetig ist.

Für (ii→iii) sei A abgeschlossen und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen zuerst an, dass f beschränkt ist, etwa $|f(a)| \leq c$ für alle $a \in A$. Wir konstruieren induktiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Funktion $h_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|h_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n c \quad \text{und} \quad \left|f(a) - \sum_{m=0}^{n} h_m(a)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c.$$

für $x \in X$ und $a \in A$. Setze $h_0 = h$ für h wie in Lemma 1.44. Für $n > 0$ wendet man Lemma 1.44 auf $f - \sum_{m=0}^{n} h_m : A \longrightarrow \mathbb{R}$ an und erhält so

$$h_{n+1} : X \longrightarrow \left[-\tfrac{1}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} c, \tfrac{1}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} c \right].$$

Dann konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ gleichmäßig auf X gegen eine stetige Funktion $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(a) = f(a)$ für $a \in A$ und

$$|F(x)| \leq \frac{c}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^m = \tfrac{c}{3} \cdot 3 = c.$$

Angenommen, es ist sogar $|f(a)| < c$ für alle $a \in A$. In diesem Fall ist

$$A_0 = \{x \in X : |F(x)| = c\}$$

abgeschlossen und $A_0 \cap A = \emptyset$. Es gibt also eine Urysohnfunktion $m : X \longrightarrow [0,1]$ mit $m|_{A_0} = 0$ und $m|_A = 1$. Ersetzt man dann F durch $F \cdot m$ erhält man eine Fortsetzung mit $|F(x)| < c$.

Ist $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht beschränkt, sei $\widehat{f}(a) = \frac{f(a)}{1+|f(a)|}$. Dann ist $\widehat{f} : A \longrightarrow (-1,1)$ beschränkt und stetig. Es gibt also eine stetige Fortsetzung $\widehat{g} : X \longrightarrow (-1,1)$ von $\widehat{f}$. Damit definiert $F(x) = \frac{\widehat{g}(x)}{1-|\widehat{g}(x)|}$ eine stetige Funktion $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(a) = f(a)$, d. h. eine Fortsetzung von f. □

Korollar 1.45. *Metrische Räume sind normal.* ■

Natürlich ist nicht jeder Hausdorffraum regulär. Zum Beispiel kann man die folgende Basis für eine Topologie auf $\mathbb{R}$ betrachten. Sie enthält zunächst alle offenen Intervalle der Form (a,b) für $a, b \in \mathbb{R}$, aber auch die Mengen $(a,b) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Wir schreiben vorübergehend $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ und $\mathbb{R}_K$ für $\mathbb{R}$ mit der erzeugten Topologie. Die Topololgie auf $\mathbb{R}_K$ ist feiner als die euklidische Topologie, also ist $\mathbb{R}_K$ automatisch Hausdorff. Aber $\mathbb{R}_K$ ist nicht regulär. Es ist nämlich $K \subset \mathbb{R}_K$ abgeschlossen und $0 \notin K$. Gäbe es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}_K$ mit $0 \in U$, $K \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$, so könnten wir zuerst ohne Einschränkung annehmen, dass U ein Basiselement für die Topologie auf $\mathbb{R}_K$ ist. Aber $U = (a,b)$ ist unmöglich, weil $0 \in (a,b)$ implizieren würde, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{N} \in (a,b)$. Also ist $U = (a,b) \setminus K$ mit $a < 0 < b$. Dann existiert aber wieder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \in (a,b)$. Aber es ist $\frac{1}{n} \in V$ und nach der definition der Topologie auf $\mathbb{R}_K$ existiert dann ein offenes Intervall $(c,d) \subset V$ mit $\frac{1}{n} \in (c,d)$. Aber dann wäre $((a,b) \setminus K) \cap (c,d) \neq \emptyset$.

Wir hatten gesehen, dass Produkte von Hausdorffräumen wieder Hausdorffräume sind. Das gilt nicht für normale Räume. Zum Beispiel bilden die halboffenen Intervalle $[a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine Basis für eine Topologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ mit der erzeugten Topologie ist die *Sorgenfreygerade* $\mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$. Der Raum $\mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$ ist normal, denn seien $A, B \subset \mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$ abgeschlossen und disjunkt. Für jedes $b \in B$ wähle ein b' mit $[b,b') \subset \mathbb{R}_{\mathrm{sf}} \setminus A$. Dann ist $V = \bigcup_{b \in B} [b,b')$ offen in $\mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$ und $B \subset V$. Analog wähle für jedes $a \in A$ ein a'' mit $[a,a'') \subset \mathbb{R}_{\mathrm{sf}} \setminus B$. Dann ist auch $U = \bigcup_{a \in A} [a,a'') \subset \mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$ offen und $A \subset U$. Wäre nun aber $U \cap V \neq \emptyset$, dann gäbe es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $[a,a'') \cap [b,b') \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

Wir betrachten nun die *Sorgenfreyebene* $\mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}} = \mathbb{R}_{\mathrm{sf}} \times \mathbb{R}_{\mathrm{sf}}$ mit der Produkttopologie. Dann ist $\mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}}$ nicht normal: Zuerst ist nämlich $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}}$ dicht, denn für jede nichtleere offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}}$ existiert ein halboffenes Rechteck $[a,b) \times [c,d) \subset U$ und $[a,b) \times [c,d) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$. Weiter ist die Antidiagonale $\Delta' = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}}$ abgeschlossen, denn für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}}$ mit $x \neq -y$ gibt es zwei Fälle:

$x > -y$: Dann ist $[x, x+1) \times [y, y+1) \subset \mathbb{R}^2_{\mathrm{sf}} \setminus \Delta'$.

$x < -y$: Sei dann $\varepsilon = -(x+y)/2 > 0$. Dann ist $[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2_{\text{sf}} \setminus \Delta'$.

Außerdem ist Δ' sogar diskret in der Teilraumtopologie, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Einpunktmenge $\{(x, -x)\} = \Delta' \cap [x, x+1) \times [-x, -x+1)$ offen in der Teilraumtopologie auf Δ'. Nehmen wir jetzt an, $\mathbb{R}^2_{\text{sf}}$ wäre doch normal. Dann ist jede Teilmenge $A \subset \Delta'$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2_{\text{sf}}$ und es gäbe *disjunkte* offene Mengen $U_A, V_A \subset \mathbb{R}^2_{\text{sf}}$ mit $A \subset U_A$ und $\Delta' \setminus A \subset V_A$. Definiere eine Abbildung

$$\psi\colon \{A \subset \Delta' : A \neq \emptyset, \Delta'\} \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad A \longmapsto U_A \cap \mathbb{Q}^2.$$

Diese Abbildung ist dann injektiv, denn seien $A, B \subset \Delta'$ mit $A \neq B$. Dann gibt es ein $z \in A$ mit $z \notin B$ und dafür ist dann $z \in U_A$ und $z \in \Delta' \setminus B \subset V_B$. Aber dann ist $U_A \cap V_B$ nichtleer und offen in $\mathbb{R}^2_{\text{sf}}$. Also gibt es ein $q \in \mathbb{Q}^2 \cap U_A \cap V_B$ und für dieses q ist dann $q \notin U_B$. Also ist auch $\psi(A) = U_A \cap \mathbb{Q}^2 \neq U_B \cap \mathbb{Q}^2 = \psi(B)$. Aber ψ kann aus Kardinalitätsüberlegungen nicht injektiv sein; die Kardinalität von $\mathcal{P}(X)$ ist die Kardinalität des Kontinuums, aber die Kardinalität von $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, \Delta'\}$ ist die der Potenzmenge des Kontinuums, also strikt größer.

Insbesondere haben wir gezeigt, dass $\mathbb{R}^2_{\text{sf}}$ nicht metrisierbar sein kann. Daraus folgt auch, dass $\mathbb{R}_{\text{sf}}$ selbst nicht metrisierbar ist, denn Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar. Aber $\mathbb{R}_{\text{sf}}$ ist trotzdem normal.

1.6 Zusammenhang

Definition 1.46. Ein nichtleerer topologischer Raum X ist *zusammenhängend*, für offene Menge $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$ bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Alternativ aber äquivalent heißt ein Raum X *unzusammenhängend*, wenn es eine nichttriviale offene und abgeschlossene Menge in X gibt, d. h. ein $U \subset X$ mit $U \neq \emptyset$, $U \neq X$, aber U offen und U abgeschlossen.

Ein nichtleerer topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow X$ gibt mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$. Eine solche Funktion heißt *Weg* von x nach y.

Satz 1.47 (Zwischenwertsatz). *Sei X zusammenhängend und $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subset X$ mit der Teilraumtopologie zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, V \subset Y$ offen mit $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ und $f(X) \subset U \cup V$. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ mit den offenen Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$. Außerdem ist $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(X)) = \emptyset$. Also ist bereits $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. Dann ist aber entsprechend $f(X) \cap U = \emptyset$ oder $f(X) \cap V = \emptyset$. □

Satz 1.48. *Sei $M \subset X$ zusammenhängend und $M \subset N \subset \overline{M}$. Dann ist auch N zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen mit $U \cap V \cap N = \emptyset$ und $N \subset U \cup V$. Aber dann ist auch $M \subset U \cup V$, also etwa ohne Einschränkung $U \cap M = \emptyset$. Also ist $M \subset X \setminus U$ und damit auch $N \subset \overline{M} \subset X \setminus U$, d. h. $U \cap N = \emptyset$. □

Lemma 1.49. *Sei $U \subset X$ eine Teilmenge und $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $u_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen $u_n \to u$. Dann ist $u \in \overline{U}$.*

Beweis. Sei $A \supset U$ abgeschlossen in X. Wäre $u \notin A$, so wäre $u \in X \setminus A$ und $X \setminus A$ ist offen. Also gäbe es insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u_n \in X \setminus A$ im Widerspruch zu $u_n \in U$. Also ist $u \in A$ und da A beliebig war schließen wir, dass $u \in \overline{U}$. □

Satz 1.50. *In $\mathbb{R}$ sind Intervalle zusammenhängend.*

Beweis. Wegen Satz 1.48 können wir annehmen, dass das fragliche Intervall von der Form (a, b) ist. Seien $U, V \subset (a, b)$ offen mit $U \cap V = \emptyset$ und $(a, b) = U \cup V$. Angenommen, es wäre $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Setze $v = \sup V$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n \in V$ und $v_n \to v$. Aber $V = (a, b) \setminus U$ ist abgeschlossen in (a, b) und deshalb ist dann $v \in V$. Also ist $(v, b) \subset U$. Aber dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \in (v, b) \subset U$ und $u_n \to v$. Aber $U = (a, b) \setminus V$ ist auch abgeschlossen in (a, b), also wäre $v \in U$ im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$. □

Satz 1.51. *Ein wegzusammenhängender Raum X ist zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$. Angenommen, es wären $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$, etwa $u \in U$ und $v \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Funktion $f\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = u$ und $f(1) = v$. Dann ist nach Satz 1.47 das Bild $M = f([0, 1])$ zusammenhängend. Aber es wäre dann $(M \cap U) \cap (M \cap V) = \emptyset$, $(M \cap U) \cup (M \cap V) = M$, obwohl $u \in M \cap U$ und $v \in M \cap V$. □

Nicht jeder zusammenhängende Raum ist auch wegzusammenhängend. Sei zum Beispiel

$$X = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

die *topologist's sine curve*. Dann ist X zusammenhängend, denn für $\Gamma = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$ ist $X = \overline{\Gamma}$ und Γ ist das Bild der zusammenhängenden Menge $(0, 1]$ unter der stetigen Funktion $x \longmapsto (x, \sin(1/x))$. Aber man überlegt sich, dass es keine stetige Funktion $f\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = (0, 0)$ und $f(1) = (1, \sin(1))$.

Definition 1.52. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, für die $x \sim y$ genau dann, wenn es einen Weg von x nach y in X gibt. Der Quotient $\pi_0(X) = X/{\sim}$ ist die Menge der *Wegzusammenhangskomponenten.*

Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten $\#\pi_0(X)$ eines Raums X ist eine Homöomorphieinvariante. Ist nämlich $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so haben wir eine Abbildung $\varphi_*\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ mit $\varphi([x]) = [\varphi(x)]$. Diese Abbildung ist tatsächlich wohldefiniert, denn für $x \sim y$ entlang eines Wegs $f\colon [0, 1] \longrightarrow X$ ist $\varphi \circ f\colon [0, 1] \longrightarrow Y$ ein Weg von $f(x)$ nach $f(y)$. Außerdem ist φ_* bijektiv mit Umkehrabbildung $(\varphi^{-1})_*$. Insbesondere folgt, dass $\#\pi_0(X) = \#\pi_0(Y)$.

Zum Beispiel haben wir jetzt genügend technische Werkzeuge um zu sehen, dass es keinen Homöomorphismus $[0, 2\pi) \longrightarrow S^1$ geben kann. Man überlegt sich nämlich, dass $S^1 \setminus \{x\}$ für jedes $x \in S^1$ wegzusammenhängend ist. Aber $[0, 2\pi) \setminus \{\pi\} = [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ist unzusammenhängend. Gäbe es nun einen Homöomorphismus $\varphi\colon [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$, dann wäre $\varphi|_{[0,2\pi)\setminus\{\pi\}}$ ein Homöomorphismus $[0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \longrightarrow S^1 \setminus \{\varphi(\pi)\}$. Aber $\#\pi_0(S^1 \setminus \{\varphi(\pi)\}) = 1$ während $\#\pi_0([0, 2\pi) \setminus \{\pi\}) = 2$.

