МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и управления

КОМОДЕЙ
Владислав Геннадьевич

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Дипломная работа

Руководитель:
Лемешевский С.В.
кандидат физ.-мат. наук,

Допустить к защите
с предварительной оценкой __
«____» _____________ 2017 г.

Минск, 2017

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математического моделирования и управления

Утверждаю
Заведующий кафедрой ____________ В.И. Белько
«____» _____________ 2017 г.

ЗАДАНИЕ НА ДИПЛОМНУЮ РАБОТУ

Обучающемуся студенту Комодею В.Г.

1. Тема дипломной работы: Численное решение задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов методом конечных элементов
2. Утверждена приказом ректора БГУ от ________________ № ____
3. Исходные данные к дипломной работе
   - Теория метода конечных элементов.
   - Размещенные в интернете методические материалы.
   - Технические требования к электронным версиям отчетных документов.
4. Перечень вопросов подлежащих разработке или краткое содержание работы
   - Рассмотреть постановку задачи.
   - Разработать приложение для решения.
   - Графически проиллюстрировать процесс решения.
5. Перечень графического материала
   - Логотип БГУ для включения на слайды презентации.
   - Графики иллюстраций.
   - Иллюстрации сравнительного анализа точного и приближенного вычислений.

6. Дата выдачи задания ____________

Руководитель работы ________________________С.В.Лемешевский

(Подпись, дата)

Задание принял к исполнению__________________________ Комодей В.Г.

(Подпись, дата)

ОГЛАВЛЕНИЕ

РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 23 стр., 9 рис., 2 источника, 1 приложение

Ключевые слова: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА, КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, FENICS, PYTHON.

Объект исследования — задача сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов.

Цель работы — численное решение задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов

Методы исследования — метод конечных элементов.

Результатами являются: вычислительный алгоритм и программа решениия задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов

Область применения — приближенное решение дифференциальных уравнений, математическое моделирование процессов, протекающих в разнородных средах.

РЭФЕРАТ

Дыпломная работа 23 с., 9 мал., 2 крыніцы, 1 дадатак.

Ключавыя словы ДЫФЕРЕНЦЫАЛЬНАЕ РАУНАННЕ, ВАРЫЯЦЫЕННАЯ ПАСТАНОУКА, КАНЧАТКОВЫЯ ЭЛЕМЕНТЫ, FENICS, PYTHON.

Аб'ект даследавання — задача аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

Мэта работы — выліковае рашэнне задачы аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

Метады даследавання — метад канчатковых элементау.

Вынікамі з'яуляюцца: выліковы алгарытм і праграма рашэння задачы аб спалучэнні гіпербалічнага і парабалічнага раунання.

Вобласць прымяненя — прыблізнае рашэнне дыферэнцыяльных раунанняу, матэматычнае мадэляванне працэсау якія праходзяць у разнастайных срэдах.

SUMMARY

Graduate work. 23 p., 9 pic., 2 sources, 1 appendix

Key words: DIFFERENCIAL EQUATION, VARIATION SETTING, FINITE ELEMENTS, FENICS, PYTHON.

Research object: problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

Work goal: numerical solution for problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

Research methods — finite elements method.

Results — computational algorithm and program for solving problem about hiperbolic and parabolic equation conjugation.

Use area — solution of difference equations, mathematic process work modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость рассмотрения сопряжения, когда на одной части области задано уравнение параболического типа, а на другой – уравнение гиперболического типа, была впервые высказана И.М. Гельфандом в 1959 г[ИСТОЧНИК]. К задаче сопряжения приводит изучение электрических колебаний в проводах.

Такого рода задачи встречаются также при изучении движения жидкости в канале, окруженной пористой средой, в теории распространения электромагнитных полей и в ряде других областей физики. Так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде – уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии[ИСТОЧНИК]. При этом на границе канала выполняются некоторые условия сопряжения. Аналогичная ситуация имеет место для магнитной напряженности электромагнитного поля в указанной выше неоднородной среде[3]. Большой интерес представляет изучение влияния вязкоупругих свойств нефти на различные технологические процессы ее добычи. Если рассмотреть совместное движение различных несмешивающихся жидкостей в трещинах и пористых пластах с учетом вязкоупругих характеристик, то движение вязкоупругой и вязкой жидкостей в плоской горизонтальной трещине без учета поверхностных явлений описывается одномерным гиперболическим уравнением и уравнением теплопроводности с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела движущихся жидкостей.

