Aufgabe aus der letzten Übung:

(X, d) metrischer Raum

$\Rightarrow \exists$ Urysohn Funktion

A, B abgeschlossen in X

$A \cap B = \emptyset$

Idee: $d(A,B) = \inf\limits_{a \in A} (a, B) = \inf\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} d(a,b)$

$$\begin{array}{c} d(A,B) \\ \parallel \\ \varepsilon = 0 \end{array}$$

$$d(-, A)^{-1}\left(\left[0, \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \supseteq A$$

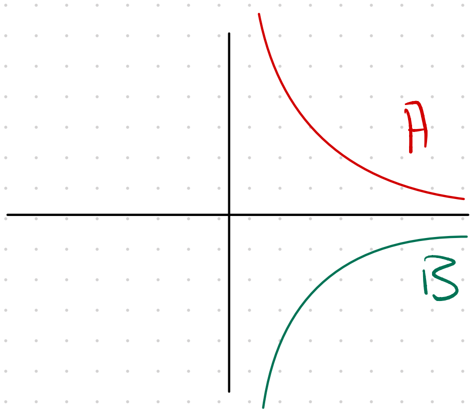
offen in $[0, \infty)$

$$d(-, B)\left((\varepsilon, \infty)\right) \supseteq B$$

$\Rightarrow$ X normal

Achtung: $d(A, B) = 0$

z.B.



Sei (X, d) ein metrisches Raum
A abgeschlossen, K kompakt dh
jede Folge in K $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$
hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$
mit Grenzwert in K.
Angenommen $A \cap K = \emptyset$ $n_1 < n_2 < \dots$

Dann $d(A, K) > 0$:
Beweis: Angenommen $d(A, K) = 0$
dh $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $a_n \in A$ $k_n \in K$
s.d. $d(a_n, k_n) < \frac{1}{n}$

Weil K kompakt, gibt es eine
konvergente Teilfolge $(x_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$
mit Grenzwert $x \in K$.

Weil $A \cap K = \emptyset$ ist $x \notin A$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ s.d.

$$B_\varepsilon(x) \subseteq \underbrace{X - A}_{\text{offen}}$$

Für l groß genug

$$d(a_{n_l}, \cancel{x}) \leq \underbrace{d(a_{n_l}, k_{n_l})}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{d(k_{n_l}, x)}_{< \varepsilon/2}$$
$$< \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad a_{n_\ell} \in B_\varepsilon(x) \subset X - A$

aber $\quad a_{n_\ell} \in A \quad \lightning$

Kompakte Räume

1) In $\mathbb{R}^n$ heißt eine Teilmenge **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
2) In einem metrischen Raum heißt eine Teilmenge K **kompakt**, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge (mit Grenzwert in K) hat.

Achtung: In einem metrischen gilt nicht abgeschlossen & beschränkt $\Rightarrow$ kompakt (siehe Übungen)

F: Wie kann man Kompaktheit in einem topologischen Raum definieren?

Def Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Konkret: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ U_i offen in X

$\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ s.d. $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn sie kompakt ~~mit~~ in der Teilraumtopologie ist.

Bem: Einige Autoren fordern, dass kompakte Räume Hausdorff sind.

Beispiele: 1) Endliche topologische Räume $\#X < \infty$ sind kompakt

2) X mit der kofiniten Topologie ist kompakt: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

Sei $i_0 \in I$ s.d. $U_{i_0} \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $X - U_{i_0}$ ist endlich

$\Rightarrow$ Man kann $X - U_{i_0}$ mit endlich viele U_j $j \in I$ überdecken

3) $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie

$\mathbb{R} = \dots \cup (-2, 0) \cup (-1, 1) \cup (0, 2) \cup \dots$

hat keine endliche Teilüberdeckung.

Lemma 1: Sei X ein topologischer Raum.

(i) X kompakt $\Rightarrow$ $A \subset X$ abgeschlossen ist auch kompakt

(ii) X Hausdorff $\Rightarrow$ Jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen.

Beweis: i) Sei $A \subset X$ abgeschlossen

kompakt

$$A = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad U_i \text{ offen in } A$$

$$= \bigcup_{i \in I} (V_i \cap A) \qquad \text{für } V_i \text{ offen in } X$$

$\Rightarrow$ $X = \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{offen}} \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ ist eine offene Überdeckung von X

X kompakt $\Rightarrow$ Es gibt eine endliche Teilüberdeckung

$$(X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} = X$$

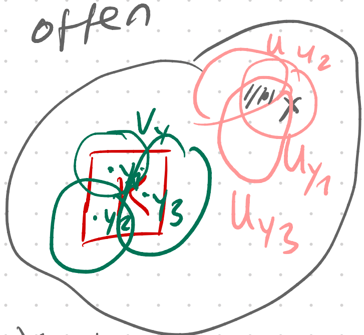
$$\Rightarrow A = \underbrace{(V_{i_1} \cap A)}_{= U_{i_1}} \cup \dots \cup \underbrace{(V_{i_n} \cap A)}_{= U_{i_n}}$$

dh es gibt eine endliche Teilüberdeckung von $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ und A ist kompakt.

ii) $K \subset X$

kompakt   Hausdorff

Wir zeigen, dass K ~~abgeschlossen~~ ist:
$X - K$ offen



Wir zeigen, dass für jedes $x \in X - K$ es eine Umgebung U_x von x gibt mit $U_x \subseteq X - K$ (weil dann $X - K = \bigcup_{x \in X - K} U_x$).

