МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

экономический поток

Актуарная математика

3 курс, группа 332

6 семестр

Лектор
Д.Б. Гнеденко
«___» ________ 2021 г.

Москва, 2021 г.

Техническая информация

Данный PDF содержит примерную программу весеннего семестра 3 курса по предмету "Актуарная математика".

Собрали и напечатали по мотивам лекций студенты 3-го курса Конов Марк и Старцев Валерий.

Добавления и исправления принимаются на почты vkonov2@yandex.ru и sharfikeg@yandex.ru.

ПРИЯТНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Содержание

1 Лекция №1 - 11.02.2021. Страхование жизни

Замечание. *Предполагается спокойное, мирное время. Страхование жизни основано на закономерностях уровня смертности различных групп населения.*

1.1 Вероятность выживания

Рассмотрим однородную группу людей. Время измеряем в годах.

Определение 1.1. *x - возраст гражданина на момент заключения договора;*

T_x - остаточное время жихни - случайная величина;

$F(t) = P(T_x \le t) \stackrel{\text{def}}{=} {}_tq_x$ - функция распределения T_x, обладающая плотностью распределения;

$f(t)$ - плотность распределения T_x;

${}_tp_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T_x > t)$ - вероятность, что с момента x человек проживет более t лет;

$\omega - x$, - максимальное время жизни заключившего договор; ω обычно берут равным 100;

Определение 1.2. *При заключении договора:*

1. *фиксируется продолжительность заболеваний страхователя;*

2. *возраст страхователя;*

Тогда λ - время, прошедшее между медицинским обследованием (началом заболевания) и началом страхования.

Утверждение 1.1.

$$_{\omega-x}p_x = 0.$$

$$_0p_x = 1.$$

Утверждение 1.2. *Пусть*

$$_{\frac{t}{t'}}q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(t < T_x \le t + t').$$

Тогда

$$_{\frac{t}{t'}}q_x = {}_tp_x - {}_{t+t'}p_x > 0.$$

Доказательство.

$$P(T_x > t) = P(t \le T_x \le t + t') + P(T_x > t + t') \;\Rightarrow\; {}_tp_x = {}_{\frac{t}{t'}}q_x + {}_{t+t'}p_x.$$

■

Следствие 1.1. *Из доказательства очевидно вытекает*

$${}_{\frac{t}{t'}}q_x \;\to\; 0, \;\; t' \;\to\; 0$$

Определение 1.3. *Рассмотрим*

$$P(t \le T_x \le t + \Delta t | T_x > t) = \frac{P(t < T_x \le t + \Delta t)}{P(T_x > t)}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T_x \le t + \Delta t | T_x > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t {}_tp_x} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x(t)$$

называется ***мгновенной смертностью в момент*** $x + t$ *или* ***интенсивностью смерти***.

Свойства 1.1. *1.* $\mu_x(t) \ge 0$ *при* $t \in [0, \omega - x]$

2. $\int\limits_0^b \mu_x(t)dt = \infty$, *где* $b > \omega - x$

Замечание.

$$\mu_x(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial t}(1 - F(t))}{1 - F(t)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial t}({}_tp_x)}{{}_tp_x} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x$$

$$\Rightarrow {}_tp_x = e^{-\int\limits_0^t \mu_x(u)du}$$

1.2 Модели смертности

Муавр

$$T_x[0, \omega - x] - \text{равномерно распределена}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega - x}, 0 \le t \le \omega - x \\ 0, else \end{cases}$$

Гомпретц

$$\mu_x(t) = AC^{x+t}, (A > 0, C > 1)$$

Отсюда

$$_tp_x \to 0 (t \to \infty)$$

Мэйкхэм

$$\mu_x(t) = D + AC^{x+t}, (A > 0, C > 1, D > 0)$$

Тут берётся во внимние тот факт, что смерть может наступать не только от старости.

$$_tp_x = e^{-\int\limits_0^t D + AC^{x+t}} = e^{-Dt - \frac{A(C^{x+t} - C^x)}{\ln C}}$$

1.3 Оценка числа людей, доживших до момента t

Пусть

L_x – **число людей возраста x из однородной группы**.

Выбираем людей тщательно, ибо время считается в годах.
Определим индикатор

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, i - \text{ый человек проживет больше, чем} t \\ 0, \quad else \end{cases}$$

Тогда

$$EX_i(t) = {}_tp_x$$
$$DX_i(t) = {}_tp_x - ({}_tp_x)^2 = {}_tp_{xt}q_x.$$

Положим

$$L_{x+t} \overset{\text{def}}{=} X_1(t) + ... + X_{L_x}(t)$$

Тогда

$$EL_{x+t} = L_{xt}p_x \overset{\text{def}}{=} l_{x+t} \quad (\Rightarrow EL_x = L_x)$$
$$DL_{x+t} = L_{xt}p_{xt}q_x \text{ (в силу независимости смертей)}.$$

Замечание. *Видно, что*

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

2 Лекция №2 - 18.02.2021

2.1 Оценка числа доживших до момента t

Используя обозначения прошлой лекции, имеем

Утверждение 2.1. $l_{\omega+\varepsilon} = 0, \quad l_{x+t} = l_y(x \le y \le \omega) = l_{x t}p_x$

Множество значений l_y определяет **закон выживаемости**. По нему строится **таблица смертности**. При этом обычно берутся $l_x \sim 10^5, 10^6$.

2.2 Ожидаемая продолжительность оставшейся длительности жизни

Определение 2.1. ***Ожидаемой продолжительностью оставшейся длительности жизни*** *называется математическое ожидание дожития* $\mathring{e}_x = ET_x$

Имеем

$$\mathring{e}_x = \int\limits_0^{\omega-x} tf(t)dt = \int\limits_0^{\omega-x} tF'(t)dt = -\int\limits_0^{\omega-x} t(1-F(t))'dt =$$

$$= [0 \le T_x \le \omega - x] = -\int\limits_0^{\omega-x} t({}_tp_x)'dt = -\int\limits_0^{\omega-x} t(\frac{l_{x+t}}{l_x})'dt = -\frac{1}{l_x} - \int\limits_0^{\omega-x} t(l_{x+t})'dt =$$

$$= [d(tl_{x+t}) = tl'_{x+t}dt + l_{x+t}dt] = -\frac{1}{l_x}\int\limits_0^{\omega-x} d(tl_{x+t}) + \frac{1}{l_x}\int\limits_0^{\omega-x} l_{x+t}dt =$$

$$= \frac{1}{l_x}\int\limits_0^{\omega-x} l_{x+t}dt = \frac{1}{l_x}\int\limits_x^{\omega} l_y dy$$

Оценка 2.1. *Оценим полученный интеграл:*

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} l_{x+k+1} < \int_x^{\omega} l_y dy < \sum_{k=0}^{\omega-x-1} l_{x+k}$$

$$\frac{l_{x+1} + \ldots + l_\omega}{l_x} < \frac{1}{l_x} \int_x^{\omega} l_y dy < 1 + \frac{l_{x+1} + \ldots + l_\omega}{l_x}$$

$$e_x < \mathring{e}_x < 1 + e_x,$$

*где e_x **усечённая ожидаемая продолжительность оставшейся жизни***

$$\mathring{e}_x \approx \frac{1}{2} + e_x$$

Определение 2.2. *Пусть имеем начальное число индивидов в возрасте 0 лет (можно любое другое число лет) $l_0 = L_0$.*

Тогда

$$l_1 = l_0(1 - q_0)$$
$$l_2 = l_1(1 - q_1)$$
$$\ldots$$
$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$$

Введем

$$\overline{X}_i = \begin{cases} 0, \ p_x - & \text{прожил больше года} \\ 1, \ q_x - & \text{скончался в течение года} \end{cases}$$

и

$$D_x = \sum_{i=1}^{L_x} \overline{X}_i$$

Тогда величина

$$Q_x = \frac{D_x}{L_x}$$

*называется **коэффициентом наблюдаемой годовой смертности**.*

Утверждение 2.2. *Имеем*

$$EQ_x = \frac{ED_x}{L_x} = \frac{L_x q_x}{L_x} = q_x$$

$$DQ_x = \frac{DD_x}{L_x} = \frac{\sum D\overline{X}_i}{L_x^2} = \frac{q_x p_x}{L_x}$$

ввиду независимости $\overline{X}_i$.

