МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

экономический поток

Алгебраические методы в экономике

3 курс, группы 331-332

6 семестр

Лектор, семинарист
д. ф.-м. н., профессор
В.А. Артамонов
«___» ________ 2021 г.

Москва, 2021 г.

Техническая информация

Данный PDF содержит примерную программу по предмету «Алгебраические методы в экономике» 6-ого семестра.

Собрал и напечатал по мотивам лекций студент 3-го курса Конов Марк.

Автор выражает огромную благодарность лектору, семинаристу, доктору ф.-м. наук, доценту, профессору Артамонову Вячеславу Александровичу за прочитанный курс по предмету «Алгебраические методы в экономике».

Добавления и исправления принимаются на почту vkonov2@yandex.ru.

ПРИЯТНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Программа экзамена

1 Описание выпуклых многогранников **6**

2 Теорема отделимости для замкнутого выпуклого множества и замкнутого выпуклого компакта вне него **13**

3 Замкнутость конечно порожденного конуса **16**

4 Теорема отделимости для замкнутого выпуклого конуса и замкнутого выпуклого компакта вне конуса **18**

5 Теорема Фаркаша и ее следствия **19**

6 Теорема фон Неймана **22**

7 Решение игры в чистых стратегиях **25**

8 Приложение теоремы фон Неймана к теории конечных антагонистических игр **27**

9 Внутренние точки полиэдра **29**

10 Грани полиэдров и экстремумы аффинных функций на полиэдрах **32**

11 Грани, их размерность **34**

12 Теорема Фань Цзы **37**

13 Теорема Вейля. Задание многогранников системой аффинных неравенств **39**

14 Симплекс-метод. Выбор главных неизвестных. Связь с вершинами полиэдра. Изменение свободных членов уравнений **42**

15 Изменение системы главных неизвестных. Достаточные условия сходимости симплекс-метода **46**

16 Двойственная задача линейного программирования **48**

17 Совпадение ответов прямой и двойственной задач линейного программирования **50**

18 Теорема о равновесии **52**

19 Матричные игры как задачи линейного программирования. Решение в смешанных стратегиях **53**

20 Критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи в терминах потенциалов **57**

21 Построение первоначального плана. Отсутствие в нем циклов **61**

22 Решение систем уравнений для потенциалов для допустимого плана в невырожденной задаче без циклов **64**

23 Улучшение плана. Существование и единственность пути улучшения плана **65**

24 Отсутствие циклов в улучшенном плане **67**

25 Сходимость алгоритма решения невырожденной транспортной задачи **68**

26 Нормированные векторные пространства и алгебры, примеры. Индуцированные нормы на алгебре матриц **69**

27 Связь нормы матрицы с ее спектральным радиусом **74**

28 Оценка спектрального радиуса для неотрицательной матрицы с помощью элементов матрицы **77**

29 Теорема о с.в. положительной матрицы, для которых собственное значение равно по модулю $\rho(A)$ **81**

30 Одномерность собственного подпространства положительной матрицы A, соответствующего $\rho(A)$ **83**

31 Вычисление $\lim_{m\to\infty}[\rho(A)^{-1}A]^m$ для положительной матрицы A **84**

32 Доказать, что спектральный радиус является простым корнем характеристического многочлена положительной матрицы **86**

33 Для неотрицательной матрицы A $\exists$ неотрицательный собственный вектор, с.з. которого равно $\rho(A)$ **88**

34 Доказать, что неотрицательная матрица A размера n неразложима $\Longleftrightarrow$ матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна **89**

35 Теорема Фробениуса **91**

36 Сходимость $[\rho(A)^{-1}A]^m$ для неотрицательной неразложимой матрицы **93**

Список используемой литературы **95**

1 Описание выпуклых многогранников

Как многогранен этот мир и многолик!
А мы в нем только временные странники...
Мы - путники, пришедшие на миг...
Мы - отражающие вечность многогранники!

– Аллиса Невдомек

Барицентрическая комбинация точек с неотрицательными коэффициентами называется *выпуклой*.

Совокупность выпуклых комбинаций некоторой системы точек M называется их *выпуклой оболочкой* $convM$.

Выпуклая комбинация $m+1$ точки, находящихся в общем положении, называется *m-мерным симплексом*.

Например, одномерный симплекс – это отрезок, двумерный симплекс – это треугольник, трехмерный симплекс – тетраэдр.

Предложение 1.1. *Выпуклая комбинация точек не зависит от выбора внешней точки. Выпуклая комбинация точек n-мерного аффинного пространства совпадает с выпуклой комбинацией не более, чем $n+1$ точек из них.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклую комбинацию точек $A_0, \dots, A_m$, где $m > n$:

$$O + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \overline{OA_j},\ \lambda_j > 0,\ \sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1$$

Так как векторы $A_0A_1, \dots, A_0A_m$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $c_1\overline{A_0A_1} + \dots + c_m\overline{A_0A_m} = 0$. Полагая $A_0A_j = OA_j - OA_0$, получим равенство:

$$\alpha_0\overline{OA_0} + \dots + \alpha_m\overline{OA_m} = 0,\ \alpha_j = \begin{cases} c_j,\ \text{если } j = 1, 2, \dots, m \\ -c_1 - \dots - c_m,\ \text{если } j = 0 \end{cases}$$

Тогда $\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j = 0$. Без ограничения общности можно считать, что некоторое $\alpha_j > 0$. Пусть $\theta = \min\limits_{j:\alpha_j>0}\frac{\lambda_j}{\alpha_j}$. В этом случае $\theta > 0$, причем:

$$O + \sum_{j=0}^{m}\lambda_j\overline{OA_j} = O + \sum_{j=0}^{m}(\lambda_j - \theta\alpha_j)\overline{OA_j}$$

Для положительных α_j имеем $\lambda_j - \theta\alpha_j = \alpha_j\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j} - \theta\right)$. Для отрицательных α_j это неравенство тем более имеет место. При этом хотя бы для одного j справедливо равенство $\lambda_j - \theta\alpha_j = 0$. Кроме того:

$$\sum_{j=0}^{m}(\lambda_j - \theta\alpha_j) = \sum_{j=0}^{m}\lambda_j - \theta\sum_{j=0}^{m}\alpha_j = 1$$

■

Определение 1.1. *Множество точек **выпукло**, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.*

Определение 1.2. *Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее данное множество точек $\{A_0, \dots, A_m\}$ называется **выпуклым замыканием** и обозначается conv$\{A_0, \dots, A_m\}$.*

Теорема 1.1. *Выпуклое замыкание $M =$ conv$\{A_0, \dots, A_m\}$ состоит из всех точек следующего вида:*

$$A = O + \sum_{j=0}^{m}\alpha_j\overline{OA_j},\ \sum_{j=0}^{m}\alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0 \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть A из (1) и

$$B = O + \sum_{j=0}^{m}\beta_j\overline{OA_j} \in M,\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j = 1,\ \beta_j \geq 0$$

Пусть $0 \le \alpha, \beta \le 1$ и $\alpha + \beta = 1$. Тогда:

$$O + \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} = O + \alpha\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\overline{OA_j} + \beta\left(\sum_{j=0}^{m}\beta_j\overline{OA_j}\right) =$$

$$= O + \sum_{j=0}^{m}(\alpha\alpha_j + \beta\beta_j)\overline{OA_j} \in M$$

$$\text{т.к. } \sum_{j=0}^{m}(\alpha\alpha_j + \beta\beta_j) = \alpha\sum_{j=0}^{m}\alpha_j + \beta\sum_{j=0}^{m}\beta_j = \alpha + \beta = 1$$

Следовательно, M – выпуклое множество. Кроме того, $\{A_0, \ldots, A_m\} \in M$.

Покажем обратное включение. Пусть N — выпуклое множество, содержащее $A_0, \ldots, A_m$. Индукцией по m установим, что точка A из (1) в лежит в N.

Если $m = 0$, то $convA_0 = A_0 \in N$.

Пусть $m = 1$. Тогда при $\alpha_0, \alpha_1 \ge 0$ и $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, откуда получаем:

$$A = O + \alpha_0\overline{OA_0} + \alpha_1\overline{OA_1} \in [A_0, A_1] \subseteq N \tag{2}$$

Пусть для случая $m - 1$ утверждение доказано и $m \ge 2$. Возьмем точку A из (1). Можно считать, например, что $1 > \alpha_m > 0$. Тогда:

$$B = O + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\alpha_j}{1 - \alpha_m}\overline{OA_j} \in N \text{ по индукции,}$$

$$\text{т.к. } \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\alpha_j}{1 - \alpha_m} = \frac{1 - \alpha_m}{1 - \alpha_m} = 1$$

При этом как и в (2):

$$A = O + (1 - \alpha_m)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\alpha_j}{1 - \alpha_m}\overline{OA_j} + \alpha_m\overline{OA_m} \in [B, A_m] \subseteq N$$

Следовательно, $M \subseteq N$. ■

Определение 1.3. *Выпуклое замыкание конечного числа точек называется* ***выпуклым многогранником****.*

Теорема 1.2. *В n-мерном евклидовом пространстве выпуклое множество размерности n обладает внутренними точками.*

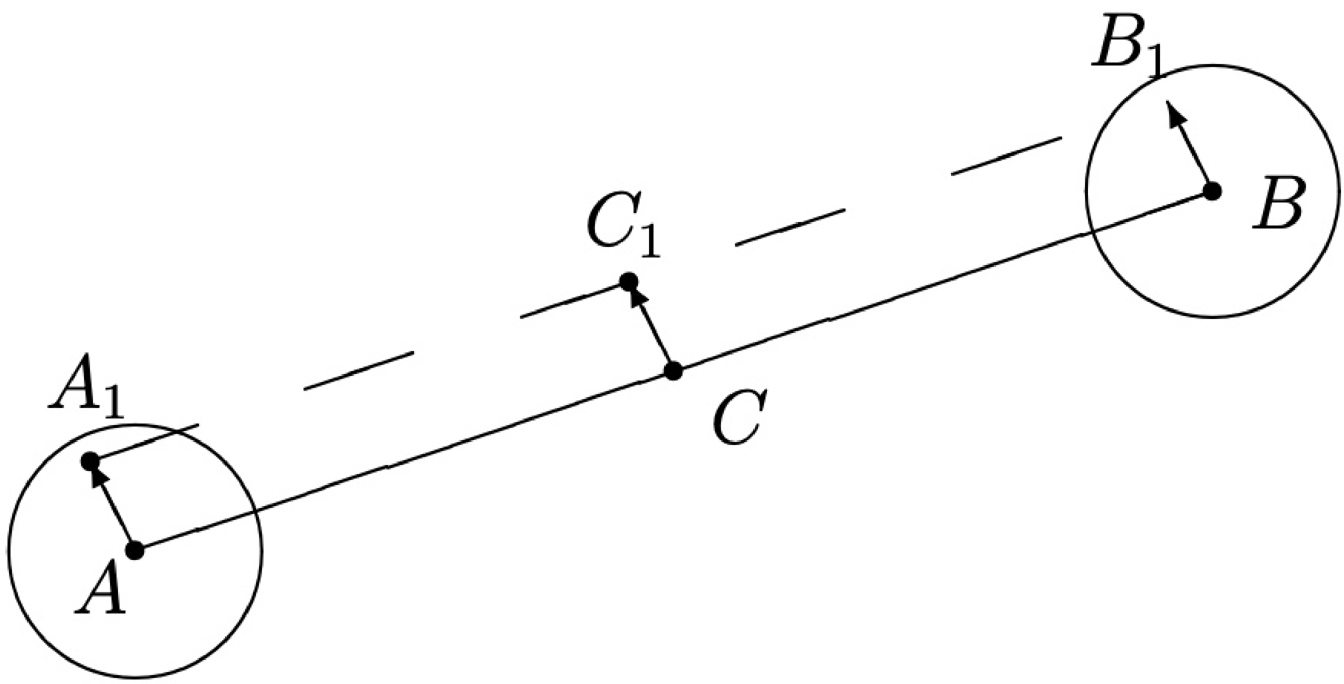
Доказательство. Выпуклое множество размерности n содержит $n+1$ точку в общем положении и, следовательно, в нем лежит порожденный ими n-мерный симплекс, обладающий внутренними точками. ■

Определение 1.4. *Совокупность всех внутренних точек множества* $M \subseteq S$ *называется его внутренностью и обозначается* $intM$*, а совокупность граничных точек — его границей и обозначается* bdM*.*

Определение 1.5. *Множество M, полученное присоединением к M его граничных точек, называется* ***замыканием*** *M. Таким образом,* $\overline{M} = M \cup bdM$*. Множество M замкнуто, если* $M = \overline{M}$*.*

Предложение 1.2. *Внутренность выпуклого множества является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $A, B \in intM$ и $C \in [A, B]$. Покажем, что C является внутренней точкой множества M. Это вытекает из элементарных геометрических соображений. Существует такое $r > 0$, что шары с центрами A и B радиуса r лежат в M.



Пусть C_1 – любая точка, удаленная от C на расстояние $\leq r$. Тогда в упомянутых шарах можно выбрать, соответственно, точки A_1, B_1 так, чтобы выполнялись равенства $\overline{AA_1} = \overline{CC_1} = \overline{BB_1}$. По условию $A_1, B_1 \in M$ и в силу выпуклости множества M справедливо включение $[A_1, B_1] \in M$. Но $C_1 \in [A_1, B_1]$ и потому

$C_1 \in M$. Таким образом, окрестность точки C радиуса r лежит в M, т. е. C – внутренняя точка. Значит, $[A, B] \subseteq intM$ и $intM$ – выпуклое множество.

■

Предложение 1.3. *Замыкание $\overline{M}$ выпуклого множества M является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $A, B \in M$ и:

$$C = O + \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB} \in [A, B],\ \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1$$

Из очевидных соображений для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только точки A_1 и B_1 находятся в δ-окрестности, соответственно, точек A и B, то точка $C_1 = O + \lambda\overline{OA_1} + \mu\overline{OB_1} \in [A_1, B_1]$ лежит в ε-окрестности точки C. По условию точки A_1, B_1 можно выбрать лежащими в M и в силу выпуклости М точка C_1 лежит в М . Итак, в любой окрестности точки С лежат точки из М , поэтому С либо внутренняя, либо граничная точка М. В обоих случаях $C \in \overline{M}$. Нами доказано, что $[A, B] \subseteq \overline{M}$ и, следовательно, $\overline{M}$ – выпуклое множество.

■

Лемма 1.1. *Выпуклое замыкание объединения двух выпуклых множеств M и N совпадает с объединением отрезков, соединяющих пары точек этих множеств:*

$$[M \cup N] = \cup[A, B],\ A \in M, B \in N$$

Доказательство. По теореме 1.1 точка $C \in [M \cup N]$ обладает представлением следующего вида:

$$C = O + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\overline{OA_j} + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\overline{OB_j},\ \lambda_j, \mu_j \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j + \sum_{j=1}^{q}\mu_j = 1,\ A_1, \ldots, A_p \in M,\ B_1, \ldots, B_q \in N$$

Положим:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j \geq 0,\ \mu = \sum_{j=1}^{q}\mu_j \geq 0$$

Тогда $\lambda + \mu = 1$ и:

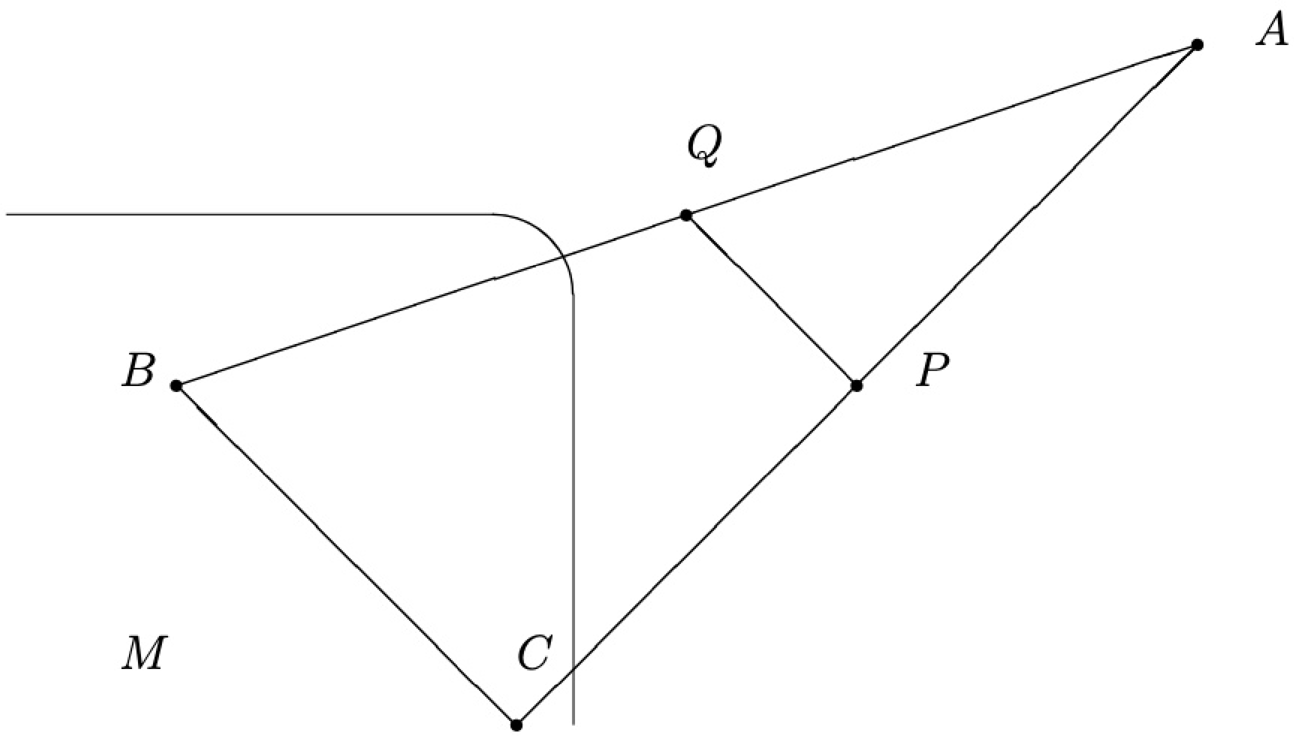
$$A = O + \sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_j}{\lambda}\overline{OA_j},\ B = O + \sum_{j=1}^{q}\frac{\mu_j}{\mu}\overline{OB_j}$$

Следовательно, $C \in [A, B]$, $A \in M$, $B \in N$, поскольку $C = O + \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB}$. ■

Определение 1.6. *Точка выпуклого множества называется* ***угловой****, если она не принадлежит внутренности отрезка, целиком лежащего в этом множестве.*

Следствие 1.1. *Пусть M выпуклое множество и точка $A \notin M$. Тогда A является угловой точкой выпуклого замыкания $[M \cup A]$.*

Доказательство. По лемме 1.1 концы отрезка $[P, Q] \subseteq [M \cup A]$ принадлежат, соответственно, отрезкам: $Q \in [A, B]$, $B \in M$, и $P \in [A, C]$, $C \in M$.