1.7 Kompakte Räume

In $\mathbb{R}^n$ heißt eine Teilmenge K *kompakt*, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. Allgemeiner heißt in einem metrischen Raum eine Teilmenge K kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K zulässt. Beide Definitionen können nicht ohne Weiteres auf allgemeine topologische Räume angewandt werden, da einerseits ein Abstandsbegriff fehlt und andererseits Folgen im Allgemeinen die Topologie nicht bestimmen. Stattdessen führt man folgenden Begriff ein.

Definition 1.53. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Das heißt, gegeben eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset X$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt kompakt, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie ein kompakter Raum ist.

Manche Autoren fordern, dass kompakte Räume Hausdorff sind. Wir verzichten aber darauf. Mit dieser Konvention sind zum Beispiel alle endlichen topologischen Räume kompakt. Unendliche Mengen X mit der kofiniten Topologie sind auch kompakt. Ist nämlich $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $i_0 \in I$ mit $U_{i_0} \neq \emptyset$. Dann ist $X \setminus U_{i_0}$ endlich und $\{U_i \setminus U_{i_0}\}_{i \neq i_0}$ eine offene Überdeckung von $X \setminus U_{i_0}$. Aber $X \setminus U_{i_0}$ ist kompakt, also existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit

$$X \setminus U_{i_0} = \bigcup_{\substack{i \in J \\ i \neq i_0}} U_i \setminus U_{i_0}.$$

Aber dann ist $X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup U_{i_0}$.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der euklidischen Topologie keinen kompakten Raum. Etwa besitzt die Überdeckung

$$\mathbb{R} = \cdots \cup (-2, 0) \cup (-1, 1) \cup (0, 2) \cup \cdots$$

keine endliche Teilüberdeckung.

Lemma 1.54. *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) *Ist X kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ kompakt.*
(ii) *Ist X Hausdorff, so ist jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis.

(i) Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existieren offene Teilmengen $V_i \subset X$ mit $U_i = V_i \cap A$ und $X = \bigcup_{i \in I} V_i \cup X \setminus A$ ist eine offene Überdeckung von X. Folglich existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $X = \bigcup_{i \in J} V_i \cup X \setminus A$. Dann ist aber auch $A = X \cap A = \bigcup_{i \in J} U_i$.
(ii) Sei $K \subset X$ kompakt und $x \in X \setminus K$. Dann existiert eine offene Menge $U \subset X \setminus K$ mit $U \cap K = \emptyset$: Da X Hausdorff ist, existiert nämlich für jedes $y \in K$ eine offene Umgebung U_y von x und eine offene Umgebung V_y von y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $K \subset \bigcup_{y \in K} V_y$ eine offene Überdeckung von K und folglich existert eine endliche Teilmenge $K_0 \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{y \in K_0} V_y$. Dann ist aber $\bigcap_{y \in K_0} U_y \subset X \setminus K$ eine offene Umgebung von x. Das genügt um zu sehen, dass $X \setminus K$ offen ist. □

Definition 1.55. Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, falls für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$ das Bild $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

Ähnlich wie für offene Abbildungen ist eine stetige Bijektion ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie eine abgeschlossene Abbildung ist.

Lemma 1.56. *Seien X und Y topologische Räume, X kompakt und $f \colon X \longrightarrow Y$ stetig.*

(i) *Ist f surjektiv, so ist Y kompakt.*
(ii) *Ist Y Hausdorff, so ist f abgeschlossen.*

(iii) *Ist Y Hausdorff und f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Natürlich implizieren (i) und (ii) zusammen mit der vorstehenden Bemerkung Teil (iii).

(i) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Also existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $\bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i) = X$. Da f surjektiv ist, gilt dann auch $Y = \bigcup_{i\in J} U_i$.

(ii) Sei $A \subset X$ abeschlossen. Dann ist A kompakt nach Lemma 1.54 und damit nach (i) auch das Bild $f(A) \subset Y$ kompakt. Aber da Y Hausdorff ist, folgt nach Lemma 1.54, dass $f(A)$ abgeschlossen ist. □

Im Allgemeinen sind Teilräume kompakter Räume nicht selbst kompakt. Zum Beispiel ist keine Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums, die nicht abgeschlossen ist, kompakt. Hingegen zeigt Lemma 1.56, dass Quotienten kompakter Räume immer selbst kompakt sind.

Korollar 1.57 (Heine-Borel).

(i) *Das Intervall* $[0, 1]$ *ist kompakt.*

(ii) *Eine Teilmenge von* $\mathbb{R}^m$ *ist kompakt, genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis.

(i) Sei $X = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ mit der diskreten Topologie. Dann ist X kompakt und wegen Satz 1.67 auch das Produkt $X^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X$ kompakt. Definiere eine Abbildung

$$f\colon X^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, 1], \quad f(a_1, a_2, \dots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n} = 0.a_1a_2\dots$$

Dann ist f surjektiv und stetig(!). Wegen Lemma 1.56 ist dann $f(X^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$ kompakt.

(ii) Sei zuerst $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A \subset [-n, n]^m$. Aber $[0, 1] \cong [-n, n]$ ist kompakt und damit ist nach Satz 1.67 auch $[-n, n]^m$ kompakt. Nach Lemma 1.54 ist dann auch A als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums selbst kompakt.

(iii) Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann ist K nach Lemma 1.54 abgeschlossen. Außerdem ist $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(0) = \mathbb{R}^m$ eine offene Überdeckung. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n(0) = B_N(0)$. Anders gesagt muss K beschränkt sein.

□

Definition 1.58. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Ein *Häufungspunkt* von A ist ein $p \in X$, so dass jede Umgebung von p einen Punkt $p' \in A$ mit $p' \neq p$ enthält.

Satz 1.59. *Ist X kompakt, so besitzt jede unendliche Teilmenge $A \subset X$ einen Häufungspunkt.*

Beweis. Andernfalls ist zuerst A abgeschlossen: Wäre nämlich $p \in \overline{A} \setminus A$, so wäre für jede Umgebung U von p der Schnitt $U \cap A \neq \emptyset$. Aber dann wäre p ein Häufungspunkt von A.

Außerdem gibt es, falls A keinen Häufungspunkt besitzt, für alle $p \in A$ eine Umgebung U_p von p mit $A \cap U_p = \{p\}$. Folglich ist die Teilraumtopologie auf A diskret. Aber da X kompakt ist, ist nach Lemma 1.54 auch A kompakt. Aber jeder diskrete, kompakte Raum ist endlich. □

Definition 1.60. Ein topologischer Raum X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Im Allgemeinen sind Folgenkompaktheit und Kompaktheit unabhängig voneinander. Es gibt folgenkompakte Räume, die nicht kompakt sind, und kompakte Räume, die nicht folgenkompakt sind.

Satz 1.61. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) *X ist kompakt.*
(ii) *Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.*
(iii) *X ist folgenkompakt.*

Beweis.
(1→2) Das ist Satz 1.59.
(2→3) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ist A endlich, gibt es eine konstante und damit konvergente Teilfolge. Ist A unendlich, besitzt A einen Häufungspunkt $x \in X$. Dann existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $x_{n_m} \in A \cap B_{1/m}(x)$ mit $x_{n_m} \neq x$ und $n_m < n_{m+1}$. Dann konvergiert $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ gegen x.
(3→1) Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von X. Für eine beliebige Teilmenge $B \subset X$ schreiben wir

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}.$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $B \subset X$ mit $\operatorname{diam}(B) < \delta$ ein $i \in I$ existiert mit $B \subset U_i$. Andernfalls gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $\emptyset \neq C_n \subset X$ mit $\operatorname{diam}(C_n) < \frac{1}{n}$ und $C_n \not\subset U_i$ für alle $i \in I$. Sei $x_n \in C_n$ und $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, etwa $x_{n_m} \to x$. Sei $j \in I$ mit $U = U_j \ni x$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Für $k \gg 0$ gilt dann $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aber dann wäre $C_{n_k} \subset B_{\varepsilon/2}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$.
Weiter gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Punkte $x_1, \ldots, x_m \in X$, so dass $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_m)$. Andernfalls könnten wir induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X konstruieren. Wähle $x_1 \in X$ beliebig. Für $n > 1$ ist

$$B = B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_{n-1}) \neq X.$$

Wähle $x_n \in X \setminus B$. Aber dann kann $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen.
Für δ wie oben sei $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_m)$. Dann ist $\operatorname{diam}(B_\varepsilon(x_i)) \leq 2\varepsilon < \delta$ und dami existiert für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $j_i \in I$ mit $B_\varepsilon(x_{j_i}) \subset U_{j_i}$. Aber dann ist

$$X = U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_m}. \qquad \square$$

Definition 1.62. Eine Teilmenge A in einem metrischen Raum (X, d) ist *totalbeschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge von Punkten $x_1, \ldots, x_n \in A$ existiert, so dass $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Definition 1.63. Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für $m, n \geq N$.
Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Eine totalbeschränkte Teilmenge eines metrischen Raums ist natürlich auch beschränkt. Die Umkehrung gilt aber nicht. Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) ist totalbeschränkt: Für $\varepsilon > 0$ hat die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{x\in A} B_\varepsilon(x)$ nämlich eine endliche Teilüberdeckung.
Jede kompakte Teilmenge A ist auch vollständig. Ist nämlich $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A, so existiert eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$; etwa $x_{n_k} \to x \in A$. Dann konvergiert auch $\{x_n\}$ gegen x, denn sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(x_n, x_{n_N}) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$ und $d(x, x_N) < \varepsilon/2$.

Dann ist $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_n) < \varepsilon$ für $n \geq N$. Ohne Beweis erwähnen wir das folgende Resultat.

SATZ 1.64. *Ein totalbeschränkter und vollständiger metrischer Raum ist kompakt.* ∎

1.8 Ultrafilter und der Satz von Tychonoff

TODO

DEFINITION 1.65. Für $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, definieren wir

$$f_*\mathcal{F} := \{M \subset Y : f^{-1}(M) \in \mathcal{F}\},$$

den *Pushforward-Filter*.

LEMMA 1.66. *Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.*
(i) *Der Pushforward-Filter $f_*\mathcal{F}$ ist tatsächlich ein Filter auf Y.*
(ii) *Wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, so ist auch $f_*\mathcal{F}$ ein Filter.*

Beweis.
(i) Wir haben $Y \in f_*\mathcal{F}$, denn $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$, und $\emptyset \notin f_*\mathcal{F}$, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$. Für $M, N \in f_*\mathcal{F}$ ist $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \in \mathcal{F}$, also auch $M \cap N \in f_*\mathcal{F}$.
Ist weiter $M \in f_*\mathcal{F}$ und $N \supset M$, so ist $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ und wegen $f^{-1}(N) \supset f^{-1}(M)$ auch $f^{-1}(N) \in \mathcal{F}$. Also ist auch $N \in f_*\mathcal{F}$.
(ii) Sei $M \subset Y$. Dann ist entweder $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M) \in \mathcal{F}$. Aber das heißt, dass entweder $M \in f_*\mathcal{F}$ oder $Y \setminus M \in f_*\mathcal{F}$. □

SATZ 1.67 (Tychonoff). *Beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt in der Produkttopologie.*

Beweis. Sei I beliebige Indexmenge und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ nichtleer und $\pi_j: X \longrightarrow X_j$ die Projektion auf X_j für jedes $j \in I$. Wir zeigen, dass X kompakt ist, indem wir zeigen, dass jeder Ultrafilter in X konvergiert.

Sei also $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist für jedes $i \in I$ der Pushforward-Filter $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X_i. Weil X_i kompakt ist, konvergiert $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ gegen ein $x_i \in X_i$. Wir zeigen, dass dann $(x_i)_{i\in I}$ ein Grenzwert von $\mathcal{F}$ ist. Sei dafür $U \subset X$ eine offene Umgebung von x. Wegen dem dritten Filteraxiom können wir ohne Einschränkung U durch eine offene Menge der Form $\prod_{i\in I} \pi_i^{-1}(U_i)$ für offene Mengen $U_i \subset X_i$ mit $x_i \in U_i$ ersetzen, wobei aber nur endlich viele der U_i verschieden von X_i sind. Sei etwa $J \subset I$ eine endliche Teilmenge mit $U_i = X_i$ für $i \notin J$.

Aber dann ist U_i für jedes für jedes $i \in I$ eine offene Umgebung von x_i. Da $(\pi_i)_*\mathcal{F}$ gegen x_i konvergiert, ist dann $U_i \in (\pi_i)_*\mathcal{F}$, d. h. $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$. Aber dann ist $\bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$, da J endlich ist. Außerdem ist

$$\prod_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(U_i).$$

Also konvergiert $\mathcal{F}$ tatsächlich gegen $(x_i)_{i\in I}$. □

Der Beweis funktioniert nicht, wenn man die Produkttopologie durch die Boxtopologie ersetzt. Ist zum Beispiel X ein endlicher diskreter topologischer Raum, so ist $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$ mit der Produkttopologie wie eben gezeigt kompakt. Aber die Boxtopologie auf $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$ ist diskret!

1.9 Einpunktkompaktifizierung

Das offene Intervall $(0,1)$ mit der euklidischen Topologie ist nicht kompakt. Aber es gibt eine stetige Funktion $(0,1) \longrightarrow S^1$ deren Bild nur einen Punkt in S^1 nicht enthält und S^1 ist kompakt. Das ist ein erstes Beispiel für eine Einpunktkompaktifizierung.

Definition 1.68. Sei X ein Hausdorffraum und $X^* = X \cup \{\infty\}$, wobei $\infty \notin X$. Sei $\mathcal{T}_\infty$ die folgende Menge von Teilmengen von X^*:

(i) Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist $U \in \mathcal{T}_\infty$.
(ii) Für $K \subset X$ kompakt ist $X^* \setminus K \in \mathcal{T}_\infty$.