Рассмотрим величину

$$\frac{Q_x - q_x}{\sqrt{DQ_x}}.$$

При больших значениях L_x распределение данной величины близко к стандартному нормальному в силу ЦПТ. Тогда

$$P(\frac{|Q_x - q_x|T_x}{\sqrt{p_x q_x}} < t) = 2\Phi(t) - 1,$$

где $\Phi(t)$– функция распределения стандартного нормального распределения.

Пример. *Пусть*

$$t = 2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(2) = 0,9772$$
$$L_x = 100000$$
$$D_x = 261$$
$$\Rightarrow \quad Q_x = \frac{261}{100000} = 0,0261$$

Однако на деле имеем

$$p_x \approx 1$$
$$q_x \approx Q_x$$
$$\Rightarrow \quad Q_x - 2\sqrt{\frac{Q_x}{L_x}} < q_x < Q_x + 2\sqrt{\frac{Q_x}{L_x}}$$
$$\Rightarrow \quad 2,281 < q_x < 2,933 permill$$

ТУТ ТАБЛИЦА СМЕРТНОСТИ ПО АНГЛИИ

Утверждение 2.3. *Для непересекающихся прожеутков времени имеем*

$${}_{x+t}p_0 = {}_x p_0 {}_t p_x$$

Доказательство.

$${}_t p_x = P(T_x > t) = P(T_x + x > x + t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) =$$
$$= \frac{P(T_o > t + x)}{P(T_0 > x)} = \frac{{}_{t+x}p_0}{{}_x p_0}$$

■

Можем строить **таблицы смертности**. Бывают **полные, неполные, селективные** таблицы.

Пусть

$$[x] - \text{ время заключения договора при одновременном прохождении медосмотра}$$

$$P_{[x]} - \text{ вероятность прожить год с момента x.}$$

Имеет место эмпирический

Факт 2.1.

$$p_{[x]} > p_{[x-1]+1} > p_{[x-2]+2} > ...$$
$$p_{[x-r]+r} = p_{[x-r-1]+r+1} = ...,$$

*где r - **период отбора(время селекции)** = 5-7 лет*

3 Лекция №2 - 18.02.2021. Дожитие как сумма целой и дробной частей

Имеем

$$T_x \equiv T(x) = K(x) + S(x),$$

где

$$T_x - \text{ случайная величина - время жизни, начиная с х лет}$$
$$K(x) = [T_x] - \text{ целая часть от времени жизни - случайная величина}$$
$$S(x) = \{T_x\} - \text{ дробная часть от времени жизни - случайная величина}$$

3.1 Распределение и моменты K(x)

Теорема 3.1.

$$P(K(x) = k) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$$
$$EK(x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x = e_x$$
$$DK(x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x(2k-1) - (\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x)^2$$

Доказательство. Непосредственно следуя определениям, выпишем распределение и математическое ожидание $K(x)$:

$$P(K(x)=k)=P(k\le K(x)\le k+1)={}_kp_xq_{x+k}={}_kp_x(1-p_{x+k})=$$
$$={}_kp_x-{}_kp_xp_{x+k}={}_kp_x-{}_{k+1}p_x$$
$$EK(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(K(x)=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x-{}_{k+1}p_x+\sum_{k=2}^{\infty}{}_kp_x-{}_{k+1}p_x+\ldots==$$
$$=[p_x-{}_2p_x+{}_2p_x-{}_3p_x+\ldots]+[{}_2p_x-{}_3p_x+{}_3p_x-{}_4p_x+\ldots]=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x=e_x$$

Для подсчета дисперсии по определению

$$DK(x)=E(K(x))^2-(EK(x))^2$$

воспользуемся слеудющим соображением:

Соображение (**Суммирование по частям**). *Пусть*

$$\Delta f_k=f_{k+1}-f_k.$$

Тогда

$$\sum_{k=a}^{b}\Delta f_a+\Delta f_{a+1}+\ldots+\Delta f_b=f_{b+1}-f_a=f_k|_a^{b+1}.$$

Также

$$\Delta u_kv_k=u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k=u_{k+1}v_{k+1}-u_{k+1}v_k-u_kv_k=$$
$$u_{k+1}\Delta v_k+v_k\Delta u_k.$$

Отсюда

$$\sum_{k=a}^{b}\Delta(u_kv_k)=u_kv_k|_a^{b+1}=\sum_{k=a}^{b}u_{k+1}\Delta v_k+\sum_{k=a}^{b}v_k\Delta u_k$$
$$\Rightarrow\quad\sum_{k=a}^{b}v_k\Delta u_k=u_kv_k|_a^{b+1}-\sum_{k=a}^{b}u_{k+1}\Delta v_k$$

Согласно соображению

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) =$$

$$= -{}_kp_x k^2|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x(2k+1) = [\lim_{k\to\infty} {}_kp_x = 0] = \sum_{r=1}^{\infty} {}_rp_x(2r-1)$$

$$\Rightarrow \quad DK(x) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x(2k-1) - (\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x)^2$$

■

3.2 Распределение и моменты S(x)

Рассмотрим 3 варианта моделей

1. **Линейная модель** $\Leftrightarrow \quad {}_uq_x = uq_x, \quad u \in [0;1)$

   Теорема 3.2. $S(x)$ *равномерно распределена.*

   Следствие 3.1.

$$ES(x) = \frac{1}{2}$$

$$DS(x) = \frac{1}{12}$$

$$\mathring{e}_x = ET(x) = \frac{1}{2} + e_x$$

$$DT(x) = DK(x) + \frac{1}{12}$$

Доказательство. Найдем распределение:

$$P(S(x) \le u | K(x) = K) = \frac{{}_uq_{x+k}}{q_{x+k}} = \frac{uq_{x+k}}{q_{x+k}} = u$$

$$S(x), K(x) - \text{ независимы } \Rightarrow \quad P(S(x) \le u) = u$$

■

Напоминание 3.1. *Помним:*

$$\mu_x(u) - \textit{ интенсивность смерти },$$

также

$$
{}_tp_x = e^{-\int\limits_0^t \mu(u)du}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mu_x(u) = -\frac{d\ln({}_up_x)}{du} = -\frac{d\ln(1 - {}_uq_x)}{du} =
$$

$$
= -\frac{1 - uq_x}{du} - \textit{ монотонно возрастающая функция } u.
$$

2. **Постоянство интенсивности смерти в течении года**

$$
\forall \;\; u \in [0;1) \quad \mu_k(u) = \mu_k(\frac{1}{2}) = \mu_{k+\frac{1}{2}},
$$

т.е. интенсивность смерти приближают ступенчатой функцией. Отсюда

$$
{}_tp_x = (p_x)^t
$$

и

$$
P(S(x) \le u | K(x) = k) = \frac{{}_uq_{x+k}}{q_{x+k}} = \frac{1 - (p_{x+k})^u}{1 - p_{x+k}}
$$

Понятно, как считать моменты.

Замечание. *В такой модели не может быть независимости между* $K(x)$ *и* $S(x)$

3. **Условия Балдуччи**:

$$
\forall \;\; u \in [0;1) \text{ имеем } {}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x
$$

Замечание. *Имеем для первого типа модели*

$$
{}_{1-u}q_x = (1-u)q_x.
$$

А для данной

$$
{}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x.
$$

Но

$$
{}_{1-u}q_x \ne {}_{1-u}q_{x+u},
$$

А значит 1 модель точно не совпадает с 3.

