Übungsblatt 5

Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

Aufgabe 5.1. Wir betrachten die *topologist's sine curve*

$$S = \{(x, \sin(1/x) : x \in (0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

und den Raum

$$T = \{(x, \sin(1/x) : x \in (0, 1]\} \cup \{-1\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

mit der Teilraumtopologie. Zeigen Sie

(i) Die Abbildung

$$f : T \longrightarrow S, \quad f(x, y) = \begin{cases} (0, y) & \text{falls } x = -1 \\ (x, y) & \text{falls } x \neq -1 \end{cases}$$

ist eine stetige Bijektion.

(ii) T ist lokalkompakt.

(iii) S ist nicht lokalkompakt. Insbesondere muss das Bild eines lokalkompakten Raums unter einer stetigen Funktion nicht lokalkompakt sein.

Zur Erinnerung: Ein Raum X heißt lokalkompakt, wenn es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und eine kompakte Teilmenge $V \subset X$ mit $x \in U \subset V$ gibt.

Aufgabe 5.2. Wir definieren auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$, so dass genau dann $x \sim y$ gilt, wenn ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $t \cdot x = y$. Der Quotient $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ heißt *reeller projektiver Raum.*

(i) Wir bezeichnen mit $S^n/\{\pm 1\}$ den Quotienten der Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim'$ mit $x \sim' y$ genau dann, wenn $x = -y$. Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus $S^n/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ gibt und folgern Sie daraus, dass $\mathbb{RP}^n$ kompakt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

Aufgabe 5.3. Wir definieren induktiv eine Folge von Mengen $C_n \subset [0, 1]$. Setze $C_0 = [0, 1]$ und

$$C_{n+1} = \left(\tfrac{1}{3} \cdot C_n\right) \cup \left(\tfrac{1}{3} \cdot C_n + \tfrac{2}{3}\right).$$

Dann ist $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ die *Cantormenge.* Zeigen Sie:

(i) Eine reelle Zahl x liegt genau dann in C, wenn sie sich in Basis 3 nur mit den Ziffern 0 und 2 ausdrücken lässt, d. h. es gibt $a_i \in \{0, 2\}$ für $i \in \mathbb{N}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^{-i}}$$

(ii) Es gibt einen Homöomorphismus $\prod_{i=0}^{\infty}\{0,2\} \longrightarrow C$, wobei $\{0,2\}$ die diskrete Topologie trägt.
(iii) Die Cantormenge C ist kompakt.

Aufgabe 5.4. Sei I eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$ und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Seien weiter $f_{ij}\colon X_j \longrightarrow X_i$ stetige Abbildungen wannimmer $i \leq j$. In dieser Situation nennen wir $(\{X_i\},\{f_{ij}\})$ ein *projektives System* und definieren den *projektiven Limes* als den topologischen Raum

$$\lim_{i\in I} X_i \coloneqq \{(x_i)_{i\in I} : x_i = f_{ij}(x_j) \text{ für } i \leq j\} \subset \prod_{i\in I} X_i$$

mit der Teilraumtopologie. Sei im Folgenden $(\{X_i\},\{f_{ij}\})$ ein projektives System in dem die Räume X_i alle endlich und diskret sind. Zeigen Sie:
(i) $\lim_i X_i$ ist kompakt.
(ii) Jeder Punkt $x \in \lim_i X_i$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offenen und gleichzeitig abgeschlossenen Mengen. Zur Erinnerung: eine Umgebungsbasis für einen Punkt x in einem topologischen Raum X ist eine Familie von offenen Mengen $\{V_j\}_{j\in J}$, so dass für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ ein $j \in J$ existiert mit $V_j \subset U$.
(iii) Zeigen Sie, dass $\lim_i X_i$ total unzusammenhängend ist, d. h. jede zusammenhängende Teilmenge in $\lim_i X_i$ hat genau ein Element.