Der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_\infty)$ heißt *Einpunktkompaktifizierung* von X.

Lemma 1.69. *Die Familie $\mathcal{T}_\infty$ ist eine Topologie auf X^*.*

Beweis. Wir haben $\emptyset \in \mathcal{T}_\infty$, da $\emptyset \subset X$ offen ist. Außerdem ist $X^* \in \mathcal{T}_\infty$, denn $X^* \setminus \emptyset = X^*$ und $\emptyset \subset X$ ist kompakt.

Für $U_1, U_2 \subset X$ offen ist natürlich auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_\infty$. Ist $U \subset X$ offen und $V = X^* \setminus K$ mit $K \subset X$ kompakt, so ist $U \cap V = U \cap (X^* \setminus K) = U \cap (X \setminus K) \subset X$ offen in X, denn K ist als kompakte Menge in einem Hausdorffraum abgeschlossen. Sind weiter $K_1, K_2 \subset X$ kompakt, so ist $(X^* \setminus K_1) \cap (X^* \setminus K_2) = X^* \setminus (K_1 \cup K_2) \in \mathcal{T}_\infty$, da $K_1 \cup K_2 \subset X$ kompakt ist.

Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X, so ist natürlich auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_\infty$. Ist $\{K_i\}_{i \in I}$ eine Familie kompakter Teilmengen von X, so ist

$$\bigcup_{i \in I} (X^* \setminus K_i) = X^* \setminus \bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{T}_\infty,$$

da $\bigcap_{i \in I} K_i \subset X$ kompakt ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $U \cup (X^* \setminus K) \in \mathcal{T}_\infty$ für $U \subset X$ offen und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus K \cap U)$ und $K \setminus (K \cap U) = K \cap (X \setminus U) \subset K$ ist eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K. Also ist auch $U \cup (X^* \setminus K) \in \mathcal{T}_\infty$. □

Lemma 1.70. *Die Teilraumtopologie auf $X \subset X^*$ stimmt der ursprünglichen Topologie auf X überein.*

Beweis. Ist $U \subset X$ offen in der ursprünglichen Topologie auf X, so ist auch $U \subset X^*$ offen und $U = X \cap U$.

Sei $U \subset X^*$ eine beliebige offene Teilmenge. Ist $U \subset X$, so ist $X \cap U = U$ offen in der ursprünglichen Topologie auf X. Ist $U = X^* \setminus K$ für $K \subset X$ kompakt, so ist $X \cap U = X \setminus K$ auch offen in der ursprünglichen Topologie auf X, denn X ist Hausdorff und K ist als kompakte Menge in einem Hausdorffraum abgeschlossen. □

Lemma 1.71. *Der Raum X^* ist kompakt.*

Beweis. Sei $X^* = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X^*$ offen. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$ und dafür ist $U_{i_0} = X^* \setminus K$ für $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Aber dann ist $K \subset \bigcup_{i \in I} X \cap U_i$ und es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i \in J} X \cap U_i$. Aber dann ist $X^* = U_{i_0} \cup \bigcup_{i \in J} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung. □

Lemma 1.72. *Sei X* lokalkompakt, *d. h. X ist Hausdorff und für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $x \in U \subset K$. Dann ist X^* ein Hausdorffraum.*

Beweis. Seien $x \neq y$ Punkte in X^*. Sind $x, y \in X$, so gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$, da wir annehmen, dass X Hausdorff ist. Sei also einer der Punkte $\infty \in X^*$, etwa $x \in X$ und $y = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit $x \in U \subset K$. Aber dann ist $\infty \in X^* \setminus K$ und $X^* \setminus K \subset X^*$ ist offen. Außerdem ist $U \cap (X^* \setminus K) = \emptyset$. □

Insgesamt haben wir folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.73. *Sei X ein Hausdorffraum und $X^* = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X. Dann gilt:*

(i) *Die Teilraumtopologie auf $X \subset X^*$ stimmt mit der ursprünglichen Topologie auf X überein.*
(ii) *X^* ist kompakt.*
(iii) *Wenn X lokalkompakt ist, dann ist X^* Hausdorff.*

Lemma 1.74. *Sei Y ein kompakter Hausdorffraum und $X \subset Y$ ein Teilraum, so dass $Y \setminus X = \{\mathrm{pt}\}$ nur einen Punkt enthält. Dann ist X lokalkompakt.*

Beweis. Sei $x \in X$. Da Y Hausdorff ist, gibt es offene Teilmengen $U, V \subset Y$ mit $x \in U$, $\mathrm{pt} \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Aber dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossen und als Teilmenge des kompakten Raums Y selbst kompakt. Außerdem ist $x \in X \cap U \subset Y \setminus V$. □

Lemma 1.75. *Sei X lokalkompakt und X^* die Einpunktkompaktifizierung. Angenommen, Y ist ein kompakter Hausdorffraum, so dass $X \subset Y$ ein Teilraum und $Y \setminus X = \{\mathrm{pt}\}$ ist. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon Y \longrightarrow X^*$ mit $\varphi|_X = \mathrm{id}_X$ und $\varphi(\mathrm{pt}) = \infty$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung φ ist offenbar eine Bijektion. Da Y kompakt und X^* nach Lemma 1.74 Hausdorff ist, genügt es also zu zeigen, dass φ stetig ist. Sei dafür $U \subset X^*$ offen.

Ist $U \subset X$, so ist $\varphi^{-1}(U) = U \subset X \subset Y$ offen in der Teilraumtopologie auf X. Aber $X \subset Y$ ist offen, da $\{\mathrm{pt}\} \subset Y$ abgeschlossen ist, also ist U auch offen in Y. Ist hingegen $U = X^* \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset X$, so ist $\varphi^{-1}(U) = Y \setminus \varphi^{-1}(K) = Y \setminus K$. Aber $K \subset Y$ ist kompakt (in der Teilraumtopologie) und damit abgeschlossen, da Y ein Hausdorffraum ist. Also ist auch dann $\varphi^{-1}(U)$ offen. □

Mit diesem Lemma können wir auch sehen, dass $S^1 \cong (0,1)^*$. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass $S^1 \setminus \{\mathrm{pt}\} \cong (0,1)$ für jeden Punkt $\mathrm{pt} \in S^1$. Außerdem ist S^1 ein kompakter Hausdorffraum und $(0,1)$ ist lokalkompakt. Ähnlich ist die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur n-Sphäre S^n.

2 Algebraische Topologie

TODO

Definition 2.1. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Eine *Homotopie relativ A* von $f\colon X \longrightarrow Y$ nach $g\colon X \longrightarrow Y$ ist eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ von f nach g, so dass $H(a,t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$. Wir schreiben $f \simeq_A g$.

Wieder ist $\simeq_A$ eine Äquivalenzrelation. Der Beweis ist komplett analog zu dem für $\simeq$. Das wichtigste Beispiel für eine relative Homotopie findet sich bei Wegen. Zwei Wege $\gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow X$ und $\gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow X$ heißen nämlich *homotop*, $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, wenn sie homotop relativ $\{0,1\}$ sind. Wir bezeichnen mit $[\gamma]$ die Homotopieklasse (relativ $\{0,1\}$) von einem Weg γ. Um die Notation etwas zu vereinfachen schreiben wir oft $I := [0,1]$ für das Einheitsintervall.

Seien zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie und $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dann ist immer $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, denn

$$I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (s,t) \longmapsto (1-t)\gamma_1(s) + t\gamma_2(s)$$

ist eine Homotopie relativ $\{0,1\}$.

Definition 2.2. Sei X ein topologischer Raum mit Wegen $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \longrightarrow X$, so dass $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann definieren wir einen Weg $\gamma_1 * \gamma_2 \colon I \longrightarrow X$, die *Verknüpfung* von γ_1 und γ_2, durch

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Lemma 2.3. *Sei X ein topologischer Raum mit Wegen $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \longrightarrow X$, so dass $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Seien weiter $\gamma_1', \gamma_2' \colon I \longrightarrow X$ Wege mit $\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1'$ und $\gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2'$. Dann ist $\gamma_1 * \gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1' * \gamma_2'$. Insbesondere ist die Verknüpfung*

$$([\gamma_1], [\gamma_2]) \longmapsto [\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$$

von Homotopieklassen wohldefiniert.

Beweis. Sei $H \colon I \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von γ_1 nach γ_1'. Wir definieren

$$H' \colon I \times I \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto \begin{cases} H(2s,t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist H' eine Homotopie von $\gamma_1 * \gamma_2$ nach $\gamma_1' * \gamma_2$, denn H' ist stetig und es gilt

$$H'(s,0) = \begin{cases} \gamma_1(2s) = H(2s,0) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und

$$H'(s,1) = \begin{cases} \gamma_1'(2s) = H(2s,1) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sei weiter $G \colon I \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von γ_2 nach γ_2'. Wir definieren

$$G' \colon I \times I \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto \begin{cases} \gamma_1'(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Wieder ist G' eine Homotopie von $\gamma_1' * \gamma_2$ nach $\gamma_1' * \gamma_2'$. Also ist insgesamt $\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2'$. □

Lemma 2.4. *Sei $\gamma \colon I \longrightarrow X$ eine Weg in einem topologischen Raum X und $\varphi \colon I \longrightarrow I$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist $\gamma \circ \varphi \simeq_{\{0,1\}} \gamma$.*

Beweis. Die Abbildung

$$H \colon I \times I \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto \gamma(t\varphi(s) + (1-t)s)$$

ist eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ nach $\gamma \circ \varphi$. □

Lemma 2.5. *Sei X ein topologischer Raum mit Wegen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon I \longrightarrow X$, so dass $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$. Dann ist $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$, also $([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) \cdot [\gamma_3] = [\gamma_1] \cdot ([\gamma_2] \cdot [\gamma_3])$.*

Beweis. Wir haben $((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3) \circ \varphi = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ für

$$\varphi \colon I \longrightarrow I, \quad s \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ s - \frac{1}{4} & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2s - 1 & s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Also folgt $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \simeq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ aus Lemma 2.4. □

Lemma 2.6. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei weiter $\varepsilon_x \colon I \longrightarrow X$ der konstante Weg $\varepsilon(s) = x$. Für einen weiteren Weg $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma_1(1) = x$ ist dann $[\gamma * \varepsilon_x] = [\gamma]$. Ist hingegen $\gamma_1(0) = x$, so gilt $[\varepsilon_x * \gamma] = [\gamma]$.*

Beweis. Wir haben $(\gamma * \varepsilon_x) \circ \varphi = \gamma$ für

$$\varphi \colon I \longrightarrow I, \quad s \longmapsto \begin{cases} 2s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Also ist $\gamma * \varepsilon_x \simeq \gamma$ nach Lemma 2.4. Der zweite Teil folgt analog. □

Lemma 2.7. *Sei wieder ε_x der konstante Weg bei $x \in X$. Für einen Weg $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$ sei $\gamma' \colon I \longrightarrow X$ definiert durch $\gamma'(s) = \gamma(1-s)$. Dann ist $[\gamma * \gamma'] = [\varepsilon_{\gamma(0)}]$ und $[\gamma' * \gamma] = [\varepsilon_{\gamma(1)}]$.*

Beweis. Wir haben eine Homotopie

$$H \colon I \times I \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto \begin{cases} \gamma(2s(1-t)) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2(1-s)(1-t)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

von $\gamma * \gamma'$ nach $\varepsilon_{\gamma(0)}$. Der zweite Teil folgt analog. □

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Schleife bei* $x \in X$ ist ein Weg $\gamma \colon I \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Definition 2.9. Sei X ein topologischer Raum mit $x_0 \in X$. Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ ist die Menge

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] : \gamma \colon I \longrightarrow X \text{ ist eine Schleife bei } x \in X\}.$$

Satz 2.10. *Die Menge $\pi_1(X, x_0)$ bildet mit der Verknüpfung $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$ und dem neutralen Element $e = [\varepsilon_{x_0}]$ eine Gruppe.* ■

Zum Beispiel ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{e\}$ trivial. In $\mathbb{R}^n$ sind nämlich immer je zwei Wege mit den gleichen Start- und Endpunkten homotop. Insbesondere ist immer $\gamma \simeq \varepsilon_0$ für jede Schleife γ bei $0 \in \mathbb{R}^n$. Wir werden später auch Räume kennenlernen, deren Fundamentalgruppe nichttrivial ist. Zum Beispiel zeigen wir später, dass $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Wir hatten in diesem Beispiel für $\mathbb{R}^n$ den Basispunkt 0 gewählt. Aber diese Wahl ist für die Fundamentalgruppe unerheblich. Sei nämlich X ein topologischer Raum und $x_0, x_1 \in X$ mit einem Weg $\tau \colon I \longrightarrow X$ von x_0 nach x_1. Dann induziert τ eine Abbildung

$$c(\tau) \colon \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0), \quad [\gamma] \longmapsto [\tau * \gamma * \tau'].$$

LEMMA 2.11. *Die Abbildung $c(\tau)\colon \pi_1(X,x_1) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)$ ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung $c(\tau)$ ist ein Homomorphismus, denn

$$c(\tau)([\gamma_1]\cdot[\gamma_2]) = [\tau * \gamma_1 * \gamma_2 * \tau'] = [\tau * \gamma_1 * \tau' * \tau * \gamma_2 * \tau'] = [\tau * \gamma_1 * \tau'] \cdot [\tau * \gamma_2 * \tau'].$$

Außerdem ist $c(\tau')$ die Umkehrabbildung von $c(\tau)$, denn

$$(c(\tau) \circ c(\tau'))(\gamma) = [\tau * \tau' * \gamma * \tau * \tau'] = [\gamma]$$

und

$$(c(\tau') \circ c(\tau))(\gamma) = [\tau' * \tau * \gamma * \tau' * \tau] = [\gamma]. \qquad \square$$

Für wegzusammenhängende Räume X hängt, bis auf Isomorphismus, die Fundamentalgruppe also nicht von der Wahl des Basispunkts ab. Wir schreiben in diesem Fall manchmal einfach $\pi_1(X)$.