Соображение. *Вероятность прожить год:*

$$
p_x = {}_up_x {}_{1-u}p_{x+u} \quad \Rightarrow \quad {}_up_x = \frac{1 - q_x}{1 - (1-u)q_x}.
$$

С другой стороны

$$_tp_x = e^{-\int\limits_0^t \mu_x(u)du}.$$

Значит

$$\mu_x(u) = \frac{q_x}{1-(1-u)q_x}$$

Распределение дробной части в данной модели

$$P(S(x) \le u | K(x) = k) = \frac{_kp_{xu}q_{x+k}}{_kp_xq_{x+k}} =$$
$$= [q_{x+k} \text{ можно записать: }] = \frac{u}{1-(1-u)q_x}$$

Замечание. $\mu_x(u)$ *на интервале внутри года по этой модели монотонно убывает, что противоречит действительности.*

4 Лекция №2 - 18.02.2021. Долгосрочные финансовые операции

4.1 Вводные слова

Деньги приносят доход. Он зависит от

1. времени
2. начальной суммы
3. процента дохода

Пусть в начале клиент платит страховой компании Z рублей.
В момент смерти компания выплачивает Y рублей.
Пока говорим о целом числе лет.

Соображения и определения. *Пусть i - **процентная ставка** (доля годового роста капитала).*

$v = \frac{1}{1+i}-$ ***дисконтирующий множитель.***

Пусть клиент умрет через T лет.

Через T лет сумме Z соответствует сумма $Z(1+i)^T$.

*В момент $t=0$ (**момент заключения контракта**) финансовые обязанности клиента:*

$$Z,$$

страховой компании:

$$Y(1+i)^{-T},$$

*где $Z = Y(1+i)^{-T}-$ **настоящее значение Y (present value)** (pvY).*

Но в долгосрочном страховании $Z, i, Y-$ константы, а $T-$ случайная величина с функцией распределения $F(t)$ и плотностью распределения $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$.

Тогда

$$E(pvY) = Y\int_0^\infty (1+i)^t f(t)dt$$

$$D(pvY) = [E(pvY)^2] - [E(pvY)]^2 = Y^2\int_0^\infty (1+i)^{-2t} f(t)dt - [E(pvY)]^2.$$

Естественно, что в качестве премии выбирают не $Y(1-i)^{-T}$*, а*

$$\pi = E(pvY) = EZ$$

- ***одноразовая нетто ставка****.*

4.2 Дисконтированные платежи

Для предпринимателя (банк, страховое общество), получающего и выдающего денежные суммы в разное время, важно на какой срок приходит к нему или уходит от него некоторая сумма. От пришедшей суммы предприниматель может получить некторый доход, а от выданной суммы теряется возможный доход. Для сравнения сумм, поступающих или уходящих в разное время вводится понятие **современной дисконтированной стоимости платежа**.

Соображения и определения. *Пусть* $A(t)$ *-* ***функция накопления***

$$A(t) = A(0)(1+i)^t,$$

где $A(0)$ *- сумма в момент* $t = 0$*.*

Относительный прирост капитала за n-ый год*:*

$$i_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{A_0(1+i)^n - A_0(1+i)^{n-1}}{A_0(1+i)^{n-1}} = \frac{1+i-1}{1} = i$$

Бывает полезным рассматривать как бы обратное движение капитала.

Найдем так называемое ***уменьшение капитала за n-ый год****(при движении назад):*

$$d_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_0(1+i)^n - A_0(1+i)^{n-1}}{A_0(1+i)^n} = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = d-$$

коэффициент дисконта*(годовой дисконт) или* ***эффективная учетрная ставка*** *за единицу времени.*

Имеем

$$d = iv$$
$$1 - d = v$$
$$\frac{1}{1-d} = 1 + i.$$

Как видно, коэффициент дисконта представляет собой приведенную современную стоимость процентой ставки

$$d = \frac{i}{1+i}$$

или же, обртано, его можно рассматривать как годичный доход, приносимый суммой v:

$$d = iv.$$

5 Лекция № 3 - 25.02.2021. Модели страхований жизни

Напоминание 5.1. ***Одноразовая нетто-ставка***

$$\pi = EpvY = EZ-$$

основная часть платежа клиента. Она не учитывает

- *затрат на обслуживание клиента*
- *риск, который несет страховая компания*

Отсюда

Определение 5.1. ***Брутто-ставка*** - *весь платеж.*

Так как для расчета нетто-ставок нужно знать распредление Z, то и высчитывать мы будеи именно ее, а не брутто-ставку.

Замечание. *Считаем, что сумма, выплачиваемая с/к после страхового случая, равна 1.*

Сумма, которую выплачивает с/к фиксированна, в то время как момент выплаты случаен (ибо случано T_x). В то же время считаем, что страховой взнос (страховая премия) платится один раз в момент $t = 0$(момент заключения контракта).

Прежде, чем мы перейдем к описанию моделей страхования, посчитаем некоторые нетто-ставки.

Пример. *1.* ***Нетто-ставка при страховании на всю жизнь(непрервыный случай).***

Пусть

$$T = K + S$$
$$Z = pv(1) = v^T,$$

где $v = \frac{1}{1+i}-$ *дисконтирующий множитель.*

Тогда одноразовая нетто-ставка равна

$$\overline{A}_x = EZ = \int_0^\infty v^t f(t)dt = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_x dt.$$

Это непрерывный случай, причем выплата происходит сразу после наступления страхового случая.

2. *Рассмотрим более простой случай.*

   Будем считать, что страховая сумма выплачивается в конце года смерти, т.е. в момент

$$T = K + 1$$
$$Z = v^{K+1}$$
$$P(Z = v^{K+1} | K = k) = P(Z = v^{k+1}) = {}_kp_x q_{x+k}$$

   и начнем новую секцию лол

5.1 Модели долгосрочного страхования жизни

1. **Страхование на всю жизнь(дискретный)** (как в пункте 2) предыдущей секции)

   Нетто-ставка будет такой

$$EZ = A_x = E(v^{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k}$$
$$DZ = EZ^2 - (EZ)^2$$

2. **Страхование на конечный промежуток времени(term insurance).**

   По такому договору страховая сумма выплачивается только в случае, если клиент умрёт в течение n лет после заключения договора (**n-year term insurance**).

   В этом случае

$$Z = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, 2, ..., n-1 \\ 0, & k = n, n+1, ... \end{cases}$$

   и нетто-ставка

$$EZ = A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$
$$DZ = E(Z^2) - (A^1_{x:\overline{n}|})^2$$

3. **Страхователь прожил n лет после заключения договора (pure endowment).**

$$Z = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, ... \\ v^k, & k = n, n+1, ... \end{cases}$$

Нетто-ставка

$$EZ = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n {}_n p_x$$
$$DZ = EZ^2 - (A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})^2 = v^{2n} {}_n p_x - v^{2n} ({}_n p_x)^2 = v^{2n} {}_n p_x {}_n q_x$$

4. **Endowments**

Страховая сумма выплачивается в конце года смерти, если она произошла в первые n-лет, или в конце n-ого года, если смерть не наступила.

$$Z = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, 2, ..., n-1 \\ v^n, & k = n, n+1, ... \end{cases}$$
$$Z = Z_1 + Z_2$$
$$Z_1 = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, ..., n-1 \\ 0, & \end{cases} \quad \text{(term insurance)}$$
$$Z_2 = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n, & k = n, n+1, ... \end{cases} \quad \text{(pure endowments)}$$
$$EZ = EZ_1 + EZ_2 = A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$
$$DZ = DZ_1 + DZ_2 + 2cov(Z_1 Z_2) =$$
$$= [Z_1 Z_2 = 0 \Rightarrow \quad cov(Z_1 Z_2) = EZ_1 Z_2 - EZ_1 EZ_2 = -A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}] =$$
$$= DZ_1 + DZ_2 - 2A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

Отсюда видно, что риск от продажи endowments policy меньше, чем от продажи term insurance одному человеку и pure endowments другому.

