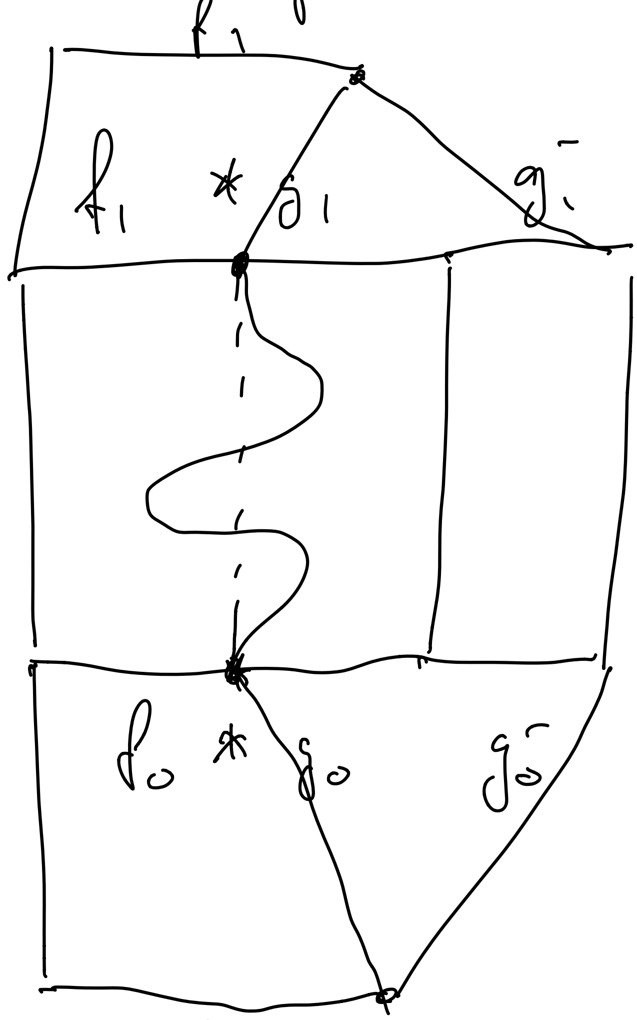
Hausübung 2.5

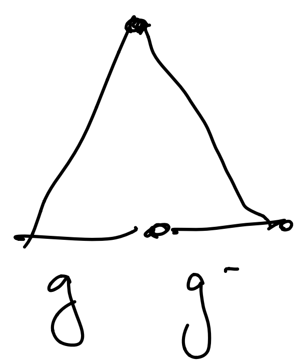
$x_0 \in A \subset X$; A wegzshgd.

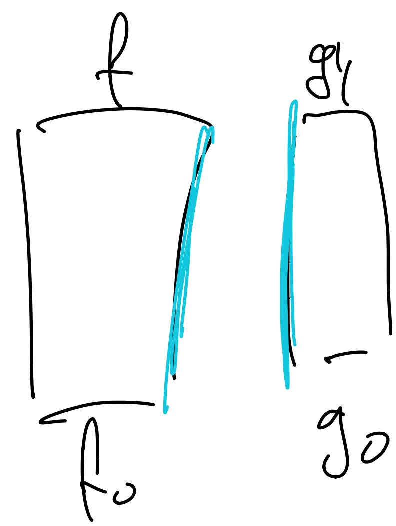
$\pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ surjektiv