Из треугольника ABC видно, что при любых возможных положениях точек P, Q точка A не принадлежит внутренности отрезка $[P, Q]$. Это рассуждение включает в себя и предельный случай $B = C$. ■

Теорема 1.3. *Выпуклый многогранник совпадает с выпуклым замыканием своих угловых точек.*

Доказательство. Выбросим последовательно те порождающие точки выпуклого многогранника M , которые принадлежат выпуклому замыканию остальных точек. Оставшиеся точки порождают многогранник M, причем по следствию 1.1 каждая из них является угловой. ■

Теорема 1.4. *Выпуклый многогранник является замкнутым множеством.*

Доказательство. Из предложения 1.1 вытекает, что каждая точка выпуклого многогранника M принадлежит симплексу некоторой размерности, целиком лежащему в M, и порождено некоторым множеством угловых точек, находящихся в общем положении. Таким образом, M совпадает с объединением конечного числа симплексов. Но каждый симплекс является замкнутым множеством, и поэтому M – замкнутое множество. ■

2 Теорема отделимости для замкнутого выпуклого множества и замкнутого выпуклого компакта вне него

Проще говоря, отделимость определяетсущность объектов, а локальное воздействие – их поведение.

– Джордж Массер

Теорема 2.1. *Пусть M,N непересекающиеся замкнутые выпуклые подмножества в A_n, причем одно из них компактно. Тогда существует такая аффинная функция f, что $f(x) > 0$ для всех $x \in M$ и $f(y) < 0$ для всех $y \in N$.*

Доказательство. Пусть N компактно. Зафиксируем число $r > 0$ и обозначим через N_r обозначим множество точек $Y \in \mathbb{A}^n$, для которых существует точка $X \in N$, такая, что $\rho(X, Y) \leq r$.

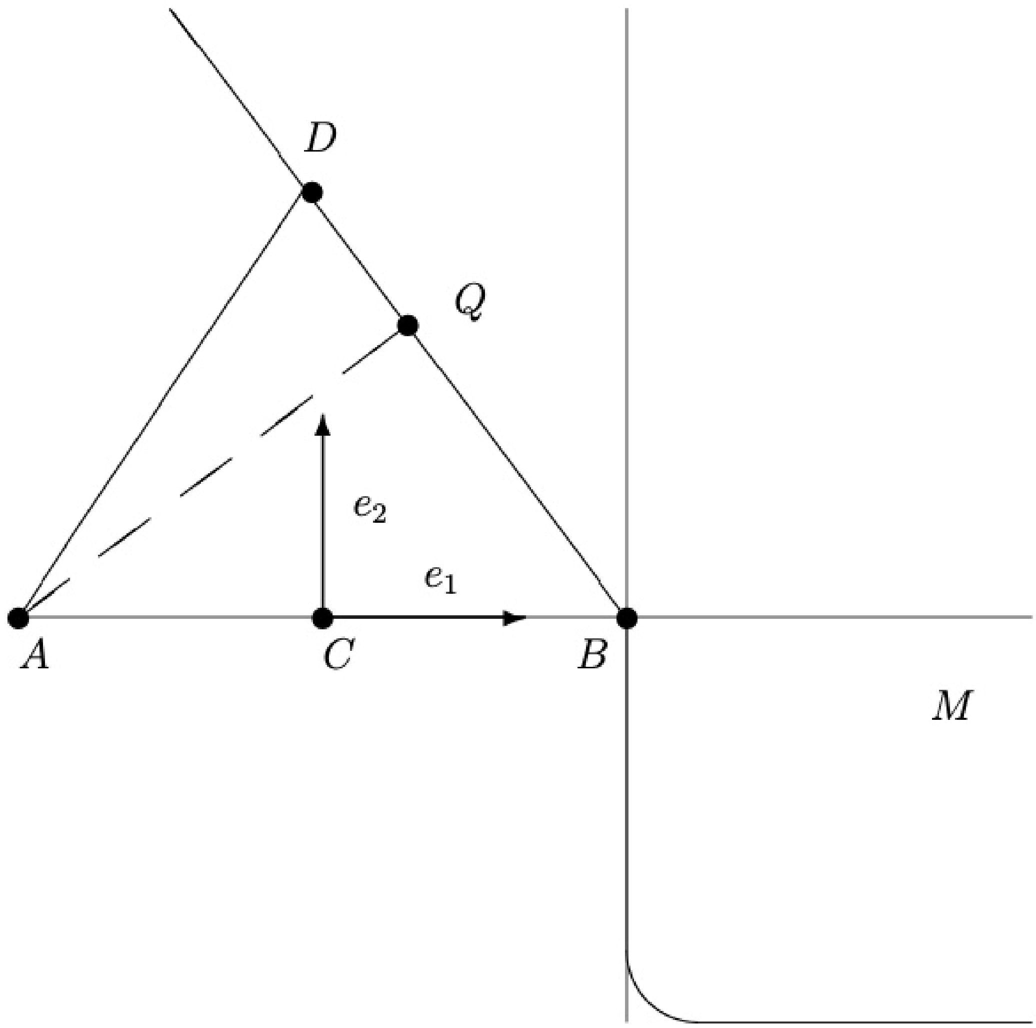
Лемма 2.1. *Множество N_r компактно.*

Доказательство. Так как множество N ограничено, то расстояние между любыми двумя точками из N_r не превосходит$2r+$максимум расстояний между любыми двумя точками из N. Поэтому N_r ограничено.

Пусть задана последовательность $y_n \in N_r$, сходящаяся к y, и соответствующая последовательность $x_n \in N$ такая, что расстояние между x_n и y_n не больше r. В силу компактности переходя к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \to x \in N$. Из непрерывности функции расстояния получаем, что расстояние между x и y не больше r, т.е. $y \in N_r$. ■ Рассмотрим нерперывную функцию $\rho(X, Y)$, где $X \in N$ и $Y \in N_r \cap M$. Поскольку N и $N_r \cap M$ компактны, то функция

$\rho(X,Y)$ достигает минимума на некоторой паре точек $A \in N$ и $B \in M$. Отсюда вытекает, что $\rho(X,Y) \geq \rho(A,B)$ для всех $X \in N$ и $Y \in M$.

Пусть C — середина отрезка [A,B]. Введем в $\mathbb{A}^n$ ортонормированную систему координат $C, e_1, \ldots, e_n$ с началом в точке C, причем $e_1 = \dfrac{\overline{AC}}{||\overline{AC}||} = \dfrac{\overline{AB}}{||\overline{AB}||}$. Зададим аффинную функцию $f(x) = x_1$, где x_1 – первая координата точки x в этой системе координат. Тогда $f(A) = -\frac{r}{2} < 0$. Предположим, что существует такая точка $D \in M$, что $f(D) < \frac{r}{2}$. В этом случае в треугольнике BAD высота, опущенная из D на сторону AB лежит левее B. Это означает, что угол $\angle$DBA острый. Следовательно, основание Q перпендикуляра, опущенного из A на прямую DB, попадает на луч BD с вершиной в B.



Если $Q \in [DB]$, то $Q \in M$ в силу выпуклости M. При этом $||AQ|| < ||AB||$, что противоречит выбору B.

Проводя аналогичные рассуждения с N и функцией $-f$ получаем, что $(-f)|_N > \frac{r}{2}$, откуда $f|_N < 0$. ■

Следствие 2.1. *Если в доказательстве теоремы взять функцию $g = f - \frac{r}{2}$, то $g|_M \geq 0$ и $g|_N < 0$.*

3

Замкнутость конечно порожденного конуса

Взгляд, постоянно обращенный назад, и исключительное, замкнутое общество — начало выражаться в речах и мыслях, в приемах и одежде; новый цех — цех выходцев — складывался и костенел рядом с другими.

– Герцен А.И.

Определение 3.1. ***Конусом*** *K в $\mathbb{A}^n$ с вершиной в $O \in \mathbb{A}^n$ называется множество точек в $\mathbb{A}^n$, обладающее следующим свойством: если $A \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}\lambda \geq 0$, то $O + \lambda\overline{OA} \in K$.*

Предложение 3.1. *Конус K является выпуклым множеством тогда и только тогда, когда вместе с точками $P, Q \in K$ он содержит точку $O + (\overline{OP} + \overline{OQ}) \in K$.*

Доказательство. Пусть K выпуклое множество и $P, Q \in K$. Тогда K содержит точку $O + \left(\frac{1}{2}\overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{OQ}\right)$ и поэтому содержит точку $O + 2\left(\frac{1}{2}\overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{OQ}\right) = O + \left(\overline{OP} + \overline{OQ}\right)$. Обратно, если выполнено указанное условие, то по определению конуса $O + \alpha\overline{OP}$, $O + (1-\alpha)\overline{OQ} \in K$, и поэтому $O + \alpha\overline{OP} + (1-\alpha)\overline{OQ} \in K$, т.е. $[P, Q] \subseteq K$ и конус K выпуклый. ■

Определение 3.2. *Говорят, что конус K с вершиной O* ***порождается точками***

$$A_1, \dots, A_m \tag{3}$$

если он состоит из всех точек вида $O + i\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overline{OA_i}$, где $\lambda_i \geq 0$. Конус K назы-

вается конечнопорожденным, если он порождается некоторым конечным множеством точек.

Предложение 3.2. *Конечнопорожденный конус является замкнутым выпуклым множеством.*

Доказательство. В силу предложения 3.1 конус K является выпуклым. Докажем его замкнутость. Доказательство восходит к доказательству предложения 1.1. Пусть конус K с вершиной в точке O порождается точками (3). Рассмотрим точку:

$$O + \lambda_1 \overline{OA_{i_1}} + \cdots + \lambda_k \overline{OA_{i_k}} \in K,\ \lambda_j > 0 \tag{4}$$

Предположим, что векторы $\overline{OA_{i_1}}, \ldots, \overline{OA_{i_k}}$ линейно зависимы и $\alpha_1 \overline{OA_{i_1}} + \cdots + \alpha_k \overline{OA_{i_k}} = 0$.

Без ограничения общности можно предполагать, что, например, $\alpha_1 > 0$. Выберем индекс t так, чтобы $\theta = \frac{\lambda_t}{\alpha_t}$ было бы минимальным положительным числом среди всех чисел $\frac{\lambda_t}{\alpha_t}$, где λ_t из (4), $\alpha_t > 0$. Тогда в (5) получаем равенство:

$$O + \lambda_1 \overline{OA_{i_1}} + \cdots + \lambda_k \overline{OA_{i_k}} = O + (\lambda_1 - \theta\alpha_1)\overline{OA_{i_1}} + \cdots + (\lambda_k - \theta\alpha_k)\overline{OA_{i_k}}$$

причем все коэффициенты $\lambda_j - \theta\alpha_j \geq 0$, и один из этих коэффициентов равен нулю. Таким образом, точка (4) лежит в конусе, порожденном точками $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{t-1}}$, $A_{i_{t+1}}, \ldots, A_{i_m}$. Отсюда вытекает, что каждая точка из K лежит в некотором конусе $K_{j_1,\ldots,j_s}$, порождаемом точками $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$, причем векторы $e_1 = \overline{OA_{j_1}}, \ldots, e_s = \overline{OA_{j_s}}$ независимы. Дополним эти векторы до базиса $e_1, \ldots, e_n$ всего линейного пространства и возьмем точку O в качестве начала координат. Тогда в этой системе координат конус $K_{j_1,\ldots,j_s}$ задается неравенствами и уравнениями $x_1 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0, x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$. Следовательно, конус K является объединением конечного числа замкнутых конусов вида $K_{j_1,\ldots,j_s}$ и потому конус K замкнут. ■

4 Теорема отделимости для замкнутого выпуклого конуса и замкнутого выпуклого компакта вне конуса

Памятник возвышался в цветах; его пьедестал образовал конус цветов, небывалый ворох, сползающий осыпями жасмина, роз и магнолий.

– Грин Александр

Теорема 4.1. *Пусть K – замкнутый выпуклый конус с вершиной O и N – компактное выпуклое множество, не пересекающееся с K. Тогда существует такая линейная функция g, что $g(x) \geq 0$ для всех $x \in K$, $g(O) = 0$ и $g(y) < 0$ для всех $y \in N$.*

Доказательство. По теореме 2.1 существует ближайшая к А точка $B \in K$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис, и $g = x_1 - \frac{r}{2}$ – аффинная функция, построенная в теореме 2.1 и следствии 2.1. Покажем, что $g(O) = 0$. Пусть это не так, т.е. $g(O) > 0$. Поскольку $g(A) = -r < 0$, то:

$$\cos \angle OBA = \frac{(BO, BA)}{||OB|| \cdot ||BA||} = \frac{g(O) \cdot g(A)}{||OB|| \cdot ||BA||} < 0$$

Таким образом, $\angle OBA > \frac{\pi}{2}$. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из А на прямую ОВ пересекает ее в точке Р, лежащей на луче ОВ, причем точки Р и О лежат на этом луче по разные стороны от В.

Отсюда $\overline{OP} = \lambda \overline{OB}, \lambda > 1$, и поэтому $P \in K$. Но $||AP|| < ||AB||$, что противоречит выбору В. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

5

Теорема Фаркаша и ее следствия

Идея этого неравенства нашего нравилась…

– Достоевский Ф.М.

Определение 5.1. *Система аффинных неравенств*

$$f_1(x) \geq 0, \ldots, f_m(x) \geq 0 \tag{5}$$

называется совместной, если она имеет решение. Говорят, что аффинное неравенство $f \geq 0$ является следствием (5), если для любого $x \in \mathbb{A}^n$, удовлетворяющего (5), выполнено неравенство $f(x) \geq 0$.

Теорема 5.1 (**Фаркаша**). *Аффинное неравенство $f \geq 0$ является следствием совместной системы аффинных неравенств (5) тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа $c_0, \ldots, c_m$, что $f = c_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m$.*

Доказательство. Достаточно показать, что следствие f имеет указанное представление. Зафиксируем систему координат $O, e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{A}^n$. Каждую аффинную функцию $(x) = a_0 + \sum\limits_i a_i x_i$ можно отождествить с точкой $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ из пространства $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}, +)$. Пусть при этом отождествлении функциям

$$f = u_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$$
$$f_i = a_{i0} + a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

соответствуют точки

$$f \to (u_0, u_1, \ldots, u_n)$$
$$f_1 \to (a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n})$$
$$\cdots$$
$$f_m \to (a_{m0}, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

Все функции g, представимые в виде $c_0+c_1f_1+\dots+c_mf_m$, $c_i \geq 0$, образуют конус K в пространстве $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}, +)$ с вершиной в нулевом векторе, порождаемый точками $(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m0}, a_{m1}, \dots, a_{mn}), (1, 0, \dots, 0)$.

Пусть $f \notin K$. По теореме 4.1 существует такая аффинная функция $v(y_0, \dots, y_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i y_i$ на $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}, +)$, что $v(z) \geq 0$ для $z \in K$ и

$$v(u_0, \dots, u_n) < 0 \tag{6}$$

В частности, $v(1, 0, \dots, 0) = v_0 \geq 0$. Предположим сначала, что $v_0 > 0$. Для любого $1 \leq i \leq m$ имеем:

$$f_i(v_0^{-1}v_1, \dots, v_0^{-1}v_n) = v_0^{-1}v(a_{i0}, \dots, a_{in}) \geq 0$$

Так как f является следствием (5), то

$$f(v_0^{-1}v_1, \dots, v_0^{-1}v_n) = v_0^{-1}v(u_0, \dots, u_n) \geq 0$$

Получаем противоречие с (6). Итак, $v_0 = 0$. При этом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \geq 0,\ 1 \leq i \leq m \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j v_j < 0 \tag{8}$$

Так как система неравенств (5) совместна, то существует такая точка $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, что:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i0} + \sum_i a_{ij}x_j \geq 0,\ 1 \leq i \leq m \tag{9}$$

Выберем такое вещественное число $\mu > 0$, что:

$$f(x1 + \mu v_1, \dots, x_n + \mu v_n) = u_0 + \sum_i u_i x_i + \mu \left(\sum_i u_i v_i \right) < 0 \tag{10}$$

Это возможно в силу (8). Для любого $i = 1, 2, \dots, m$ в силу условий (7) и (9) имеем:

$$f_i(x1 + \mu v_1, \dots, x_n + \mu v_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + \mu \left(\sum_j a_{ij} v_j \right) \geq 0$$

что противоречит (10). Но тогда $f \geq 0$ не является следствием (5). Это противоречие показывает, что $f \in K$. ∎

Следствие 5.1. *Система аффинных неравенств (5) несовместна тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа $c_0, \dots, c_m$, что $c_0 > 0$ и $c_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i = 0$.*

Доказательство. Пусть $f_i(x) = a_{i0} + \sum\limits_j a_{ij} x_j$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}$ систему аффинных неравенств $a_{i0}x_0 + \sum\limits_j a_{ij}x_j \geq 0$. Она совместна, поскольку нулевой вектор является ее решением. Для любого решения $(x_0, \dots, x_n)$ этой системы имеем $x_0 \leq 0$. Действительно, если бы $x_0 > 0$, то набор $(x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$ являлся бы решением исходной системы неравенств, что невозможно. Итак, неравенство $-x_0 \geq 0$ является следствием исходной системы неравенств. Поэтому в силу теоремы Фаркаша:

$$-x_0 = c_0' + \sum_i c_i \left(a_{i0}x_0 + \sum_j a_{ij}x_j \right),\ c_0', c_i \geq 0 \tag{11}$$

Полагая в (11) $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0$, получаем $c_0' = 0$. Остается в равенстве (11) положить $x_0 = 1$. ■

Следствие 5.2. *Пусть A – матрица размера $m \times n$, x – столбец неизвестных высоты n и b – столбец свободных членов высоты m. Тогда либо система неравенств $Ax + b \geq 0$ совместна, либо существует такой столбец $c =^t (c_1, \dots, c_m) \geq 0$ высоты m, что ${}^tAc = 0$ и $(b, c) < 0$.*

Доказательство. Пусть:

$$A = (a_{ij}), {}^t b = (b_1, \dots, b_m), {}^t x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$f_i(x) = \sum_j a_{ij}x_j + b_j,\ i = 1, 2, \dots, m$$

Система неравенств $Ax + b \geq 0$ имеет вид $f_1 \geq 0, \dots, f_m \geq 0$. Если эта система несовместна, то существует такой столбец $c =^t (c_1, \dots, c_m) \geq 0$ и положительное число c_0, что:

$$0 = c_0 + \sum_i c_i f_i = c_0 + \sum_i c_i (b_i + \sum_j a_{ij}x_j) =$$

$$= c_0 + \sum_i b_i c_i + \sum_{ij} c_i a_{ij} x_j = c_0 + (b, c) +^t cAx \tag{12}$$

Так как вектор x произволен, то равенство (12) эквивалентно условиям $(b, c) < (b, c) + c_0 = 0$, ${}^tAc = 0$. ■

6 Теорема фон Неймана

И опять в неясную и мутную молитву отчетливо, выпукло, звонко врывалась кощунственная фраза...