В монографии А.Г. Шашкова[ИСТОЧНИК] строится структуная модель теплопроводности в системе, составленной из теплоизолированных с боковой поверхности ограниченного и полуограниченного стержней, имеющих одинаковую температуру. На свободный конец системы поступает изменяющийся во времени тепловой поток. Температурное поле в ограниченном стержне описывается обычным уравнением теплопроводности, а в полуограниченном - гиперболическим уравнением. Теплофизические свойства стержней различны. В месте соприкосновения стержней имеет место идеальный тепловой поток.

Большой интерес представляет изучение математических моделей, описывающих влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе, при котором возникает необходимость исследования задачи для двух уравнений: уравнения Аллера переноса влаги, предполагающего бесконечную скорость распространения возмущения, и уравнене Лыкова, учитывающего конечную его скорость.

За последние несколько десятилетий в математической литературе появилось значительное количество публикаций, посвященных задачам сопряжения по временной переменной. Достаточно полная библиография по этой теории содержится в монографиях Т.Д. Джураева[ИСТОЧНИК], М. Мамажанова [ИСТОЧНИК]. В приведенных выше работах задачи сопряжения двух уравнений по пространственной переменной в основном изучались для бесконечных или полубесконечных областей.

В настоящей работе решаются задачи о сопряжении гиперболического и параболического уравнений по пространственной переменной в конечных областях.

1 Описание постановки задачи сопряжения для уравнения гиперболо параболического типа и методов ее решения

1.1 Постановка задачи сопряжения для уравнения гиперболо параболического типа

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ разбивается кривой Γ на две подобласти Ω_1 и Ω_2. В области Ω_2 будем рассматривать уравнение параболического типа, а в Ω_1 – уравнение гиперболического типа по t. На $\partial\Omega$ задаются граничные условия, на Γ – условия сопряжения. Задача формулируется следующим образом, для неизвестной функции u:

$$u(x) = \begin{cases} u_1, & x \in \Omega_1 \\ u_2, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = div(k_1(x) gradu_1) + f_1(x,t), \quad x \in \Omega_1,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = div(k_2 gradu_2) + f_2(x,t) \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) дополним граничными условиями Дирихле:

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

На границе раздела задаются условия сопряжения:

$$(k_1(x) gradu_1, \overline{n}) = (k_2(x) gradu_2, \overline{n}), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad x \in \Gamma$$

Также в области Ω_1 задаются начальные условия:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega_1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega_1 \tag{6}$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_2 \tag{7}$$

Пусть $k(x)$:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in \Omega_1 \\ k_2, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Известно, что задача (1) - (7) имеет единственное решение

1.2 Введение в метод конечных элементов

Метод конечных элементов(МКЭ) — это численная процедура решения задач, сформулированных в виде дифференциального уравнения или вариационного принципа.[2] МКЭ возник как универсальный метод для решения дифференциальных уравнений. Метод приобрел большую популярность, так как он позволяет анализировать и решать широкий спектр задач.

Метод конечных элементов отличается от классических методов Ритца и Галеркина тем, что аппроксимирующая функция является линейной комбинацией непрерывных кусочно-гладких финитных функций. Финитные функции отличны от нуля только в заданном интервале. В МКЭ под такими интервалами подразумеваются конечные элементы, на которые разбивается область Ω.

Термин метод конечных элементов, в действительности, определяет широкий спектр вычислительных технологий в соответствии с некоторы- ми общими свойствами. Процесс конечно-элементного анализа включает определенную последовательность шагов. Перечислим эти шаги.

1. Дискретизация области: построение сетки, задание свойств (материала) элементов. Область, на которой решается задача, аппроксимируется (покрывается) непересекающимися подобластями простого типа, которые называются конечными элементами (КЭ)(Рисунок 1).