$\Longleftrightarrow$ jeder Weg in X mit Endpunkten in A

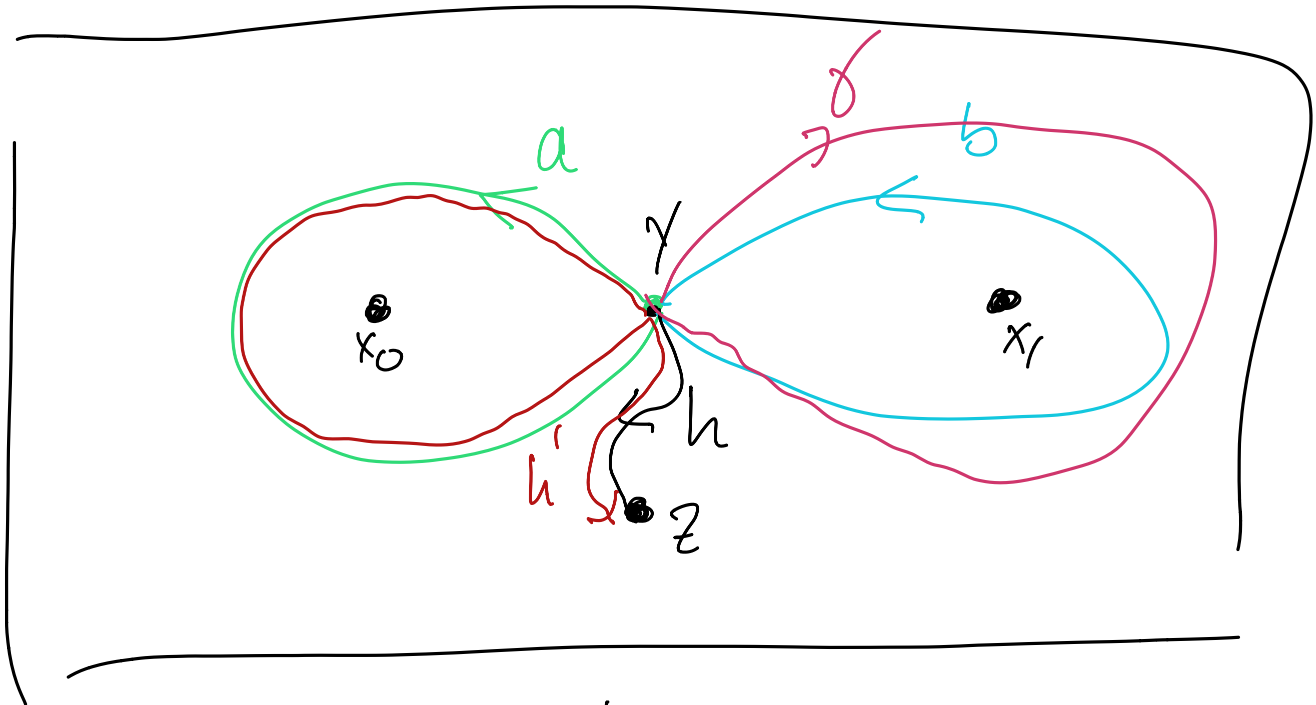
ist homotop zu einem Weg in A







$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0, x_1\}$



$\pi_1(X) \cong \langle a, b \mid \ \rangle$

$\beta_h : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, z)$

$[\gamma] \longmapsto [h^{-1} * \gamma * h]$

$h' \simeq a * h$ $\qquad [(a*h)^{-1} * \gamma * (a*h)]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\beta_{h'} : [\gamma] \longmapsto [h^{-1} * a^{-1} * \gamma * a * h]$

$\beta_{h'}^{-1} \circ \beta_h : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$

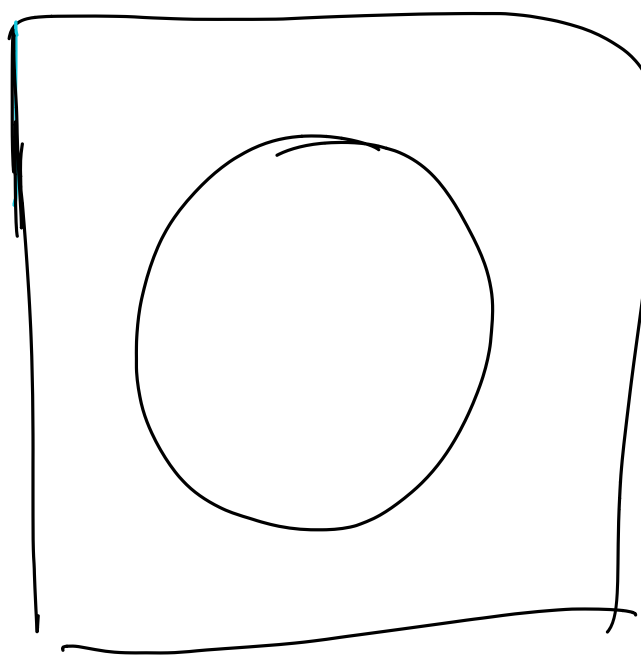
$$[\gamma] \longmapsto \beta_h^{-1}([h^- * \gamma * h])$$