DEFINITION 2.12. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \{e\}$ heißt *einfach zusammenhängend.*

TODO

2.1 Die Fundamentalgruppe von S^1

Wir betrachten den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Dazu benutzen wir die *Exponentialabbildung* $\pi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ mit $\pi(t) = e^{2\pi i \cdot t}$. Sie ist ein Beispiel einer sogenannten *Überlagerung*. Wir werden damit zeigen, dass

(i) es für $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow S^1$ eine Schleife bei 1 genau einen Weg $\gamma'\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\gamma'(0) = 0$ und $\gamma = \pi \circ \gamma'$;

(ii) und dass für zwei homotope Schleifen $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow S^1$ bei 1 die Wege γ_1' und γ_2' homotop sind.

Unter diesen Annahmen ist dann die Abbildung $\varphi\colon \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $\varphi([\gamma]) = \gamma'(1)$ wohldefiniert und wir können weiter zeigen, dass φ sogar ein Gruppenisomorphismus ist.

SATZ 2.13 (Path lifting property). *Seien $z_0 \in S^1$, $z_0' \in \pi^{-1}(\{z_0\})$ und $\gamma\colon I \longrightarrow S^1$ ein Weg mit $\gamma(0) = z_0$. Dann gibt es genau einen Weg $\gamma'\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma'(0) = z_0'$ und $\pi \circ \gamma' = \gamma$, also*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "z_0'"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\gamma'"] & S^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der Pfad γ' heißt Lift *von γ mit Startpunkt z_0'.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Angenommen, γ' und γ'' sind zwei Lifts von γ mit $\gamma'(0) = \gamma''(0) = z_0'$. Dann muss $\gamma'(t) - \gamma''(t) \in \mathbb{Z}$ gelten. Aber $\gamma' - \gamma''$ ist stetig und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist diskret. Also ist $\gamma' - \gamma''$ sogar konstant und wegen $\gamma'(0) = \gamma''(0)$ folgt, dass $\gamma' = \gamma''$.

Nun zur Existenz. Wir behaupten, es gibt $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $z_1, \ldots, z_n \in S^1$, so dass $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \subset S^1 \setminus \{z_i\}$. Tatsächlich, gibt es für jedes $s \in [0,1]$ ein offenes Intervall $(\alpha_s, \beta_s) \subset [0,1]$ mit

$s \in (\alpha_s, \beta_s)$ und ein y_s mit $\gamma((\alpha_s, \beta_s)) \subset S^1 \setminus \{y_s\}$. Da $[0,1] = \bigcup_{s \in [0,1]} (\alpha_s, \beta_s)$ kompakt ist, können wir

$$[0,1] = (\alpha_{s_1}, \beta_{s_1}) \cup \cdots \cup (\alpha_{s_n}, \beta_{s_n})$$

mit $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ schreiben. Wir wählen jetzt $t_0 = 0$ und $t_n = 1$. Für $1 \le i \le n-1$ wähle $t_i \in (\alpha_{s_i}, \beta_{s_i}) \cap (\alpha_{s_{i+1}}, \beta_{s_{i+1}})$. Dann ist nämlich $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset S^1 \setminus \{y_{s_{i+1}}\}$.

Wir konstruieren jetzt induktiv den Lift γ'. Angenommen, $\gamma'|_{[0,t_i]}$ ist bereits konstruiert. Für $\xi \in \mathbb{R}$ ist $\pi_\xi = \pi|_{(\xi,\xi+1)} : (\xi, \xi+1) \longrightarrow S^1 \setminus \{\pi(\xi)\}$ ein Homöomorphismus. Wir wählen $\xi_i \in \pi^{-1}(\{z_i\})$ so, dass $\gamma'(t_i) \in (\xi_i, \xi_i + 1)$. Dann setzen wir $\gamma'|_{[t_i,t_{i+1}]} = \pi_{\xi_i}^{-1} \circ \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$. □

Satz 2.14 (Homotopy lifting property). *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : I \longrightarrow S^1$ Wege von z_0 nach z_1. Für H eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 und γ_0' ein Lift von γ_0 mit Startpunkt z_0', existiert genau eine Homotopie $H' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $H'(\_, 0) = \gamma_0'$ und $\pi \circ H' = H$, also*

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\gamma_0'"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times 0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "H'"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere ist $\gamma_1' = H'(\_, 1)$ ein Lift von γ_1 und $\gamma_0' \simeq \gamma_1'$.

Beweis. Wir zeigen wieder zuerst die Eindeutigkeit. Für ein fixes $s_0 \in I$ ist $H'(s_0, \_) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von $H(s_0, \_) : I \longrightarrow S^1$ mit Startpunkt $\gamma_0'(s_0)$. Also ist $H'(s_0, \_)$ für jedes s_0 eindeutig bestimmt und damit auch ganz H' eindeutig bestimmt.

Nun zur Existenz. Sei γ_s' ein Lift von $H(s, \_) : I \longrightarrow S^1$ mit Startpunkt $\gamma_0'(s)$. Für $H'(s,t) :== \gamma_s'(t)$ ist dann $H'(s, 0) = \gamma_0'(s)$ und $\pi \circ H'(s,t) = \pi \circ \gamma_s'(t) = H(s,t)$. Es bleibt zu zeigen, dass H' stetig ist.

Wir behaupten, dass es für $s_0 \in I$ eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, $z_1, \ldots, z_n \in S^1$ und ein offenes Intervall U mit $s_0 \in U$ gibt, so dass $H(U \times [t_i, t_{i+1}]) \subset S^1 \setminus \{z_i\}$. Tatsächlich gibt es für jedes $r \in [0,1]$ ein y_r und $a_r, b_r, \alpha_r, \beta_r$ mit $s_0 \in (a_r, b_r)$ und $r \in (\alpha_r, \beta_r)$ und so, dass $H((a_r, b_r) \times (\alpha_r, \beta_r)) \subset S^1 \setminus \{y_r\}$. Da $I = \bigcup_{r \in I} (\alpha_r, \beta_r)$ kompakt ist, können wir

$$I = (\alpha_{r_1}, \beta_{r_1}) \cup \cdots \cup (\alpha_{r_n}, \beta_{r_n})$$

mit $0 < r_1 < \cdots < r_n$ schreiben. Wir wählen $t_i \in (\alpha_{r_i}, \beta_{r_i}) \cap (\alpha_{r_{i+1}}, \beta_{r_{i+1}})$ so, dass und setzen $U = \bigcap_{i=1}^n (a_{r_i}, b_{r_i})$. Dann ist $H(U \times [t_i, t_{i+1}] \subset S^1 \setminus \{y_{r_{i+1}}\}$.

Sei angenommen, dass $H'|_{U \times [0,t_i]}$ stetig ist. Wir wissen, dass $H'(U \times \{t_i\}) \subset (\xi_i, \xi_i + 1) \cong S^1 \setminus \{z_i\}$ für ein $\xi_i \in \pi^{-1}(\{z_i\})$. Also ist $H'|_{U \times [t_i,t_{i+1}]} = \pi_{\xi_i}^{-1} \circ H|_{U \times [t_i,t_{i+1}]}$ und deshalb H' stetig auf $U \times [0, t_{i+1}]$. Da s_0 beliebig und U eine offene Umgebung von s_0 war, folgt dass H' insgesamt stetig ist. □

Satz 2.15. *Sei $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ so definiert, dass $\varphi([\gamma]) = \gamma'(1)$ für γ' ein Lift von γ mit Startpunkt 0. Dann ist φ ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Wegen Satz 2.13 und Satz 2.14 ist φ wohldefiniert. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow S^1$ zwei Schleifen bei 1. Sei γ_1' ein Lift von γ_1 mit Startpunkt 0 und γ_2' ein Lift von γ_2 mit Startpunkt $\gamma_1'(1)$. Dann ist $\gamma_1' * \gamma_2'$ ein Lift von $\gamma_1 * \gamma_2$ und damit $\varphi([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) = \gamma_2'(1)$. Andererseits ist $\gamma_2' - \gamma_1'(1)$ ein Lift von γ_2 mit Startpunkt 0. Also ist $\varphi([\gamma_1]) + \varphi([\gamma_2]) = \gamma_1'(1) + \gamma_2'(1) - \gamma_1'(1) = \gamma_2'(1)$.

Die Abbildung φ ist surjektiv, denn für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\gamma' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma'(t) = nt$. Dann ist $\pi \circ \gamma'$ eine Schleife in S^1 bei 1 und $\varphi([\gamma]) = \gamma'(1) = n$.

Sei nun $\gamma\colon I \longrightarrow S^1$ eine Schleife bei 1 mit $\varphi([\gamma]) = 0$. Sei γ' ein Lift von γ mit Startpunkt 0. Dann ist $\gamma'(1) = 0$, also γ' eine Schleife bei 0. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie H' von γ' zur konstanten Schleife ε_0. Aber dann ist $\pi \circ H'$ eine Homotopie von γ zur konstante Schleife ε_1. Anders gesagt, wir haben $[\gamma] = e \in \pi_1(S^1, 1)$. □

Korollar 2.16 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Angenommen, es wäre $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $f_r\colon [0,1] \longrightarrow S^1$ mit

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}.$$

Dann ist f_r eine Schleife in S^1 bei 1. Sei $r > \max\{1, |a_1| + \cdots + |a_n|\}$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ gilt dann

$$|z^n| = r^n > (|a_1| + \cdots + |a_n|) \cdot |z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + \ldots a_n|.$$

Also hat $p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ für $t \in [0,1]$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Wir definieren eine Homotopie $H\colon I \times I \longrightarrow S^1$ durch

$$H(s,t) = \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)|}.$$

Dann ist H eine Homotopie von $\omega_n(s) := e^{2\pi ins}$ nach f_r. Sei $\varphi\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Satz 2.15. Dann ist $\varphi([f_r]) = \varphi([\omega_n]) = n$.

Andererseits ist $G\colon I \times I \longrightarrow S^1$ mit $G(s,t) = f_{tr}(s)$ eine Homotopie von $f_0(s) = 1$ nach f_r. Also wäre $\varphi([f_r]) = \varphi([f_0]) = 0 \neq n$. □

Korollar 2.17 (Borsuk–Ulam in Dimension 2). *Sei $f\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Wir definieren eine stetige Abbildung $g\colon S^2 \longrightarrow S^1$ durch

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Sei $\eta\colon [0,1] \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch $\eta(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$. Dann ist $h = g \circ \eta$ eine Schleife in S^1 bei 1. Es ist $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^2$, und deshalb $h(s + \frac{1}{2}) = -h(s)$ für $s \in [0, \frac{1}{2}]$. Sei $h'\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von h mit Startpunkt 0. Insbesondere ist dann $h'(s + \frac{1}{2}) = h'(s) + \frac{q(s)}{2}$ für $q(s) \in 2\mathbb{Z} + 1$. Aber q ist dann stetig und $2\mathbb{Z} + 1 \subset \mathbb{R}$ ist diskret; also ist q konstant.

Es folgt also, dass $h'(1) = h'(\frac{1}{2}) + \frac{q}{2} = h'(0) + q$; also $\varphi([h]) = q \neq 0$ für den Isomorphismus $\varphi\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ aus Satz 2.15.

Aber $h = g \circ \eta\colon I \longrightarrow S^1$ und $\eta\colon I \longrightarrow S^2$ ist nullhomotop wegen $\pi_1(S^2) \cong \{e\}$. Dann wäre auch h nullhomotop im Widerspruch zu $\varphi([h]) \neq 0 \in \pi_1(S^1, 1)$. □

2.2 Der Satz von Seifert und van Kampen

Lemma 2.18 (Lebesgue).

TODO

Satz 2.19 (Seifert–van Kampen). *Sei X ein topologischer Raum und $X = U \cup V$ für offene $U, V \subset X$. Seien außerdem U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Dann induzieren die Inklusionen $U \hookrightarrow X$ und $U \hookrightarrow V$ einen Isomorphismus*

$$\varphi\colon \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$$

durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "i_U"] \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "i_V"'] & \pi_1(X, x_0). \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung φ ist gegeben durch

$$[\gamma_1][\gamma_2] \dots [\gamma_n] \longmapsto [\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n] \in \pi_1(X)$$

für $[\gamma_i] \in \pi_1(U)$ oder $[\gamma_i] \in \pi_1(V)$ für alle i. Um zu sehen, dass φ surjektiv ist, sei γ eine Schleife in X bei x_0. Wir haben die offene Überdeckung $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$. Sei λ die entsprechende Lebesguezahl aus Lemma 2.18 und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ eine Partition von $[0, 1]$, so dass $t_{i+1} - t_i < \lambda$. Dann ist $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U$ oder $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V$ für jedes i und insbesondere $\gamma(t_i) \in U \cap V$. Da $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, existieren Wege τ_i von $\gamma(t_i)$ nach x_0 in $U \cap V$. Sei γ_i' eine Reparametrisierung von $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ zu einem Weg von $\gamma(t_i)$ nach $\gamma(t_{i+1})$. Dann ist

$$\gamma \simeq \gamma_0' * \tau_1 * \tau_1^- * \gamma_1' * \tau_2 * \tau_2^- * \dots * \tau_{n-1}^- * \gamma_{n-1}'$$

und $\tau_i * \gamma_i' * \tau_{i+1}^-$ ist eine Schleife in U bzw. V, je nachdem ob γ_i eine Schleife in U oder in V ist. Insgesamt ist γ homotop zu einer Verknüpfung von Schleifen in U bzw. V, und folglich liegt $[\gamma]$ im Bild von φ.