– Короленко В.Г.

Предложение 6.1. *Пусть множество точек $T \subseteq \mathbb{A}^n$ – компактно и выпукло, N' – компактное выпуклое множество аффинных функций на $\mathbb{A}^n$. Предположим, что для любой точки $a \in T$ найдется такая функция $f \in N'$, что $f(a) \geq 0$. Тогда существует такая аффинная функция $f_0 \in N'$, что $f_0|_T \geq 0$.*

Доказательство. Обозначим через K – множество всех аффинных функций на $\mathbb{A}^n$, принимающих на T неотрицательные значения. Тогда K является замкнутым выпуклым конусом в линейном пространстве всех аффинных функций.

Лемма 6.1. *Пусть $b \in \mathbb{A}^n$ и $f(b) \geq 0$ для всех $f \in K$. Тогда $b \in T$.*

Доказательство. Если бы $b \notin T$, то по теореме 5.1 существовала бы такая аффинная функция f, что $f|_T \geq 0$ и $f(b) < 0$. Эта функция f принадлежит K. Получается противоречие с условием леммы. ■

Продолжим доказательство предложения. Предположим, что $K \cap N' = \emptyset$. Выберем в $\mathbb{A}^n$ систему координат $O, e_1, \ldots, e_n$. Каждая аффинная функция f представляется в виде $f(x) = a_0 + \sum\limits_i a_i x_i$. По предложению 6.1 существует такая аффинная функция $h(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i z_i$ на пространстве аффинных функций на $\mathbb{A}^n$, что $h(f) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i a_i \geq 0$ для всех $f \in K$ и $h(g) < 0$ для всех $g \in N'$. Так как функция $f = 1$ лежит в K, то $h(1) = b_0 \geq 0$.

Предположим, что $b_0 > 0$. Тогда точка $b = \left(\frac{b_1}{b_0}, \ldots, \frac{b_n}{b_0}\right)$ обладает тем свойством, что $f(b) = \frac{1}{b_0}h(f) \geq 0$ для всех $f \in K$ и поэтому в силу леммы 6.1 получаем $b \in T$. С другой стороны, $g(b) = b_0^{-1}h(g) < 0$ для всех $g \in N'$, что противоречит условиям предложения.

Предположим теперь, что $b_0 = 0$. В этом случае:

$$h(f) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i \geq 0,\ h(g) = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i < 0$$

$$\text{для всех } f = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in K,\ g = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \in N'$$

В частности, $b \neq 0$. Возьмем точку $z = (z_1, \ldots, z_n) \in T$. Для любого $\mu \geq 0$ и любого $f \in K$ получаем:

$$f(z + \mu b) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + \mu \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq 0$$

По лемме 6.1 точка $z + \mu b \in T$ для всех $\mu \geq 0$. Но это противоречит компактности Т, поскольку $b \neq 0$. Следовательно, $K \cap N'$ непусто. ■

Предложение 6.2. *Пусть заданы компактные замкнутые выпуклые подмножества $N \subseteq \mathbb{A}^n$, $M \subseteq \mathbb{A}^m$ и $F(x, y)$ – непрерывная функция, где $x \in N$, $y \in M$. Тогда:*

$$\max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) \leq \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y)$$

Доказательство.

$$F(x, y) \leq \max_{x \in N} F(x, y) \ \Rightarrow\ \min_{y \in M} F(x, y) \leq \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) \leq \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y)$$

■

Теорема 6.1 (**фон Неймана**). *Пусть*

$$F(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j + \sum_i l_i x_i + \sum_j r_j y_j + c$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^m$. Предположим, что заданы компактные замкнутые выпуклые подмножества $N \subseteq \mathbb{A}^n$, $M \subseteq \mathbb{A}^m$. Тогда:

(1) *существуют такие точки $x^* \in N$, $y^* \in M$, что для всех $x \in N$, $y \in M$ выполнены неравенства*

$$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y)$$

(2) $\max\limits_{x \in N} \min\limits_{y \in M} F(x, y) = \min\limits_{y \in M} \max\limits_{x \in N} F(x, y) = F(x^*, y^*)$

Доказательство. Без ограничения общности, меняя константу с можно считать, что $\max\limits_{x \in N} \min\limits_{y \in M} F(x, y) = 0$. По предложению 6.2 имеем:

$$\max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) = 0 \le \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y)$$

Обозначим через N' множество всех аффинных функций вида:

$$h_x(y) = F(x.y),\ y \in M$$

Это множество компактно, замкнуто и выпукло. Из условия $\min\limits_{y \in M} \max\limits_{x \in N} F(x, y) \ge 0$ следует, что для любого $y \in M$ найдется такой $x \in N$, что $h_x(y) \ge 0$. По предложению 6.1 найдется такая точка $x^* \in N$, что $h_{x^*}(y) = F(x^*, y) \ge 0$ для всех $y \in M$. Таким образом:

$$0 = \max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) \ge \min_{y \in M} F(x^*, y) \ge 0$$

откуда $\min\limits_{y \in M} F(x^*, y) = 0$. Значит:

$$0 = \min_{y \in M} F(x^*, y) \le F(x^*, y^*) \le \max_{x \in N} F(x, y^*) = 0$$

Откуда получаем:

$$F(x^*, y^*) = \min_{y \in M} F(x^*, y) = \max_{x \in N} F(x, y^*) = 0$$

При этом:

$$F(x, y^*) \le \max_{x \in N} F(x, y^*) = 0 = F(x^*, y^*) = \min_{y \in M} F(x^*, y) \le 0 = F(x^*, y^*)$$
$$\max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) = 0 \le \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y) \le \max_{x \in N} F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) = 0$$

■

Определение 6.1. *Точка (x^*, y^*) из теоремы фон Неймана называется седловой.*

7 Решение игры в чистых стратегиях

И каждый из этих проектов, основанных на стратегии и тактике, противоречит один другому.

– Толстой Л.Н.

Пусть имеются два игрока: первый — α и второй — β. Развитие игры во времени состоит из нескольких этапов или *ходов*, осуществляемых участниками игры. В нашей терминологии игра заканчивается всегда *выигрышем* первого игрока, выраженным числом. Это число называется *проигрышем* второго игрока. Разумеется, игра может закончится по существу выигрышем второго игрока. В нашей терминологии это будет выражаться тем, что выигрыш первого игрока отрицателен.

Стратегией игрока называется система правил, однозначно определяющая его выбор при производстве каждого отдельного хода в зависимости от ситуации, сложивщейся в игре. Мы рассмотрим лишь игры, в которых каждый из игроков имеет только конечное число стратегий. Предположим, что первый игрок имеет n стратегии $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а второй игрок — m стратегий $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Выигрыш при выборе пары стратегий α_i, β_j обозначим a_{ij}. Эти числа можно свести в матрицу размера $n \times m$, называемую *матрицей игры* или *платежной матрицей*:

	β_1	$\ldots$	β_m
α_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1m}
α_2	a_{21}	$\ldots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_n	a_{n1}	$\ldots$	a_{nm}

Стая себе целью иметь *гарантированный* выигрыш (проигрыш) каждый из игроков может выбрать *оптимальную стратегию.* Если игрок α выбирает стратегию α_i, то он должен рассчитывать на то, что игрок β ответит на нее той стратегией β_j, для которой выигрыш a_{ij} минимален. Таким образом, стратегия α_i гарантирует выигрыш $\psi_i = \min\limits_j a_{ij}$. Следовательно, максимальный выигрыш по всем стратегиям совпадает с $a = \max\limits_i \psi_i = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Положим $a = a_{i_1 j_1}$. Тогда стратегия α_{i_1} оптимальна для игрока α. Какую бы стратегию игрок β не применял, выигрыш будет не меньше a. Аналогично, выбирая стратегию β_j игрок β должен исходить из того, что игрок α ответит на нее стратегией α_i, при которой проигрыш a_{ij} максимален, т. е. стратегия β_j гарантирует проигрыш не выше $\varphi_j = \max\limits_i a_{ij}$. При удачном выборе стратегии проигрыш не превзойдет $b = \min\limits_j \varphi_j = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Если $b = a_{i_0 j_0}$, то стратегия β_{j_0} оптимальна для игрока β. Какую бы стратегию игрок α не применял, проигрыш игрока β будет не больше b.

Заметим, что мы находимся в системе представления, сопровождающих теорему фон Неймана. Действительно, матрица игры определяет функцию двух переменных:

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ F(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$$

При этом $a_{ij} = F(e_i, e'_j)$, где $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_m$ – стандартные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Как отмечено в теореме фон Неймана, имеет место неравенство:

$$b = \min_j \varphi_j = \min_j \max_i a_{ij} \geq a = \max_i \psi_i = \max_i \min_j a_{ij} \tag{13}$$

Применение обоими игроками своих оптимальных стратегий α_{i_1} и β_{j_0} приводит к выигрышу $a_{i_1 j_0}$, при котором выполняются неравенства:

$$b = a_{i_0 j_0} \geq a_{i_1 j_0} \geq a_{i_1 j_1} = a \tag{14}$$

Если неравенство (13) строгое, то оба неравенства (14) также могут быть строгими. Тогда положение, при котором оба игрока применяют свои оптимальные стратегии, может оказать неустойчивым. Например, получив сведение о том, что игрок α применяет оптимальную стратегию, игрок β может ответить стратегией β_{j_1}, что приведет к выигрышу $a_{i_1 j_1} < a_{i_1 j_0}$. В аналогичной ситуации игрок α может ответить стратегией α_{i_0} и получить выигрыш $a_{i_0 j_0} > a_{i_1 j_0}$.

Иное дело, если в (13) имеет место равенство. Элемент $a_{i_0 j_0}$ в этом случае называется *седловой точкой*. Применение оптимальных стратегий обоими игроками теперь устойчиво: если одна из сторон применяет оптимальную стратегию, то для другой невыгодно уклоняться от своей.

8 Приложение теоремы фон Неймана к теории конечных антагонистических игр

В этой игре, по ее бесплотности и страшности, действительно было что-то адово, аидово.

– Цветаева М.И.

В большинстве конечных игр двух лиц седловая точка отсутствует. Применение оптимальных стратегия гарантирует выигрыш, равный a. Возникает вопрос: нельзя ли гарантировать *средний* выигрыш, больший a, если применять не одну, как говорят, *чистую* стратегию, а чередовать стратегии по некоторому вероятностному закону? Таким комбинированные стратегии в теории игр называются *смешанными* стратегиями. Ясно, что чистая стратегия является частным случаем смешанной, когда вероятность выбора одной стратегии равна 1, а остальных — 0. Сейчас мы увидим, что ответ на поставленный вопрос положительный.

Смешанную стратегию первого игрока α будем обозначать строкой $p = (p_1, \ldots, p_n)$, где p_i – вероятность выбора стратегии α_i. Тогда $p_i \geq 0$ и $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Аналогично, смешанную стратегию второго игрока β обозначим строкой $q = (q_1, \ldots, q_m)$, где q_i – вероятность выбора стратегии β_i, то есть $q_i \geq 0$ и $q_1 + \cdots + q_m = 1$. Строки p, q можно рассматривать как координаты точек соответственно n-мерного и m-мерного пространств. Ограничения на p, q показывают, что допустимые значения p,q пробегают симплексы P, Q соответствующих пространств. Выбор i-ой стратегии игроком α и j-ой стратегии игроком β — независимые события. Следовательно, вероятность их наступления равна p_iq_j. Поэтому математическое ожидание выигрыша при применении пары смешанных стратегий p, q равна числу

$$\delta(p,q)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_iq_j=pA^tq \tag{15}$$

где $A=(a_{ij})$ – матрица игры размера $n\times m$. Величина $\delta(p,q)$ линейна по каждому из своих аргументов p,q. Важно отметить, что допустимые значения вектора A^tq являются выпуклым многогранником как образ симплекса при аффинном отображении. Дело в том, что при аффинном отображении выпуклая линейная оболочка векторов переходит в выпуклую линейную оболочку их образов.

Теперь определим гарантированный средний выигрыш и проигрыш игроков α и β и их оптимальные смешанные стратегии. Если игрок α применяет стратегию p, то игрок β выбирает смешанную стратегию, реализующую $\psi(p)=\underset{q\in Q}{\delta}(p,q)$. Тогда гарантированный средний выигрыш игрока α равен $\max\limits_{p\in P}\min\limits_{q\in Q}\delta(p,q)$. Из симметричных соображений, если игрок β выбирает стратегию q, то игрок α ответит на нее стратегией, реализующей $\varphi(q)=\underset{p\in P}{\delta}(p,q)$. Средний проигрыш игрока β не превосходит $\min\limits_{q\in Q}\max\limits_{p\in P}\delta(p,q)$.

По теореме фон Неймана оба числа существуют и равны между собой:

$$\max_{p\in P}\min_{q\in Q}\delta(p,q)=\min_{q\in Q}\max_{p\in P}\delta(p,q) \tag{16}$$

Пусть обе части (15) реализуются на паре смешанных стратегий (p^*,q^*), и $\delta^*=\delta(p^*,q^*)$ – число, равное обеим частям (15). Оптимальные смешанные стратегии p^*, q^* обладают необходимым свойством устойчивости: при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш меняется в направлении, невыгодном отклонившейся стороне. Действительно, переписав неравенства 2) из теоремы фон Неймана, получим соответственно:

$$\delta(p^*,q^*)\geq\delta(p,q^*),\ \delta(p^*,q)\geq\delta(p,q^*)$$

Говорят, что игра имеет решение, если существует пара смешанных стратегий, являющаяся седловой точкой и обладающая сформулированным выше условием устойчивости. Только что доказанные утверждения могут быть коротко сформулированы в виде следующей основополагающей в теории игр теоремы.

Теорема 8.1. *Каждая конечная игра двух лиц имеет решение в области смешанных стратегий.*

9 Внутренние точки полиэдра

Но с более глубокой, внутренней точки зрения сами эти пространства можно рассматривать как внутренний, духовный факт в русской судьбе.

– Бердяев Н.А.

Определение 9.1. ***Полиэдром*** *P называется множество всех точек $x \in \mathbb{A}^n$, удовлетворяющей заданной системе аффинных неравенств (5).*

Иначе говоря, полиэдр – это пересечение конечного числа полупространств.

Размерностью полиэдра P называется размерность наименьшей плоскости, содержащей P . Другими словами, размерность P совпадает с рангом системы векторов $\{\overline{AB}|A, B \in P\}$.

Пусть $f_1, \dots, f_r$ – все аффинные функции из (5), обращающиеся в нуль в точке A. Обозначим через П плоскость, задаваемую уравнениями $f_1 = \dots = f_r = 0$. Гранью Γ_A точки A в P называется пересечение $\Pi \cap P$.

Отметим, что каждая грань является полиэдром, поскольку она задается неравенствами (5) и неравенствами $-f_1 \geq 0, \dots, -f_r \geq 0$.

Определение 9.2. *Вершиной полиэдра называется грань нулевой размерности. Грань размерности 1 называется ребром.*

Теорема 9.1. *Предположим, что полиэдр P задается системой неравенств:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{24}$$

где $b_1, \dots, b_m \geq 0$. *Тогда начало координат* $O = (0, \dots, 0)$ *является вершиной полиэдра* P. *Если* $b_1, \dots, b_m > 0$, *то из* O *выходит ровно* n *ребер.*

Доказательство. Заметим сначала, что точка О удовлетворяет ограничениям (24), поскольку $b_1, \dots, b_m \geq 0$. Кроме того, в грани Γ_O выполнены уравнения $x_1 = \dots = x_n = 0$. Отсюда в силу определения 9.2 получаем первое утверждение.

Пусть $b_1, \dots, b_n > 0$. Зафиксируем индекс $1 \leq i \leq n$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $a_{ji}\varepsilon < b_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда точка $B = (0, ..., 0, \varepsilon, 0..., 0)$, где ε стоит на месте i, удовлетворяет всем ограничениям (24), т. е. $B \in P$. Но координаты точки В удовлетворяют уравнениям $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$. Поэтому грань Γ_B содержит все точки В с достаточно малым $x_i = \varepsilon$ и потому $dim \Gamma_B = 1$. Таким образом, изменяя $i = 1, 2, \dots, n$ получаем n ребер. Так как каждое $b_j > 0$, то вершина О не обращает в равенство ни одно из первых m неравенств в (24). ■

Следствие 9.1. *Пусть полиэдр* M *задается системой уравнений и неравенств:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases} \tag{25}$$

где $b_1, \dots, b_m \geq 0$. *Тогда точка* $C = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ *является вершиной полиэдра* M. *Если* $b_1, \dots, b_m > 0$, *то из* C *выходит* n *ребер.*

Доказательство. Так как $b_1, \dots, b_m \geq 0$, то точка С удовлетворяет всем условиям (25) и потому лежит в М.

Заметим, что при естественной проекции $\mathbb{A}^{n+m}$ на $\mathbb{A}^n$, $(x_1, \dots, x_{n+m}) \to (x_1, \dots, x_n)$, полиэдр М биективно проектируется на полиэдр Р из теоремы 9.1. Остается воспользоваться утверждением теоремы 9.1. ■

Определение 9.3. *Пусть* x *– точка полиэдра* P *и* Π *– наименьшая по включению плоскость, содержащая* P. *Точка* x *называется (относительно) внутренней для* P, *если некоторая ее окрестность в* Π *содержится в* P.

Теорема 9.2. *В непустом полиэдре есть внутренние точки.*

Доказательство. Пусть полиэдр Р имеет размерность s и векторы $\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_s}$ линейно независимы где $A_0, \dots, A_s \in P$. Тогда любая точка:

$$A_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\right) \overline{A_0A_0} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overline{A_0A_i} = A_0 + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overline{A_0A_i},\ \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \geq 0$$

лежит в P по теореме 9.1, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \leq 1$. Более того, эта точка является внутренней, если все $\lambda_i > 0$ при $0 \leq i \leq s$. ∎

10

Грани полиэдров и экстремумы аффинных функций на полиэдрах

В языческом сознании не было непроходимой грани между богами и человеком.

– Бердяев Н.А.

Определение 10.1. ***Полиэдром*** *P называется множество всех точек $x \in \mathbb{A}^n$, удовлетворяющей заданной системе аффинных неравенств (5).*

Иначе говоря, полиэдр – это пересечение конечного числа полупространств.

