МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и управления

КОМОДЕЙ
Владислав Геннадьевич

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Дипломная работа

Руководитель:
Лемешевский С.В.
кандидат физ.-мат. наук,

Допустить к защите
с предварительной оценкой __
«____» _____________ 2017 г.

Минск, 2017

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра математического моделирования и управления

Утверждаю

Заведующий кафедрой ____________ В.И. Белько

«____» _____________ 2017 г.

## ЗАДАНИЕ НА ДИПЛОМНУЮ РАБОТУ

Обучающемуся студенту Комодею В.Г.

1. Тема дипломной работы: Численное решение задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов методом конечных элементов

2. Утверждена приказом ректора БГУ от ________________ № ____

3. Исходные данные к дипломной работе

   - Теория метода конечных элементов.
   - Размещенные в интернете методические материалы.
   - Технические требования к электронным версиям отчетных документов.

4. Перечень вопросов подлежащих разработке или краткое содержание работы

   - Рассмотреть постановку задачи.
   - Разработать приложение для решения.
   - Графически проиллюстрировать процесс решения.

5. Перечень графического материала

   - Логотип БГУ для включения на слайды презентации.
   - Графики иллюстраций.
   - Иллюстрации сравнительного анализа точного и приближенного вычислений.

6. Дата выдачи задания ____________

**Руководитель работы** ________________________С.В.Лемешевский

(Подпись, дата)

**Задание принял к исполнению**__________________________ Комодей В.Г.

(Подпись, дата)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 23 стр., 9 рис., 2 источника, 1 приложение

**Ключевые слова**: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА, КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, FENICS, PYTHON.

**Объект исследования** — задача сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов.

**Цель работы** — численное решение задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов

**Методы исследования** — метод конечных элементов.

**Результатами** являются: вычислительный алгоритм и программа решениия задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов

**Область применения** — приближенное решение дифференциальных уравнений, математическое моделирование процессов, протекающих в разнородных средах.

## РЭФЕРАТ

Дыпломная работа 23 с., 9 мал., 2 крыніцы, 1 дадатак.

**Ключавыя словы** ДЫФЕРЕНЦЫАЛЬНАЕ РАУНАННЕ, ВАРЫЯЦЫЕННАЯ ПАСТАНОУКА, КАНЧАТКОВЫЯ ЭЛЕМЕНТЫ, FENICS, PYTHON.

**Аб'ект даследавання** — задача аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

**Мэта работы** — выліковае рашэнне задачы аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

**Метады даследавання** — метад канчатковых элементау.

**Вынікамі** з'яуляюцца: выліковы алгарытм і праграма рашэння задачы аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

**Вобласць прымяненя** — прыблізнае рашэнне дыферэнцыяльных раунанняу, матэматычнае мадэляванне працэсау якія праходзяць у разнастайных срэдах.

## SUMMARY

Graduate work. 23 p., 9 pic., 2 sources, 1 appendix

**Key words**: DIFFERENCIAL EQUATION, VARIATION SETTING, FINITE ELEMENTS, FENICS, PYTHON.

**Research object**: problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

**Work goal**: numerical solution for problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

**Research methods** – finite elements method.

**Results** – computational algorithm and program for solving problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

**Use area** – solution of difference equations, mathematic process work modeling.

# ВВЕДЕНИЕ

Необходимость рассмотрения сопряжения, когда на одной части области задано уравнение параболического типа, а на другой – уравнение гиперболического типа, была впервые высказана И.М. Гельфандом в 1959 г[ИСТОЧНИК]. К задаче сопряжения приводит изучение электрических колебаний в проводах.

Такого рода задачи встречаются также при изучении движения жидкости в канале, окруженной пористой средой, в теории распространения электромагнитных полей и в ряде других областей физики. Так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде – уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии[ИСТОЧНИК]. При этом на границе канала выполняются некоторые условия сопряжения. Аналогичная ситуация имеет место для магнитной напряженности электромагнитного поля в указанной выше неоднородной среде[3]. Большой интерес представляет изучение влияния вязкоупругих свойств нефти на различные технологические процессы ее добычи. Если рассмотреть совместное движение различных несмешивающихся жидкостей в трещинах и пористых пластах с учетом вязкоупругих характеристик, то движение вязкоупругой и вязкой жидкостей в плоской горизонтальной трещине без учета поверхностных явлений описывается одномерным гиперболическим уравнением и уравнением теплопроводности с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела движущихся жидкостей.