5. **Отсроченное на m лет страхование на всю жизнь.**

$$Z = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, ..., m-1 \\ v^{k+1}, & k = m, m+1, ... \end{cases}$$

В этом случае нетто-ставка

$${}_{m|}A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m}$$

или

$$ {}_{m|}A_x = A_x - A^{1}_{x:\overline{m}|} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} - \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. $$

Замечание. *Предположение о выплате страховой суммы в конце года смерти не отражает практику в действительном виде, но имеет то преимущество , что формулы могут быть выражены в цифрах, взятых из таблиц.*

6. Вернемся к случаю, когда страховая премия **выплачивается в момент смерти.**

   Используем **линейную модель** для дробной части времени дожития $S(x)$:

$$ {}_u q_x = u q_x, \quad u \in [0, 1). $$

Мы помним:

$$ S(x) \sim R[0,1] $$
$$ S(x) \text{ и } K(x) - \text{ независимы.} $$

Тогда

$$ Ev^T = \overline{A}_x = \int_0^{\infty} v^t f(t) dt. $$

В нашем случае

$$ Ev^T = \overline{A}_x = \int_0^{\infty} v^t dt $$

(сумма работает $K + S$, а не $K + 1$).

$$ T = K + S = (K + 1) - (1 - S). $$
$$ \overline{A}_x = Ev^T = E[v^{(K+1)-(1-S)}] = E[v^{K+1} v^{-(1-S)}] = $$
$$ = E(v^{K+1}) E(v^{-(1-S)}) = Ev^{K+1} E[(1 + i)^{1-S}] $$

$$ \text{Но } E((1 + i)^{1-s}) = \int_0^1 (1 + i)^{1-s} ds = \frac{i}{\ln(1 + i)} $$

$$ \Rightarrow \quad \overline{A}_x = E(v^{K+1}) E((1 + i)^{1-s}) = \frac{i}{ln(1 + i)} A_x $$

Обозначение. $\delta = ln(1+i)$

Подобным образом (для непрерывного случая) можно получить форму для endowments:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{i}{ln(1+i)}A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} =$$
$$= \overline{A}_{x:\overline{n}|} + (\frac{i}{ln(1+i)} - 1)A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

7. **Общие типы страхования жизни.**

   a) Рассмотрим страхование жизни **со страховой суммой изменяющейся от года к году и выплачиваемой в конце года смерти**.

   Пусть C_k- **страховая сумма, выплачиваемая в конце к-ого года жизни(к+1-ого года после заключения контракта)**

$$Z = C_{K+1}v^{K+1}$$
$$\Rightarrow \quad EZ = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}$$

$$EZ = C_1(A_x - {}_{1|}A_x) + C_2({}_{1|}A_x - {}_{2|}A_x) + \ldots$$
или $EZ = C_1A_x + (C_2 - C_1)_{1|}A_x + (C_3 - C_2)_{2|}A_x + \ldots + (C_{n+1} - C_n)_{n|}A_x$,

где

$C_1A_x -$ мат.ожидание современной стоимости C_1;

$C_1A_x - C_{11|}A_x$ - мат.ожидание современной стоимости страховой суммы C_1, выплачиваемой в конце первого года страхования (в случае смерти в этом году);

$C_{21|}A_x - C_{22|}A_x$ - мат.ожидание современной стоимости страховой суммы C_2, выплачиваемой в конце второго года страхования (в случае смерти в этом году) и т.д.

Замечание. *В пункте 7.a) имеем дело с комбинацией отсроченных на разное время страхований с фиксированной для каждого года суммой выплаты.*

   b) В случае, когда **выплата производится только первые n лет**, т.е. когда $C_{n+1} = Cn + 2 = \ldots = 0$, страхование можно представить в виде комбинации страхований на конечный промежуток времени, начавшихся немедленно:

$$EZ = C_n(A^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|}) +$$
$$+ C_{n-1}(A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|}) + \dots + c_1 A^1_{x:\overline{1}|}$$

или

$$EZ = C_n A^1_{x:\overline{n}|} + (C_{n-1} - C_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} +$$
$$+ (C_{n-2} - C_{n-1}) A^1_{x:\overline{n-2}|} + \dots + (C_1 - C_2) A^1_{x:\overline{1}|},$$

где $C_n A^1_{x:\overline{n}|} + (C_{n-1} - C_n) A^1_{x:\overline{n-1}|}$ - сумма выплачивается только в случае смерти в течение n-ого года.

c) Если **выплата производится немедленно после смерти клиента**, то страховая сумма должна быть функцией времени, т.е. $C = C(t)$ $(t \geq 0)$.

В этом случае $Z = C(T)v^T$, и нетто-ставка будет при страховании на всю жизнь (на случай смерти)

$$EZ = \overline{A}_x = \int\limits_0^{\infty} C(t) v^t f(t) dt.$$

Фактически же подсчет нетто-ставки может быть сведен к выплачиваниям для дискретной модели.

$$EZ = \sum_{k=0}^{\infty} E(Z|K = k)P(K = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} E(C(K + S)v^{K+S}|K = k)P(K = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} E(C(K + S)(1 + i)^{1-S}|K = k)v^{k+1}P(K = k).$$

Получаем

$$EZ = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

где $C_{k+1} = E(C(K + S)(1 + i)^{1-S}|K = k)$.

Для оценки C_{k+1} мы нуждаемся в условном распределении S при условии $K = k$. Для этого воспользуемся линейной моделью S, для которой

$$P(S(x) \leq u | K = k) = u$$

$$C_{k+1} = \int_0^1 C(k+u)(1+i)^{1-u} du,$$

так как для этой модели

$$P(u < S \leq u + du) = f(u)du = du.$$

Пример. *Рассмотрим случай показательного возрастания страховой суммы*

$$c(t) = e^{\tau t}.$$

При этом

$$C_{k+1} = \int_0^1 e^{\tau(k+u)}(1+i)^{1-u} du =$$

$$= e^{\tau k}(1+i) \int_0^1 \frac{e^{\tau u}}{(1+i)^u} du =$$

$$= e^{\tau k}(1+i) \frac{(\frac{e^\tau}{1+i})^u}{ln(\frac{e^\tau}{1+i})} |_0^1 = .. = e^{\tau k} \frac{e^\delta - e^\tau}{\delta - \tau} (\ \delta = ln(1+i)),$$

а значит

$$EZ = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\tau k} \frac{e^\delta - e^\tau}{\delta - \tau} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \overline{A}_x$$

5.2 Стандартные типы переменного страхования жизни

Рассмотрим **стандартно возрастающее**

- **страхование на всю жизнь**

  Настоящее значение страховой суммы

  $$Z = (K+1)v^{K+1}.$$

  В этом случае нетто-ставку обозначают

  $$(IA)_x$$

и

$$(IA)_x = \sum_{jk=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}.$$

Соотвественно для

- **n-year term insurance** мы имеем

$$Z = \begin{cases}(k+1)v^{k+1}, & k = 0, 1, ..., n-1\\ 0, & k = n, n+1, ...\end{cases}$$

Нетто-ставка обозначается

$$(IA)^1_{x:n\urcorner},$$

и , используя полученные в предыдущей секции результаты, имеем

$$(IA)^1_{x:n\urcorner} = A_x + {}_{1|}A_x + ... + {}_{n-1|}A_x - n_{n|}A_x,$$

$$\text{ибо } C_1 = 1, C_2 - C_1 = 2-1, ..., C_n - C_{n-1} = n - n + 1 = 1$$

$$0 = C_{n+1} = C_{n+2} = ... \Rightarrow \quad C_{n+1} - C_n = -n.$$

или

$$(IA)^1_{x:n\urcorner} = nA^1_{x:n\urcorner} - A^1_{x:n-1\urcorner} - A^1_{x:n-2\urcorner} - .. - A^1_{x:1\urcorner}$$

- **стандартно убывающее n-year term insurance**(убывающее от n до 0).

  Этот тип страхования удобно использовать при гарантийной оплате заёма, при условии, что долго возвращается частями каждый год, т.е. и страховая сумма уменьшается каждый год.