Размерностью полиэдра P называется размерность наименьшей плоскости, содержащей P . Другими словами, размерность P совпадает с рангом системы векторов $\{\overline{AB} | A, B \in P\}$.

Пусть $f_1, \dots, f_r$ – все аффинные функции из (5), обращающиеся в нуль в точке A. Обозначим через П плоскость, задаваемую уравнениями $f_1 = \dots = f_r = 0$. Гранью Γ_A точки A в P называется пересечение $\Pi \cap P$.

Отметим, что каждая грань является полиэдром, поскольку она задается неравенствами (5) и неравенствами $-f_1 \geq 0, \dots, -f_r \geq 0$.

Определение 10.2. *Вершиной полиэдра называется грань нулевой размерности. Грань размерности 1 называется ребром.*

Предложение 10.1. *Точка $A \in P$ является внутренней точкой грани Γ_A.*

Доказательство. Предположим, что полиэдр P задается неравенствами (5), а грань Γ_A, $A \in P$, задается уравнениями $f_1 = \dots = f_r = 0$. В этом случае $f_{r+1}(A) > 0, \dots, f_m(A) > 0$. Пусть $U \subset \mathbb{A}^n$ – множество всех таких точек $B \in \mathbb{A}^n$, что $f_{r+1}(B) > 0, \dots, f_m(B) > 0$. Тогда U – открытое подмножество в $\mathbb{A}^n$. Если П –

плоскость, задаваемая уравнениями $f_1 = \dots = f_r = 0$, то $U \cap \Pi \subset P$, т. е. A – внутренняя точка Γ_A. ■

Теорема 10.1. *Пусть аффинная функция f достигает экстремума в некоторой внутренней точке полиэдра P. Тогда* $f|_P = const$.

Доказательство. Можно считать, что начало координат O является точкой экстремума f и можно считать, что размерность P совпадает с размерностью всего аффинного пространства. Пусть в некоторой системе координат $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Так как O – точка экстремума, то $a_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(O) = 0$ для любого $j = 1, 2, \dots, m$. Поэтому $f(x) = a_0$. ■

Предложение 10.2. *Пусть f – аффинная функция, принимающая неотрицательные значения на полиэдре P, причем $f(A) = 0$ для некоторой точки $A \in P$. Тогда $f|_{\Gamma_A} = 0$.*

Доказательство. Точка A является внутренней точкой Γ_A по предложению 10.1. Остается воспользоваться теоремой 10.1. ■

Следствие 10.1. *Определение грани полиэдра не зависит от системы неравенств, задающих полиэдр.*

11 Грани, их размерность

Но какая же разница и в средствах и в размерах!

– Добролюбов Н.А.

Предложение 11.1. *Пусть полиэдр P задается системой аффинных неравенств (5), а грань Γ_A, $A \in P$, задается уравнениями $f_1 = \dots = f_r = 0$. Если ранг линейных частей системы функций $f_1, \dots, f_r$ равен k, то $dim\Gamma_A = dimP - k$.*

Доказательство. Можно считать, что все пространство является минимальной плоскостью, содержащей P. Предположим, что ранг линейных частей системы $f_1, \dots, f_r$ равен k, и Π – плоскость, задаваемая системой уравнений $f_1 = \dots = f_r = 0$. Пусть $U \subset \mathbb{A}^n$ – множество всех таких точек $B \in \mathbb{A}^n$, что $f_{r+1}(B) > 0, \dots, f_m(B) > 0$. Тогда $U \cap \Pi \subset \Gamma_A$, причем

$$dim\Gamma_A = dim < U \cap \Pi >= dim\Pi = dimP - k$$

∎

Теорема 11.1. *Пусть полиэдр P задан системой аффинных неравенств (5), и $f_1, \dots, f_r$ не равны тождественно нулю на P, но $f_{r+1}|_P = \dots = f_m|_P = 0$. Обозначим через Π_i гиперплоскость, задаваемую уравнением $f_i = 0$, где $1 \le i \le r$. Тогда $\Pi_i \cap P$ является гранью размерности $dimP - 1$ в P для некоторого i.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что гиперплоскости $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ различны. Пусть A – внутренняя точка в P. По предложению 10.2 $f_1(A) > 0, \dots, f_r(A) > 0$. Переходя к плоскости, порожденной P, можно считать, что эта плоскость совпадает с $\mathbb{A}^n$ и $r = m$. Предположим, что $f_i(x) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Обозначим через B_i проекцию A на Π_i. Как известно:

$$||\overline{AB}|| = \frac{|f_i(A)|}{\sqrt{a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2}} \tag{26}$$

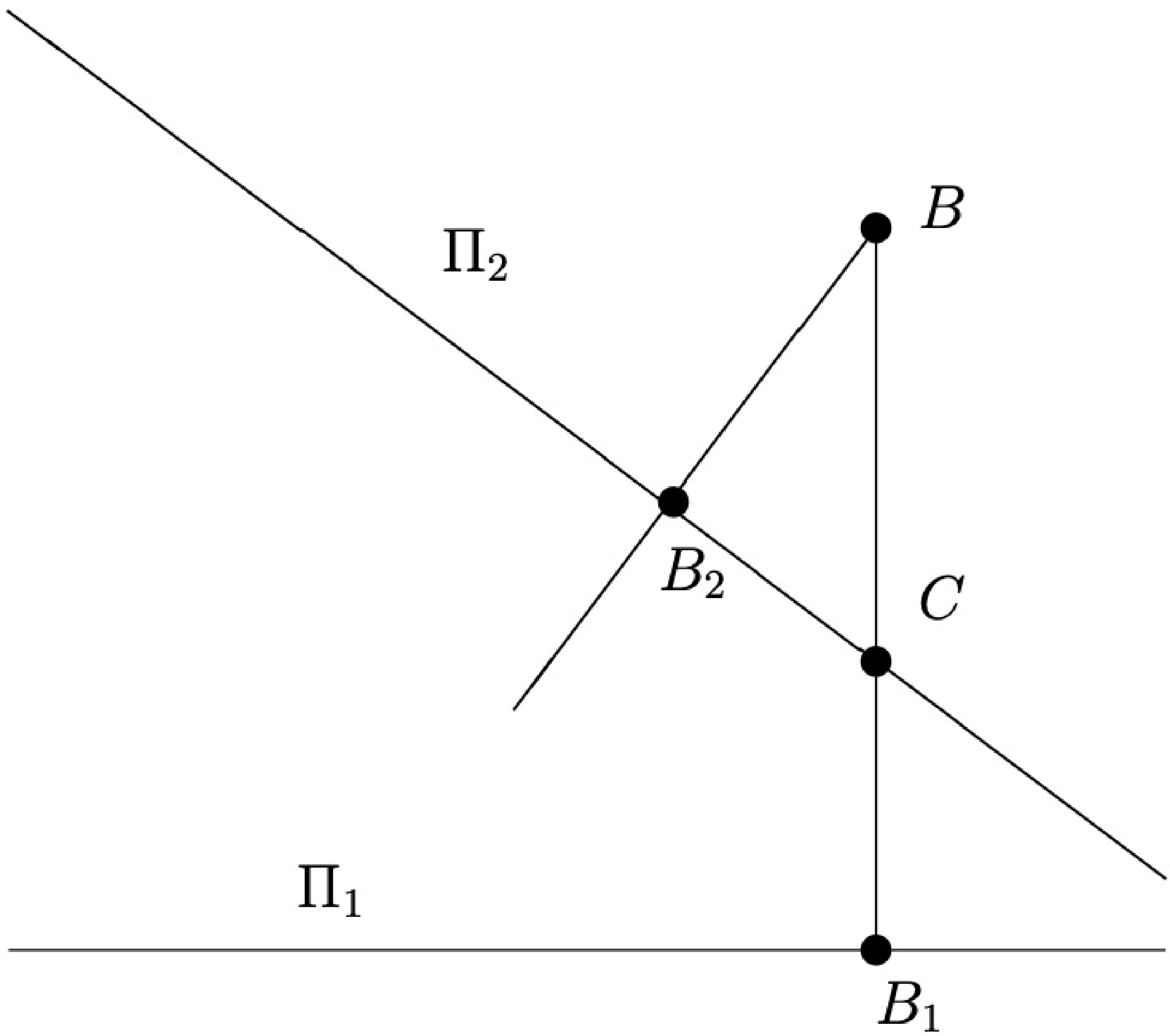
Пусть U – открытый шар в $\mathbb{A}^n$ с центром в точке A, целиком содержащийся в P. По (26) все точки $X \in \mathbb{A}^n$, равноудаленные от различных гиперплоскостей Π_i, Π_j при $i \neq j$ образуют пару гиперплоскостей, задаваемых уравнениями:

$$\frac{|f_i(X)|}{\sqrt{a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2}} = \frac{|f_j(X)|}{\sqrt{a_{j1}^2 + \cdots + a_{jn}^2}}$$

Объединение всех этих гиперплоскостей по всем парам $1 \leq i \neq j \leq n$ не покрывает все U. Следовательно, в U существует такая внутренняя точка B, расстояния от которой до $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ различны. Без ограничения общности можно считать, что $||\overline{BB_1}|| < ||\overline{BB_2}|| < \cdots < ||\overline{BB_r}||$.

Лемма 11.1. *Точка B_1 принадлежит P.*

Доказательство. Пусть $B_1 \notin P$. Тогда существует такое $i = 2, \ldots, n$, что $f_i(B_1) < 0$. Пусть, например, $f_2(B_1) < 0$.



Так как $f_2(B) > 0$, то на интервале (B, B_1) найдется такая точка C, что $f_2(C) = 0$. В этом случае $C \in \Pi_2$, причем $||\overline{BC}|| \geq ||\overline{BB_2}||$. Отсюда $||\overline{BB_1}|| > ||\overline{BC}|| \geq ||\overline{BB_2}||$, что противоречит предположению. ■

Завершим доказательство теоремы. Заметим, что $B_1 \notin \Pi_i$ при $i \geq 2$. Действительно, если $B_1 \in \Pi_i$ и $i \geq 2$, то $||\overline{BB_2}|| \leq ||\overline{BB_1}||$, что неверно. Таким образом, $f_2(B_1) > 0, \ldots, f_n(B_1) > 0$, т.е. $\Gamma_{B_1} = \Pi_1 \cap P$. При этом:

$$dim\Gamma_{B_1} = dim\Pi_1 = n - 1 = dimP - 1$$

■

12 Теорема Фань Цзы

Истинная метода одна: это собственно процесс ее органической пластики; форма, система — предопределены в самой сущности ее понятия и развиваются по мере стечения условий и возможностей осуществления их.

– Герцен А.И.

Теорема 12.1 (**Фань Цзы**). *Пусть полиэдр P размерности s задается в $\mathbb{A}^n$ системой неравенств (5), причем ранг линейных частей $f_1, \dots, f_m$ равен r. Если $A \in P$, то $dim\Gamma_A \geq n-r$ и каждая грань в P размерности $d > n-r$ обладает гранью размерности $d-1$. В частности, $s \geq n-r$, и в P имеется грань размерности s.*

Доказательство. Переходя к новому базису, можно считать, что:

$$f_1 = x_1, \dots, f_r = x_r,\ f_j = \sum_{i \leq r} a_{ji}x_i + c_j,\ j > r$$

Обозначим через U подпространство, задаваемое уравнениями $x_1 = \dots = x_r = 0$.

Пусть $A = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in P$ и $u = (\overbrace{0, \dots, 0}^{r}, u_{r+1}, \dots, u_n) \in U$. Тогда $A + u = (x_1^0, \dots, x_r^0, x_{r+1}^0 + u_{r+1}, \dots, x_n^0 + u_n)$. При этом $x_i^0 \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, r$ и:

$$f_j(A+u) = c_j + \sum_{i \leq r} a_{ji}x_i^0 \geq 0,\ j > r$$

Поэтому $A + U \subseteq P$. Если $f_j(A) = 0$ для некоторого $j > r$, то, аналогично, $f_j(A+U) = 0$, откуда $\Gamma_A \supseteq A + U$, и поэтому $dim\Gamma_A \geq dimU = n - r$.

Пусть Γ_B – грань точки B в P, и $dim\Gamma_B > n - r$. Тогда не все функции $x_1, \ldots, x_r$ тождественно равны нулю на Γ_B. По теореме 11.1 в Γ_B имеется грань размерности $dim\Gamma_B - 1$. ■

Теорема 12.2. *Пусть полиэдр P обладает вершиной и аффинная функция f на P достигает минимума. Тогда этот минимум достигается и в некоторой вершине.*

Доказательство. Пусть $c = \min\limits_P f$ и $f(A) = c$. Тогда A – внутренняя точка грани Γ_A по предложению 10.1. По предложению 10.2 функция f постоянна на Γ_A. Заметим, что Γ_A задается неравенствами, линейные части которых те же, что и в неравенствах, задающих P. Поэтому в силу теоремы Фань Цзы Γ_A имеет грань меньшей размерности, если Γ_A не вершина. Отсюда вытекает утверждение. ■

13 Теорема Вейля. Задание многогранников системой аффинных неравенств

Пол был землею, потолок — небом, а их соединяли, точно могучие древесные стволы, круглые и многогранные колонны.

– Куприн А.И.

Теорема 13.1 (**Вейля**). *Конечнопорожденный конус является полиэдром.*

Доказательство. Пусть конус $K \subseteq \mathbb{A}^n$ с вершиной O порождается точками $A_1, \ldots, A_m$. Можно считать, что $dimK = n$. Пусть O – начало координат и $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $1 \leq j \leq m$. Заметим, что:

$$n = dimK = dim < \overline{OA_1}, \ldots, \overline{OA_m} >= rank \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Предположим, что $B = (b_1, \ldots, b_n) \notin K$. Рассмотрим аффинные функции:

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_t a_{jt}x_t, \ j = 1, 2, \ldots, m \text{ и } g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_t b_t x_t$$

По теореме Фаркаша неравенство $g \geq 0$ не является следствием совместной системы неравенств (5). Следовательно, найдется такая точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{A}^n$, что:

$$f_1(z) \geq 0, \ldots, f_m(z) \geq 0, \ g(z) = a < 0$$

Рассмотрим полиэдр P^0, задаваемый системой неравенств:

$$f_1 \geq 0, \ldots, f_m \geq 0, \ -g + a \geq 0 \tag{28}$$

Полиэдр P^0 непуст, так как он содержит точку z. По теореме Фань Цзы и (27) полиэдр P^0 имеет вершину $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Среди неравенств (28) n линейно независимых функций должны обращаться в нуль. Если n линейно независимых функций среди $f_1, \ldots, f_m$ обращается в точке С в нуль, то в силу определения функций $f_1, \ldots, f_m$, получаем, что точка С – начало координат. В этом случае $-g(C) + a = a < 0$, что невозможно. Итак, только $n-1$ независимая функция среди $f_1, \ldots, f_m$, обращается в нуль. Кроме того, $-g(C) + a = 0$.

Рассмотрим уравнение $h(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$. По построению $n-1$ точка среди $A_1, \ldots, A_m$ удовлетворяет этому уравнению. Для остальных точек A_j получаем $h(A_j) > 0$. Кроме того, $h(B) = g(C) = a < 0$. Итак, плоскость П, задаваемая уравнением $h(x) = 0$ разделяет К и В, причем $\Pi \cap K$ является гранью размерности $n-1$. Тем самым эти грани определяют полупространства, пересечением которых совпадает с К. Эти полупространства связаны с выбором $n-1$ независимой точки среди $A_1, \ldots, A_m$ и проходят через эти точки и начало координат. ■

Теорема 13.2. *Конечнопорожденный многогранник является полиэдром.*

Доказательство. Пусть многогранник М порождается точками:

$$A_1, \ldots, A_m \tag{29}$$

и П – наименьшая плоскость, содержащая М. Можно считать, что $\Pi = \mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}^{n+1}$ и возьмем точку $O \in \mathbb{A}^{n+1}\ \mathbb{A}^n$. Пусть К – конус с вершиной О, порожденный точками (29). Заметим, что множество $K \cap \Pi$ выпукло и содержит точки (29). Следовательно, $M \subseteq K \cap \Pi$. Покажем, что $K \cap \Pi \subseteq M$. Выберем в $\mathbb{A}^{n+1}$ систему координат с началом в О и с базисом $e_0, \ldots, e_n$, причем $e_0 = \overline{OA_1}$ и $< e_1, \ldots, e_n > = < \overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_1A_m} >$. Тогда $\Pi = A_1 + < e_1, \ldots, e_n >$. Рассмотрим точку:

$$A = O + \lambda_1\overline{OA_1} + \cdots + \lambda_m\overline{OA_m} \in K \cap \Pi, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$

Тогда:

$$A = O + \lambda_1\overline{OA_1} + \cdots + \lambda_m\overline{OA_m} = O + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overline{OA_1} + \sum_{i\geq 2}\lambda_i\overline{A_1A_i} \in \Pi =$$

$$= A_1 + < e_1, \ldots, e_n > = O + \overline{OA_1} + < e_1, \ldots, e_n >$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$ и $A \in M$ по предложению 11.1. Итак, $M = K \cap \Pi$. Поэтому M задается неравенствами, определяющими K и уравнениями, определяющими П.

■

14

Симплекс-метод. Выбор главных неизвестных. Связь с вершинами полиэдра. Изменение свободных членов уравнений

Эта задача европейской науки и культуры была неведома Востоку; только с прошлого столетия наиболее чуткие люди стран Азии начали принимать великий научный опыт Европы, ее методы мышления и формы жизнедеятельности.

– Горький Максим

Пусть в n-мерном аффинном вещественном пространстве $\mathbb{A}^n$ системой аффинных неравенств:

$$f_1(x) \geq 0, \ldots, f_d(x) \geq 0 \tag{31}$$

ранга n задан полиэдр M. Кроме того, задана целевая аффинная функция z. Требуется найти минимальное (максимальное) значение функции z на полиэдре M.

Численная реализация симплекс-метода

Определение 14.1. *Задача линейного программирования состоит в нахождении максимума аффинной функции $z(x)$ при условии (31).*

Мы будем предполагать, что ранг системы функций $f_1(x), \ldots, f_d(x)$ равен n. Тогда $d = m + n$, $m \geq 0$. Совершая замену переменных, можно добиться, чтобы

$f_1 = x_1, \dots, f_n = x_n$. Тогда система неравенств имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ y_i = f_{n+i}(x) = \sum\limits_j a_{ij}x_j + b_j \geq 0, \ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{33}$$

Необходимо найти $min z$, где$z = p_1x_1 + \dots + p_nx_n + q$. Изложим алгоритм *симплекс-метода* решения этой задачи.

