Übungsblatt 3

Topologie

Viktor Kleen
viktor.kleen@uni-due.de

Sabrina Pauli
sabrinp@math.uio.no

Aufgabe 3.1. Wir definieren auf der Menge $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \coloneqq \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ prim}\} \cup \{0\}$ eine Basis für eine Topologie: Für $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ sei $D(n) = \{p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} : p \nmid n\}$ und

$$\mathcal{B} = \{D(n) : n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis für eine Topologie auf $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist. Die erzeugte Topologie heißt *Zariskitopologie* auf $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

(i) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\{0\}$ dicht in $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist, und folgern Sie daraus, dass $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ nicht Hausdorff sein kann.

Aufgabe 3.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$. Wir definieren eine Funktion $d(\_, A)\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $d(\_, A)$ stetig ist.

(ii) Konstruieren Sie unter der Anname, dass $A \cap B = \emptyset$, eine stetige Funktion $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in B$ gilt.

Aufgabe 3.3.

(i) Sei Y ein topologischer Raum und $\Delta\colon Y \longrightarrow Y \times Y$, $\Delta(x) = (x, x)$ die *Diagonalabbildung*. Zeigen Sie, dass Δ stetig ist, und dass $\Delta(Y) \subset Y \times Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn Y ein Hausdorffraum ist.

(ii) Sei X ein topologischer Raum und $D \subset X$ eine dichte Teilmenge, d. h. $\overline{D} = X$. Sei weiter Y ein Hausdorffraum mit stetigen Funktionen $f, g\colon X \longrightarrow Y$, die auf D übereinstimmen, d. h. wir haben $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$. Ein Hinweis: Schreiben Sie die Menge $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion.

Aufgabe 3.4.

(i) Welche Folgen konvergieren in der diskreten Topologie? Welche Folgen konvergieren in der kofiniten Topologie?

(ii) Konstruieren Sie eine Topologie auf $\mathbb{R}$, in der die Folge $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen jeden der Punkte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergiert, aber nicht gegen 0.

(iii) Finden Sie einen topologischen Raum, in dem Grenzwerte von Folgen eindeutig bestimmt sind, der aber kein Hausdorffraum ist.