  Имеем

$$Z = \begin{cases}(n-k)v^{k+1}, & k = 0, 1, ..., n-1\\ 0, & k = n, n+1, ...\end{cases}$$

  Тогда нетто-ставку обозначим так (и посчитаем)

$$(DA)^1_{x:n\urcorner} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}$$

$$(DA)^1_{x:n\urcorner} = A^1_{x:n\urcorner} + A^1_{x:n-1\urcorner} + A^1_{x:n-2\urcorner} + ... + A^1_{x:1\urcorner}$$

- Будем снова считать, что **страховая сумма выплачивается сразу после смерти клиента**, т.е.

$$Z = C(T)v^T,$$

  и использовать линейную модель для S.

Если страховая сумма возрастает ежегодно, то

$$C(K) = K + 1$$
$$Z = (K+1)v^T = (K+1)v^{(K+1)-(1-S)} =$$
$$= (K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S}$$

(если смерть наступит в течение K - ого года , то сумма будет работать не K+1 год, а K+S).

Для этого случая (используя независимость K и S), нетто-ставка получается равной (используем соотношение $\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$)

$$(I\overline{A})_x = \frac{i}{ln(1+i)}(IA)_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x$$

- Теперь рассмотрим случай, когда **страховая сумма выплачивается в конце m-ой части года**, в которой наступила смерть.

$$T = K + S^{(j)} \quad \Rightarrow \quad Z = v^{K+S^{(j)}},$$

где $S^{(j)}$ получается из S округлением до следующего более высокого значения , кратного $\frac{1}{m}$. Таким образом, всем возможным значениям моментов смерти на полуоткрытом интервале $(0, \frac{1}{m}]$ ставится в соотвествие одно значение $S^{(1)} = \frac{1}{m}$.

Для $S \in (\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]$ соответствует $S^{(1)} = \frac{2}{m}$

...

Для $S \in (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ соответствует $S^{(j)} = \frac{j}{m}$

...

Для $S \in (\frac{m-1}{m}, 1]$ - $S^{(m)} = 1$.

Из независимости K и S следует независимость между K и $S^{(j)}$. К тому же, если S имеет равномерное распределение между 0 и 1, то $S^{(j)}$ имеет дискретное равномерное распредление.

$$s - \text{ момент смерти на } (0,1]$$
$$s^{(j)} - \text{ момент выплаты.}$$

При этом $i^{(m)}$ - **номинальная годовая процентная ставка**.

Сумма, равная 1 в момент $t = 0$ к концу первого интервала $(0, \frac{1}{m}]$ будет равна

$$1 + \frac{i^{(m)}}{m}$$

и т.д. к концу года

$$(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m,$$

в этот момент она должна быть равна $1 + i$, где i - годовая процентная ставка:

$$(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m = 1 + i$$

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - (1+i)^0}{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} ln(1+i)(-\frac{1}{m^2})}{\frac{1}{m^2}} = ln(1+i) = \delta$$

т.е. δ **можно рассматривать как предел отношения прироста единичного капитала за время $h = \frac{1}{m}$ к h.**

Если говорить об изменениях суммы в течение года, то в прямом направлении - это процентная ставка i, в обратном - коэффициент дисконта d

$$\frac{1}{1-d} = 1 + i \quad d = \frac{i}{1+i}.$$

Если же говорить об измененниях m раз в течение года, то в **прямом направлении** это $i^{(m)}$ - **номинальная годовая процентная ставка** или $\frac{i^{(m)}}{m}$ - процентная ставка за интервал $\frac{1}{m}$.

При рассмотрении в **обратном направлении** это $d^{(m)}$ - **номинальный годовой дисконт** за интервал $\frac{1}{m}$.

Можно записывать соотношения между d и i или между $\frac{d^{(m)}}{m}$ и $\frac{i^{(m)}}{m}$, но не между $d^{(m)}$ и $i^{(m)}$, т.к. это только формальные величины.

По аналогии с формулой $d = \frac{i}{1+i}$ имеем

$$\frac{d^{(m)}}{m} = \frac{\frac{i^{(m)}}{m}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}} \Rightarrow d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$$

и видим, что

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

Вернемся к началу рассматриваемого нами пункта.

Для расчета нетто-премии снова используем линейную модель для S и страховую сумму, равную 1.

$$K + S^{(j)} = (K+1) - (1 - S^{(j)})$$
$$E[(1+i)^{1-S^{(j)}}] = \frac{1}{m}[(1+i)^{1-\frac{1}{m}} + ... + (1+i)^{1-\frac{m}{m}}] =$$
$$= [\frac{1}{m} - \text{ вероятность попадания в интервал длины } \frac{1}{m}] =$$
$$= \frac{1+i}{m}\frac{(1+i)^{-\frac{1}{m}}(1-(1+i)^{-\frac{m}{m}})}{1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}} = \frac{(1+i)(1+i)^{-\frac{1}{m}}(1-\frac{1}{1+i})}{m\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}} = \frac{i}{i^{(m)}}$$

Тогда

$$A_x^{(m)} = E(v^{K+1})E[(1+i)^{1-s^{(j)}}] = \frac{i}{i^{(m)}}A_x$$
$$E(v^{K+1}) = A_x$$
$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{i}{\delta}A_x =$$
$$= \frac{i}{ln(1+i)}A_x = \overline{A}_x$$
$$A_x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \overline{A}_x,$$

т.е. $A_x^{(m)}$ стремится к нетто-ставке, выплачиваемой сразу после смерти клиента.

6 Лекция № 4 - 4.03.2021. Ренты

6.1 Детерминированные ренты

Определение 6.1. ***Рента*** *- периодические взносы или выплаты, производимые в конце или в начале обусловленного периода времени.*

Рента, выплачиваемая вперед (пренумерандо) *- рента, взносы по которой производятся в начале каждого периода.*

Рента за истекшее время (постнумерандо) *- рента, взносы по которой производятся в конце каждого периода.*

1. **Рента за истекшее время**

$$v + ... + v^n = a_{x:n\urcorner} - \text{ настоящее значение ренты}$$
$$a_{x:\infty\urcorner} - \text{ — бесконечной ренты}$$
$$S_{x:n\urcorner} - \text{ накопленное значение ренты}$$

Пример. *Пусть A - ежегодная сумма и $i = 0.04$. Тогда*

$$a_{x:\infty\urcorner} = A\frac{1}{0.04} = 25A,$$

то есть настоящее значение бесконечной ренты равно 25-кратной сумме годовой выплаты.

Пример. *Найти накопленное значение ренты сразу после последнего платежа при регулярных перечислениях 25$ каждые 2 месяца в течение 10 лет при годовой процентной ставке $i = 6\% = 0.06$*

Имеем

$$(1 + \frac{i^{(6)}}{6}) = 1 + i \Rightarrow j = \frac{i^{(6)}}{6} \approx 0.01$$
$$S_{x:n\urcorner} = 2041,74$$

2. **Рента, выплачиваемая вперед**

$$1 + v + ... + v^{n-1} = \ddot{a}_{x:n\urcorner} - \text{ настоящее значение ренты}$$

$$\Rightarrow \quad va_{x:n\urcorner} = \ddot{a}_{x:n\urcorner}$$

$$\ddot{a}_{x:\infty\urcorner} - \text{ — бесконечной ренты}$$

$$\Rightarrow \quad a_{x:\infty\urcorner} = \ddot{a}_{x:\infty\urcorner} + 1$$

$$\ddot{S}_{x:n\urcorner} - \text{ накопленное значение ренты}$$

3. **Отсроченная рента**

$$_{m|}a_{x:n\urcorner} -$$

настоящее значение ренты за истекающий срок (отсроченной на m лет);

$$_{m|}\ddot{a}_{x:n\urcorner} -$$

настоящее значение ренты, выплачиваемой вперед (отсроченной на m лет)

Замечание. *Мы можем рассматривать современную стоимость ренты, которая обеспечит заданный размер годичной ренты (или пенсии).*

Естественно, чтобы подобные задачи были вполне определенными , надо знать

- *какой тип ренты предполагается*
- *в течение скольких лет она должна выплачиваться*
- *какова принятая норма роста денег*

6.2 Страховые ренты

1. **Страхование на всю жизнь** Предположим, что клент платит по 1 рублю в моменты 0,1, ..., k до тех пор, пока он жив. Это модель ренты, выплачиваемой вперед; k случайно.