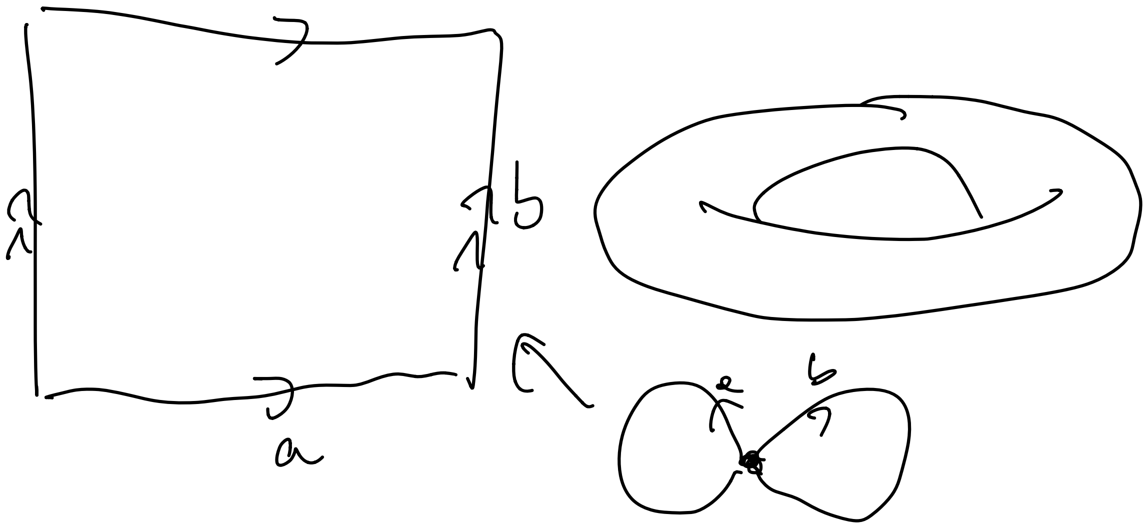
$$= [(a * h)^- * h^- * \gamma * h * a * h]$$

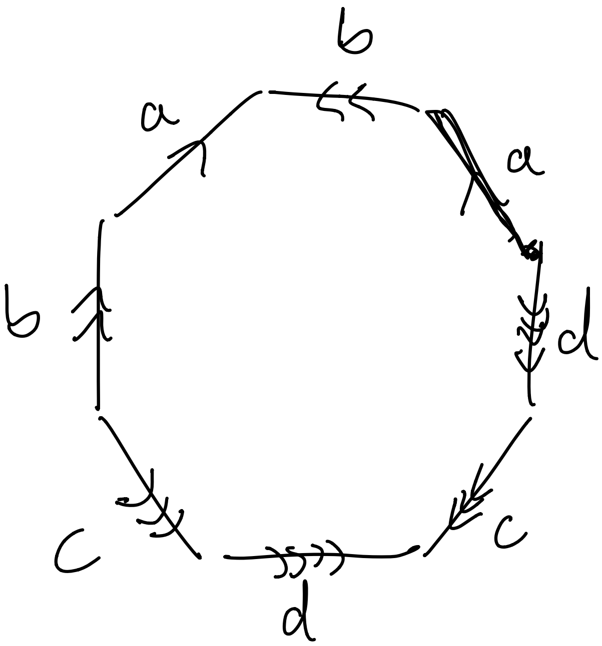
$$= [h^- * a^- * h^- * \gamma * h * a * h]$$

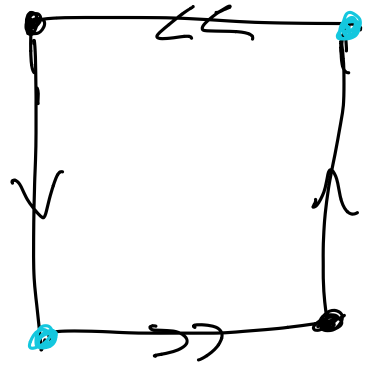
abelsche Fundamentalgruppe:

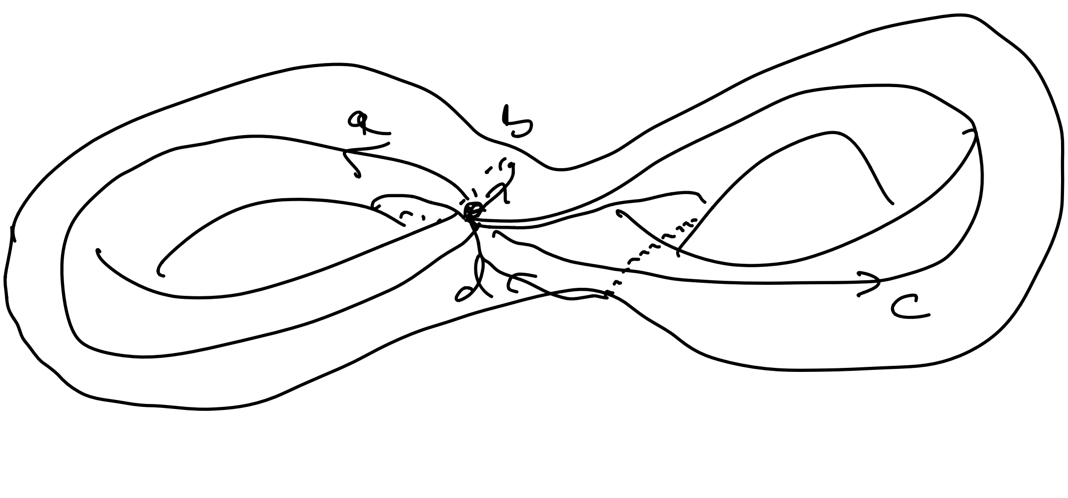
$[\gamma * \eta] = [\eta * \gamma]$, wenn γ, η Schleifen sind!




b
a
a
b


b
a
a
b
d
c
c
d




a
b
d
c

Allgemeine Topologie

① **Definition** Eine Topologie auf einer Menge X ist eine Familie τ von "offenen" Teilmengen mit

- $\emptyset, X \in \tau$
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
- $A_i \in \tau$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Definition $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ stetig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \in \tau_Y$ für $U \in \tau_X$

② Basen für Topologien

Definition Eine Basis ist eine Familie $\mathcal{B}$ mit

- $\bigcup \mathcal{B} = X$
- für $U', U'' \in \mathcal{B}$ und $x \in U' \cap U''$ existiert $U''' \in \mathcal{B}$ mit $x \in U''' \subset U' \cap U''$

$\rightsquigarrow$ erzeugte Topologie

<u>Definition</u>

- 1. Abzählbarkeitsaxiom: Jeder Punkt hat eine abzählbare Umgebungsbasis
- 2. Abzählbarkeitsaxiom: Es gibt eine abzählbare Basis

(3) Konstruktionen

- Teilraumtopologie: $Y \subset X$

$$\tau|_Y = \{ U \cap Y \mid U \in \tau \}$$

- Produkttopologie: $(X_i)_{i \in I}$

$\rightsquigarrow \prod_{i \in I} X_i$ Basis: $\prod U_i$ mit nur endlich vielen $U_i \neq X_i$

universelle Eigenschaft:

$f: Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ stetig

$\iff$ $\pi_j \circ f: Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ stetig für alle $j \in I$

- Quotiententopologie

Äquivalenzrelation $\sim$ auf X

$\rightsquigarrow$ $X/\sim$ mit Topologie

$$\{ U \subset X/\sim \mid q^{-1}(U) \subset X \text{ offen} \}$$

$$q: X \longrightarrow X/\sim$$

universelle Eigenschaft:

für $f: X \longrightarrow Y$ mit $f(x) = f(y)$, wenn $x \sim y$

existiert genau ein $\bar{f}: X/\sim \longrightarrow Y$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

$\quad\;\, \cong$

$[0,1]/\{0,1\}$

(4) Trennungsaxiome

T_1: Einpunktmengen sind abgeschlossen

Hausdorff: Punkte lassen sich durch offene Mengen trennen $\implies T_1$

regulär: T_1 + Punkte lassen sich von abg. Mengen trennen $\implies$ Hausdorff

normal: T_1 + abgeschlossene Mengen lassen sich voneinander trennen $\implies$ regulär

Satz (Urysohn-Tietze)