Симплекс-метод. Первый вариант

Запишем систему неравенств (33) в следующей эквивалентной форме. Так как $y_j \geq 0$, то существуют такие неотрицательные числа $x_{1+n}, \dots, x_{m+n}$, что неравенства (33) преобразуются в систему линейных уравнений и неравенств вида:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \dots, x_d \geq 0, \ d = n + m \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{j+n} = b_j, \ i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Таким образом, меняя обозначения, всегда можно считать, что система ограничений, задающих полиэдр M, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{34}$$

Если в каком-то уравнении из (34) коэффициент $b_i < 0$, то умножим это уравнение на -1. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что $b_1, \dots, b_m \geq 0$. Кроме того, запишем целевую функцию z в виде $z + a_{m+1,1}x_1 + \dots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}$, где $a_{m+1,j} = -p_j, j = 1, 2, \dots, n$, и $b_{m+1} = q$.

Изложим алгоритм решения этой задачи, называемый *симплекс-методом.* Он применим в случае отсутствия вырождения. Это означает, что в полиэдре M, задаваемом неравенствами (34), из каждой вершины выходят $n - r$ ребер (одномерных граней), где r – ранг матрицы (a_{ij}). Это означает, следовательно, что в каждой системе координат, если система неравенств имеет вид (34), выполнено условие $b_1, \dots, b_m > 0$.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ ВЕРШИНЫ ПОЛИЭДРА.

ШАГ 1. Составим матрицу из коэффициентов.

$$\begin{array}{|c|c|c||c|}
\hline
x_1 & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\
\hline
a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,n} & b_{m+1} \\
\hline
\end{array} \qquad (35)$$

ШАГ 2. Если в некотором i-ом уравнении все коэффициентов $a_{ij} \leq 0$, где $i = 1, 2, \dots, m$, то полиэдр M, задаваемый ограничениями (34) пуст. Действительно, в i-ом уравнении левая часть неположительна, а правая равна $b_i > 0$.

ШАГ 3. Пусть в i-ом уравнении коэффициент $a_{ir} > 0$. Зафиксируем столбец с номером r и среди всех положительных коэффициентов этого столбца выберем тот, на котором достигается $\min\limits_{j=1,2,\dots,m}\left(\frac{b_j}{a_{jr}}\right)$. Предположим, что этот минимум достигается на a_{sr}.

Деля s-ое уравнение на a_{sr} можно считать, что $a_{sr} = 1$. Это означает, что все элементы s-ой строки матрицы (35) делятся на a_{sr}. Далее из каждой строки номером $t = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, m+1$ вычитаем s-ую строку, умноженную на a_{tr}. В новой таблице переменная x_r входит с коэффициентом 1 в s-ое уравнение, в остальные же уравнения и в z она входит с нулевым коэффициентом.

Предложение 14.1. *При указанных преобразованиях, все свободные члены уравнений, т.е. коэффициенты b_i, $1 \leq i \leq m$, остаются неотрицательными. Если $\min\limits_{j=1,2,\dots,m}\left(\dfrac{b_j}{a_{jr}}\right)$ достигается на одном элементе a_{sr} из r-го столбца, то все b_i, $1 \leq i \leq m$, остаются положительными.*

Доказательство. Свободный член в t-ой строке имеет вид $b_t - a_{t,r}b_s$. Если $t \leq m$ и $a_{tr} > 0$, то в силу выбора s имеем $\dfrac{b_s}{a_{sr}} = b_s \leq \dfrac{b_t}{a_{tr}}$. Поэтому $b_t - a_{t,r}b_s \geq 0$. Если $\min\limits_{j=1,2,\dots,m}\left(\dfrac{b_j}{a_{jr}}\right)$ достигается на одном элементе a_{sr}, то при $t \neq s$ получаем $b_t - a_{t,r}b_s > 0$.

Если же $a_{t,r} \leq 0$, то $b_t - a_{t,r}b_s \geq b_t > 0$. ■

Таким образом, совершая многократно ШАГ 3 мы можем как в методе Гаусса привести таблицу (35) к ступенчатому виду, т.е. каждое уравнение с номером $j = 1, 2, \dots, m$ является выражением j-го главного неизвестного через свободные. При этом в последней строке ненулевые коэффициенты стоят только при свободных неизвестных.

Придадим свободным неизвестным нулевые значения. В этом случае значения главных неизвестных равны свободным членам и потому положительны. Таким образом, построенное решение X системы лежит в полиэдре M. По следствию 9.1 решение X является вершиной полиэдра M, из него выходят $n-r$ ребер.

Предложение 14.2. *Пусть все коэффициенты* $a_{m+1,1}, \ldots, a_{m+1,n} \geq 0$*, причем если неизвестная* x_j *главная, то* $a_{m+1,j} = 0$*. Тогда в точке* X *функция* $z(x)$ *достигает максимума, равного* b_{m+1}.

Доказательство. Заметим, что $z = z(x) = -a_{m+1,1}x_1 - \cdots - a_{m+1,n}x_n + b_{m+1}$, причем ненулевые коэффициенты стоят только при свободных неизвестных. Это означает, что для любой точки $u \in M$ имеем $z(u) \leq z(X) = b_{m+1}$. Максимальное значение b_{m+1} достигается при нулевых значениях свободных неизвестных. При этом, если главная неизвестная x_j находится в k-ом уравнении, то ее значение равно b_k. ■

Предположим теперь, что $a_{m+1,r} < 0$ для некоторого r. В этом случае переходим ко второму этапу (см. ниже ШАГ 4).

15

Изменение системы главных неизвестных. Достаточные условия сходимости симплекс-метода

Я совершенно озадачен. Вчера, в этот самый момент, когда я думал, что все уже распуталось, найдены все иксы — в моем уравнении появились новые неизвестные.

– Замятин Е.И.

ВТОРОЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ $max\ z$

ШАГ 4. Пусть $a_{m+1,r} < 0$. Рассмотрим коэффициенты при r-ой переменной.

Предложение 15.1. *Если коэффициенты* $a_{1r}, \ldots, a_{mr}$ *матрицы (35) отрицательны, то максимума у функции* z *нет.*

Доказательство. Придадим свободной переменной x_r произвольное значение $k > 0$, а всем остальным свободным переменным придадим нулевое значение. Тогда значение главного неизвестного из i-го уравнения равно $b_i - a_{ir}k > 0$. Таким образом, получаем точку $X(k) \in M$. При этом $z(X(k)) = -a_{m+1,r}k$ принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, функция z не имеет максимума на M. ■

Пусть $a_{m+1,r} < 0$ и $a_{ir} > 0$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, m$. Переходим к ШАГУ 3. Предположим, что у нас были свободные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ и в ШАГЕ 3 мы выбрали элемент a_{sr}, причем в s-ое уравнение с коэффициентом 1 входила главная переменная x_{i_j}. Совершим ШАГ 3 мы заменим x_{i_j} на другую главную переменную x_s. Тем самым получим новую систему главных переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j-1}}, x_s, x_{i_{j+1}}, \ldots, x_{i_m}$.

Предложение 15.2. *При применении ШАГА 3 значение свободного члена* b_{m+1} *увеличивается.*

Доказательство. Как и в предложении 14.1 свободный член в z заменяется на $b_{m+1}-a_{m+1,r}b_s$ для некоторого s. Но $a_{m+1,r}<0$, а $b_s>0$. Поэтому $b_{m+1}-a_{m+1,r}b_s>b_{m+1}$. ■

Итак, мы совершаем различные выборы свободных и главных переменных, т.е. получаем вершины из M. При этом мы никогда не вернемся к выбранной ранее вершине, поскольку на каждом шаге значение целевой функции z увеличивается. Итак, совершив конечное число шагов, мы перейдем к вершине M, в которой функция z достигает максимума, либо выясним, что задача не имеет решения.

16 Двойственная задача линейного программирования

Мы, провинциалы, — да впрочем одни ли мы? — имеем о «жизни» представление несколько двойственное.

– Салтыков-Щедрин М.Е.

Рассмотрим задачу линейного программирования из определения 14.1. Без ограничения общности, заменяя коэффициенты p_i, a_{ij} на противоположные числа, можно считать, что $z = -p_1x_1 - \ldots - p_nx_n$. Положим $p =^t (p_1, \ldots, p_n)$, $x =^t (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $z = -^tpx$, где ^tpx - произведение ^tp и x как матриц. Имеем:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j + b_j,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Пусть ранг матрицы $(-a_{ij})$ размера $m \times n$ равен r, и, например, линейные (однородные) части $g_1, \ldots, g_r$ линейно независимы. Совершая замену переменных, можно считать, что $g_1 = x_1, \ldots, g_r = x_r$, причем

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{r}(-a_{ij})x_j + b_j,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Обозначим через b – столбец $^t(b_1, \ldots, b_m)$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что без ограничения общности можно предполагать, что $r = n$ и неравенства имеют вид:

$$x \geq 0,\ Ax \leq b \tag{40}$$

где $A = (a_{ij}) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$. При этом необходимо найти $\min z$, т.е. найти:

$$\max(^tpx) \tag{41}$$

Определение 16.1. *Двойственной задачей к задаче (40), (41) называется задача нахождения* $\min^t b_y$, *где* $y =^t (y_1, \dots, y_m)$, *при условии*

$$^t Ay \geq p,\ y \geq 0 \tag{42}$$

Предложение 16.1. *Двойственная задача к двойственной задаче совпадает с исходной задачей.*

Доказательство. В двойственной задаче имеем $(-^t A)y \leq -p,\ \ y \geq 0$, причем необходимо найти $\max(-^t by)$. Поэтому задача, двойственная к двойственной, имеет вид $(-A)x \geq -b$, $x \geq 0$, причем необходимо найти $\min(-^t px)$, т.е. $\max(^t px)$.

■

17 Совпадение ответов прямой и двойственной задач линейного программирования

О, я согласен, что совокупность фактов, совпадение фактов действительно довольно красноречивы.

– Достоевский Ф.М.

Предложение 17.1. *Пусть $x \in P$, $y \in Q$. Тогда ${}^tpx \leq {}^t by$. В частности $\max\limits_{x \in P}({}^tpx) \leq \min\limits_{y \in Q}({}^tby)$.*

Доказательство. Пусть $x \in P, y \in Q$. Тогда ${}^tpx \leq {}^t yAx \leq {}^t yb = {}^t by$. Отсюда $\max\limits_{x \in P}({}^tpx) \leq \min\limits_{y \in Q}({}^tby)$. ■

Теорема 17.1. *Пусть полиэдры P, Q непусты. Тогда существуют $\max\limits_{x \in P}({}^tpx)$, $\min\limits_{y \in Q}({}^tby)$ и они равны.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+m} = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{A}^n, y \in \mathbb{A}^m\}$ полиэдр M, задаваемый неравенствами:

$$\begin{cases} Ax \leq b, \ {}^tAy \geq p \\ {}^tpx \geq {}^t by, \ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases} \tag{43}$$

Неравенства (43) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & {}^tA \\ {}^tp & -{}^tb \\ E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{44}$$

Предположим сначала, что система неравенств (44) несовместна. По второму следствию из теоремы Фаркаша существуют такие неотрицательные векторы $c_1, c_4 \in \mathbb{R}^m$, $c_2, c_5 \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательное число c_3, что:

$$\begin{pmatrix} -{}^tA & 0 & p & E_n & 0 \\ 0 & A & -b & 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} {}^tb & -{}^tp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} < 0$$

Это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} {}^tAc_1 = pc_3 + c_4 \geq pc_3 = 0,\ Ac_2 = bc_3 - c_5 \leq bc_2 \\ {}^tbc_1 <^t pc_2,\ c_i \geq 0 \end{cases} \tag{45}$$

Если $c_3 = 0$ и $x_0 \in P,\ y_0 \in Q$, то:

$$\begin{aligned} {}^tbc_1 =^t c_1 b \geq^t c_1 A x_0 =^t x_0^t A c_1 \geq^t x_0 p c_3 = 0 \\ {}^tpc_2 =^t c_2 p \leq^t c_2^t A y_0 =^t y_0 A c_2 \leq^t y_0 b c_3 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда ${}^tpc_2 \leq 0 \leq^t bc_1$, что противоречит (45).

Итак, $c_3 > 0$. По (45):

$${}^tA\left(\frac{c_1}{c_3}\right) \geq p,\ A\left(\frac{c_2}{c_3}\right),\ {}^tbc_1 <^t pc_2,\ c_i \geq 0$$

В этом случае:

$$\frac{c_2}{c_3} \in P,\ \frac{c_1}{c_3} \in Q,\ {}^tp\frac{c_2}{c_3} >^t b\frac{c_1}{c_3}$$

что противоречит предложению 17.1.

Таким образом, полиэдр M непуст. Пусть $(x', y') \in M$. В этом случае $x' \in P, y' \in Q$, причем ${}^tpx' \geq^t by'$. Отсюда ${}^tpx' =^t by'$ по предложению 17.1, и для любого $x \in P$ получаем ${}^tpx \leq^t by' =^t px'$, т.е. $\max\limits_{x \in P} {}^tpx =^t px'$. Аналогично, $\min\limits_{y \in Q} {}^tby =^t px' = \max\limits_{x \in P} {}^tpx$. ■

18 Теорема о равновесии

Дело в том, что нужно создать физический противовес внутренней душевной тяжести — и равновесие восстановляется.

– Мамин-Сибиряк Д.Н.

Отметим интерпретацию двойственной задачи в терминах сопряженных пространств. Пусть как и выше P – полиэдр, задаваемый неравенствами (40), а Q – полиэдр, задаваемый неравенствами (42). В прямой задаче необходимо найти $\max\limits_{x\in P}({}^tpx)$, а в двойственной — ${}^tby_{\,y\in Q}$. Пусть $A=(a_{ij})$ и $O, e_1,\dots,e_n$ – выбранная система координат в $\mathbb{A}^n$. Предположим, что V – векторное пространство с базой $e_1,\dots,e_n$ и V^* – сопряженное пространство. Обозначим через $l_i\in V^*$, $1\le i\le m$, линейные функции $l_i(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$. Тогда полиэдр P задается неравенствами $l_1(x)\le b_1,\dots,l_m(x)\le b_m,\ x\ge 0$. Рассмотрим конус K с вершиной – нулевой функцией, порождаемый $l_1,\dots,l_m$. Тогда Q можно отождествить с множеством всех таких линейных функций $f\in V^*$, что $f(e_i)\ge p_i$, $1\le i\le n$.

Установим связь между точками экстремума прямой и двойственной задач линейного программирования.

Теорема 18.1 (**о равновесии**). *Пусть в точке $x^o\in P$ достигается максимум ${}^tpx$, а в точке $y^o\in Q$ – минимум функции ${}^tby$. Тогда $y^o_i(a_{i1}x^o_1+\dots+a_{in}x^o_n-b_i)=0$, где b_i – i-ая координата b.*

Доказательство. Так как $x^o, y^o\ge 0$ и $-{}^ty^oA\le -{}^tp$, то:

$$0\le {}^ty^o(b-Ax^o)={}^ty^ob-{}^ty^oAx^o\le {}^tpx^o-{}^tpx^o=0$$

Следовательно, ${}^ty^o(b-Ax^o)=0$. Отсюда вытекает утверждение, поскольку $b\le Ax^o$, $y^o\ge 0$. ■

19

Матричные игры как задачи линейного программирования. Решение в смешанных стратегиях

Бог тут не при чем. Ну, рассказывай, — продолжал он, возвращаясь к своему любимому коньку, — как вас немцы с Бонапартом сражаться по вашей новой науке, стратегией называемой, научили.

– Толстой Л.Н.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_m)$ искомые оптимальные стратегии, соответственно, игроков α и β. Без ограничения общности рассуждений можно предполагать, что все элементы матрицы игры A положительны. Если бы это было не так, то можно ко всем элементам матрицы A добавить одно и то же достаточно большое положительно число. При этом оптимальные стратегии не изменяются, а средний выигрыш увеличится на это число. Обозначим через v гарантированный выигрыш (гарантированную верхнюю оценку проигрыша). Тогда:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \right) \tag{17}$$

В скобках правой части (17) стоит математическое ожидание проигрыша второго игрока при применении первым игроком i-ой чистой стратегии α_i. Так как q – оптимальная стратегия второго игрока, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j \leq v$. Однако все участвующие в записи параметры неотрицательны и $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Поэтому в (17) имеет место строгое равенство $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}q_j = v$. Из симметричных соображений получаем равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v$. Таким образом, отыскание оптимальных смешанных стратегий сводится к решению следующей задачи линейного программирования: найти $\min v$, где:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j = v,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$
$$p_i, q_j \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

Рассмотрим матричную игру с матрицей $A = (a_{ij}) \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$. Применим алгоритм симплекс-метода для нахождения седловой точки смешанных стратегий из теоремы 6.1.

Заметим, что если мы прибавим ко всем элементам матрицы A одно и то же число d, то результат игры увеличится на d, но седловые точки не изменятся. Действительно, значение среднего выигрыша:

$$\sum_{i,j} x_i(a_{ij} + d)y_j = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j + d\sum_{i,j} x_i y_j =$$
$$= \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j + d\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j y_j\right) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j + d$$
$$\text{т.к. } \sum_i x_i = \sum_j y_j = 1$$

Следовательно, можно считать, что все элементы матрицы A неотрицательны, причем в матрице A нет нулевых столбцов. Тогда результат игры v лежит в пределах $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \leq v \leq \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ и потому положителен.

Положим $F(x, y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i y_j$. Напомним, что если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ - седловая точка, соответствующая оптимальным стратегиям первого и второго игрока, то для любых стратегий x, y первого и второго игрока имеем:

$$F(x, y^*) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y) \tag{49}$$

В частности:

$$v = \max_{x \in N} \min_{y \in M} F(x, y) = \min_{y \in M} \max_{x \in N} F(x, y) = F(x^*, y^*)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} N &= \{x \in \mathbb{A}^n \colon x_1 + \dots + x_n = 1,\ x_i \geq 0\} \\ M &= \{y \in \mathbb{A}^m \colon y_1 + \dots + y_m = 1,\ y_i \geq 0\} \end{aligned} \tag{50}$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered} f = u_1 + \dots + u_m \to \max \\ Au \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \geq 0 \end{gathered} \tag{51}$$

Рассмотрим также двойственную к (51) задачу:

$$\begin{gathered} g = t_1 + \dots + t_n \to \max \\ {}^t At \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \geq 0 \end{gathered} \tag{52}$$

Предложение 19.1. *Полиэдры P, Q, задаваемые, соответственно, неравенствами из (51) и (52), непусты. Кроме того, P ограничено. В частности,* $\max\limits_{u \in P} f = \min\limits_{t \in Q} g > 0$.

Доказательство. Заметим, что начало координат O лежит в P , но не лежит в Q. Кроме того, если все координаты t достаточно большие, то $t \in Q$. Поэтому P, Q непусты.