TODO □

3 Überlagerungen

Wir haben bereits die Exponentialabbildung $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ mit $t \longmapsto e^{2\pi i t}$ zur Berechnung von $\pi_1(S^1)$ benutzt. Sie ist das erste Beispiel einer sogenannten *Überlagerung*.

Definition 3.1. Eine stetige Abbildung $\pi\colon E \longrightarrow B$ ist *lokal trivial mit typischer Faser F*, wenn es für alle $b \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ von b und einen Homöomorphismus $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{proj}_U"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & U \arrow[r, hook] & B. \end{tikzcd}$$

Ein solcher Homöomorphismus φ heißt *lokale Trivialisierung* von $\pi\colon E \longrightarrow B$. Die Teilmenge $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ heißt *Faser über b*.

Im Beispiel ist die Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ lokal trivial mit typischer Faser $\mathbb{Z}$. Für jede lokal triviale Abbildung $\pi\colon E \longrightarrow B$ mit typischer Faser F ist die Faser $\pi^{-1}(\{b\})$ homöomorph zu F.

Definition 3.2. Falls F ein diskreter topologischer Raum ist, heißt eine lokal triviale Abbildung $E \longrightarrow B$ mit typischer Faser F *Überlagerung*. Der Raum B heißt *Basis* und E heißt *Totalraum* der Überlagerung. Falls F zusätzlich endlich mit n Elementen ist, sprechen wir von einer *n-fachen* oder *n-blättrigen* Überlagerung.

Es gibt viele verschieden Überlagerungen mit Basis S^1. Es gibt natürlich die trivialen Beispiele $S^1 \times F \longrightarrow S^1$ für jeden diskreten topologischen Raum F. Ein interessanteres Beispiel ist für $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\pi\colon S^1 \longrightarrow S^1$ mit $\pi(z) = z^n$. Hier betrachten wir wie üblich S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Faser F ist in diesem Beispiel homöomorph zu $\{1, \dots, n\}$.

Für einen diskreten Raum F ist $U \times F \cong \coprod_{f \in F} U \times \{f\}$. Außerdem ist die Einschränkung der Projektion $\mathrm{proj}_U\colon U \times F \longrightarrow F$ auf $U \times \{f\}$ für $f \in F$ ein Homöomorphismus. Wir können alternativ eine Überlagerung auch wie folgt definieren: Eine Überlagerung von B ist ein topologischer Raum E zusammen mit einer stetigen und surjektiven Abbildung $\pi\colon E \longrightarrow B$, so dass für jedes $b \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ von b existiert, für die $\pi^{-1}(U) \subset E$ eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen S_i ist, so dass $\pi|_{S_i}\colon S_i \longrightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Die S_i heißen dann *Blätter* der Überlagerung.

Diese beiden Definitionen sind für *zusammenhängende* Räume B äquivalent. Aber für $B = \{1, 2\}$ diskret und $E = \{1, 2, 3\}$ diskret, wäre $\pi\colon \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2\}$ mit $\pi(1) = 1$ und $\pi(2) = \pi(3) = 2$ eine Überlagerung im zweiten Sinn, aber nich im Sinn von Definition 3.2.

Definition 3.3. Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe. Eine *Gruppenoperation* (oder *Gruppenwirkung*) von G auf X ist eine Abbildung $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \longmapsto g \cdot x$, so dass:

(i) für jedes $g \in G$ ist $g \cdot \_\colon X \longrightarrow X$ stetig.
(ii) $e \cdot x = x$ für alle $x \in X$.
(iii) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ für alle $x \in X$.

Zum Beispiel operiert $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ durch $(n, x) \longmapsto x + n$ oder $\{\pm 1\}$ auf S^n durch $(\pm 1, x) \longmapsto \pm x$.

In einer Kategorie $\mathscr{C}$ ist eine Gruppenoperation von G auf auf einem Objekt X in $\mathscr{C}$ ein Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X)$. Die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X)$ von X ist hier die Menge aller Isomorphismen $X \longrightarrow X$ mit der Verknüpfung von Morphismen als Gruppenmultiplikation. Zum Beispiel ist $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(X)$ die Menge der Bijektionen $X \longrightarrow X$. Für $\mathscr{C} = \mathrm{Top}$ ist $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Top}}(X)$ die Menge aller Homöomorphismen $X \longrightarrow X$.

Diese allgemeine Definition in einer Kategorie $\mathscr{C}$ stimmt mit Definition 3.3 überein für $\mathscr{C} = \mathrm{Top}$. Ist nämlich $\rho\colon G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation nach Definition 3.3, so definiert die Zuordnung $\varphi(g)(x) = \rho(g, x)$ einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Top}}(X)$. Umgekehrt definiert für ein solches φ die Formel $\rho(g, x) = \varphi(g)(x)$ immer ein Gruppenoperation.

Definition 3.4. Sei $\rho\colon G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation auf einem topologischen Raum X.

(i) Die Operation heißt *frei*, falls für alle $x \in X$ und $g \in G \setminus \{e\}$ gilt, dass $g \cdot x \neq x$.
(ii) Sei $x \in X$. Der *Stabilisator* von x ist die Untergruppe $G_x = \{g \in X : g \cdot x = x\} \subset G$.
(iii) Für $x \in X$ ist $Gx = \{g \cdot x : g \in G\} \subset X$ die *Bahn* (oder der *Orbit*) von x.
(iv) Der Quotient $X/G = \{Gx : x \in X\}$ mit der Quotiententopologie heißt *Bahnenraum* der Operation ρ.

Die Operation $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(n, x) \longmapsto x + n$ ist frei und der Bahnenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zu S^1 entlang der von der Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ induzierten Abbildung. Die Operation $\{\pm 1\} \times S^n \longrightarrow S^n$ ist auch frei. Der Bahnenraum $S^n/\{\pm 1\}$ ist der projektive Raum $\mathbb{RP}^n$.

Ein Beispiel für eine Gruppenoperation, die nicht frei ist, wäre etwa die Operation von $\{\pm 1\}$ auf S^2, für die $(-1) \cdot \_\colon S^2 \longrightarrow S^2$ die Einschränkung der Reflektion $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an einer Ebene durch den Ursprung ist.

Definition 3.5. Eine Gruppenoperation $G \times X \longrightarrow X$ heißt *Überlagerungsoperation*, falls für alle $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x existiert, so dass $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{g\}$.

Überlagerungsoperationen sind immer frei. Für eine Überlagerungsoperation $G \times X \longrightarrow X$ und $x \in X$ sei nämlich U eine Umgebung wie in Definition 3.5. Dann ist natürlich $gx \in gU$ und wegen $gU \cap U = \emptyset$ kann gx niemals gleich x sein.

Die Umkehrung gilt nicht. Sei zum Beispiel $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $z_0 = e^{2\pi i \xi_0}$. Dann definiert die Zuordnung $(n, z) \longmapsto z_0^n z$ eine Gruppenoperation $\mathbb{Z} \times S^1 \longrightarrow S^1$, die zwar frei aber keine Überlagerungsoperation ist. Sei nämlich $\mathbb{O} = \{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset S^1$ die Bahn von $1 \in S^1$. Jetzt gibt es für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ ein $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq N$, und ein $p \in \mathbb{Z}$, so dass $|q\alpha - p| < \frac{1}{N+1}$. Das heißt für $\alpha \in \xi_0$ und $N \gg 0$ ist $z_0^q = e^{2\pi i q\alpha}$ beliebig nahe bei $e^{2\pi i p} = 1$; genauer gibt es für jede Umgebung U von 1 in S^1 ein $x \in \mathbb{O}$ mit $x \in U$. Tatsächlich ist $\mathbb{O}$ sogar dicht in S^1.

Sei G hingegen eine endliche Gruppe und X ein Hausdorffraum. Dann ist jede freie Gruppenoperation $G \times X \longrightarrow X$ auch eine Überlagerungsoperation.

Satz 3.6. *Sei $\rho\colon G \times X \longrightarrow X$ eine Überlagerungsoperation und betrachte G als diskreten topologischen Raum. Dann ist die Quotientenabbildung $q\colon X \longrightarrow X/G$ eine Überlagerung mit typischer Faser G.*

Beweis. Sei $b = q(x) \in X/G$ und $U \subset X$ eine Umgebung von x mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$. Dann ist $q|_U\colon U \longrightarrow q(U) =: V$ ein Homöomorphismus: wegen unserer Wahl von U ist $q|_U$ injektiv und q und damit $q|_U$ ist sogar offen, da ρ eine Gruppenoperation ist. Sei nämlich $W \subset X$ offen. Dann ist $q^{-1}(q(W)) = \bigcup_{g \in G} gW$ offen, da $g \cdot \_\colon X \longrightarrow X$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $s\colon V \longrightarrow U$ das Inverse von $q|_U$. Wir können jetzt durch $\varphi(y, g) = g \cdot s(y)$ eine lokale Trivialisierung $\varphi\colon V \times G \longrightarrow q^{-1}(V)$ definieren. Es ist nämlich $q(\varphi(y, g)) = q(g \cdot s(y)) = q(s(y)) = y = \mathrm{proj}_V(y, g)$ für alle $(y, g) \in V \times G$. Außerdem ist φ surjektiv, da bereits $s\colon V \longrightarrow U$ surjektiv ist. Unsere Wahl von U stellt sicher, dass φ injektiv und offen ist. □

In unserem Beweis, dass $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, war der Schlüssel, *Lifts* von Schleifen in S^1 entlang der Überlagerung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ zu betrachten. Genauso wird es für unser Verständnis von allgemeineren Überlagerungen wichtig sein, Lifts zu betrachten.

Definition 3.7. Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung und $f\colon X \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung. Ein *Lift* von f nach E ist eine stetige Abbildung $f'\colon X \longrightarrow E$, so dass das Dreieck

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im Allgemeinen kann dieselbe Abbildung $f\colon X \longrightarrow B$ keinen oder viele verschiedene Lifts zulassen. Aber für zusammenhängende X ist ein Lift, wenn er denn existiert, bereits durch einen einzigen Wert eindeutig bestimmt:

Satz 3.8. *Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $f\colon X \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung und $x_0 \in X$. Angenommen, $f', f''\colon X \longrightarrow E$ sind zwei Lifts von f nach E mit $f'(x_0) = f''(x_0)$. Wenn X zusammenhängend ist, gilt $f' = f''$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $A = \{x \in X : f'(x) = f''(x)\} \subset X$. Sei $x \in A$ beliebig und $\varphi\colon p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F$ eine lokale Trivialisierung von p in einer Umgebung V von $f(x)$. Dann ist $\varphi(f'(x)) = \varphi(f''(x)) \in V \times \{a\}$ für ein $a \in F$. Da p eine Überlagerung ist, ist F diskret, und deshalb $V \times \{a\} \subset V \times F$ offen. Da f' und f'' stetig sind, existiert eine offene Umgebung U von x, so dass $\varphi(f'(U)) \subset V \times \{a\}$ und $\varphi(f''(U)) \subset V \times \{a\}$. Aber p lässt sich zu einem Homöomorphismus $\varphi^{-1}(V \times \{a\}) \longrightarrow V$ einschränken und es folgt, dass $f'|_U = f''|_U$. Das heißt aber $U \subset A$ ist eine Umgebung von x, die ganz in A enthalten ist. Da $x \in A$ beliebig war, folgt damit, dass A offen ist.

Aber A ist auch abgeschlossen. Sei nämlich $x \in X \setminus A$ und $\varphi\colon p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F$ eine lokale Trivialisierung von p um $f(x)$ wie bevor. Wie oben sehen wir, dass dann $\varphi(f'(x)) \in V \times \{a\}$ und $\varphi(f''(x)) \in V \times \{b\}$ für $a \neq b$ gelten muss. Da f' und f'' stetig sind, existiert wieder eine Umgebung U von x mit $\varphi(f'(U)) \subset V \times \{a\}$ und $\varphi(f''(U)) \subset V \times \{b\}$ und es folgt wie oben, dass $f'(y) \neq f''(y)$ für alle $y \in U$. Mit anderen Worten, $U \subset X \setminus A$. Da $x \in X \setminus A$ beliebig war, ist $X \setminus A$ offen.

Da es nach unserer Annahme an f' und f'' ein $x_0 \in X$ gibt, so dass $f'(x_0) = f''(x_0)$, ist $A \neq \emptyset$. Wir haben also eine nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$. Aber X ist zusammenhängend, also ist die einzige solche Teilmenge ganz X. Mit anderen Worten, $f' = f''$. □

Satz 3.9. *Jede Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$ hat die Homotopieliftungseigenschaft: Für jede Homotopie $H\colon X \times I \longrightarrow B$ von f nach g und jeden Lift $f'\colon X \longrightarrow E$ von f existiert ein eindeutig bestimmter Lift $H'\colon X \times I \longrightarrow E$ von H nach E, so dass*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times 0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "H'"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere ist $H' \circ (\mathrm{id} \times 1)$ ein Lift von g.

