Übungsblatt 1

Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

Aufgabe 1.1. Für welche der folgenden Mengen X und $\mathcal{T}$ ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum?

(i) $X = \mathbb{Q}$ und $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{Q} : 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$

(ii) $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{T} = \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

(iii) $X = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{T} = \{V : V \text{ ist ein Untervektorraum von } \mathbb{R}^2\}$

Aufgabe 1.2. Für eine zwei- bzw. dreielementige Menge X, wie viele verschiedene Topologien gibt es jeweils auf X?

Aufgabe 1.3. Sei X eine Menge mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie, dass X *metrisierbar* ist, d. h. es gibt eine Metrik $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass die von d erzeugte metrische Topologie auf X gleich der diskreten Topologie ist.

Aufgabe 1.4. Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim. Für $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ sei eine Primfaktorisierung $x = \pm p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ mit verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren eine Funktion $v_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ durch $v_p(0) = \infty$ und

$$v_p(x) = \begin{cases} k_i, & \text{falls } p = p_i \text{ für ein } i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erweitern diese Funktion zu einer Funktion auf $\mathbb{Q}$ durch die Vorschrift

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b),$$

wobei $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rationale Zahl ist und $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremde ganze Zahlen sind. Zeigen Sie, dass durch

$$d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$$

mit der Konvention $p^{-\infty} = 0$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert wird. Man nennt sie die *p-adische Metrik* und die zugehörige metrische Topologie heißt *p-adische Topologie* auf $\mathbb{Q}$.