По предположению матрица A неотрицательна и в A нет нулевых столбцов. Поэтому для любого $j = 1, 2, \dots, m$ найдется такой индекс i, что $a_{ij} > 0$, откуда $a_{ij} u_j \leq \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is} u_s \leq 1$ и поэтому $u_j \leq \frac{1}{a_{ij}}$. Остается воспользоваться теоремой 17.1. Так как $O \notin Q$, то $\min\limits_{t \in Q} g > 0$. ■

Положим $\max\limits_{u \in P} f = \min\limits_{t \in Q} g = \frac{1}{v}$. Тогда $v > 0$. Обозначим через u^*, t^* – оптимальные решения задач (51), (52), соответственно. Положим $x^* = vt^*, y^* = vu^*$.

Теорема 19.1. *Точка (x^*, y^*) является седловой для рассматриваемой матричной игры с матрицей $A \geq 0$, не содержащей нулевых столбцов.*

Доказательство. Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = v\sum_{i=1}^{m} u_i^* = v\left(\max_{u\in P} f\right) = 1$$

т.е. $y^* \in M$, где M из (50). Аналогично, $x^* \in N$. По теореме 18.1 получаем $t_i^*\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j^* - 1\right) = 0$. Домножая на v^2, получаем $x_i^*\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^* = x_i^* v$, откуда:

$$F(x^*, y^*) = \sum_{i,j} x_i^* a_{ij} y_j^* = \sum_{i} x^* v = v \tag{53}$$

поскольку $x^* \in N$. Кроме того, для любых $x \in N$, $y \in M$ по (51) и (53):

$$F(x, y^*) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} u_j^* v \leq \sum_{i} x_i v = v = F(x^*, y^*)$$

Аналогично $F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y)$. ■

20 Критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи в терминах потенциалов

Новые замыслы, новые планы, новые разветвления!

– Салтыков-Щедрин М.Е.

Пусть в заданных m городах

$$A_1, \ldots, A_m \tag{57}$$

производится некоторый однородный продукт в количествах $a_1, \ldots, a_m > 0$.

Этот продукт перевозится в заданные n городов

$$B_1, \ldots, B_n \tag{58}$$

где он полностью потребляется в количествах $b_1, \ldots, b_n > 0$. Предполагаются заданными стоимости $c_{ij} \geq 0$ перевозок единицы продукта из A_i в B_j.

Назовем *планом перевозок* неотрицательную матрицу $X = (x_{ij})$ размера $m \times n$, в которой $x_{ij} \geq 0$ указывает количество продукта, перевозимого из A_i в B_j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Стоимость перевозок является линейной функцией от X:

$$z(X) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}, \ x_{ij} \geq 0 \tag{59}$$

В задаче требуется найти такой план перевозок X, чтобы его стоимость была бы минимальной, весь продукт был вывезен из (57) и потребности городов (58) были полностью удовлетворены.

Транспортная задача является задачей линейного программирования. Действительно, весь продукт, производимый в (57), вывозится в (58), где он полностью потребляется, причем все потребности удовлетворены. Таким образом, возникают следующие условия:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \end{gathered} \tag{60}$$

Требуется в условиях (60) найти минимум функции (59). Ввиду специфичности условий (60) можно предложить более специальный метод потенциалов решения этой задачи.

Назовем план перевозок X *допустимым*, если выполнены условия (60).

Предложение 20.1. *Полиэдр P, задаваемый условиями (60), непуст тогда и только тогда, когда*

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \tag{61}$$

Доказательство. Если $X = (x_{ij})$ – допустимый план, то по (60):

$$\sum_i a_i = \sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_j b_j$$

Обратно, пусть выполнено условие (61). Построим матрицу первоначального плана $X^0 = (x^0_{ij})$ методом минимального элемента. Выберем клетку (i, j) с минимальным значением c_{ij}. В эту клетку ставим число $x^0_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Если $x^0_{ij} = b_j$, то в остальные клетки столбца j ставим 0, а число a_i заменяем на $a_i - b_j$. Дуальным образом поступаем, если $x^0_{ij} = a_i$. Если $a_i \leq b_j$, то из A_i весь продукт вывезен в B_j и потребность B_j становится равной $b_j - a_i$. Если же $b_j < a_i$, то в B_j весь необходимый продукт завезен, и в A_i осталось $a_i - b_j$ продукта. Таким образом, либо число пунктов A_t, либо пунктов B_s уменьшилось.

Повторяя эту процедуру, получим первоначальный допустимый план $X^0 = (x^0_{ij})$. ■

Предложение 20.2. *Полиэдр P, задаваемый условиями (60), ограничен.*

Доказательство. Если $X = (x_{ij})$ – допустимый план, то для любых индексов i, j имеем $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$. ■

Следствие 20.1. *Транспортная задача (60) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено равенство (61).*

Доказательство. По предложению 20.1 полиэдр P допустимых планов непуст. По предложению 20.2 он ограничен. Следовательно, непрерывная функция $z(X)$ достигает на P минимума. ■

Теорема 20.1. *Для того, чтобы допустимый план перевозок X был оптимальным необходимо и достаточно, чтобы существовали числа (потенциалы) $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$, для которых:*

1) $u_i + v_j \le c_{ij}$ *при всех* i, j

2) $u_i + v_j = c_{ij}$, *если* $x_{ij} > 0$

Доказательство. Проверим достаточность. Пусть $X = (x_{ij})$ – допустимый план, и $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ из условий теоремы. Предположим, что $Y = (y_{ij})$ – произвольный допустимый план. Из (60) и условий 1), 2) следует, что:

$$z(Y) = \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij} \ge \sum_{i,j} (u_i + v_j) y_{ij} = \sum_i u_i \sum_j y_{ij} + \sum_j v_j \sum_i y_{ij} =$$

$$= \sum_i u_i a_i + \sum_j v_j b_j = \sum_i u_i \sum_j x_{ij} + \sum_j v_j \sum_i x_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} (u_i + v_j) x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = z(X)$$

Проверим теперь необходимость. Рассмотрим задачу, двойственную к транспортной задаче. Для этого перепишем ограничения из (60) и целевую функцию в виде:

$$-z(X) = \sum_{i,j} (-c_{ij} x_{ij}) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \sum_{j=1}^{n} (-x_{ij}) \le -a_i, \ i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ \sum_{i=1}^{m} (-x_{ij}) \le b_j, \ j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Тогда по определению 16.1 двойственная задача с переменными

$$w_1, \dots, w_m, w'_1, \dots, w'_m, s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_n \ge 0$$

к транспортной задаче имеет вид:

$$
\begin{gathered}
T' = \sum_{i=1}^{m}(w_i - w_i')a_i + \sum_{j=1}^{n}(s_j - s_j')b_j \to \min \\
w_i - w_i' + s_j - s_j' \geq -c_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\
w_1, \dots, w_m, w_1', \dots, w_m', s_1, \dots, s_n, s_1', \dots, s_n' \geq 0
\end{gathered}
\tag{62}
$$

Положим $u_i = w_i' - w_i$, $v_j = s_j' - s_j$. Тогда (62) записывается в виде:

$$
\begin{gathered}
u_i + v_j \leq c_{ij} \\
T = -T' = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \to \max
\end{gathered}
\tag{63}
$$

Как отмечено в предложении 20.2, условия (60) задают ограниченный полиэдр P. Таким образом, по следствиию 20.1 функция $z(X)$ на P достигает минимум в некоторой точке X^0. Заметим, что полиэдр Q, задаваемый неравенствами (63) содержит начало координат, поскольку $c_{ij} \geq 0$. Следовательно, Q непусто и по теореме 17.1:

$$\min(z(X)) = -\max(-z(X)) = -\min(T') = \max T$$

Пусть в точке $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in Q$ достигается максимум. По теореме 18.1 о равновесии получаем $u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij}^0 > 0$. ∎

21 Построение первоначального плана. Отсутствие в нем циклов

Я отчасти участвовал в переорганизации общества по новому плану, и только.

– Достоевский Ф.М.

Определение 21.1. *Транспортная задача вырождена, если существуют такие собственные подмножества индексов* $F \subset \{1, \dots, m\}$, $H \subset \{1, \dots, n\}$, *что* $\sum\limits_{i \in G} a_i = \sum\limits_{j \in H} b_j$. *Другими словами, суммарный запас продукта в пунктах* $A_i, i \in G$, *совпадает с потреблением в пунктах* $B_j, j \in H$.

Далее мы будет предполагать, что рассматриваемая транспортная задача *невырождена.*

Предложение 21.1. *Пусть задан допустимый план* X *невырожденной задачи и* $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. *Тогда для любого* $j \in \{1, \dots, m\}$ *существует такая последовательность клеток* $(i_0, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_{k+1})$, *что* $j_{k+1} = j$ *и во всех клетках этой последовательности в матрице* X *стоят ненулевые коэффициенты.*

Аналогично, для любого $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ *и любого* $i \in \{1, \dots, m\}$. *Тогда существует последовательность клеток* $(i_1, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_{k+1}, j_k)$, *что* $i_{k+1} = i$ *и во всех клетках этой последовательности в матрице* X *стоят ненулевые коэффициенты.*

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Обозначим через H множество всех таких индексов $l \in \{1, \dots, n\}$, для которых найдется последовательность ненулевых элементов $x_{i_0 j_1}, x_{i_1 j_1}, \dots, x_{i_k j_k}, x_{i_k j_{k+1}}$, $j_{k+1} = l$. Предположим, что $j \notin H$. Через G обозначим множество всех таких индексов $t \in \{1, \ldots, m\}$, что $x_{tl} \neq 0$ для некоторого $l \in H$. Из определения G вытекает, что если $t \in G$ и $x_{tl} \neq 0$, то $l \in H$. Поэтому $\sum\limits_{j \in H} b_j = \sum\limits_{i \in G, j \in H} x_{ij} = \sum\limits_{i \in G} a_i$. Отсюда $\sum\limits_{i \notin G} a_i = \sum\limits_{i \notin H} b_j > 0$.

Следовательно, $G \neq \{1, \ldots, n\}$, и $H \neq \{1, \ldots, m\}$. Это противоречит невырожденности задачи.

Симметрично доказывается второе утверждение. ■

Следствие 21.1. *Пусть план $X = (x_{ij})$ допустим, и $x_{i_0 j_0} = 0$. Тогда существует такая последовательность строк $i_0, i_1, \ldots, i_k$ и последовательность столбцов $j_1, \ldots, j_k, j_0$ матрицы X, что элементы*

$$x_{i_0 j_1}, x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_k j_k}, x_{i_k j_0} \tag{64}$$

отличны от нуля.

Определение 21.2. *Пусть $X = (x_{ij})$ – допустимый план. Циклом в X назовем последовательность ненулевых элементов $x_{p_1 q_1}, x_{p_1 q_2}, \ldots, x_{p_s q_s}, x_{p_s q_1}$, причем среди первых и среди вторых индексов в этой последовательности имеются нет совпадений.*

Предложение 21.2. *Если допустимый план не содержит циклов, то в предложении 21.1 по набору i, j искомые последовательности определены однозначно. Кроме того, в (64) последовательность также определена однозначно.*

Доказательство. Пусть для заданных $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ две разные последовательности

$$\begin{gathered}(i_0, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2), \ldots, (i_k, j_k), (i_k, j_{k+1}) \\ (i_0, j'_1), (i'_1, j'_1), (i'_1, j'_2), \ldots, (i'_s, j'_s), (i'_s, j'_{s+1})\end{gathered}$$

где $j_{k+1} = j'_{s+1} = j$ и во всех клетках этих последовательностей в матрице X стоят ненулевые коэффициенты. Погда получаем цикл

$$(i_k, j), (i_k, j_k), \ldots, (i_1, j_1), (i_0, j_1), (i_0, j'_1), (i'_1, j'_1), \ldots, (i'_s, j'_s), (i' s_, j)$$

что невозможно. Аналогично рассматривается утверждение для (64). ■

Изложим теперь алгоритм решения невырожденной транспортной задачи.

ШАГ 1. *Построение первоначального* плана *методом минимального элемента.* В соответствии с предложением 20.1 строим первоначальный план $X^0 = (x^0_{ij})$.

Предложение 21.3. *План X^0 не содержит циклов. В каждой строке и столбце плана X^0 содержится ненулевой элемент. Всего в X^0 число ненулевых элементов равно $m + n - 1$.*

Доказательство. Пусть план X^0 содержит цикл $x_{p_1q_1}, x_{p_1q_2}, \dots, x_{p_kq_k}, x_{p_kq_1}$ из определения 21.2. Выберем в этой последовательности тот элемент, который построен первым. Пусть, например, это $x_{p_1q_1}$. Тогда элементы $x_{p_1q_2}, x_{p_sq_1}$, построены позднее, что невозможно, ибо при построении $x_{p_1q_1}$, либо на месте (p_1, q_2), либо на (p_s, q_1) ставится 0. Аналогично рассматриваются остальные случаи. ■

22 Решение систем уравнений для потенциалов для допустимого плана в невырожденной задаче без циклов

Обнимая собой сполна весь цикл человеческих отношений, они оживляют мысль и деятельность не только отдельных индивидуумов, но и целого общества.

– Салтыков-Щедрин М.Е.

Сначала см. билет 21.

ШАГ 2. Построение *первоначальной системы потенциалов*. Для каждой из клеток (i, j), в которых находится ненулевой элемент из X^0, рассмотрим уравнение

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{65}$$

с неизвестными v_i, u_i. Зафиксируем одну переменную u_{i_0} , например, u_1 и придадим ей произвольное значение, например $u_1 = 0$. В силу (65), предложений 21.1 и 21.2 мы однозначно найдем значения всех остальных переменных u_i, v_j. Итак, решая систему (65) находим первоначальную систему потенциалов.

ШАГ 3.

Проверяем, удовлетворяет ли построенный план и система потенциалов условиям теоремы 20.1.

Заметим, что условие 2) из теоремы 20.1 выполнено по построению. Остается лишь проверить условие 1). Если оно выполнено, то полученный план оптимален. В противном случае переходим к следующему шагу.

23 Улучшение плана. Существование и единственность пути улучшения плана

Царь Алексей Михайлович много заботился об улучшении внутреннего положения России.

– Добролюбов Н.А.

ШАГ 4. *Улучшение плана X.*

Пусть относительно системы потенциалов u_i, v_j план X не оптимален, т.е. не выполнено условие 1) теоремы 20.1. Выберем отклонение

$$\alpha_{i_0j_0} = u_{i_0} + v_{j_0} - c_{i_0j_0} > 0 \tag{66}$$

Тогда $x_{i_0j_0} = 0$ и по следствию 21.1 существует последовательность ненулевых элементов $x_{i_0j_1}, x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_kj_k}, x_{i_kj_0}$. Расставим во всех выбранных клетках $(i_0, j_0), (i_0, j_1), \ldots$ последовательно чередующиеся метки метки $+, -, +, \ldots, -$. Пусть θ – минимальный среди элементов $x_{i_0j_1}, x_{i_1j_2}, \ldots, x_{i_{k-1}j_k}, x_{i_kj_0}$, в клетках, помеченных знаком $-$. В клетках со знаком $+$ число x_{ij} увеличиваем на θ, а со знаком $-$ уменьшаем на θ, т.е.

$$\begin{gathered}
x'_{i_0j_0} = x_{i_0j_0} + \theta = \theta \\
x'_{i_0j_1} = x_{i_0j_1} - \theta \\
x'_{i_1j_1} = x_{i_1j_1} + \theta \\
\ldots\ldots\ldots \\
x'_{i_{k-1}j_{k-1}} = x_{i_{k-1}j_{k-1}} + \theta \\
x'_{i_{k-1}j_k} = x_{i_{k-1}j_k} - \theta
\end{gathered}$$

Для остальных пар индексов положим $x'_{ij} = x_{ij}$. Получаем новый допустимый план $X' = (x'_{ij})$.

ШАГ 5.

Проверка для плана X' и потенциалов u'_i, v'_j выполнение условия 1) из теоремы 20.1.

Если оно не выполнено, то переходим к шагу 4. Если оно выполнено, то оптимальный план построен.

24

Отсутствие циклов в улучшенном плане

Печерин верил, что Россия вместе с Соединенными Штатами начнет новый цикл истории.

– Бердяев Н.А.

Предложение 24.1. *Если допустимый план X не содержал циклов, то и новый план X' не содержит циклов.*

Доказательство. Пусть план X' содержит цикл $x'_{p_1q_1}, x'_{p_1q_2}, \ldots, x'_{p_sq_s}, x'_{p_sq_1}$. Как и в следствии 21.1 можно считать, что все индексы $p_1, p_2, \ldots, p_s$, (соответственно, $q_1, q_2, \ldots, q_s$) различны. Если $x'_{ij} \neq 0$ и $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, то $x_{ij} \neq 0$. Так как X не содержит циклов, то среди элементов $x_{p_1q_1}, x_{p_1q_2}, \ldots, x_{p_sq_s}, x_{p_sq_1}$ встречается элемент $x_{i_0j_0} = 0$. Пусть, например, $(i_0, j_0) = (p_r, q_r)$. Тогда имеем последовательность ненулевых элементов $x_{p_rq_{r+1}}, x_{p_{r+1}q_{r+1}}, , x_{p_sq_s}, x_{p_sq_1}, \ldots, x_{p_{r-1}q_r}$, не содержащую $x_{i_0j_0} \neq 0$. По предложению 21.2 получаем, что

$$(p_r, \ldots, p_s, p_1, \ldots, p_{r-1}) = (i_0, \ldots, i_k)$$
$$(q_{r+1}, \ldots, q_s, q_1, \ldots, q_r) = (j_0, \ldots, j_k)$$

В силу выбора θ один из элементов $x'_{p_{i-1}q_i} = 0$. Следовательно, этот случай невозможен.

Пусть $(i_0, j_0) = (p_{r-1}, q_r)$. Тогда имеем последовательность ненулевых элементов $x_{p_{r-1}q_{r-1}}, x_{p_{r-2}q_{r-1}}, \ldots, x_{p_1q_1}, x_{p_sq_1}, \ldots, x_{p_rq_r}$, что снова приводит к противоречию. ∎

25 Сходимость алгоритма решения невырожденной транспортной задачи

Сходились, расходились, не находя места.

– Короленко В.Г.