Beweis. Wir nennen eine offene Teilmenge $U \subset B$ *zulässig*, wenn p eine lokale Trivialisierung über U besitzt. Sei $x \in X$ und $I_x = \{x\} \times [0,1] \subset X \times I$. Die Familie $\{H^{-1}(U) : U \subset B \text{ zulässig}\}$ ist eine offene Überdeckung von I_x und nach Lemma 2.18 existiert eine Lebesguezahl $\lambda > 0$ für diese Überdeckung. Sei $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ eine Partition von $[0,1]$ mit $t_i - t_{i-1} < \lambda$ für alle i. Für jedes $0 \le i < n$ ist dann $H(\{x\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ für ein zulässiges $U_i \subset B$.

Für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ existiert, da H stetig ist, eine offene Umgebung $V_{x,t} \subset X \times I$ von (x,t) mit $H(V_{x,t}) \subset U_i$. Die Familie $\{V_{x,t} : t \in [0,1]\}$ bildet eine Überdeckung von $\{x\} \times [0,1]$ und dieser Raum ist kompakt. Es gibt also endlich viele $t_1, \ldots, t_k$, so dass $\{V_{x,t_i} : i = 1, \ldots, k\}$ eine Überdeckung von $\{x\} \times [0,1]$ ist. Setze $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x,t_i}$. Dann erfüllt V_x folgende Eigenschaften:

(i) V_x ist eine Umgebung von x in X.

(ii) Für jedes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ ist $H(V_x \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ für eine zulässige Teilmenge $U_i \subset X$.

Wir konstruieren nun induktiv einen Lift H' von H auf $V_x \times [0,1]$. Angenommen, $H'|_{V_x \times [0,t_i]}$ ist bereits konstruiert. Sei $\varphi\colon U_i \times F \longrightarrow p^{-1}(U_i)$ eine lokale Trivialisierung von $p\colon E \longrightarrow B$ über U_i. Für $a \in F$ sei $V_{x,a} = H'(\_, t_i)^{-1}(\varphi(U_i \times \{a\})) \cap V_x$. Die Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $p_a\colon \varphi(U_i \times \{a\}) \longrightarrow U_i$ einschränken. Damit können wir

$$H'\colon V_{x,a} \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \varphi(U_i \times \{a\}), \quad (y,t) \longmapsto p_a^{-1}(H(y,t))$$

definieren. Wir haben aber eine disjunkte Vereinigung $V_x = \bigsqcup_{a \in F} V_{x,a}$ und deshalb setzen sich diese Definitionen zu einer stetigen Abbildung $H'\colon V_x \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow p^{-1}(U_i)$ zusammen.

Insgesamt haben wir also für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $V_x \subset X$ und einen Lift $H'_x\colon V_x \times I \longrightarrow E$ von H über V_x. Für $y \in V_x \cap V_{x'}$ haben wir Lifts $H'_x\colon \{y\} \times I \longrightarrow E$ und $H'_{x'}\colon \{y\} \times I \longrightarrow E$ mit $H'_x(y,0) = f'(y) = H'_{x'}(y,0)$. Aber $\{y\} \times I$ ist zusammenhängend und deshalb stimmen H'_x und $H'_{x'}$ nach Satz 3.8 auf $\{y\} \times I$ überein. Da y beliebig war, stimmen also H'_x und $H'_{x'}$ bereits auf ganz $(V_x \cap V_{x'}) \times [0,1]$ überein. Das genügt um zu sehen, dass sich die H'_x zu einer stetigen Abbildung $H'\colon X \times I \longrightarrow E$ zusammensetzen lassen. Diese Abbildung ist der gesuchte Lift. □

Dieser Satz impliziert alle Spezialfälle von Liftungseigenschaften, die wir zuvor betrachtet hatten. Wir halten folgendes Korollar fest.

Korollar 3.10. *Sie $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung.*

(i) *Für $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ und einen Weg $\gamma\colon I \longrightarrow B$ mit $\gamma(0) = b_0$ existiert ein eindeutig bestimmter Lift γ' im Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\gamma'"'] & B. \end{tikzcd}$$

(ii) *Seien $\gamma_0, \gamma_1\colon I \longrightarrow B$ Wege in B und $H\colon I \times I \longrightarrow B$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ_0 nach γ_1. Für jeden Lift $\gamma'_0\colon I \longrightarrow E$ von γ_0 existiert ein eindeutig bestimmter Lift $H'\colon I \times I \longrightarrow E$ von H, der eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ'_0 zu einem Lift von γ_1 ist. Insbesondere existiert ein Lift γ'_1 von γ_1 mit $\gamma'_1(0) = \gamma'_0(0)$ und $\gamma'_1(1) = \gamma'_0(1)$.*

Mithilfe dieser Liftungseigenschaften können wir eine Verbindung zwischen Überlagerungen und der Fundamentalgruppe finden. Im Beispiel der Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ hatten wir gesehen, dass exp eine Überlagerung mit typischer Faser $\mathbb{Z}$ ist. Wir haben außerdem einen Isomorphismus $\psi\colon \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ konstruiert, indem wir für eine Schleife γ in S^1 einen Lift $\gamma'\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachten und dann $\psi([\gamma]) = \gamma'(1)$ setzen. Nun operiert $\mathbb{Z}$ auf sich selbst durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n,m) \longmapsto n+m$. Wir können diese Operation auch als Gruppenoperation von $\pi_1(S^1)$ auf der typischen Faser $\mathbb{Z}$ von exp auffassen. Diese Operation ist ein Beispiel für eine *Monodromieoperation.* Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung mit typischer Faser F und $b \in B$. Wir können annehmen, dass $F = \pi^{-1}(\{b\})$. Sei $\gamma\colon I \longrightarrow B$ eine Schleife in B bei b. Für jedes $a \in F$ sei $\gamma'_a\colon I \longrightarrow E$ ein Lift von γ nach E mit $\gamma'_a(0) = a$. Nach Korollar 3.10 ist dieser Lift eindeutig durch $a \in F$ bestimmt. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\psi_\gamma\colon F \longrightarrow F, \quad \psi_\gamma(a) = \gamma'_a(1).$$

Lemma 3.11. *Die oben konstruierte Abbildung $\psi_\gamma\colon F \longrightarrow F$ hängt nur von der Homotopieklasse relativ $\{0,1\}$ von γ ab.*

Beweis. Sei $\beta\colon I \longrightarrow B$ eine Schleife und $H\colon I \times I \longrightarrow B$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ nach β. Sei $a \in F$ und $\beta'_a\colon I \longrightarrow E$ der eindeutig bestimme Lift von β nach E mit $\beta'_a(0) = a$. Nach Korollar 3.10 existiert dann ein Lift $H'\colon I \times I \longrightarrow E$ von H, der eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ von γ'_a nach β'_a ist. Insbesondere ist $\psi_\gamma(a) = \gamma'_a(1) = \beta'_a(1)$. □

Lemma 3.12. *Für γ und δ Schleifen in B bei b gilt*

$$\psi_{\gamma*\delta} = \psi_\delta \circ \psi_\gamma\colon F \longrightarrow F.$$

Außerdem ist $\psi_{\varepsilon_b} = \mathrm{id}_F$ für ε_b die konstante Schleife bei b.

Beweis. Zuerst ist für jedes $a \in F$ der konstante Weg ε_a in a ein Lift von c_b nach E. Also ist $\psi_{\varepsilon_b}(a) = \varepsilon_a(1) = a$.

Sei jetzt γ' ein Lift von γ mit $\gamma'(0) = a$ und δ' ein Lift von δ mit $\delta'(0) = \gamma'(1)$. Dann ist $\gamma' * \delta'$ wohldefiniert und ein Lift von $\gamma * \delta$. Also folgt

$$\psi_{\gamma*\delta}(a) = (\gamma' * \delta')(1) = \delta'(1) = \psi_\delta(\gamma'(1)) = \psi_\delta(\psi_\gamma(a)).$$ □

Lemma 3.12 und Lemma 3.11 zeigen zusammen, dass die Zuordnung $[\gamma] \longmapsto \psi_\gamma$ eine Abbildung $\psi\colon \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ definiert. Für $\pi_1(B,b)$ abelsch ist sie ein Gruppenhomomorphismus. Im Allgemeinen müssen wir einen weiteren Begriff aus der Gruppentheorie einführen.

Definition 3.13. Sei $(G,\cdot,e)$ eine Gruppe. Die *umgekehrte Gruppe* G^{op} hat dieselbe zugrundeliegende Menge G und dasselbe Einheitselement e, aber die Gruppenmultiplikation

$$\_ \cdot^{\mathrm{op}} \_\colon G \times G \longrightarrow G, \quad (g,h) \longmapsto h \cdot g.$$

Ein Gruppenhomomorphismus $G^{\mathrm{op}} \longrightarrow H$ heißt auch Antihomomorphismus $G \longrightarrow H$.

Die Gruppe G^{op} ist isomorph zu G via $\varphi(g) = g^{-1}$, denn

$$\varphi(g \cdot h) = (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1} = \varphi(h) \cdot \varphi(g) = \varphi(g) \cdot^{\mathrm{op}} \varphi(h).$$

Satz 3.14. *Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$ und $F = p^{-1}(\{b\})$. Dann operiert die Gruppe $\pi_1(B,b))^{\mathrm{op}}$ auf F mittels*

$$\pi_1(B,b)^{\mathrm{op}} \times F \longrightarrow F, \quad ([\gamma],a) \longmapsto \psi_\gamma(a).$$

Diese Operation heißt Monodromieoperation *von p.*

Wir betrachten als Beispiele die folgenden drei Überlagerungen von S^1:

(i) Sei $p_1\colon S^1 \longrightarrow S^1$ die Identitätsabbildung $p_1 = \mathrm{id}_{S^1}$. Die typische Faser ist hier $\{1\}$ und die Monodromieoperation ist trivial.

(ii) Sei $p_2\colon S^1 \longrightarrow S^1$ definiert durch $p_2(z) = z^2$. Die typische Faser ist $\{1,-1\}$ und ein Erzeuger von $\pi_1(S^1)$ operiert durch $\pm 1 \longmapsto \mp 1$.

(iii) Sei $p_3\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ die Exponentialabbildung $p_3 = \exp$. Die typischer Faser ist $\mathbb{Z}$ und ein Erzeuger von $\pi_1(S^1)$ operiert durch $n \longmapsto n+1$.

Alle diese Monodromieoperationen sind *transitiv*, d. h. es gibt nur eine Bahn in der Faser unter der Operation von $\pi_1(S^1)$.

LEMMA 3.15. *Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung mit typischer Faser F und E wegzusammenhängend. Dann ist die Monodromieoperation auf F transitiv.*

Beweis. Sei $a \in F = p^{-1}(\{b\})$ für ein $b \in B$. Sei $c \in F$ beliebig. Weil E wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg γ'_c von a nach c. Dann ist $[p \circ \gamma'_c] \in \pi_1(B, b)$ und $\psi_{p\circ\gamma'_c}(a) = \gamma'_c(1) = c$. Das heißt aber nur, dass c in der Bahn von a liegt. □

Sei $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung mit typischer Faser $F = p^{-1}(b)$ für ein $b \in B$ und E wegzusammenhängend. Sei weiter $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}} \times F \longrightarrow F$ die zugehörige transitive Monodromieoperation. Dann ist der Stabilisator von $a \in F$ die Untergruppe $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}_a$ aus allen Elementen $g \in \pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}$ mit $g \cdot a = a$. Dieser Stabilisator ist auch eine Untergruppe H von $\pi_1(B, b)$. Für jede Gruppe G, die auf einer Menge X operiert, und $x \in X$ gilt

$$[G : G_x] = |Gx|;$$

der Index des Stabilisators G_x in G ist genau die Mächtigkeit der Bahn von $x \in X$. In unserem Fall ist die Gruppenoperation transitiv und wir erhalten, dass $[G : H] = |F|$ der Grad der Überlagerung p ist. In unseren Beispielen sieht die Situation wie folgt aus.

(i) Für $p_1\colon S^1 \longrightarrow S^1$ die Identitätsabbildung ist $H = \mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$.
(ii) Für $p_2\colon S^1 \longrightarrow S^1$ mit $p_2(z) = z^2$ ist $H = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Der Index $[\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}]$ ist wie erwartet 2.
(iii) Für $p_3\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ die Exponentialabbildung ist $H = \{0\} \subset \mathbb{Z}$ die triviale Untergruppe.

Die Untergruppe H kann auch auf einem direkteren Weg gefunden werden. Nämlich betrachtet man die induzierte Abbildung $p_*\colon \pi_1(E, a) \longrightarrow \pi_1(B, b)$. Dann ist p_* injektiv und $p_*(\pi_1(E, a))$ eine Untergruppe von $\pi_1(B, b)$ und es stellt sich heraus, dass sie genau der Stabilisator H ist. Um das zu sehen, sei γ' eine Schleife in E bei a, so dass $p_*([\gamma']) = [p \circ \gamma'] = e \in \pi_1(B, b)$. Dann existiert eine Homotopie $H\colon I \times I \longrightarrow B$ von $p \circ \gamma'$ nach ε_b und ein Lift H' von H. Dann ist aber H' eine Homotopie von γ' nach ε_a, also $[\gamma'] = e \in \pi_1(E, a)$. Also ist p_* injektiv.

Um zu sehen, dass $p_*(\pi_1(E, a)) \subset H$, sei $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E, a))$. Dann gibt es eine Schleife γ' in E bei a, so dass $[p \circ \gamma'] = [\gamma]$. Aber dann ist $\psi_\gamma(a) = \gamma'(1) = a$, also $[\gamma] \in H$. Ist andersherum $[\gamma] \in H$, sei γ' ein Lift von γ mit $\gamma'(0) = a$. Aber da $[\gamma]$ das Element a fixiert, muss dann $\gamma'(1) = a$ gelten. Also ist $[\gamma'] \in \pi_1(E, a)$ und $p_*([\gamma']) = [\gamma] \in p_*(\pi_1(E, a))$.