Единовременная нетто-ставка - математическое ожидание настоящего значения этих платежей (платежей клиента)

$$\ddot{a}_x = EY = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{x:k+1\urcorner} {}_kp_x q_{x+k}$$

Также

$$1 + v + .. + v^k = \ddot{a}_{x:k+1\urcorner} = \frac{1 - v^{k+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d},$$

где Z - настоящее значение страховой суммы равной 1, выплачиваемой в конце года смерти клиента.

Устанавливаем связь единовременной нетто-ставки единичных платежей с известными нам нетто-премиями:

$$\ddot{a}_x = E\ddot{a}_{x:\overline{k+1}|} = \frac{1-EZ}{d} = \frac{1-A_x}{d}$$

Соображение. *Преобразуем формулу к некоторому более удобному виду. Имеем:*

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{x:\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{k+1}|} = 1 + v + .. + v^k = \frac{1-v^{k+1}}{d}$$

$$q_{x+k} = P(T_{x+k} < 1) \ ; \quad {}_kp_x = P(T_x > k)$$

$${}_{k+1}p_x = {}_kp_x(1-q_{x+k})$$

$$\Rightarrow \quad q_{x+k} = 1 - \frac{{}_{k+1}p_x}{{}_kp_x}$$

Тогда

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{d}\, {}_kp_x\left(1 - \frac{{}_{k+1}p_x}{{}_kp_x}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{d}\, {}_kp_x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{d}\, {}_{k+1}p_x =$$

$= [$*во втором слагаемом сначала заменим k+1 на k, а затем просуммируем не от 1, а от 0 (это не изменит суммы)*$] =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}-1+v^k}{d}\, {}_kp_x = [d = 1-v] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x$$

Замечание. *Формула*

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$$

дает связь между страхованием (риском смерти) и аннуитетом (риск не дожить до очередной выплаты. В этом случае рента прекращается, дальнейших платежей нет)

2. **Страхование на конечный промежуток времени** Приведенные значения сумм, выплачиваемых страхователем

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k = 0, 1, 2, ..., n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k = n, n+1, ... \end{cases}$$

Отсюда

$$EY = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{x:\overline{k+1}|\,k}p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|\,n}p_x$$

Мы знаем, что

$$Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1 - v^{k+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d},$$

где

$$Z = \begin{cases} v^{k+1}, & k = \overline{0, n-1} \\ v^n, & k = n, n+1, ... \end{cases}$$

Мы имеем случай endowments и значит

$$EY = \frac{1 - EZ}{d} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d},$$

где $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$- математическое ожидание настоящего значения платежей клиента (страхователя),

$A_{x:\overline{n}|}$- математическое ожидание настоящего значения платежа страховой компании (страховащика).

3. В случае ренты за истекшее время (постнумерандо), когда клиент платит по 1 рублю в моменты 1,2, ..., k, пока он жив.

$$Y = v + v^2 + ... + v^k = a_{\overline{k}|}.$$

Связь: единовременная нетто-ставка платежей клиента (постнумерандо, договор на всю жизнь):

$$a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - 1$$

6.2.1 Периодические нетто-ставки (нетто-премии)

Страховой полис устанавливает с одной стороны выплаты страховщика (страховой компании)(the benefits), которые могут представлять собой единичную выплату или серию выплат, и с другой стороны премию (сумму), выплачиваемую страхователем.

Существует три формы премий выплачиваемых (вносимых) страхователем:

1. **одноразовая нетто-премия**
2. **периодические нетто-премии одной величины**
3. **периодические нетто-премии переменной величины**

Для периодических премий продолжительность и частота уплаты премий должны быть точно определены в дополнение к величине премии.

Относительно страхового полиса определяется **общий убыток страховщика**.

$$EL = 0$$

- **принцип эквивалентности**. С помощью данного принципа определяются одноразовые нетто-премии и периодические нетто-премии одной величины. Для периодических нетто-премий переменной величины этот принцип не подходит.

Пример. *Будем рассматривать случай term insurance для возраста 40 лет, на период 10 лет (выплата страховой суммы происходит только в том случае, если клиент умрет в течение этих 10 лет) и страховая сумма C выплачивается в конце года смерти, премия π платится ежегодно вперед, пока страхователь жив, но не более 10 лет,* $i = 0.04$.

Решение. Убыток L страховщика в этом случае будет

$$L = \begin{cases} Cv^{k+1} - \pi \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k = 0, 1, ..., 9 \\ -\pi \ddot{a}_{\overline{10}|}, & k = 10, 11, ... \end{cases}$$

Определим годовую нетто-премию, используя принцип эквивалентности

$$EL = 0 \quad \Rightarrow \quad CA^{1}_{40:\overline{10}|} - \pi \ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 0.$$

1. При подсчете $A^{1}_{40:\overline{10}|}$ вероятность умереть в течение одного года (любого из оставшихся) равна $\frac{1}{60}$ (равномерная модель Муавра):

   $$\omega - 40 = 100 - 40 = 60.$$

   Вероятность смерти в течение одного определенного года равна $\frac{1}{60}$, ибо это условная вероятность умереть в течение определенного года (чтобы умереть в течение именно этого года, надо дожить до начала этого года), т.е.

   $$_kp_{40}q_{40+k} = \frac{1}{60}$$

2. $$\pi = \frac{CA^{1}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}$$

Используя закон Муавра, находим ${}_{10}p_x = \frac{5}{6}$,

$$A^{1}_{40:\overline{10}|} = 0.1352$$
$$A_{40:\overline{10}|}^{\ \ \ 1} = 0.5630$$
$$A_{40:\overline{10}|} = 0.6982$$
$$\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = \frac{1 - A_{40:\overline{10}|}}{d} = \frac{1 - 0.6982}{\frac{i}{1+i}} = 7.8476$$
$$\pi = 0.01723C$$

■

7 Лекция № 5 - 11.03.2021. Элементарные формы страхования

1. **Страхование на всю жизнь** с единичной выплатой (равной 1) в конце года смерти, которая финансируется годовыми нетто-премиями, которые мы обозначим P_x.

   Тогда

   $$L = v^{k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$
   $$EL = 0 \ \Rightarrow \ A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$$

   Отсюда

   $$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

   Вспоминая соотношение $1 = d\ddot{a}_x + A_k$, имеем

   $$P_x = \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}.$$

2. **Страхование на n лет, без выплаты в случае дожития до n лет** (единичная выплата в конце года смерти)(n-term insurance).

   Годовая нетто-премия в этом случае обозначается $P^1_{x:\overline{n}|}$.

   Тогда

   $$L = \begin{cases} v^{k+1} - P^1_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k = 0, 1, .., n-1 \\ -P_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}$$

   Принцип эквивалентности:

   $$EL = A^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0$$
   $$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

3. Страховая сумма (равная 1) выплачивается если страхователь **дожил до n лет** (pure endowments)

Годовая нетто-премия в этом случае $P_{x:\overline{n}|}^{\ 1}$.