Приведенный алгоритм конечен. Действительно, на 4-ом шаге получаем новый план X'. Если $a_{i_0 j_0}$ из (66), то считая $j_{k+1} = j_0$ получаем:

$$z(X') - z(X) = \sum_{i,j} c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij}) =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_s}(x'_{i_s j_s} - x_{i_s j_s}) + \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_{s+1}}(x'_{i_s j_{s+1}} - x_{i_s j_{s+1}}) = \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_s}\theta - \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_{s+1}}\theta =$$
$$= \theta\left[c_{i_0 j_0} + (u_{i_1} + v_{j_1}) + \dots + (u_{i_{k-1}} + v_{j_{k-1}}) - (u_{i_0} + v_{j_1}) - \dots - (u_{i_k} + v_{j_{k+1}})\right] =$$
$$= \theta[c_{i_0 j_0} - (u_{i_0} + v_{j_0})] = -\theta\alpha_{i_0 j_0} < 0$$

При этом для нового плана X' выполнено условие 2) из теоремы 20.1. Таким образом, число шагов не превосходит числа подмножеств клеток с ненулевыми элементами из допустимого плана X'. Так как значение $Z(X)$ уменьшается, то у нас не возникает повторений.

Изложение алгоритма завершено.

26

Нормированные векторные пространства и алгебры, примеры. Индуцированные нормы на алгебре матриц

Вот в этих нормах ваших и спрятаны все основы социального консерватизма.

– Горький Максим

Всюду в этой главе под $\mathbb{F}$ понимается либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 26.1. *Нормированным векторным пространством называется векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$ с нормой $||x||$, если на V задана функция $x \to ||x||$, принимающая неотрицательные вещественные значения, причем:*

1) $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$

2) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ для всех $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Предложение 26.1. *Для любых элементов x, y из нормированного векторного пространства справедливо неравенство $||x - y|| \geq \Big|||x|| - ||y||\Big|$.*

Доказательство. По свойству 3) имеем $||x|| = ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$. Отсюда $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$. Аналогично $||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| = | - 1|||x - y|| = ||x - y||$. Из полученных двух неравенств вытекает утверждение. ■

Пример

1) Пусть V – евклидово или эрмитово пространство. Тогда V является нормированным пространством, если положить $||x|| = \sqrt{(x,x)}$.

2) Пусть $\mathbb{F}^n$ – пространство строк длины n с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Для любого вещественного числа $p \geq 1$ положим:

$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_j |x_j|^p}$$

Тогда $\mathbb{F}^n$ является нормированным векторным пространством с нормой $||x||_p$. Эта норма называется *l_p-нормой.*

3) В пространстве $\mathbb{F}^n$ положим $||x||_\infty = \max_j |x_j|$. Тогда $\mathbb{F}^n$ является нормированным векторным пространством с нормой $||x||_\infty$. Эта норма называется *l_∞-нормой.*

4) Пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ является нормированным пространством с нормой $||f|| = \max_x |f(x)|$, а также с нормами:

$$\sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p dx}$$

где $p \geq 1$ – заданное вещественное число.

Теорема 26.1. *Пусть V - конечномерное нормированное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Зафиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в пространстве $V = \mathbb{F}^n$ и рассмотрим функцию $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$, где*

$$f(x_1, \dots, x_n) = ||x_1 e_1 + \dots + x_n e_n||$$

Тогда функция f непрерывна.

Доказательство. По предложению 26.1 для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{F}$. Имеем:

$$\begin{aligned} |f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, yn)| = \Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y|| = \\ = \Big| \Big| \sum_j (x_j - y_j) e_j \Big| \Big| \leq \sum_j |x_j - y_j| ||e_j|| \end{aligned} \tag{87}$$

Положим $M = \max_j ||e_j||$. Тогда в (87) получаем:

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \leq Mn\max_j |x_j - y_j|$$

Отсюда следует утверждение. ■

Теорема 26.2. *Пусть V - конечномерное нормированное пространство с двумя нормами $||x||$ и $||x||'$. Тогда существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что для всех $x \in V$ справедливы неравенства:*

$$C_1||x|| \leq ||x||' \leq C_2||x||$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что одна из норм, например, $||x||$ – евклидова (эрмирова) норма. Выберем в V ортонормированный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и обозначим через S множество всех таких $x \in V$, что $\sum_j |x_j^2| = 1$. Тогда S является n-мерной сферой и, следовательно, компактом. Отсюда в силу теоремы 26.1 вытекает, что функция $||x||'$ на S, принимающая положительные значения, ограничена сверху и снизу, т.е. существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что для всех $x \in S$ справедливы неравенства $C_1 \leq ||x||' \leq C_2$. Если $x \in V \setminus 0$, то $y = \frac{x}{||x||} \in S$. Таким образом:

$$C_1 \leq ||y||' = \left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right|' = \frac{||x||'}{||x||} \leq C_2$$

Отсюда вытекает утверждение. ■

Пусть x_n – последовательность элементов нормированного пространства V. Скажем, что эта последовательность сходится к элементу $x \in V$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $||x_n - x|| < \varepsilon$. Аналогичным образом определяются последовательности Коши и полные нормированные векторные пространства.

Из теоремы 26.2 вытекает:

Следствие 26.1. *Если последовательность сходится в конечномерном векторном пространстве относительно одной нормы, то она сходится и относительно любой другой нормы.*

Алгеброй A над полем $\mathbb{F}$ называется векторное пространство над этим полем, являющееся ассоциативным кольцом, причем для любых $x, y \in A$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ справедливы равенства $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$. Примерами алгебр являются алгебра многочленов $\mathbb{F}[X]$, алгебра матриц $Mat(n, \mathbb{F})$ размера n с коэффициентами из $\mathbb{F}$.

Алгебра A над полем $\mathbb{F}$ называется *нормированной*, если A является нормированным векторным пространством с нормой $||x||$, причем для всех $x, y \in A$ выполняется неравенство $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Пример

Алгебра матриц $Mat(n, \mathbb{F})$ является нормированной алгеброй относительно следующих норм. Пусть $A = (a_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{F})$. Тогда:

1) $||A||_{l_1} = \sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|$

2) $||A||_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|^p}$, где $p \geq 1,\ p \neq 2$

3) $||A||_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|^2}$

4) $||A|| = n||A||_{l_\infty}$, где $||A||_{l_\infty} = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$

5) $||A||_1 = \max\limits_j \left(\sum\limits_i |a_{i,j}| \right)$

6) $||A||_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_j |a_{i,j}| \right)$

7) $||A||_2$ - максимум из квадратных корней собственных значений матрицы ${}^t\overline{A}A$

Укажем теперь естественный способ построения нормированных алгебр. Пусть V – нормированное векторное пространство и $\mathcal{L}(V)$ - алгебра линейных операторов в V. Для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ положим:

$$||\mathcal{A}|| = \sup_{||x||=1} ||\mathcal{A}x|| \tag{88}$$

Теорема 26.3. *Пусть V – конечномерное векторное пространство. Тогда (88) превращает $\mathcal{L}(V)$ в нормированную алгебру.*

Доказательство. Заметим, что $||A||$ определена корректно и принимает конечные значения, поскольку по теореме 26.1 функция $f(A, x) = ||Ax||$ непрерывна относительно координат вектора x и относительно элементов матрицы A.

Упражнение 26.0.1. *Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве V для любых вещественных чисел $a < b$ множество всех таких $x \in V$, что $a \leq ||x|| \leq b$ компактно.*

В силу упражнения 26.0.1 множество всех таких x, что $||x|| = 1$, компактно. Таким образом, на этом множестве функция $f(A, x)$ ограничена.

Если $||A|| = 0$, то $||Ax|| = 0$ для всех векторов x с условием $||x|| = 1$. Отсюда следует, что $||Ay|| = 0$ для всех векторов y, т.е. $A = 0$.

Упражнение 26.0.2. *Показать, что $||A||$ в (88) – это инфинум всех таких $C \in \mathbb{R}$, что $||Ax|| \leq C||x||$ для всех $x \in V$.*

Заметим далее, что:

$$||A + B|| = \sup_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq \sup_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq$$
$$\leq \sup_{||x||=1} ||Ax|| + \sup_{||x||=1} ||Bx|| = ||A|| + ||B||$$

$$||\lambda A|| = \sup_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = |\lambda| \sup_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|||A||$$
$$||AB|| = \sup_{||x||=1} ||ABx|| \leq \sup_{||x||=1} ||A||||Bx|| = ||A||||B||$$

Отметим, что при доказательстве последнего неравенства использовано упражнение 26.0.2. ■

27

Связь нормы матрицы с ее спектральным радиусом

У меня служба — у нее связи и маленькие средства.

– Толстой Л.Н.

Определение 27.1. *Спектральным радиусом $\rho(A)$ оператора (матрицы) $A \in \mathcal{L}(V)$ называется максимум модулей собственных значений A.*

Теорема 27.1. *Пусть $||\cdot||$ – норма в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(V)$ в конечномерном пространстве V. Если $A \in \mathcal{L}(V)$, то $\rho(A) \leq ||A||$.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого собственного вектора x. Построим матрицу X, столбцами которой будут координаты вектора x. Тогда $AX = \lambda X$, откуда:

$$||AX|| = |\lambda|||X|| \leq ||A||||X|| \tag{89}$$

Так как $X \neq 0$, то $||X|| \neq 0$ и поэтому в (89) получаем $|\lambda| \leq ||A||$. Отсюда вытекает утверждение, поскольку λ – любое собственное значение. ■

Теорема 27.2. *Пусть $\rho(A) < 1$. Тогда $A^k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. *Первое доказательство.*

В силу следствия 26.1 достаточно доказать сходимость относительно матричной нормы $||\cdot||_E$. Пусть n – размерность пространства, в котором действует оператор A. Без ограничения общности можно предполагать, что $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть для $n - 1$ теорема доказана. В силу теоремы о приведении к жордановой форме существует такой базис, в котором матрица оператора имеет верхнетреугольный вид. Переходя к этому базису, будем считать, что матрица A имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & u \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$$

Тогда $\rho(B) \le \rho(A) < 1$ и по индукции $B^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Лемма 27.1.

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} B^k & D_k u \\ \hline 0 & \lambda^k \end{array}\right),\ D_k = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j B^{k-1-j}$$

Доказательство. Непосредственная проверка, основанная на определении произведения матриц. ■

Завершим доказательство теоремы. Так как $B^k \to 0$ при $k \to \infty$, то для любого $1 > \varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $k \ge N$ имеем $||B^k|| < \varepsilon$. В частности, последовательность $||B^j||$ ограничена константой C. Кроме того, $|\lambda| < 1$. Таким образом, если $m > 2Nt$, то:

$$||D_m|| \le \left|\left|\sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{m-1-j}\right|\right| + \left|\left|\sum_{j=Nt}^{m-1} \lambda^j B^{m-1-j}\right|\right| \le$$

$$\le ||B^{m-1-Nt}|| \left|\left|\sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{Nt-j}\right|\right| + |\lambda^{Nt}| \left|\left|\sum_{j=Nt}^{m-1} \lambda^{j-Nt} B^{m-1-j}\right|\right| \le$$

$$\le ||B^N||^t ||B^{m-1-2Nt}|| \left|\left|\sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{Nt-j}\right|\right| + |\lambda|^{Nt} \left|\left|\sum_{j=Nt}^{m-1} \lambda^{j-Nt} B^{m-1-j}\right|\right| \le$$

$$\le C||B^N||^t \left(\sum_{j=0}^{Nt-1} |\lambda|^j ||B^{Nt-j}||\right) + |\lambda|^{Nt} \left(\sum_{j=Nt}^{m-1} |\lambda^{j-Nt}| ||B^{m-1-j}||\right) \le$$

$$\le C^2||B^N||^t \left(\sum_{j=0}^{Nt-1} |\lambda|^j\right) + C|\lambda|^{Nt} \left(\sum_{j=Nt}^{m-1} |\lambda^{j-Nt}|\right) =$$

$$= C^2||B^N||^t \frac{|\lambda|^{Nt}-1}{|\lambda|-1} + C|\lambda|^{Nt} \frac{|\lambda|^{m-Nt}-1}{|\lambda|-1}$$

Таким образом, если m (и t) стремятся к ∞, то $||D_m|| \to 0$. Отсюда по индукции вытекает утверждение теоремы. ■

Доказательство. *Второе доказательство.*

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. В силу теоремы о приведении к жордановой форме существует такая невырожденная матрица S, что $A = S^{-1}JS$, где J – жорданова форма. При этом $A^k = S^{-1}J^kS$ для всех k. Поэтому достаточно показать, что все элементы матрицы J^k стремятся к нулю при $k \to \infty$. Это утверждение достаточно доказать для одной жордановой клетки. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

имеет размер n. Заметим, что $J = \lambda E + B$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $B^n = 0$. Для любого $k \geq n$ получаем:

$$J^k = (\lambda E + B)^k = \sum_{m=0}^{n} \binom{k}{m} \lambda^{k-m} B^m$$

Коэффициент:

$$\binom{k}{m} \lambda^{k-m} = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{m!}\lambda^{k-m} =$$
$$= \frac{k^m \lambda^k}{m!} \left[1 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{k}\right) \lambda^{-m}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

■

28

Оценка спектрального радиуса для неотрицательной матрицы с помощью элементов матрицы

Очень возможно, что в мирской оценке качеств покойного неясно участвовало и сравнение.

– Салтыков-Щедрин М.Е.

Определение 28.1. *Спектральным радиусом $\rho(A)$ оператора (матрицы) $A \in \mathcal{L}(V)$ называется максимум модулей собственных значений A.*

Теорема 28.1. *Пусть $||\cdot||$ – норма в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(V)$ в конечномерном пространстве V. Если $A \in \mathcal{L}(V)$, то $\rho(A) \le ||A||$.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого собственного вектора x. Построим матрицу X, столбцами которой будут координаты вектора x. Тогда $AX = \lambda X$, откуда:

$$||AX|| = |\lambda|||X|| \le ||A||||X|| \tag{89}$$

Так как $X \neq 0$, то $||X|| \neq 0$ и поэтому в (89) получаем $|\lambda| \le ||A||$. Отсюда вытекает утверждение, поскольку λ – любое собственное значение. ■

Теорема 28.2. *Пусть в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(V)$ на конечномерном пространстве V задана норма $||\cdot||$. Если $A \in \mathcal{L}(V)$, то $\rho(A) = \lim\limits_{k} ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.*

Доказательство. Нам потребуется несколько лемм.

Лемма 28.1. *Для любого натурального числа k имеем $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.*

Доказательство. Достаточно выбрать базис, в котором матрица A имеет верхнетреугольный вид. Затем возвести эту матрицу в степень k. ■

Лемма 28.2. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $B = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1}A$. *Тогда* $\rho(B) < 1$.

Доказательство. Достаточно выбрать базис, в котором матрица A имеет верхнетреугольный вид. ■

Завершим доказательство теоремы. По лемме 28.1 и теореме 28.1 имеем $\rho(A) = \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ для всех k. Пусть матрица B из леммы 28.2. По теореме 27.2 и лемме 28.2 имеем $B^k \to 0$. Следовательно, существует такое N, что $||B^k|| < 1$ для всех $k > N$. Это означает, что при этих k выполняется неравенство $|\rho(A) + \varepsilon|^{-k}||A^k|| < 1$, откуда $||A^k|| < |\rho(A) + \varepsilon|^k$ и $||A^k||^{\frac{1}{k}} < |\rho(A) + \varepsilon|$. ■

Предложение 28.1. *Пусть* $A \geq 0$, *причем* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = C$ *— постоянно для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$\rho(A) = ||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = C$$

Доказательство. Заметим, что $||A||_\infty = \sup\limits_{||x||_\infty = 1} ||Ax||_\infty$, где $||x||_\infty = \max\limits_i |x_i|$. Отсюда $\rho(A) \leq ||A||_\infty = C$. С другой стороны, если $e = (1, \ldots, 1)$, то $Ae = Ce$, откуда $C \leq rho(A)$. ■

Предложение 28.2. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $AB \leq |AB| \leq |A||B|$

2) $|A + B| \leq |A| + |B|$

3) $|\alpha A| = |\alpha||A|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство. Пусть $A, B \in Mat(n, \mathbb{R})$. Тогда:

$$\sum_j a_{ij}b_{jk} \leq \left|\sum_j a_{ij}b_{jk}\right| \leq \sum_j |a_{ij}||b_{jk}|$$

откуда вытекает первое свойство.

Остальные свойства проверяются аналогично. ■

Предложение 28.3. *Пусть* $A, B \in Mat(n, \mathbb{R})$. *Если* $|A| \leq B$, *то* $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.

Доказательство. По предложению 28.2 для любого натурального числа k имеем $A^k \leq |A^k| \leq |A|^k \leq B^k$. Рассмотрим норму $||\cdot||_E$ ($||A||_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j}|a_{i,j}|^2}$) на алгебре матриц. Тогда $||A^k||_E = \Big|\Big||A^k|\Big|\Big|_E \leq \Big|\Big||A|^k\Big|\Big|_E \leq ||B^k||_E$. Отсюда $||A^k||_E^{\frac{1}{k}} \leq \Big|\Big||A|^k\Big|\Big|_E^{\frac{1}{k}} \leq ||B^k||_E^{\frac{1}{k}}$.

Остается воспользоваться теоремой 28.2. ■

Теорема 28.3. *Пусть* $A \geq 0$. *Тогда:*

$$\min_i \left(\sum_j a_{ij}\right) \leq \rho(A) \leq \max_i \left(\sum_j a_{ij}\right)$$
$$\min_j \left(\sum_i a_{ij}\right) \leq \rho(A) \leq \max_j \left(\sum_i a_{ij}\right)$$

Доказательство. Пусть $C = \min\limits_i \left(\sum\limits_j a_{ij}\right)$. Существует такая матрица B, что $A \geq B \geq 0$, причем $\sum\limits_j b_{ij} = C$. Действительно, если $C = 0$, то положим $B = 0$. Если же $C > 0$, то положим $b_{ij} = \dfrac{Ca_{ij}}{\sum\limits_t a_{it}}$.

Соглсно предложениям 28.1 и 28.3 получаем $\rho(B) = C \leq \rho(A)$.

Аналогично, если $D = \max\limits_i \left(\sum\limits_j a_{ij}\right)$, то можно построить такую матрицу $B' = (b'_{ij})$, что $0 \leq A \leq B'$ и $\sum\limits_j b'_{ij} = D$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим транспонированную матрицу ${}^tA$ и заметим, что $\rho(A) = \rho({}^tA)$. ■

Следствие 28.1. *Пусть* A *– неотрицательная матрица и* x *– положительный вектор. Тогда:*

$$\min_i \frac{\sum\limits_j a_{ij}x_j}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_i \frac{\sum\limits_j a_{ij}x_j}{x_i}$$
$$\min_j \left[x_j \left(\sum_i \frac{a_{ij}}{x_i}\right)\right] \leq \rho(A) \leq \max_j \left[x_j \left(\sum_i \frac{a_{ij}}{x_i}\right)\right]$$

Доказательство. Применим теорему 28.3 для матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & x_n & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\dots & x_n & \end{pmatrix}$$

На месте (i, j) в этом произведении стоит $x_i^{-1} a_{ij} x_j$. ■

Следствие 28.2. *Пусть A, x из условий теоремы 28.3 и следствия 28.1. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, то $\alpha \leq rho(A) \leq \beta$. Если $\alpha x < Ax$, то $\alpha < \rho(A)$. Если $Ax < \beta x$, то $\rho(A) < \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha_x \leq Ax$, то $\alpha \leq \min\limits_i \frac{\sum\limits_j a_{ij} x_j}{x_i}$. Отсюда $\alpha \leq \rho(A)$ по следствию 28.1. Аналогично доказываются остальные утверждения. ■

29 Теорема о с.в. положительной матрицы, для которых собственное значение равно по модулю $\rho(A)$

В своей книге он борется с самим собой, сводит счеты с собственной стихийной натурой.