В монографии А.Г. Шашкова[ИСТОЧНИК] строится структуная модель теплопроводности в системе, составленной из теплоизолированных с боковой поверхности ограниченного и полуограниченного стержней, имеющих одинаковую температуру. На свободный конец системы поступает изменяющийся во времени тепловой поток. Температурное поле в ограниченном стержне описывается обычным уравнением теплопроводности, а в полуограниченном - гиперболическим уравнением. Теплофизические свойства стержней различны. В месте соприкосновения стержней имеет место идеальный тепловой поток.

Большой интерес представляет изучение математических моделей, описывающих влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе, при котором возникает необходимость исследования задачи для двух уравнений: уравнения Аллера переноса влаги, предполагающего бесконечную скорость распространения возмущения, и уравнене Лыкова, учитывающего конечную его скорость.

За последние несколько десятилетий в математической литературе появилось значительное количество публикаций, посвященных задачам сопряжения по временной переменной. Достаточно полная библиография по этой теории содержится в монографиях Т.Д. Джураева[ИСТОЧНИК], М. Мамажанова [ИСТОЧНИК]. В приведенных выше работах задачи сопряжения двух уравнений по пространственной переменной в основном изучались для бесконечных или полубесконечных областей.

В настоящей работе решаются задачи о сопряжении гиперболического и параболического уравнений по пространственной переменной в конечных областях.

# 1 Описание постановки задачи сопряжения для уравнения гиперболо параболического типа и методов ее решения

## 1.1 Постановка задачи сопряжения для уравнения гиперболо параболического типа

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ разбивается кривой $\Gamma$ на две подобласти $\Omega_1$ и $\Omega_2$. В области $\Omega_2$ будем рассматривать уравнение параболического типа, а в $\Omega_1$ – уравнение гиперболического типа по $t$. На $\partial\Omega$ задаются граничные условия, на $\Gamma$ – условия сопряжения. Задача формулируется следующим образом, для неизвестной функции $u$:

$$u(x) = \begin{cases} u_1, & x \in \Omega_1 \\ u_2, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = div(k_1(x) grad u_1) + f_1(x,t), \quad x \in \Omega_1,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = div(k_2 grad u_2) + f_2(x,t) \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) дополним граничными условиями Дирихле:

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

На границе раздела задаются условия сопряжения:

$$(k_1(x) grad u_1, \overline{n}) = (k_2(x) grad u_2, \overline{n}), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad x \in \Gamma$$

Также в области $\Omega_1$ задаются начальные условия:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega_1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega_1 \tag{6}$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_2 \tag{7}$$

Пусть $k(x)$:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in \Omega_1 \\ k_2, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Известно, что задача (1) - (7) имеет единственное решение

### 1.2 Введение в метод конечных элементов

Метод конечных элементов(МКЭ) — это численная процедура решения задач, сформулированных в виде дифференциального уравнения или вариационного принципа.[2] МКЭ возник как универсальный метод для решения дифференциальных уравнений. Метод приобрел большую популярность, так как он позволяет анализировать и решать широкий спектр задач.

Метод конечных элементов отличается от классических методов Ритца и Галеркина тем, что аппроксимирующая функция является линейной комбинацией непрерывных кусочно-гладких финитных функций. Финитные функции отличны от нуля только в заданном интервале. В МКЭ под такими интервалами подразумеваются конечные элементы, на которые разбивается область $\Omega$.

Термин метод конечных элементов, в действительности, определяет широкий спектр вычислительных технологий в соответствии с некоторы- ми общими свойствами. Процесс конечно-элементного анализа включает определенную последовательность шагов. Перечислим эти шаги.

1. Дискретизация области: построение сетки, задание свойств (материала) элементов. Область, на которой решается задача, аппроксимируется (покрывается) непересекающимися подобластями простого типа, которые называются конечными элементами (КЭ)(Рисунок 1).