Тогда убыток страховой компании

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ 1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k = 0, 1, .., n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{\ 1}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}$$

И из принципа эквивалентности:

$$EL = 0$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

4. **Endowments**

Обязательства страховой компании

$$Z = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n, & k \geq n \end{cases}$$

$$EZ = A_{x:\overline{n}|}.$$

Обязательства клиента

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k = 0, 1, ..., n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k \geq n. \end{cases}$$

В этом случае убыток L является суммой убытков L_1 и L_2 (равных убыткам в случаях (2) и (3)).

$$L_2 = v^{k+1} - \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

$$L_3 = v^n - \ddot{a}_{\overline{n}|}, \quad k \geq n$$

$$L = L_1 + L_2.$$

Отсюда

$$EL = E(v^{k+1} + v^n) - [E(\ddot{a}_{\overline{k+1}|} + \ddot{a}_{\overline{n}|})]P_{x:\overline{n}|} =$$
$$= EZ + P_{x:\overline{n}|}EY = 0,$$

где

$$EZ = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} + v^n{}_np_x = A_{x:\overline{n}|}$$

$$EY = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}{}_kp_xq_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}{}_np_x$$

$$\Rightarrow \ P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

При этом
$$P_{x:\overline{n|}} = P^1_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}.$$
Используя равенство (некоторое), получим
$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = d + P_{x:\overline{n|}} \;\Rightarrow\; P_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - d.$$
И так как
$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - A_{x:\overline{n|}}}{d},$$
то
$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{d}{1 - A_{x:\overline{n|}}} = \frac{dA_{x:\overline{n|}}}{1 - A_{x:\overline{n|}}}$$
$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{dA_{x:\overline{n|}}}{1 - A_{x:\overline{n|}}}.$$
Последнее равенство можно записать в виде
$$P_{x:\overline{n|}} = dA_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}A_{x:\overline{n|}},$$
а его можно представить как сумму равенств
$$P^1_{x:\overline{n|}} = dA^1_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}A^1_{x:\overline{n|}}$$
$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = dA_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} + P_{x:\overline{n|}}A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}.$$

5. **Отсроченное страхование**

В этом случае обязательства страховой компании
$$Z = \begin{cases} 0, \quad k = 0, .., m-1 \\ v^{k+1}, \quad k = m, m+1, ... \end{cases}$$
Тогда
$$EZ = {}_{m|}A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m}.$$
Обязательства клиента
$$Y = \begin{cases} 0, \quad k = 0, 1, .., m-1 \\ v^m + ... + v^k, \quad k = m, m+1, ... \end{cases}$$
Годовая нетто-премия в этом случае
$${}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}A_x}{{}_{m|}\ddot{a}_x} = \frac{{}_m p_x v^m A_{x+m}}{{}_m p_x v^m \ddot{a}_{x+m}} = \frac{A_{x+m}}{\ddot{a}_{x+m}}.$$

6. Это случай, когда **страховая сумма меняется от года к году** (т.е. $C_{j+1},\quad j=0,1,..,k$), и при этом **страхование финансируется годовыми премиями** $\pi_0,\pi_1,..,\pi_k$, выплачиваемыми вперед.

   В этом случае общий убыток

$$L = C_{k+1}v^{k+1} - \sum_{k=0}^{k} \pi_k v^k,$$

   а премии являются нетто-премиями, если они удовлетворяют уравнению

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k v^k {}_kp_x$$

7. **Полисы с возмещением премии**.

   В страховой практике встречается большое разнообразие форм страхования и планов платежей. Это делает очень сложным (невыполняемым) установление одноразовых нетто-премий, определенных для всех возможных комбинаций. Основное правило, которому следуют в заданной ситуации, состоит в установлении убытка L и в дальнейшем применении условия $EL=0$.

   Пример. *Схема pure endowments с одной единичной выплатой через n лет исходит из условия , что в случае смерти клиента до истечения n лет, возвращение уплаченных премий будет произведено, но без учета набежавших процентов. Какой должны быть годовая нетто-премия , если брутто-премия превосходит годовую нетто-премию P на 40%?*

   В этом случае убыток компании

$$L = \begin{cases} (k+1)(1.4P)v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k=0,1,..,n-1 \\ v^n - P\ddot{a}_{\overline{n}|}, & k=n,n+1,.. \end{cases}$$

   Тогда

$$EL = E((k+1)(1.4P)v^{k+1}) + Ev^n - E[P(\ddot{a}_{\overline{k+1}|} + \ddot{a}_{\overline{n}|})]$$
$$EL = 1.4P(IA)^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0$$
$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1.4(IA)^1_{x:\overline{n}|}}$$

Некоторые определения

- **Net single premium** - одноразовая нетто-ставка (платится один раз при заключении контракта).

- **Net premium** - ежегодная нетто-ставка (ежегодная или с другой частотой).

- **Net single premium** = E(настоящее значение страховой суммы) и, конечно, удовлетворяет **принципу эквивалентности** $EL = 0$.

- **Net premium** - для их расчета надо использовать **принцип эквивалентности** $EL = 0$.

7.0.1 Резерв нетто-премий

Рассмотрим страховой полис, который финансируется нетто-премиями. На начало работы полиса математическое ожидание настоящего значения будущих премий равно математическому ожиданию настоящего значения будущих выплат страховщика (benefits), что приводит к тому, что математическое ожидание убытка L равно 0 ($EL = 0$). Это равенство между будущими премиями и будущими benefits, вообще говоря, отсутствует для более позднего времени.

Поэтому дадим

Определение 7.1. *случайной величины* ${}_tL$ *как разности (для момента* t*) между настоящим значением будущих выплат страховщика и настоящим значением будущих (после момента* t*) премий страхователя.*

Считаем, что страхователь жив в момент t, т.е. $T_x > t$.

Рассмотрим два типа резерва:

1. проспективный

2. ретроспективный

Определение 7.2. ***Проспективный резерв*** *нетто-премий на момент* t *обозначается* ${}_tV$ *и определяется как условное математическое ожидание* ${}_tL$ *(при условии, что* $T_x > t$*).*

Полис страхования жизни всегда выбирается в таком виде, чтобы резерв нетто-премий ${}_tV$ был бы положительным или неотрицательным. Это делается для того, чтобы страхователь для любого момента времени имел бы интерес в продолжении страхования. Поэтому математическое ожидание будущих benefits будут всегда превосходить математическое ожидание будущих нетто-премий.

Для компенсации этого долга (эти премии страховая компания полукчила и использовала уже в своей работе) страховщик всегда должен резервировать достаточное количество денежных средств для покрытия разности значений этих математических ожиданий, т.е. организовать соответствующий резерв нетто-премий ${}_tV$.

Пример. *Заключение 10000 договоров (с мужчинами 60 лет) на срок 5 лет по страхованию на случай смерти с условием выплат (в случае смерти в течении этих 5 лет) 100 денежных единиц в конце года смерти страхователя, либо по прошествии 5 лет, $i = 4\%$ (схема endowments).*

Тогда ежегодная нетто-ставка для одного страхователя (выплачивается в начале года)

$$P_{60:\overline{5}|} = 100\frac{A_{60:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{60:\overline{5}|}} = \frac{100dA_{60:\overline{5}|}}{1 - A_{60:\overline{5}|}} = 18.43.$$

По английским таблицам имеем

$$q_{60} = 0.0144$$
$$q_{61} = 0.01601$$

Произведя расчеты получаем

$$_1V = 100A_{61:\overline{4}|} - 18.43\ddot{a}_{61:\overline{4}|} = 17.98$$
$$_2V = 100A_{62:\overline{3}|} - 18.43\ddot{a}_{62:\overline{3}|} = 36.85$$

Далее поговорим о проспективном резерве для трех моделей страхования

1. **Endowments** Резерв нетто-премий для конца к-ого года в этом случае (n лет, страховая сумма выплачивается либо в конце года клиента, либо по окончании n лет, ежегодные премии) обозначается $_kV_{x:\overline{n}|}$ и

$$_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

   Очевидно $_0V_{x:\overline{n}|} = 0$ из определения нетто-премий.

2. **Term insurance** Резерв нетто-премий для конца к-ого года обозначается $_kV^1_{x:\overline{n}|}$ и задается

$$_kV^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

3. **Whole life insurance** В этом случае резерв нетто-премий

$$_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$$

7.0.2 Реккурентная формула

Для обычного полиса страхования на всю жизнь со страховой суммой $= 1$, с выплатой по случаю смерти в конце года и ежегодной премией P_x, выплачиваемой вперед

$$(_kV_x + P_x)(1 + i) = (A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} + P_x)(1 + i).$$

При этом

$$A_{x+k} = vq_{x+k} + vp_{x+k}A_{x+k+1}$$

и

$$P_x - P_x\ddot{a}_{x+k} = [a_x = \ddot{a} - 1] = -P_x a_{x+k} = -P_x v p_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1},$$

так как a_{x+k} - математическое ожидание настоящего значения ренты клиентаб выплачиваемой в конце $x+k$ года, а $\ddot{a}_{x+k+1}$ - математическое ожидание настоящего значения ренты клиента выплачиваемой в начале $x+k+1$ года, т.е. надо прожить год после $x+k$ и послп этого привести $\ddot{a}_{x+k+1}$ к моменту $x+k \quad \Rightarrow \quad p_{x+k}v\ddot{a}_{x+k+1}$.

