Wiederholung: Gestern Kompaktheit

Def Ein topologischer Raum ist kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Def Ein topologischer Raum ist folgenkompakt wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz (Tychonoff) Ein beliebiges Produkt kompakter Räume ist kompakt.

Satz Ein abzählbares Produkt folgenkompakter Räume ist folgenkompakt.

Beweis Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgenkompakte topologische Räume. Sei $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

X_1: $\pi_1(x_1)$ $\pi_1(x_2)$ $\pi_1(x_3)$ ....

$\{\pi_1(x_m)\}_m$ hat eine konvergente Teilfolge

$\{\pi_1(x_{m_k})\}_k$ $\quad \pi_1(x_{m_k}) \xrightarrow{k} y_1$

X_2: $\pi_2(x_{m_1})$ $\pi_2(x_{m_2})$ $\pi_2(x_{m_3})$ ---

$\{\pi_2(x_{m_k})\}_k$ hat eine konvergente Teilfolge

$\{\pi_2(x_{m_{k_l}})\}_l$ $\quad \pi_2(x_{m_{k_l}}) \xrightarrow{l} y_2$

aber auch $\quad \pi_1(x_{m_{k_l}}) \xrightarrow{l} y_1$

⋮

Induktiv konstruieren wir Teilfolgen:

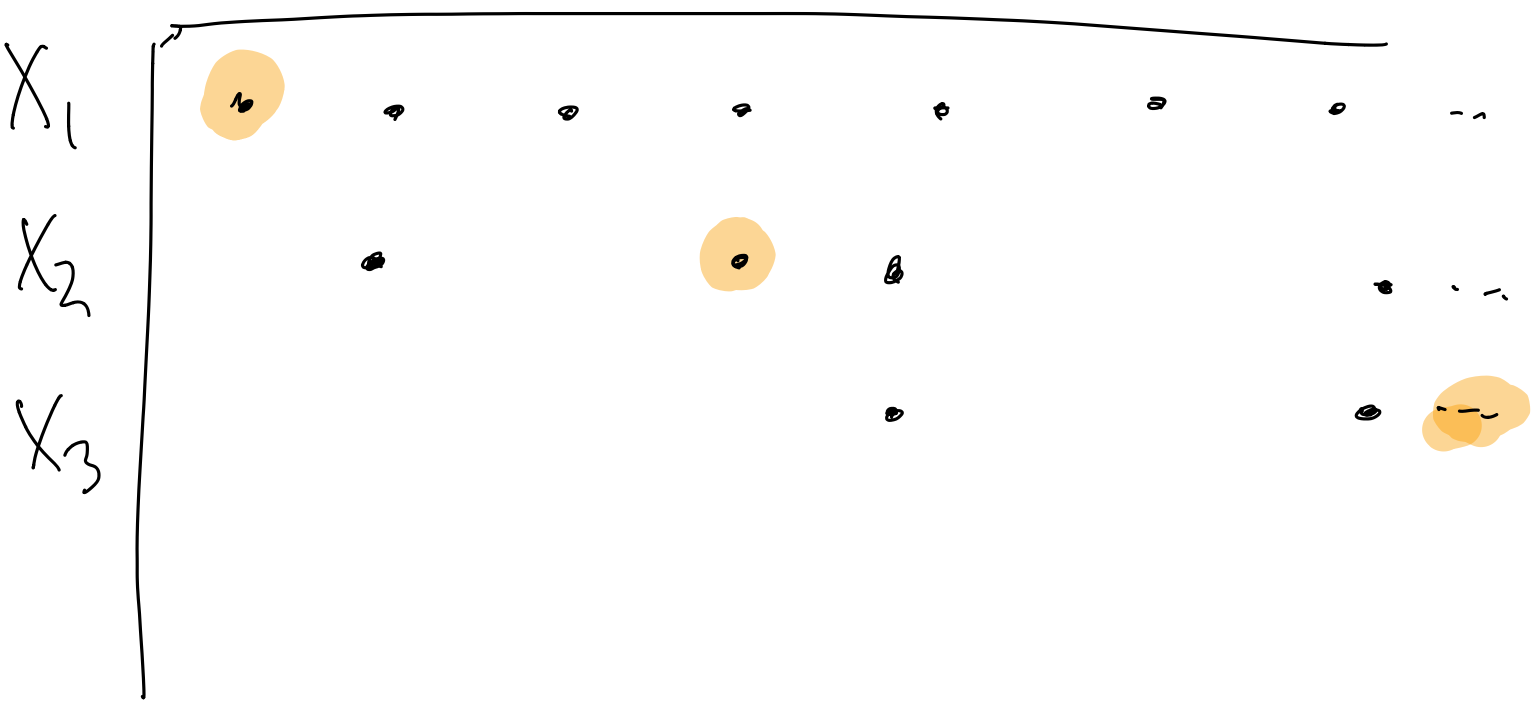
(1) $\{x_k^{(0)}\}$ ist die ursprüngliche Folge