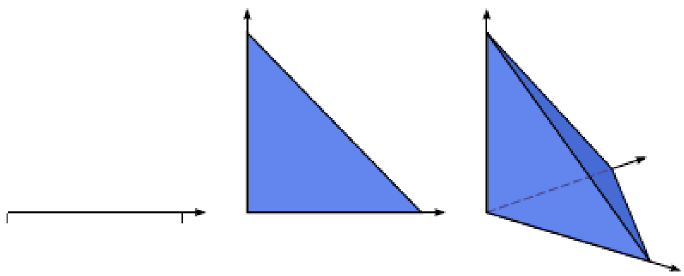

Рисунок 1 – Пример конечно-элементных подобластей для пространств размерности n = 1,2,3

Множество элементов, на которые разбита область, называется конечно-элементной сеткой. Вершины КЭ называются узлами. Узлы предназначены для описания геометрии элемента и для задания компонент решения (неизвестная величина задается в узлах). Узлы могут быть внешними и внутренними. Внешние узлы лежат на границе КЭ и используются для соединения элементов друг с другом. Так же элементы могут располагаться между угловыми узлами. КЭ может иметь и внутренние узлы, такие элементы обеспечивают более точное описание искомых функций.

Компоненты решения в узле называются степенями свободы. В зависимости от рассматриваемых задач число степеней свободы в узле различно. Например, если рассматривается задача теплопроводности, в каждой точке ищется одно значение температуры — одна степень свободы. А если рассматривается двумерная задача упругости относитель но неизвестных перемещений, то число компонент будет равно двум, так как перемещение величина векторная $u = (ux, uy)$. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. Кроме того необходимо задать свойства материала, из которого изготовлена конструкция или КЭ. Например, для изотропных тел при решении задач теории упругости необходимо знать такие константы, как модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, при решении задачи теплопроводно- сти — коэффициент теплопроводности

Как только область разбита на соответствующие подобласти, на каждой такой подобласти можно определить функциональное пространство $V$ и использовать каждое $V$ для определения глобального функционального пространства $V_h$. Подобласть $T$ вместе с определенным на ней функциональным пространством $V$ называется конечным элементом. Более строгое определение:

- Подобласть $T$ - замкнута, с кусочно-гладкой границей
- Область $V(T)$ - конечное функциональное пространство на $T$

2. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений. Например, если задача решается с помощью метода Галеркина (метода взвешенных невязок) форми- руются интегралы от произведения невязки на весовые функции, которые затем приравниваются к нулю. Если решается задача в вариационной по- становке с помощью метода Ритца минимизации функционала, то СЛАУ получается после приравнивания к нулю производных функционала

3. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений.

4. Решение полученной системы уравнений. Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение $u_h$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению в узлах сетки $u_h(x_i, t) = u(x_i, t) = u_i^t$.

5. Определение расчетных величин в элементах. Этими величинами обычно являются производные от неизвестной функции (например, дефор- мации, напряжения, тепловые потоки, скорости).

Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение $\overline{u}$ будет удовле- творять дифференциальному уравнению в узлах сетки $\overline{u}(x_i) = u(x_i) = u_i$

# 2 Поиск решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

## 2.1 Вариационная формулировка задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

<++>

## 2.2 Построение СЛАУ для задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

## 2.3 Апостериорная оценка погрешности для решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

# 3 Вычислительный эксперимент

## 3.1 Описание пакета FEniCS

## 3.2 Построение решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения с помощью пакета FEniCS

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе метода конечных элементов построен вычислительный алгоритм решения задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов. Разработана программа, реализующая построенный алгоритм, использующая возможности вычислительного пакета FEniCS. Проведен вычислительный эксперимент, на основе которога получена апостериорная оценка точности.

1. Корзюк, В.И. Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов / В.И. Корзюк // Диф. ур-ия. – 1968.– Т. 4, №10.– С. 1855-1866.

2. Hughes Thomas J. R., The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis / Hughes Thomas J. R., – Dover Publications, 2012. – 704 c.

3. Anders Logg, Automated Solution of Differencial Equations by the Finite Element Method / Anders Logg, – Rent Publications, 2014. – 600 c.

4. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / Мудров А. Е., – "РАСКО 1991. – 272с.