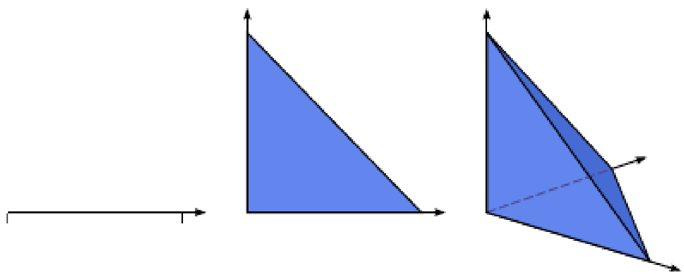

Рисунок 1 – Пример конечно-элементных подобластей для пространств размерности n = 1,2,3

Множество элементов, на которые разбита область, называется конечно-элементной сеткой. Вершины КЭ называются узлами. Узлы предназначены для описания геометрии элемента и для задания компонент решения (неизвестная величина задается в узлах). Узлы могут быть внешними и внутренними. Внешние узлы лежат на границе КЭ и используются для соединения элементов друг с другом. Так же элементы могут располагаться между угловыми узлами. КЭ может иметь и внутренние узлы, такие элементы обеспечивают более точное описание искомых функций.

Компоненты решения в узле называются степенями свободы. В зависимости от рассматриваемых задач число степеней свободы в узле различно. Например, если рассматривается задача теплопроводности, в каждой точке ищется одно значение температуры — одна степень свободы. А если рассматривается двумерная задача упругости относитель но неизвестных перемещений, то число компонент будет равно двум, так как перемещение величина векторная $u = (ux, uy)$. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. Кроме того необходимо задать свойства материала, из которого изготовлена конструкция или КЭ. Например, для изотропных тел при решении задач теории упругости необходимо знать такие константы, как модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, при решении задачи теплопроводно- сти — коэффициент теплопроводности

Как только область разбита на соответствующие подобласти, на каждой такой подобласти можно определить функциональное пространство V и использовать каждое V для определения глобального функционального пространства V_h. Подобласть T вместе с определенным на ней функциональным пространством V называется конечным элементом. Более строгое определение:

- Подобласть T - замкнута, с кусочно-гладкой границей
- Область $V(T)$ - конечное функциональное пространство на T

2. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений. Например, если задача решается с помощью метода Галеркина (метода взвешенных невязок) форми- руются интегралы от произведения невязки на весовые функции, которые затем приравниваются к нулю. Если решается задача в вариационной по- становке с помощью метода Ритца минимизации функционала, то СЛАУ получается после приравнивания к нулю производных функционала

3. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений.

4. Решение полученной системы уравнений. Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение u_h будет удовлетворять дифференциальному уравнению в узлах сетки $u_h(x_i, t) = u(x_i, t) = u_i^t$.

5. Определение расчетных величин в элементах. Этими величинами обычно являются производные от неизвестной функции (например, дефор- мации, напряжения, тепловые потоки, скорости).

Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение $\overline{u}$ будет удовле- творять дифференциальному уравнению в узлах сетки $\overline{u}(x_i) = u(x_i) = u_i$

2 Поиск решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

2.1 Вариационная формулировка задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

$$V = \{u : u_1 : x \in \Omega_1; u_2 : x \in \Omega_2; u = 0, x \in \partial\Omega; \text{выполняются условия сопряжения} \tag{8}$$

$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega), v = 0, x \in \partial\Omega\} \tag{9}$$

Пространство H^1 - пространство Соболева, содержащие такие функции v, что функции v^2 и $||\nabla v||^2$ имеют конечные интегралы по области Ω

Вариационная задача строится следующим образом: домножаем уравнения (1)-(2) на $v \in V$ с обеих сторон и интегрируем их по пространству. Уравнение (1) интегрируем по пространству Ω_1, уравнение (2) интегрируем по пространству Ω_2.
Для преобразования подыинтегральных выражений вида $div(\overline{a})v$ применяем формулу Остроградского:

$$div(\overline{a})v = div(\overline{a}v) - (\overline{a}, gradv)$$

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx = \int\limits_{\Gamma} v(k_1 gradu_1, \overline{n}) dS - \int\limits_{\Omega_1} (k_1 gradu_1, gradv) dx + \int\limits_{\Omega_1} f_1 v dx$$

Применим начальное условие Дирихле (3) и получим:

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx = \int\limits_{\Gamma} v(k_1 gradu_1, \overline{n}) dS - \int\limits_{\Omega_1} (k_1 gradu_1, gradv) dx + \int\limits_{\Omega_1} f_1 v dx \tag{10}$$

$\overline{n}$ - внешняя нормаль к области Ω_1 от границы Γ. Члены вида $(gradu, \overline{n})$

- производные по направлению от границы. Функция v в литературе называется тестовой функцией(Test Function)[3], u - триальной функцией(Trial Function).