② $\{x_k^{(m)}\}_k$ ist eine Teilfolge von $\{x_k^{(m-1)}\}$ und

$$\pi_m(x_k^{(m)}) \longrightarrow y_m$$

Wir nehmen die Diagonalfolge:

$$\{x_k^{(k)}\}_k$$



① Das ist eine Teilfolge von $\{x_k\}_k$.

② Für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert $\pi_i(x_k^{(k)}) \to x_i$

Das ist der Fall, weil nach $x_i^{(i)}$ ist der Rest eine Teilfolge $x_k^{(i)}$.

<u>Beh.:</u> $\{x_k^{(k)}\}_k$ konvergiert gegen $(y_1, y_2, \dots) = y$

<u>Bew.:</u> Sei $U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ mit nur endlich vielen der U_i verschieden von X_i ein Basiselement mit $y \in U$. Sei etwa $U_n = X_n$ für $n \geq N$.

Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi_i(x_n^{(n)}) \in U_i \text{ für } n \geq M.$$

Aber das heißt $x_n^{(n)} \in \prod_i U_i$ für $n \geq M$. //

$\square$

Filter

Sei $\{x_n\}_n$ eine Folge (in einem metrischen Raum).

Wir betrachten häufig die Mengen

$$\{x_j : j \geq N\}$$

- Die ganze Folge ist von der Form:

$$\{x_j : j \geq 0\}$$

- Diese Mengen sind nie leer.
- $A = \{x_j : j \geq N\}$, $B = \{x_j : j \geq M\}$

$$A \cap B = \{x_j : j \geq \max\{N, M\}\}.$$

Def.: Der Endenfilter eine Folge $\{x_n\}$

in einem topologischen Raum X ist die Familie

$$\{U : U \subset X \,;\ \{x_j : j \geq N\} \subset U \text{ für ein } N\}$$

Def.: Sei X eine Menge. Ein Filter auf X ist eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X mit

1. $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3. Ist $M \in \mathcal{F}$ und $N \supset M$ ist beliebig, dann ist $N \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ heißt Ultrafilter, wenn für jedes $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$

oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Beispiel: • Gegeben eine Menge X und $x \in X$ gibt es den prinzipalen Ultrafilter (fixierten Ultrafilter) $\mathcal{F}_x$:

$$\mathcal{F}_x = \{ U : x \in U \subset X \}$$

① $X \in \mathcal{F}_x$, $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$

② $A \in \mathcal{F}_x, B \in \mathcal{F}_x \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_x$

③ $U \in \mathcal{F}_x$, $N \supset U \Rightarrow N \in \mathcal{F}_x$

④ $M \subset X$: entweder $x \in M$

oder $x \in X \setminus M$

- Der Endenfilter (tails filter) ist ein Filter.
- Gegeben eine unendlich Menge ist
  $$\{U \subset X : X \setminus U \text{ endlich}\}$$
  ein Filter, aber kein Ultrafilter.
- Der Umgebungsfilter von $x \in X$ in einem topologischen Raum X:
  $$N_x = \{M \subset X : \exists\, U \text{ offen in } X \text{ mit } x \in U \subset M\}$$
  ist ein Filter.

<u>Lemma</u> Ein Ultrafilter ist genau ein maximaler Filter, d.h. es sind äquivalent:

(1) $\mathcal{F}$ ist Ultrafilter

(2) Für jeden Filter $\mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

<u>Bew.:</u>

$(1 \Rightarrow 2)$ Gegeben $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ sei $M \in \mathcal{F}'$.

Dann ist entweder $M \in \mathcal{F}$ ✓

oder $X \setminus M \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$

Aber im zweiten Fall wäre

$\emptyset = M \cap (X \setminus M) \in \mathcal{F}'$ ↯

(2 → 1) Sei $\mathcal{F}$ ein maximaler Filter und $\emptyset \neq M \subset X$. Setze

$$S = \{M\} \cup \mathcal{F}$$

Wenn $X \setminus M \notin \mathcal{F}$, so gibt es einen Filter $\mathcal{F}'$ mit $S \subset \mathcal{F}'$; nämlich

$$\mathcal{F}' = \left\{ U \subset X : \exists M_1, \dots, M_n \in S \text{ mit } M_1 \cap \dots \cap M_n \subset U \right\}$$

(der von S erzeugte Filter)

$\ulcorner$ $X \in \mathcal{F}'$ ✓ $\emptyset \notin \mathcal{F}'$

endliche Schnitte ✓

Obermengen ✓ $\lrcorner$

Aber $M \in \mathcal{F}'$, $\underline{\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'}$. Da $\mathcal{F}$

maximal war, ist $F = F'$; also $M \in F$. $\square$

Lemma (Ultrafilter lemma)

Jedes Filter F ist in einem Ultrafilter enthalten.