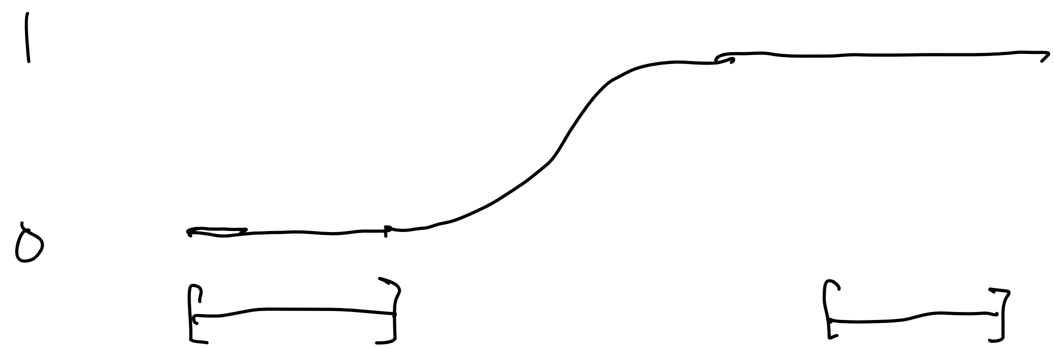
X normal

$\iff$ für abg. disjunkte $A, B \subset X$

existiert $f: X \xrightarrow{\text{stetig}} [0,1]$ mit

$f|_A = 0$

$f|_B = 1$



(5) Zusammenhang + Wegzusammenhang

X zshgd. $\Leftrightarrow \neg\exists\, U,V \subset X$ offen disjunkt

mit $U \cup V = X$

$U,V \neq \emptyset$

X wegzshgd. $\Leftrightarrow$ Je zwei Punkte $x,y \in X$

lassen sich durch ein Weg

$I \to X$ verbinden

$0 \mapsto x$

$1 \mapsto y$

⑥ Kompaktheit

X kompakt $\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung

hat eine endliche Teilüber-

deckung

Satz (Tychonoff)

Beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt.

Hier können wir zeigen

$S^0 \not\cong S^1 \qquad S^1 \not\cong [0,1] \not\cong \mathbb{R}$

Algebraische Topologie

1. Homotopien zwischen stetigen Abbildungen
2. Fundamentalgruppe als Funktor

$$\pi_1 : \mathrm{Top}_* \longrightarrow \mathrm{Grp}$$

$$\pi_1(X,x) = \{ \text{Schleifen } \gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \} / \simeq_{\{0,1\}}$$

π_1 steigt zu einer Homotopie invariante

$$\pi_1 : hTop_* \longrightarrow Grp$$

ab.

(3) Berechnung $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

mit der universellen Überlagerung $\begin{matrix} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{matrix}$

$\pi_1(S^n) = \{e\}$ für $n \geq 2$

(4) Seifert-van Kampen

Unter Voraussetzungen ist

$$\pi_1(U) \underset{\pi_1(U \cap V)}{*} \pi_1(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$$

falls $X = U \cup V$

$S^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$

Seifert-van Kampen berechnet

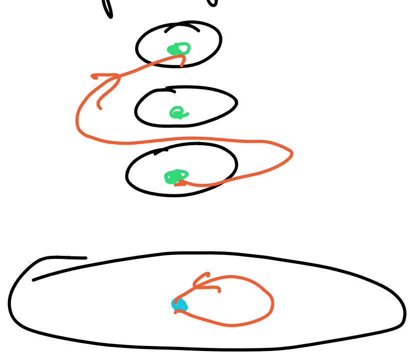
$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus f(S^1))$

5 Überlagerungen

Überlagerung: lokal triviale Abbildung mit diskreten Fasern

Liftungseigenschaften für Überlagerungen

Monodromieoperation



Klassifikation von Überlagerungen mit der Monodromieoperation:

$$\mathrm{fib}_x : \mathrm{Cov}_X \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x)^{op}\text{-Set}$$

Dazu haben wir eine universelle Überlagerung $\begin{array}{c}\tilde{X}\\ \downarrow\\ X\end{array}$ konstruiert: $\pi_1(\tilde{X}) = \{e\}$.

Damit können wir

S^0, S^1, S^2, S^n unterscheiden

aber noch nicht z.B. S^3, S^4

Dafür bräuchten wir z.B. Homologie

$$\tilde{H}_i : h\mathrm{Top}_* \longrightarrow \mathrm{AbGrp}$$

mit $$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} 0 & n \neq i \\ \mathbb{Z} & n = i \end{cases}$$

Dazu mehr in Topologie II