Домножим уравнение (2) на тестовую функцию v с обеих сторон, проинтегрируем полученное равенство по области Ω_2 и применим условие, что $v = 0, x \in \partial\Omega$:

$$\int\limits_{\Omega_2} v\frac{\partial u_2}{\partial t} = \int\limits_{\partial\Omega_2} k_2(x)v(gradu_2, \overline{n})dS - \int\limits_{\Omega_2} (k_2(x)gradu_2, gradv)dx + \int\limits_{\Omega_2} f_2 v dx \quad (11)$$

К уравнению (10) прибавим (11), применяя условие сопряжения (4):

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} v dx + \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} v dx = -\int\limits_{\Omega} k(x)(gradu, gradv)dx + \int\limits_{\Omega} f v dx \qquad (12)$$

Таким образом, мы получили уравнение (12) для всей области Ω вместо исходных (1), (2) для Ω_1 и Ω_2. Заметим, что (12) равносильно уравнениям (1)-(2).

Произведем дискретизацию по времени. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей с шагом τ и распишем член $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ по формуле разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} u^n}{\tau} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} \qquad (14)$$

Домножим на v и проинтегрируем начальные условия (6). Получим:

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} v dx = \int\limits_{\Omega_1} \psi v dx \qquad (15)$$

Подставим в (15) выражение (13):

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{u_1^1 - u_1^0}{\tau} v dx = \int\limits_{\Omega_1} \psi v dx$$

После нехитрых преобразований получим конструкцию вида:

$$a(u^1, v) = L(v) \tag{16}$$

Где:

$$a_1(u^{n+1}) = \int\limits_{\Omega_1} u_1 v dx$$

$$L_2(v) = \int\limits_{\Omega_1} \varphi_1 v dx + \tau \int\limits_{\Omega_1} \psi v dx$$

В литературе a называется билинейной формой, а L - линейной формой.

Таким образом мы получили разложение для Ω_1 на первом слое. Теперь мы должны получить соответствующее разложение для Ω_2. Для этого воспользуемся уравнением (12);

$$\int\limits_{\Omega_2} v dx = \int\limits_{\Gamma} k_1(gradu_1^1, \overline{n}) v ds - \int\limits_{\Omega_2} k_2(gradu_2^1, gradv) dx + \int\limits_{\Omega_2} f_2 v_2 dx$$

После преобразований получим окончательное выражение линейной и билинейной формы для первого слоя на Ω_2:

$$a_2(u_2^1, v) = \int\limits_{\Omega_2} v dx + \tau \int\limits_{\Omega_2} k_2(gradu_2^1, gradv) dx$$

$$L_2(v) = \int\limits_{\Gamma} (gradu_1^1, \overline{n}) v dS + \int\limits_{\Omega_2} v dx v dx$$

Проделаем аналогичные преобразования(перенос членов в левую и правые части) для (12):

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega_2} v dx + \tau \int\limits_{\Omega_2} u^{n+1} v dx + \tau^2 \int\limits_{\Omega} k(gradu^{n+1}, gradv) dx \qquad (17)$$

$$L(v) = \int\limits_{\Omega_1} (2u^n - u^{n-1}) v dx + \tau \int\limits_{\Omega_2} u^n v dx + \tau^2 \int\limits_{\Omega} f v dx \qquad (18)$$

2.2 Построение СЛАУ для задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

2.3 Апостериорная оценка погрешности для решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения

3 Вычислительный эксперимент

3.1 Описание пакета FEniCS

3.2 Построение решения задачи сопряжения гиперболо параболического уравнения с помощью пакета FEniCS

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе метода конечных элементов построен вычислительный алгоритм решения задачи сопряжения уравнений гиперболического и параболического типов. Разработана программа, реализующая построенный алгоритм, использующая возможности вычислительного пакета FEniCS. Проведен вычислительный эксперимент, на основе которога получена апостериорная оценка точности.

1. Корзюк, В.И. Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов / В.И. Корзюк // Диф. ур-ия. – 1968.– Т. 4, №10.– С. 1855-1866.

2. Hughes Thomas J. R., The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis / Hughes Thomas J. R., – Dover Publications, 2012. – 704 с.

3. Anders Logg, Automated Solution of Differencial Equations by the Finite Element Method / Anders Logg, – Rent Publications, 2014. – 600 с.

4. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / Мудров А. Е., – "РАСКО 1991. – 272с.