Beweis Der Beweis beruht ~~Zorn~~'s lemma:

Axiom Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$, d.h.

(i) $x \leq x$

(ii) $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

(iii) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(iv) $m, n \in M$: $m \leq n$ oder $n \leq m$

Angenommen für total geordnete Teilmenge $M \subset X$ gibt es eine obere Schranke $x_{max} \in X$. $m \leq x_{max}$ für alle $m \in M$

Dann existiert ein maximales Element in X.

Betrachte die Menge

$$\left\{ \mathcal{F}' : \begin{array}{l} \mathcal{F}' \text{ ist ein Filter} \\ \text{mit } \mathcal{F}' \supset \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

mit der Halbordnung $\subseteq$.

Sei M eine total geordnete Teilmenge. Dann ist $\bigcup_{\mathcal{F}' \in M} \mathcal{F}'$ ein Filter.

$A, B \in \bigcup \mathcal{F}' \quad A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}''$

und etwa $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$, also $A \in \mathcal{F}''$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}'' \subset \bigcup \mathcal{F}'$

Sei $\mathcal{F}_{max}$ ein maximales Element.

Dann ist $\mathcal{F}_{max}$ ein maximaler Filter:

Ist $\mathcal{F}'$ ein beliebiger Filter mit $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}_{max}$, dann ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, also ist $\mathcal{F}_{max} = \mathcal{F}'$.

Also ist $\mathcal{F}_{max}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält. $\square$

Angenommen $x_n \longrightarrow x$ und $\mathcal{F}$ ist der Endenfilter von $\{x_n\}$:

$$\mathcal{F} = \{ U \subseteq X : \exists N. \ x_n \in U \text{ für alle } n \geq N \}$$

$x_n \longrightarrow x$ heißt für jede <u>offene</u> Menge

$U \subset X$ mit $x \in U$ existiert ein N mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$, d.h. $U \in \mathcal{F}$.

<u>Def.</u>: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem top. Raum X konvergiert gegen ein $x \in X$, falls für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ bereits $U \in \mathcal{F}$ gilt.

<u>Beispiel</u> • $\mathcal{F}_x$ konvergiert gegen x.

<u>Satz</u> Für einen top. Raum X sind äquivalent: (i) X ist kompakt

(ii) Jeder Ultrafilter konvergiert.

<u>Beweis</u>

(i→ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf einem kompakten Raum X. Angenommen $\mathcal{F}$ konvergiert nicht, d.h. es gibt für jeden $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$ mit $U_x \notin \mathcal{F}$. Aber dann ist $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ eine offene Überdeckung. Also existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.

Insbesondere ist $U_{x_i} \notin \mathcal{F}$, also $X \setminus U_{x_i} \in \mathcal{F}$.

$$\Rightarrow \underbrace{(X \setminus U_{x_1}) \cap \dots \cap (X \setminus U_{x_n})}_{\in \mathcal{F}} = X \setminus \bigcup_i U_{x_i} = \emptyset \quad \text{⚡}.$$

(ii→i) Sei $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ eine offene Überdeckung.

Sei $S = \{X \setminus U_i : i \in I\}$

und angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung. Dann sind endliche Schnitte aus S nicht leer:

$$(X \setminus U_{i_1}) \cap \dots \cap (X \setminus U_{i_n}) = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \neq \emptyset.$$

Dann ist $\mathcal{F} = \{U \subset X \mid \exists\, S_1, \dots, S_n \in S$ mit $S_1 \cap \dots \cap S_n \subset U\}$

ein Filter.

Sei $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ein Ultrafilter, der gegen $x \in X$ konvergiert. Dann ist $x \in U_i$ für ein $i \in I$.

Also ist $U_i \in \mathcal{F}'$ aber $X \setminus U_i \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Aber $\emptyset = U_i \cap X \setminus U_i \in \mathcal{F}'$ ist unmöglich.

Also muss es eine endliche Teilüberdeckung geben. $\square$