Sei $x \in X - K$
Weil X Hausdorff ist, gibt es für alle $y \in K$ ein $U_y \ni x$, $V_y \ni y$

offen in X

$K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_y$ ist eine offene Überdeckung.

Weil K kompakt ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in K$ s.d.

$V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \supseteq K$

$$x \in \underbrace{U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}}_{\text{offen}} \subseteq X - (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \subseteq X - K$$

Das ist eine offene Umgebung von x enthalten in $X - K$.

$\Rightarrow X - K$ ist offen

Def: Eine Abbildung $f: X \to Y$ (top Räume) heißt abgeschlossen, falls $f(A)$ abgeschlossen ist für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen.

dh „Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen."

$\square$

Bem: Eine stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus

$\Leftrightarrow$ abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ offen.

Lemma 2: Seien X und Y topologische Räume, X kompakt, $f: X \to Y$ stetig.

(i) f surjektiv $\Rightarrow$ Y kompakt

(ii) Y Hausdorff $\Rightarrow$ f abgeschlossen

(iii) Y Hausdorff + f bijektiv $\Rightarrow$ f Homöomorphismus.

Beweis: (i) Sei $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ V_i offen in Y

$$\Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen in } X \text{ weil } f \text{ stetig ist}}$$

X kompakt $\Rightarrow$ $\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$

s.d. $X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n})$

$$Y \overset{f \text{ surj}}{=\!=\!\Rightarrow} Y = \underset{f(f^{-1}(V_{i_1}))}{V_{i_1}} \cup \dots \cup V_{i_n}$$

Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung und X ist kompakt.

ii) $f: X \to Y$ stetig

kompakt (X), Hausdorff (Y)

Wir zeigen, dass f abgeschlossen ist:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen.

Lemma 1(i): Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind abgeschlossen

$\Rightarrow$ A ist kompakt

X kompakt

und $f|_A : A \to f(A)$ ist surjektiv

Lemma 2(i) $\Rightarrow$ $f(A)$ ist kompakt

Lemma 1(ii) $\Rightarrow$ $f(A)$ abgeschlossen

$+ Y$ Hausdorff

Also ist f abgeschlossen. ✓

(iii) $f: X \to Y$ f ist bijektiv + stetig

kompakt (X), Hausdorff (Y)

Außerdem ist f abgeschlossen (ii)
(weil Y Hausdorff)

Bemerkung
$\Rightarrow$ f ist Homöomorphismus

$\square$

Korollar (Lemma 2 (i))
Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt.

Frage: Sind
a) Teilräume — Nein
b) Quotienten — Ja wegen Lemma 2 (i)
c) Produkte — Ja (Satz von Tychonoff)

kompakter Räume wieder kompakt?

Satz (Tychonoff): (nächstes Mal)
Das Produkt kompakter Räume ist kompakt (Produkttopologie).

Korollar (Heine-Borel):
(i) $[0,1]$ ist kompakt
(ii) Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ sie abgeschlossen und beschränkt ist.

<u>Beweis</u>: (i) $X = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ mit der diskreten Topologie ist kompakt

$\Rightarrow$ $X^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} X$ ist kompakt

$\uparrow$
Tychonoff

$\ni (a_1, a_2, \dots)$

(Produkttopologie)
$a_i \in X$

$$f: X^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$$

$$f((a_1, a_2, \dots)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$$

$0{,}999\ldots = 1$ (Wikipedia)

ist surjektiv (Dezimaldarstellung) und stetig.

$\overset{\text{Lemma ? (i)}}{\Longrightarrow}$ $[0,1]$ ist kompakt ✓

(ii) in $\mathbb{R}^m$: kompakt $\Leftrightarrow$ abg + beschränkt

"$\Leftarrow$" Sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt.

Beschränkt heißt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt s.d. $A \subseteq [-n, n]^m$

Translation und Streckung von $[0,1]$

$[-n, n]$ ist kompakt (Translation und Streckung ist Homöomorphismus)

Tychonoff $\Rightarrow$ $[-n, n]^m$ ist kompakt

$\Rightarrow$ A ist kompakt ✓

Lemma 1 (i)
abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen sind kompakt

"$\Rightarrow$" Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.

$\Rightarrow$ K abgeschlossen

Lemma 1 (ii)
$+ \mathbb{R}^m$ Hausdorff

Angenommen K ist nicht beschränkt

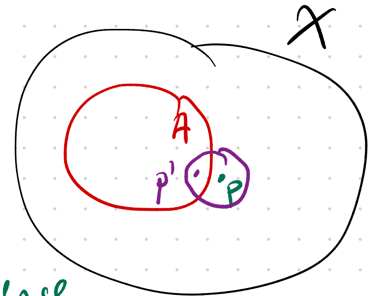
Dann hat

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)$$

keine endliche Teilüberdeckung ↯

$\Rightarrow$ K ist beschränkt. $\square$

Def: Sei X ein topologisches Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Ein ~~Grenzwert~~ Häufungspunkt von A ist ein $p \in X$ s.d. jede Umgebung von p einen Punkt $p' \in A$ enthält, $p' \neq p$.