– Бердяев Н.А.

Предложение 29.1. *Пусть A – положительная матрица и x – неотрицательный ненулевой вектор. Тогда вектор Ax положителен.*

Доказательство. Пусть $x_k > 0$. Для любого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq a_{ik}x_k > 0$. ■

Теорема 29.1. *Пусть A – положительная матрица и $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора x, причем $|\lambda| = \rho(A)$. Тогда:*

1) $A|x| = \rho(A)|x|$
2) $|x| > 0$
3) $x = e^{i\theta}|x|$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{R}$
4) $\lambda = \rho(A)$

Доказательство. Имеем:

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x| \tag{93}$$

Положим $y = A|x| - \rho(A)|x|$. По (93) вектор y неотрицателен.

Предположим сначала, что $y \neq 0$. По предложению 29.1 вектор Ay положителен. Положим $z = A|x|$. В силу предложения 29.1 этот вектор также положителен. Отсюда $0 < Ay = Az - \rho(A)z$ и поэтому $Az > \rho(A)z$. Это противоречит следствию 28.2.

Итак, $y = 0$, т.е. $A|x| = \rho(A)|x|$. Кроме того, $|x| = \rho(A)^{-1}A|x| > 0$ по предложению 29.1. Поэтому для любой координаты x_k вектора x имеем:

$$\rho(A)|x_k| = |\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = \left|\sum_j a_{kj}x_j\right| \leq$$

$$\leq \sum_j |a_{kj}||x_j| = \sum_j a_{kj}|x_j| = \rho(A)|x_k|$$

Таким образом, $|\sum\limits_j a_{kj}x_j| = \sum\limits_j a_{kj}|x_j|$, а, значит, все x_j расположены на одном луче в комплексной области. В частности, существует такой угол θ, что $e^{-i\theta}x_j > 0$ для всех j. Отсюда $e^{-i\theta}x = |x|$, т.е. x – собственный вектор A с собственным значением $\rho(A)$. ■

Следствие 29.1. *Пусть A – положительная матрица. Тогда $\rho(A)$ – положительное собственное значение A. Существует положительный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $|\lambda| = rho(A)$ для некоторого собственного значения λ матрицы A и $Ax = \lambda x$, где $x \neq 0$. По теореме $A|x| = \rho(A)|x|$, причем $|x| > 0$. ■

Следствие 29.2. *Пусть $A > 0$. Если λ – собственное значение матрицы A, причем $\lambda \neq \rho(A)$, то $|\lambda| < \rho(A)$.*

30 Одномерность собственного подпространства положительной матрицы A, соответствующего $\rho(A)$

Сердце России, Москва, было, comme de raison, [разумеется.] покрыто самым густым слоем ярко-красной краски; от этого центра, в виде радиусов, шли другие губернии, постепенно бледнея и бледнея по мере приближения к окраинам.

– Салтыков-Щедрин М.Е.

Теорема 30.1. *Пусть $A > 0$ и $w, z \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, причем $Aw = \rho(A)w,\ Az = \rho(A)z$. Тогда $w = \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. По теореме 29.1 имеем $z = e\ -^{i\theta}\ |z|,\ w = e^{-i\psi}|w|$. Таким образом, можно считать, что $z, w > 0$. Положим $\beta = \min\limits_j z_j w_j^{-1},\ r = z - \beta w$. Тогда $r \geq 0$ и r не положительный вектор. Вместе с тем $Ar = \rho(A)r$. Отсюда $r = \rho(A)^{-1}Ar > 0$ по предложению 29.1. Итак, $r = 0$. ∎

Следствие 30.1. *Если $A > 0$, то существует единственный вектор x такой, что $x > 0,\ Ax = \rho(A)x,\ \sum\limits_j x_j = 1$.*

Определение 30.1. *Пусть $A > 0$. Тогда $\rho(A)$ называется перроновым числом, а вектор x из следствия 30.1 называется перроновым вектором для A.*

31

Вычисление $\lim_{m\to\infty}[\rho(A)^{-1}A]^m$ для положительной матрицы A

Совершенства требует только чистая математика; даже прикладная математика довольствуется приблизительными вычислениями.

– Чернышевский Н.Г.

Теорема 31.1. *Пусть задана квадратная матрица $A \geq 0$ без нулевых строк, причем существуют такие положительные векторы x, y, что:*

$$Ax = \rho(A)x,\ yA = \rho(A)y,\ (x, y) = \sum_j x_j y_j = 1 \tag{91}$$

где x, y отождествляются со столбцами из координат векторов. Положим $L = (x_i y_j) = x \cdot y$ Тогда:

$$Lx = x,\ yL = y,\ L^2 = L,\ AL = LA = \rho(A)L$$

Кроме того, $(\rho(A)^{-1}A - L)^m = (\rho(A)^{-1}A)^m - L$.

Доказательство. Заметим, что $Lx = (x, y)x = x,\ yL = y(x, y) = y$. Отсюда:

$$L^2 = x(y, x)y = L,\ AL = (Ax)y = \rho(A)xy = \rho(A)L = LA \tag{92}$$

Поэтому $\rho(A)^{-1}AL = L = L(\rho(A)^{-1}A)$ и

$$\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j L^j + \rho(A)^{-m}A^m =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j\right] L + \rho(A)^{-m}A^m = -L + \rho(A)^{-m}A^m$$

Отсюда $\rho(A)^{-m}A^m = L + \left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m$. ∎

Теорема 31.2. *Пусть A, x, y, L из теоремы 31.1, причем $A > 0$. Тогда:*

$$\lim_{m\to\infty}[\rho(A)^{-1}A]^m = L$$

Доказательство. В силу теоремы 31.1 $L + \left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m = \rho(A)^{-m}A^m$. Поэтому в силу теоремы 27.2 достаточно показать, что $\rho\left[\rho(A)^{-1}A - L\right] < 1$. Пусть $[\rho(A)^{-1}A - L]w = \mu w$, $w \neq 0$. По (92) $\mu L w = L[\rho(A)^{-1}A - L]w = [L - L^2]w = 0$.

Если $\mu \neq 0$, то $Lw = 0$, и поэтому $Aw = \rho(A)\mu w$, откуда $\rho(A)|\mu| \leq \rho(A)$, т.е. $|\mu| \leq 1$. Кроме того, если $|\mu| = 1$, то $\mu = 1$ по теореме 29.1, и по теореме 30.1 получаем $w = x$. В этом случае $0 = Lx = x^t y x = x \neq 0$ по теореме 31.1. Полученное противоречие показывает, что $|\mu| < 1$. ∎

32 Доказать, что спектральный радиус является простым корнем характеристического многочлена положительной матрицы

От ветвей вертикально тянутся растительные нити и, врастая в землю, пускают корни, из которых образуются новые деревья.

– Гончаров И.А.

Теорема 32.1. *Пусть $A > 0$. Тогда $\rho(A)$ является простым корнем характеристического многочлена матрицы A.*

Доказательство. Пусть $\rho = \rho(A)$. Существует такая невырожденная комплексная матрица S, что:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \rho & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & \rho & & & \\ & & & \lambda_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \ |\lambda_j| < \rho$$

Отсюда:

$$\rho^{-1}A = S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k \end{pmatrix} S^{-1},\ \mu_j = \frac{\lambda_j}{\rho},\ |\mu_j| < 1$$

Кроме того:

$$(\rho^{-1}A)^m = S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k \end{pmatrix}^m S^{-1} =$$

$$= S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t^m & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k^m \end{pmatrix} S^{-1} \to S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^m S^{-1} \tag{94}$$

Заметим, что ранг $\lim\limits_m (\rho^{-1}A)^m$ равен рангу L, т.е. 1, и не меньше по (94) числу единиц на главной диагонали, т.е. кратности ρ. Отсюда вытекает утверждение. ■

33
Для неотрицательной матрицы A $\exists$ неотрицательный собственный вектор, с.з. которого равно $\rho(A)$

Предоставьте это времени и собственному ее желанию — сравниться в просвещении с остальной частию Европы.

– Загоскин М.Н.

Теорема 33.1. *Пусть $A \geq 0$. Тогда $\rho(A)$ – собственное значение A и существует неотрицательный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $\varepsilon > 0$. Тогда $A(\varepsilon) = (a_{ij}+\varepsilon) > 0$. Пусть $x(\varepsilon)$ – перронов вектор матрицы $A(\varepsilon)$ с собственным значением $\rho(A(\varepsilon))$. Тогда $x(\varepsilon) > 0$ и $\sum\limits_j x(\varepsilon)_j = 1$. Таким образом, все векторы $x(\varepsilon)$ лежат в компакте пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим убывающую последовательность $\varepsilon_k \to 0$. В последовательности $x(\varepsilon_k)$ выберем сходящуюся подпоследовательность $x(\varepsilon_k) \to x$. Так как $x(\varepsilon_k) > 0$, то $x \geq 0$ и, кроме того, $\sum\limits_j x_j = 1$. При этом $A(\varepsilon_k) < A(\varepsilon_{k-1})$, откуда $\rho(A) \leq \rho(A(\varepsilon_k)) \leq \rho(A(\varepsilon_{k-1}))$ по предложению 28.3. Итак, существует предел $\rho = \lim\limits_k \rho(A(\varepsilon_k))$ и $\rho \geq \rho(A)$. Отсюда:

$$Ax = [\lim_k A(\varepsilon_k)][\lim_k x(\varepsilon_k)] = \lim_k [A(\varepsilon_k)x(\varepsilon_k)] =$$
$$= \lim_k [\rho(A(\varepsilon_k))x(\varepsilon_k)] = \lim \rho[A(\varepsilon_k)][\lim_k x(\varepsilon_k)] = \rho x$$

Следовательно, x является собственным вектором A с собственным значением ρ. Но тогда $\rho \leq \rho(A)$ и поэтому $\rho = \rho(A)$. ■

34

Доказать, что неотрицательная матрица A размера n неразложима $\Longleftrightarrow$ матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна

Взял, разобрал ножичком, разложил; опять сладил, отдал. Идут часы.

– Толстой Л.Н.

Квадратная матрица называется *перестановочной*, если она получается из единичной перестановкой строк (столбцов). Квадратная матрица A размера n называется *разложимой*, если выполнено одно из условий:

1) $n = 1$ и $A = 0$

2) $n \geq 2$ и существует такая перестановочная матрица P, что

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

где B, D – собственные квадратные подматрицы.

Матрицы, не являющиеся разложимыми, называются *неразложимыми.*

Теорема 34.1. *Пусть задана неотрицательная неразложимая матрица A размера n. Тогда матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна.*

Доказательство. Пусть Γ – ориентированный граф с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$. При этом существует дуга $i \to j$, если либо $a_{ij} \neq 0$, либо $i = j$.

Лемма 34.1. *Пусть в Γ существует путь из $i \to j$. Тогда в Γ существует путь из i в j длины (числа дуг) $\leq n-1$.*

Для любой вершины p из Г обозначим через C_p связную компоненту p, т. е. множество всех концов всевозможных путей из p в графе Г. По лемме 34.1 можно считать, что любой такой путь имеет длину не больше $n-1$.

Лемма 34.2. *Пусть $i \in C_p$, $j \notin C_p$. Тогда $a_{ij} = 0$.*

Доказательство. По условию существует путь $p \to i$. Если $a_{ij} \neq 0$, то существует также путь $i \to j$. Тогда в Г существует путь $p \to j$, что невозможно. ■

Предположим противное, что в матрице:

$$(E+A)^{n-1} = E + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$$

на некотором месте (p,q) стоит нулевой элемент. В этом случае $p \neq q$ и указанный элемент имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum \binom{n-1}{k} a_{j_1,j_2} \dots a_{j_k,j_{k+1}} = 0 \tag{95}$$

где внутренний знак суммы означает суммирование по множеству всех таких наборов $(j_1, \dots, j_{k+1})$, что $p = j_1, q = j_{k+1}$, и $k \leq n-1$. Так как все слагаемые в (95) неотрицательны, то каждое произведение

$$a_{j_1,j_2} \dots a_{j_k,j_{k+1}} \tag{96}$$

равно нулю для всех $k = 1, \dots, n-1$ и для всех наборов $(p = j_1, \dots, j_{k+1} = q)$. Это означает, что $q \notin C_p$. Перенумеруем номера строк матрицы A таким образом, чтобы $C_p = \{k+1, \dots, n\}$, $k < n$. Эта перенумерация соответствует переходу $A \to P^{-1}AP$ для некоторой перестановочной матрицы P. Тогда $k+1 \leq p \leq n$ и для всех $1 \leq j \leq k$ по лемме 34.2 получаем $a_{ij} = 0$ при $i > k$, $j \leq k$. Таким образом, A содержит угол из нулей. ■

35 Теорема Фробениуса

Какая глупая фамилия!.. — рассердившись, произнесла она. — И за чем тебе нужен человек с такой странной фамилией?

– Гейнце Н.Э.

Предложение 35.1. *Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения A, то $1+\lambda_1, \dots, 1+\lambda_n$ – собственные значения $E+A$. В частности, $1+\rho(A) \geq \rho(E+A)$. Если $A \geq 0$, то $1+\rho(A) = \rho(E+A)$.*

Доказательство. Перейдя к жордановой форме А получаем требуемые неравенства в силу теоремы 33.1. ■

Предложение 35.2. *Пусть $A \geq 0$ и $A^k > 0$ для некоторого натурального числа k. Тогда $\rho(A)$ – простой корень характеристического многочлена.*

Доказательство. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения А, то $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ – собственные значения $A^k > 0$. Отсюда $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. По теореме 33.1, например, $\lambda_1 = \rho(A)$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\lambda_1^k = \lambda_2^k = \rho(A)^k = \rho(A^k)$, что невозможно по теореме Перрона. ■

Теорема 35.1 (**Фробениуса**). *Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица. Тогда:*

1) $\rho(A) > 0$

2) $\rho(A)$ – собственное значение A

3) существует положительный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$

4) $\rho(A)$ – простой корень характеристического многочлена матрицы A

Доказательство. Так как матрица A неразложима, то в A нет нулевых строк и столбцов. Поэтому $\rho(A) > 0$ в силу следствия **??**.

Утверждение 2) вытекает из теоремы 33.1.

Рассмотрим утверждение 3). По теореме 33.1 существует неотрицательный собственный вектор x для матрицы A с собственным значением $\rho(A)$. Тогда $(E+A)x = (1+\rho(A))x$ и поэтому $(E+A)^{n-1}x = (1+\rho(A))^{n-1}x$. Но матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна и поэтому $(1+\rho(A))^{n-1}x > 0$, откуда вытекает положительность x.

Последнее утверждение следует из предложений 35.1, 35.2. ■

36 Сходимость $[\rho(A)^{-1}A]^m$ для неотрицательной неразложимой матрицы

Об этом, сходясь, и толкуем, и — сильно подействовало.

– Достоевский Ф.М.

Предложение 36.1. *Пусть A, x, y, L из теоремы 31.1, причем матрица A неразложима. Тогда матрица*

$$E - [\rho(A)^{-1}A - L] \tag{97}$$

обратима.

Доказательство. Рассмотрим вектор z с условием $\left[E - \left(\rho(A)^{-1}A - L\right)\right] z = 0$. Тогда:

$$z = \rho(A)^{-1}Az - Lz \tag{98}$$

Умножая (98) слева на матрицу L по теореме 31.1 получаем:

$$Lz = \rho(A)^{-1}LAz - L^2z = Lz - Lz = 0 \tag{99}$$

Таким образом, по (98) $z = \rho(A)^{-1}Az$, т.е. $Az = \rho(A)z$. В силу теоремы 35.1 имеем $z = \alpha x$. Отсюда по (99) $0 = Lz = \alpha Lx = \alpha x = z$. Итак, матрица (97) невырождена и потому обратима. ■

Теорема 36.1. *Пусть A — неотрицательная неразложимая матрица. Тогда матрица ${}^tA$ неразложима. В силу теоремы 35.1 существуют такие положительные векторы x, y, что выполнены равенства (91). Положим $L = x^ty$. Тогда* *существует такая положительная константа $C = C(A)$, что для любого натурального числа N:*

$$\Big|\Big|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\rho(A)^{-1}A\right)^m - L\Big|\Big|_\infty \le \frac{C}{N}$$

Доказательство. По теореме 31.1 имеем:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\rho(A)^{-1}A\right)^m - L = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m + L\right) - L = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m$$
$$= \frac{1}{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]\left[E - \left(\rho(A)^{-1}A - L\right)^N\right]\left[E - \left(\rho(A)^{-1}A - L\right)\right]^{-1} =$$
$$= \frac{1}{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]\left[E - \left(\rho(A)^{-1}A\right)^N + L\right]\left[E - \left(\rho(A)^{-1}A - L\right)\right]^{-1}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что все элементы матрицы $B = \left[\rho(A)^{-1}A\right]^N$ ограничены. Непосредственная проверка показывает, что $Bx = x$. Пусть $B = (b_{ij})$. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $\sum\limits_j b_{ij}x_j = x_i$. Следовательно:

$$\max_s x_s \ge x_i = \sum_j b_{ij}x_j \ge \left(\min_j x_j\right)\sum_j b_{ij} \ge \left(\min_j x_j\right) b_{ij}$$

Отсюда:

$$b_{ij} \le \frac{\max\limits_s x_s}{\min\limits_j x_j}$$

■

Литература

[1] Курс лекций В.А.Артмаонов, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2021 г.

[2] В.А.Артамонов, В.Н.Латышев. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.:Факториал Пресс, 2004.

[3] А.С.Ашманов. Линейное программирование. М.:Наука, 1973.

[4] А.С.Ашманов. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд. МГУ, 1980.

[5] А.А.Васин, В.В.Морозов. Теория игр и модели математической экономики. М.:МаксПресс, 2005.

[6] В. А.Артамонов, Линейная алгебра и аналитическая геометрия (Курс лекций для экономических специальностей), М.: Изд. Дело, 2012.

[7] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.

[8] Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Т.1. Общие положения Математическое программирование. 2-е изд. испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011, 564 с.

[9] Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Т.2. Многокритериальность, Динамика. Неопределенность. 2-е изд. испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011, 420 с.