Insgesamt haben wir gesehen, dass eine wegzusammenhängende Überlagerung mit typischer Faser F eine transitive Monodromieoperation $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}} \times F \longrightarrow F$ induziert und jede solche transitive Operation liefert eine Untergruppe von $\pi_1(B, b)$. Wir werden zeigen, dass diese Zuordnungen in einem gewissen Sinn bijektiv sind.

Tatsächlich werden wir Kategorien Cov_B von Überlagerungen von B und $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}$-Set von Mengen mit $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}$-Operation definieren und zeigen, dass diese beiden Kategorien äquivalent sind; zumindest für zusammenhängende B, die gewisse technische Voraussetzungen erfüllen. Wegzusammenhängende Überlagerungen entsprechen entlang dieser Äquivalenz genau transitiven $\pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}$-Operationen.

Sei G eine Gruppe und M_1 und M_2 zwei Mengen mit G-Operationen. Wir schreiben $G \circlearrowright M_1$ bzw. $G \circlearrowright M_2$. Ein Morphismus von $G \circlearrowright M_1$ nach $G \circlearrowright M_2$ ist eine Abbildung $\Phi\colon M_1 \longrightarrow M_2$, die *$G$-äquivariant* ist, d. h. es gilt

$$\Phi(g \cdot m_1) = g \cdot \Phi(m_1)$$

für alle $g \in G$ und $m_1 \in M_1$.

Zum Beispiel haben wir Gruppenoperationen $\rho\colon \mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ mit $\rho(n, \pm 1) = \pm(-1)^n$ und $\rho\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $\rho(n, m) = n + m$. Dann ist die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \{\pm 1\}$ mit $\Phi(m) = (-1)^m$ $\mathbb{Z}$-äquivariant.

Definition 3.16. Sei G eine Gruppe. Die Kategorie G-Set von *G-Mengen* hat als Objekte Mengen M mit einer G-Operation $G \circlearrowright M$ und als Morphismen G-äquivariante Abbildungen.

Definition 3.17. Sei B ein topologischer Raum mit Überlagerungen $p\colon E \longrightarrow B$ und $q\colon E' \longrightarrow B$. Ein *Morphismus von Überlagerungen $E \longrightarrow E'$* ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon E \longrightarrow E'$, so dass

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die Kategorie Cov_B von Überlagerungen von B hat als Objekte Überlagerungen $E \longrightarrow B$ von B und Morphismen von Überlagerungen als Morphismen.

Ein Morphismus $\varphi\colon E \longrightarrow E'$ von Überlagerungen $p\colon E \longrightarrow B$ und $q\colon E' \longrightarrow B$ induziert, für jedes $b \in B$, eine Abbildung zwischen den Fasern $\varphi_\#\colon p^{-1}(\{b\}) \longrightarrow q^{-1}(\{b\})$, denn für $x \in p^{-1}(\{b\})$ ist $q(\varphi(x)) = p(x) = b$. Wir können Morphismen von Überlagerungen benutzen um die Monodromieoptionen zu vergleichen.

Lemma 3.18. *Für einen Morphismus $\varphi\colon E \longrightarrow E'$ von Überlagerungen $p\colon E \longrightarrow B$ und $q\colon E' \longrightarrow B$ ist die induzierte Abbildung $\varphi_\#\colon p^{-1}(\{b\}) \longrightarrow q^{-1}(\{b\})$ auf den Faser von $b \in B$ äquivariant bezüglich den Monodromieoperationen von $\pi_1(B, b)$.*

Beweis. Sei $x \in p^{-1}(\{b\})$ und $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$. Wähle einen Lift $\gamma'\colon [0, 1] \longrightarrow E$ entlang p mit $\gamma'(0) = x$. Dann operiert $[\gamma]$ auf x als $x \cdot [\gamma] = \gamma'(1)$. Außerdem ist $q \circ (\varphi \circ \gamma') = p \circ \gamma' = \gamma$. Das heißt, $\varphi \circ \gamma'$ ist ein Lift von γ entlang q und $[\gamma]$ operiert auf $\varphi(x)$ als $\varphi(x) \cdot [\gamma] = \varphi(\gamma'(1))$. Insgesamt ist also

$$\varphi(x \cdot [\gamma]) = \varphi(\gamma'(1)) = \varphi(x) \cdot [\gamma]. \qquad \square$$

Definition 3.19. Sei B ein topologischer Raum und $b \in B$. Wir definieren den *Faserfunktor* bezüglich b durch

$$\mathrm{fib}_b\colon \mathrm{Cov}_B \longrightarrow \pi_1(B, b)^{\mathrm{op}}\text{-Set}, \quad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd} \longmapsto \left(p^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{\varphi_\#} q^{-1}(\{b\})\right).$$

Sei H eine Untergruppe von G. Dann operiert G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H von H und diese Operation ist transitiv.

Satz 3.20. *Sei G eine Gruppe und X eine Menge mit einer transitiven G-Operation. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine G-äquivariante Bijektion $G/G_x \longrightarrow X$.*

Beweis. Für $x \in X$ definiere $\varphi\colon G/G_x \longrightarrow X$ durch $gG_x \longmapsto g \cdot x$. Das ist wohldefiniert, denn für $h \in G_x$ ist $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x$. Die Abbildung φ ist äquivariant, denn für $g, h \in G$ gilt

$$\varphi(g \cdot hG_x) = \varphi(ghG_x) = gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot \varphi(hG_x).$$

Sie ist surjektiv, da G auf X transitiv operiert. Außerdem ist φ injektiv, denn falls $\varphi(gG_x) = \varphi(hG_x)$ gilt, haben wir $g \cdot x = h \cdot x$, also $h^{-1}g \cdot x = x$. Aber das heißt nur, dass $h^{-1}g \in G_x$, bzw. $h^{-1}gG_x = G_x$, also $gG_x = hG_x$. $\square$

3.1 Universelle Überlagerungen

DEFINITION 3.21. Eine Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$ heißt *universell*, falls E einfach zusammenhängend ist.

Ein topologischer Raum B heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, falls für jedes $b \in B$ eine Umgebung U von b existiert, so dass $\iota_*(\pi_1(U,b)) = \{e\} \subset \pi_1(B,b)$, wobei $\iota\colon U \hookrightarrow B$ die Inklusion bezeichnet. Eine universelle Überlagerung kann nur dann existieren, wenn der Basisraum B semilokal einfach zusammenhängend ist. Falls $p\colon E \longrightarrow B$ nämlich eine universelle Überlagerung ist, hat jedes $p \in B$ eine Umgebung U, so dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{f\in F} U_f$ und $p|_{U_f}\colon U_f \xrightarrow{\sim} U$. Eine Schleife γ in U bei b gibt uns dann eine Schleife $\gamma_f = (p|_{U_f})^{-1} \circ \gamma$ in U_f bei $b_f = (p|_{U_f})^{-1}(b)$. Da E einfach zusammenhängend ist, gilt $[\gamma_f] = e \in \pi_1(E, b_f)$. Sei H' eine Homotopie von γ_f zur konstante Schleife ε_{b_f}. Dann ist $p \circ H'$ eine Homotopie von γ nach ε_b, d. h. $[\gamma] = e \in \pi_1(B,b)$.

DEFINITION 3.22. Ein topologischer Raum B ist *lokal wegzusammenhängend*, falls für jedes $b \in B$ eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ für b existiert, so dass jedes $U \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.

TODO: cone on $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ is not locally path connected

Für eine universelle Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$ mit $p(e_0) = b_0$ existiert für $e_1 \in E$ genau eine Homotopieklasse $[\gamma]$ von Wegen von e_0 nach e_1. Dann ist $p \circ \gamma$ ein Weg in B von b_0 nach $p(e_1)$ und $\gamma \simeq \gamma'$ genau dann, wenn $p \circ \gamma \simeq p \circ \gamma'$. Punkte in E stehen also in Korrespondenz zu Homotopieklassen von Wegen in B mit Startpunkt b_0. Diese Beobachtung können wir benutzen um für jeden hinreichend gutartigen Basisraum B eine universelle Überlagerung zu konstruieren.

Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Wir definieren

$$E := \{[\gamma] : \gamma \text{ ein Weg in } B \text{ mit } \gamma(0) = b_0\}$$

und eine Abbildung $p\colon E \longrightarrow B$ durch $p([\gamma]) = \gamma(1)$. Sei

$$\mathcal{U} := \{U \subset B : U \text{ offen und wegzusammenhängend und } \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(B) \text{ ist trivial}\}.$$

Da $U \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist, ist die Trivialität $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(B)$ unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

LEMMA 3.23. *Die Familie $\mathcal{U}$ ist eine Basis für die Topologie auf B.*

Beweis. Zuerst ist $\bigcup \mathcal{U} = B$, denn jedes $b \in B$ besitzt eine Umgebung $V \subset B$, für die die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(B)$ trivial ist. Da B zusätzlich lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende Umgebung W von b mit $W \subset V$. Das kommutative Dreieck

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(W) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(V) \arrow[d] \\
& \pi_1(B)
\end{tikzcd}$$

zeigt dann, dass $\pi_1(W) \longrightarrow \pi_1(B)$ trivial ist, d. h. $W \in \mathcal{U}$.

Sind außerdem $U, V \in \mathcal{U}$ und $b \in U \cap V$, so existiert eine wegzusammenhängende Umgebung W von b mit $W \subset U \cap V$. Für dieses W ist dann die Komposition

$$\pi_1(W) \longrightarrow \pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(B)$$

trivial, da bereits $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(B)$ trivial ist. □

Sei $U \in \mathcal{U}$ und γ eine Weg in B mit $\gamma(0) = b_0$ und $\gamma(1) \in U$. Setze

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] : \eta \text{ ein Weg in } U \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Lemma 3.24. *Für $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ ist $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$.*

Beweis. Wir haben $\gamma' \simeq \gamma * \eta$ für einen Weg η in U. Elemente von $U_{[\gamma']}$ sind also von der Form $[\gamma * \eta * \mu]$ für μ ein Weg in U. Also ist $U_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$. Andererseits ist $\gamma \simeq \gamma' * \eta^-$, also $[\gamma] \in U_{[\gamma']}$. Es folgt also analog, dass $U_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma']}$. □

Satz 3.25. *Die Familie $\{U_{[\gamma]}\}_{U,\gamma}$ bildet eine Basis für eine Topologie auf E.*

Beweis. Natürlich ist $E = \bigcup_{U,\gamma} U_{[\gamma]}$, denn $[\gamma] \in U_{[\gamma]}$ für $U \in \mathcal{U}$ mit $\gamma(1) \in U$. Seien weiter $U, V \in \mathcal{U}$ und $[\gamma], [\gamma'] \in E$ mit $\gamma(1) \in U$ und $\gamma'(1) \in V$. Für jedes $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ ist aber $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$ und $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma']}$. Da $\mathcal{U}$ eine Basis für die Topologie auf B ist, gibt es ein $W \in \mathcal{U}$ mit $\gamma''(1) \in W \subset U \cap V$. Dann ist $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']}$. □

Mithilfe dieser Basis erhalten wir also einen topologischen Raum E.

Satz 3.26. *Mit B, E und $p \colon E \longrightarrow B$ wie oben gilt:*

(i) *$p \colon E \longrightarrow B$ ist stetig.*
(ii) *$p \colon E \longrightarrow B$ ist eine Überlagerung.*
(iii) *E ist einfach zusammenhängend.*

Beweis.

(i) Sei $U \in \mathcal{U}$. Wir wollen zeigen, dass $p^{-1}(U)$ offen in E ist. Aber es gilt

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \{[\gamma] : \gamma \text{ ein Weg in } B \text{ mit } \gamma(0) = b_0) \text{ und } \gamma(1) \in U\} \\ &= \bigcup \{U_[\gamma] : \gamma \text{ ein Weg von } b_0 \text{ nach } U\}. \end{aligned}$$

(ii) Weil B wegzusammenhängend ist, ist p surjektiv. Für $U \in \mathcal{U}$ zeigen wir, dass $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen in E ist, die alle entlang p homöomorph zu U sind. Wir wissen bereits, dass $p^{-1}(U) = \bigcup_\gamma U_{[\gamma]}$. Sei $x_0 \in U$. Dann gilt:
   (a) Jedes $[\delta] \in p^{-1}(U)$ liegt in einem $U_{[\gamma]}$ mit γ ein Weg von b_0 nach x_0.
   (b) Für Wege γ und γ' von b_0 nach x_0 und $\gamma \not\simeq \gamma'$ gilt $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} = \emptyset$.

   Zuerst zu (a). Da U wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg η von $\delta(1)$ nach x_0. Wegen $\delta * \eta * \eta^- \simeq \delta$ ist $[\delta] \in U_{[\delta * \eta]}$.
   Nun zu (a). Wäre $[\delta] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, so wäre $U_{[\gamma]} = U_{[\delta]} = U_{[\gamma']}$. Also wäre $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, d. h. $\gamma' \simeq \gamma * \eta$ für η eine Schleife in U bei x_0. Aber $[\eta] = e \in \pi_1(B, x_0)$ wegen $U \in \mathcal{U}$. Das würde aber bedeuten, dass $\gamma' \simeq \gamma$.
   Insgesamt folgt, dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}$, wobei die $[\gamma]$ Homotopieklassen von Wegen von b_0 nach x_0 sind. Es bleibt zu zeigen, dass $p|_{U_{[\gamma]}}$ ein Homöomorphismus $U_{[\gamma]} \cong U$ ist. Die Abbildung ist surjektiv, da U wegzusammenhängend ist. Für Injektivität sei $p([\gamma * \eta]) = p([\gamma * \mu])$. Dann ist $\eta * \mu^-$ eine Schleife in U bei $\gamma(1)$. Folglich ist $[\gamma * \eta^-]$ trivial in $\pi_1(B, \gamma(1))$. Das genügt um zu sehen, dass $\eta \simeq \eta$ als Wege in B. Damit gilt auch $\gamma * \eta \simeq \gamma * \mu$.
   Um zu sehen, dass $p|_{U_{[\gamma]}}$ offen ist, genügt es $V_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]}$ mit $V \in \mathcal{U}$ zu betrachten. Dann ist $p(V_{[\gamma]}) = V$ offen in B.