Satz X kompakt

$\Rightarrow$ Jede unendliche Teilmenge von X hat eine ~~Grenzwert~~ Häufungspunkt.

Beweis: Angenommen $A \subset X$ (kompakt) hat keinen Grenzwert. Wir zeigen, dass A endlich ist.

Behauptung: A ist abgeschlossen

Bew: Angenommen $p \in \overline{A} \setminus A$, dann gilt für jede Umgebung U von p dass $U \cap A \neq \emptyset$

$p' \neq p$

$U \ni p \quad U \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow p \in \overline{A} \subseteq \underbrace{X - U}_{\text{abg}} \not\ni p$ ↯

Das würde aber bedeuten, dass A einen Grenzwert hat, nämlich p.

Für alle $p \in A$, gibt es eine Umgebung U_p von p s.d. $A \cap U_p = \{p\}$
(weil A keinen Grenzwert hat.

$$\Rightarrow \quad X = \underbrace{(X - A)}_{\text{offen}} \cup \bigcup_{p \in A} U_p$$

X kompakt $\Rightarrow \exists\, p_1, \dots, p_n$ s.d.

$$X = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n} \cup (X - A)$$

und
$$A = X \cap A = (U_{p_1} \cap A) \cup \dots \cup (U_{p_n} \cap A) \cup \underbrace{((X - A) \cap A)}_{= \emptyset}$$
$$= \{p_1, \dots, p_n\}$$

Also ist A endlich. $\square$

Kompaktheit in metrischen Räumen

Def Ein topologischer Raum heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Satz Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1) X ist kompakt
2) Jede unendliche Teilmenge hat einen Grenzwert.
3) X ist folgenkompakt.

<u>Bem</u>: Es gibt folgenkompakte Räume, die nicht kompakt sind, und kompakte Räume, die nicht folgenkompakt sind.

<u>Bew</u>: 1) => 2) ✓ siehe oben

2) => 3) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X.

$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

A endlich
=> Es gibt eine konvergente Teilfolge

A unendlich
=> A hat einen Grenzwert $x \in X$

$$A \cap B_{\frac{1}{m}}(x) \ni x_{n_m} \neq x$$

⇝ Teilfolge $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$

weil man $n_m < n_{m+1}$ wählen kann.

Dann konvergiert $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegen x.

✓

$3) \Rightarrow 1)$ $\quad X = \bigcup_{i \in I} U_i \leftarrow$ offen in X

Wir suchen eine endliche Teilüberdeckung.

$$\operatorname{diam} B := \sup \{ d(x,y) \mid x,y \in B \}$$

$B \subset X$

Behauptung 1: (X,d) folgenkompakt $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ s.d. $\forall\, B \subset X$ mit $\operatorname{diam} B < \delta$ ein $i \in I$ existiert s.d. $B \subset U_i$

Bew: Angenommen es gibt kein solches $\delta > 0$.

Also gibt es $C_n \subseteq X$ mit $\operatorname{diam} C_n < \frac{1}{n}$ s.d. $C_n \not\subset U_i \;\forall\, i \in I$

Sei $x_n \in C_n \quad \rightsquigarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Sei $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x.

Sei $U = U_j$ für ein $j \in J$ mit $x \in U$ $\leftarrow$ offen

$\exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(x) \subset U$

Für k groß genug gilt, dass

$$\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad C_{n_k} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

$\lightning$

<u>Beh 2</u>: (X, d) folgenkompakt

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1, \dots, x_m$ s.d.

$$X = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_m)$$

Bew: Angenommen für $\varepsilon > 0$ gibt es keine endliche Überdeckung von ε-Bällen

Wir konstruieren eine Folge induktiv

$x_1 \in X$ beliebig

induktiv: Angenommen wir haben $x_1, \dots, x_n$

$$B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n) \neq X$$

Sei $x_{n+1} \in X - \left(B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)\right)$

Aber dann kann

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben

$\ulcorner$ Ang $x \in X$ ist ein Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$

dann $d(x, x_{n_\ell}) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $\ell, \ell' \geq N$

Aber $d(x_{n_{\ell'}}, x_{n_{\ell'}}) \leq d(x, x_{n_\ell}) + d(x, x_{n_{\ell'}})$

$\vee$ $< \varepsilon$

ε

$\lightning$ $\lrcorner$

folgenkompakt

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$, Wir suchen eine endliche Teilüberdeckung.

Sei $\delta > 0$ wie Behauptung 1

Sei $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$

$\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_m$ s.d. $X = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_m)$

Beh 2

$\operatorname{diam}(B_\varepsilon(x_i)) = 2\varepsilon < \delta$

$\forall i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow \exists j_i \in I$ s.d. $B_\varepsilon(x_i) \subseteq U_{j_i}$

$$X = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_m)$$

$$\subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m} \qquad \square$$