(iii) Eine natürliche Wahl für eine Basispunkt in E ist $[\varepsilon_{b_0}]$, die Homotopieklasse des konstanten Wegs bei b_0. Zuerst zeigen wir, dass E wegzusammenhängend ist. Sei dafür $[\gamma] \in E$. Definiere $\Gamma\colon I \longrightarrow E$ durch $\Gamma(t) = [\gamma_t]$, wobei γ_t eine Reparametrisierung von $\gamma|_{[0,t]}$ ist. Dann ist $\Gamma(0) = [\varepsilon_{b_0}]$ und $\Gamma(1) = [\gamma]$.
Sei $[\Gamma] \in \pi_1(E, [\varepsilon_{b_0}])$. Dann ist $\gamma = p \circ \Gamma$ eine Schleife in B bei b_0. Sei γ_t wieder eine Reparametrisierung von $\gamma|_{[0,t]}$ und $\gamma'\colon I \longrightarrow E$ definiert durch $\gamma'(t) = [\gamma_t]$. Dann sind γ' und Γ beides Lifts von γ mit $\Gamma(0) = \gamma'(0) = [\varepsilon_{b_0}]$. Also gilt bereits $\Gamma = \gamma'$. Folglich ist

$$[\gamma] = [\gamma_1] = \gamma'(1) = \Gamma(1) = [\varepsilon_{b_0}] = e \in \pi_1(B, b_0).$$

Jetzt ist aber $[\gamma] = p_*([\Gamma])$ und p_* ist injektiv, da p eine Überlagerung ist. Also ist bereits $[\Gamma]$ trivial. □

TODO

Satz 3.27. *Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend mit $x_0 \in X$ und $p\colon E \longrightarrow B$ eine Überlagerung mit $b_0 \in B$ und $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Außerdem sei $f\colon X \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = b_0$. Dann existiert genau dann ein Lift $f'\colon X \longrightarrow E$ von f entlang p mit $f'(x_0) = e_0$, wenn die Inklusion $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ gilt.*

Beweis. Sei zuerst $f'\colon X \longrightarrow E$ ein solcher Lift. Dann ist

$$f_*([\gamma]) = (p \circ f')_*([\gamma]) = p_*(f'_*([\gamma])) \in p_*(\pi_1(E, e_0))$$

für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Also ist $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Sei nun nur $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $x \in X$. Wähle einen Weg $\tau_x\colon I \longrightarrow X$ von x_0 nach x. Sei $\gamma_x\colon I \longrightarrow E$ der eindeutige Lift von $f \circ \tau_x$ nach E mit Startpunkt e_0. Wir wollen $f'(x) = \gamma_x(1)$ definieren. Das ist wohldefiniert, denn sei $\tau'_x\colon I \longrightarrow X$ ein zweiter Weg von x_0 nach x. Dann ist $\tau_x * (\tau'_x)^-$ eine Schleife bei x_0 und $[f \circ (\tau_x * (\tau'_x)^-] \in f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$. Also ist der Lift von $f \circ (\tau_x * (\tau'_x)^-)$ nach E eine Schleife in E bei e_0. Für γ'_x der Lift von $f \circ \tau'_x$ nach E mit Startpunkt e_0 gilt dann also $\gamma_x(1) = \gamma'_x(1)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $f'\colon X \longrightarrow E$ stetig ist. Sei $V \subset B$ eine Umgebung von $f(x)$ mit einer lokalen Trivialisierung und $U \subset E$ homöomorph zu V mit $f'(x) \in U$. Außerdem sei W eine wegzusammenhängende Umgebung von x in X, so dass $f(W) \subset V$. Wir zeigen, dass $f'(W) \subset U$. Sei dafür $y \in W$ und $\eta_y\colon I \longrightarrow W$ ein Weg von x nach y. Dann ist $\tau_x * \eta_y$ ein Weg von x_0 nach y. Für den Lift γ_x von $f \circ \tau_x$ nach E mit Startpunkt e_0 ist dann $\gamma_x * ((p|U)^{-1} \circ f \circ \eta_y)$ der Lift von $f \circ (\tau_x * \eta_y)$ nach E mit Startpunkt e_0. Also ist $f'(y) \in U$. Da $y \in W$ beliebig war, folgt $f'(W) \subset U$. Das genügt um die Stetigkeit von f' zu sehen. □

Korollar 3.28. *Sei B lokal wegzusammenhängend mit universelle Überlagerungen $p\colon E \longrightarrow B$ und $q\colon E' \longrightarrow B$. Dann sind p und q isomorph, d. h. es gibt einen Homöomorphismus $\Phi\colon E \longrightarrow E'$, so dass*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Wähle Basispunkte $b_0 \in B$, $e_0 \in E$ und $e'_0 \in E'$ mit $p(e_0) = b_0$ und $q(e'_0) = b_0$. Dann existiert ein Lift $\Phi\colon E \longrightarrow E'$ von p entlang q nach Satz 3.27, da $\pi_1(E, e_0) = \{e\} = \pi_1(E', e'_0)$. Ebenso existiert ein Lift $\Psi\colon E' \longrightarrow E$ von q entlang p. Dann ist $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{E'}$ und $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_E$, denn $\mathrm{id}_{E'}$ und $\Phi \circ \Psi$ sind beides Lifts von p entlang p. Aber wegen Satz 3.8 und $\mathrm{id}_{E'}(e'_0) = e'_0 = (\Phi \circ \Psi)(e'_0)$ folgt bereits $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{E'}$. Die Identität $\mathrm{id}_E = \Psi \circ \Phi$ folgt analog. □

Satz 3.29. *Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend mit universeller Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$. Dann existiert ein Isomorphismus* $\mathrm{Aut}(E|B) \cong \pi_1(B, b_0)$ *für ein $b_0 \in B$.*

Beweis. Nach unserer Konstruktion der universellen Überlagerung können wir annehmen, dass Punkte von E durch Homotopieklassen von Wegen $[\gamma]$ in B mit $\gamma(0) = b_0$ gegeben sind. Die Abbildung

$$\pi_1(B, b_0) \times E \longrightarrow E, \quad ([\eta], [\gamma]) \longmapsto [\eta * \gamma]$$

ist eine Gruppenoperation von $\pi_1(B, b_0)$ auf E. Dafür müssen wir zeigen, dass für jede Homotopieklasse $[\eta] \in \pi_1(B, b_0)$ die Abbildung $[\eta] \cdot \_\colon [\gamma] \mapsto [\eta * \gamma]$ stetig ist. Sei $U_{[\gamma]}$ ein Basiselement, d. h. U ist eine offene Menge in B und $\gamma\colon I \longrightarrow B$ ein Weg mit $\gamma(0) = b_0$ und $\gamma(1) \in U$ und $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \mu] : \mu \text{ ein Weg in } U\}$. Dann ist

$$([\eta] \cdot \_)^{-1}(U_{[\gamma]}) = \{[\eta^- * \gamma * \mu] : \mu \text{ ein Weg in } U\} = U_{[\eta^- * \gamma]}$$

offen in E. Insgesamt definiert also jedes $[\eta] \in \pi_1(B, b_0)$ einen Homöomorphismus $[\eta] \cdot \_\colon E \longrightarrow E$ mit $[\gamma] \mapsto [\eta * \gamma]$ und

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "{[\eta]\cdot\_}"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Also haben wir eine Abbildung $\pi_1(B, b_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E|B)$ mit $[\eta] \mapsto [\eta] \cdot \_$. Um zu sehen, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, sei zuerst $[\eta] \in \pi_1(B, b_0)$ so, dass $[\eta] \cdot \_ = \mathrm{id}_E$. Dann ist für jedes $[\gamma] \in E$ bereits $e = [\gamma * \gamma^-] = [\eta * \gamma * \gamma^-] = [\eta] \in \pi_1(B, b_0)$. Für Surjektivität sei $\Psi \in \mathrm{Aut}(E|B)$. Wähle $[\gamma] \in E$ und sei $[\delta] = \Psi([\gamma])$. Dann ist

$$\gamma(1) = p([\gamma]) = (p \circ \Psi)([\gamma]) = p([\delta]) = \delta(1)$$

und $[\delta * \gamma^-] \in \pi_1(B, b_0)$. Dann ist $[\delta * \gamma^-] \cdot ([\gamma]) = [\delta]$ und $[\delta * \gamma] \cdot \_$ und Ψ sind beides Lifts von p entlang p. Wegen Satz 3.8 folgt dann bereits $\Psi = [\delta * \gamma] \cdot \_$. □

Sei B im Folgenden immer wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend mit universeller Überlagerung $p\colon E \longrightarrow B$. Sei weiter $b_0 \in B$ und $q\colon Y \longrightarrow B$ eine beliebige Überlagerung. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_B(E, Y) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}_B}(p, q)$ für die Menge von Morphismen von Überlagerungen von $p\colon E \longrightarrow B$ nach $q\colon Y \longrightarrow B$.

Lemma 3.30. *Es existiert eine Bijektion* $\mathrm{Hom}_B(E, Y) \cong q^{-1}(\{b_0\})$.

Beweis. Wir fassen wieder E als die Menge $\{[\gamma] : \gamma \text{ ein Weg in } B \text{ mit } \gamma(0) = b_0\}$ auf. Definiere eine Abbildung

$$\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}\colon \mathrm{Hom}_B(E, Y) \longrightarrow q^{-1}(\{b_0\}), \quad \Psi \longmapsto \Psi([\varepsilon_{b_0}]).$$

Sei $y \in q^{-1}(\{b_0\})$. Wir definieren $L_y \in \mathrm{Hom}_B(E, Y)$ wie folgt. Für $[\gamma] \in E$ sei γ'_y der eindeutige Lift von γ entlang q mit $\gamma'_y(0) = y$. Dann sei $L_y([\gamma]) = \gamma'_y(1)$. Wegen der Homotopieliftungseigenschaft ist das wohldefiniert. Außerdem ist

$$q(L_y([\gamma])) = q(\gamma'_y(1)) = \gamma(1) = p([\gamma]),$$

also $L_y \in \mathrm{Hom}_B(E, Y)$. Insgesamt haben wir also eine Abbildung $L\colon y \mapsto L_y$. Wir zeigen, dass L und $\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}$ invers zueinander sind. Zuerst haben wir

$$L_y([\varepsilon_{b_0}]) = \varepsilon_y(1) = y$$

für jedes $y \in q^{-1}(\{b_0\})$. Sei umgekehrt $\psi \in \mathrm{Hom}_B(E, Y)$ und $[\gamma] \in E$. Sei $\Gamma\colon I \longrightarrow E$ der Lift von γ mit $\Gamma(0) = [\varepsilon_{b_0}]$. Wir haben bereits gesehen, dass $\Gamma(t)(1) = \gamma(t)$ und $\Gamma(1) = [\gamma]$ gilt. Außerdem ist $\psi \circ \Gamma\colon I \longrightarrow Y$ ein Lift von γ mit $(\psi \circ \Gamma) = \psi([\varepsilon_{b_0}])$. Dann ist

$$L_{\psi([\varepsilon_{b_0}])}([\gamma]) = (\psi \circ \Gamma)(1) = \psi([\gamma]). \qquad \square$$

Außerdem ist die Bijektion $\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}\colon \mathrm{Hom}_B(E, Y) \longrightarrow q^{-1}(\{b_0\})$ funktoriell: Sei $f \in \mathrm{Hom}_B(Y, Y')$ ein Morphismus von Überlagerungen von $q\colon Y \longrightarrow B$ nach $q'\colon Y' \longrightarrow B$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_B(E, Y) \arrow[r, "\varphi \mapsto f \circ \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}"'] & \mathrm{Hom}_B(E, Y') \arrow[d, "\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}"] \\ q^{-1}(\{b_0\}) \arrow[r, "f|_{q^{-1}(\{b_0\})}"'] & (q')^{-1}(\{b_0\}). \end{tikzcd}$$

Für $p\colon E \longrightarrow B$ wieder die universelle Überlagerung operiert $\mathrm{Aut}(E|B)^{\mathrm{op}}$ auf $\mathrm{Hom}_B(E, Y)$ durch

$$\mathrm{Aut}(E|B)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Hom}_B(E, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(E, Y), \quad (\psi, \varphi) \longmapsto \varphi \circ \psi.$$

Es stellt sich heraus, dass diese Gruppenoperation entlang der Isomorphismen $\mathrm{Aut}(E|B) \cong \pi_1(B, b_0)$ und $\mathrm{Hom}_B(E, Y) \cong q^{-1}(\{b_0\})$ genau der Monodromieoperation entspricht. Es gilt nämlich

$$\mathrm{ev}_{[\varepsilon_{b_0}]}(L_y \circ ([\gamma] \cdot \_)) = L_y([\gamma * \varepsilon_{b_0}]) = L_y([\gamma]) = \gamma'_y(1)$$

für $y \in q^{-1}(\{b_0\})$ und γ'_y der Lift von γ entlang q mit Startpunkt y.

TODO