Поэтому

$$\begin{gathered}({}_kV_x + P_x)(1+i) = (vq_{x+k} + vp_{x+k}A_{x+k+1} - P_x v p_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1})(1+i) = \\ = q_{x+k} + p_{x+k}(A_{x+k+1} - P_x\ddot{a}_{x+k+1}) = q_{x+k} + p_{x+k\,k+1}V_x.\end{gathered}$$

Получили

$$({}_kV_x + P_x)(1+i) = q_{x+k} + p_{x+k\,k+1}V_x.$$

Таким образом, если взять резерв ${}_mV_x$ на начало года, прибавить к нему периодическую нетто-премию для этого года, увеличить эту сумму с учетом нормы доходности , то эта сумма в точности достаточна для финансирования выплат по случаю смерти q_{x+k} (страховая сумма = 1), а так же ожидаемой стоимости резерва ${}_{k+1}V_x$ на конец года $k+1$ для доживших до этого момента , что происходит с вероятностью p_{x+k}. Эта ожидаемая стоимость равна

$$p_{x+k\,k+1}V_x.$$

Если трактовать резерв ${}_kV_x$ на начало года как доход, а на конец года, если полис действует, как расход, то реккурентная формула говорит, что ${}_kV_x + P_x$ плюс инвестиционный доход равно ожидаемым расходам.

Второй вариант получения реккурентной формулы:

- $T(x+k) > 1$. В этом случае

$${}_kL_x = (0 - P_x) + v_{k+1}L_x.$$

- $T(x+k) = T_{x+k} \leq 1$. В этом случае

$${}_kL_x = v - P_x.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$\begin{gathered}{}_kV_x = E({}_kL_x|T_{x+k} > 0) = E({}_kL_x|T_{x+k} > 1)P(T_{x+k} > 1) + \\ + E({}_kL_x|T_{x+k} \leq 1)P(T_{x+k} \leq 1) = E((0 - P_x) + v_{k+1}L_x)p_{x+k} + \\ + E(v - P_x)q_{x+k} = -P_x(p_{x+k} + q_{x+k}) + v(q_{x+k} + p_{x+k\,k+1}V_x) = \\ = -P_x + v(q_{x+k} + p_{x+k\,k+1}V_x) \\ \Rightarrow \quad ({}_{k+1}V_x + P_x)(1+i) = q_{x+k}p_{x+k\,k+1}V_x.\end{gathered}$$

Пример. *Рассмотрим частный случай* ***Endowments****:*

$$
{}_0V_{x:n\urcorner} = A_{x:n\urcorner} - P_{x:n\urcorner}\ddot{a}_{x:n\urcorner} = 0
$$
$$
{}_kV_{x:n\urcorner} + P_{x:n\urcorner} = vq_{x+k} + vp_{x+k\,k+1}V_x, \quad k = 0, 1, .., n-1
$$

Для последнего года

$$
{}_{n-1}V_{x:n\urcorner} + P_{x:n\urcorner} = vq_{n-1+x} + vp_{x+n-1} = v.
$$

7.0.3 Коммутационные числа

В таблицах дожития есть l_x. Причем

$$
\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x
$$
$$
\frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_kp_x
$$

Определение 7.3. *Величину*

$$
D_x = v^x l_x
$$

называют ***дисконтированным числом доживающих до возраста*** x

Утверждение 7.1. *Пусть*

$$
N_x = D_x + D_{x+1} + \dots
$$

Тогда

$$
\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}
$$
$$
a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}
$$
$$
\ddot{a}_{x:n\urcorner} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}
$$
$$
a_{x:n\urcorner} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}
$$

Доказательство. Имеем

$$
\frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x} = v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n{}_np_x.
$$

Отсюда

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

Так как $a_x = \ddot{a} - 1$, то

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x.}$$

Очевидно,

$$\ddot{a}_{x:n\urcorner} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:n\urcorner} = \frac{N + x + 1 - N_{x+n+1}}{D_x}$$

■

Отсюда

$$\ddot{a}_{x:n\urcorner} - a_{x:n\urcorner} = fracN_x - N_{x+n} D_x - \frac{N + x + 1 - N_{x+n+1}}{D_x} =$$

$$= \frac{D_x - D_{x+n}}{D_x} = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Таким образом разность $\ddot{a}_{x:n\urcorner} - a_{x:n\urcorner}$ всегда меньше 1.

Определение 7.4. *Величину*

$$v^{x+1} d_x$$

называют ***дисконтированным числом умирающих****. Тут d_x - число умерших в течение ближайшего года из обющего числа l_x, заключивших контракт в возрасте x.*

Положим также

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots$$

Тогда обязательство компании (страховая сумма равна 1):

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} =$$

$$= [{}_k p_x q_{x+k} = \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}} = \frac{d_{x+k}}{l_x}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2 d_{x+1}} + \ldots}{v^x l_x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots}{v^x l_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Аналогично

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Теперь годовые нетто-премии

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

8 Лекция №6 - 25.03.2021. Страхование не-жизни

В случае страхования **не-жизни** имеем дело с двумя случайными величинами

1. число требований (страховых событий)
2. размер выплаты по каждому требованию (необязательно полное уничтожение имущества, а значит **страховое возмещение** $\leq$ **страховой суммы**)

Страховая сумма - верхний предел ответственности страховой комапании перед страхователем.

Замечание. *Договор страхования заключается не более чем на год*

Пусть

$$X = x_1 + ... + x_n -$$

сумма всех выплат по одному страховому полису (застраховав машину на год, мы можем несколько раз за год попасть в аварию).

Тогда EX - **нетто-ставка**, но в non-life insurance за основу берется **риск-ставка**

$$r = \pi(x) = EX + \rho,$$

где ρ - **рисковая надбавка**.

Как искать рисковую надбавку?

Нельзя дать слишком маленькую (ведёт к разорению страховой компании) или слишком большую (вытеснению с рынка из-за конкуренции) рисковую надбавку.

Имеются следующие правила расчета риск-ставки:

1. **принцип математического ожидания**

$$\pi(x) = EX + \alpha EX$$

2. **принцип стандартного отклонения**

$$\pi(x) = EX + \beta\sigma, \quad \sigma = \sqrt{DX}$$

3. **принцип дисперсии**

$$\pi(x) = EX + \gamma\sigma^2$$

4. **комбинированный способ**

$$\pi(x) = EX + \beta\sigma + \gamma\sigma^2$$

Эти правила основаны скорее на интуиции и здравом смысле, чем на глубоких теоретических принципах. Их часто называют **прагматические принципы**.

Окончательно с клиента берется **коммерческая премия** или **брутто-ставка**, которая состоит из **риск-ставки** и **нагрузки**.

Нагрузка включает в себя:

1. расходы на ведение дел $\sim 15\%$
2. предупредительные мероприятия $\sim 10\%$
3. прибыль $\leq 15\%$

В случае имущественного страхования нагрузка равна $\sim 15\% + 10\% + 15\% = 40\%$ от коммерческой премии.

8.1 Модели учета риска

Полис может составляться для различных моделей учета риска.

1. **Модель индивидуального риска**

   Общий убыток в этом случае

   $$X = X_1 + ... + X_n,$$

   где $n-$ число договоров (n фиксировано), а

   $$X_1, ..., X_n$$

   - независимые, разнораспределённые случайные величины ($X_i > 0$).

   В этой модели по каждому договору может быть предъявлен только один иск.

2. **Модель коллективного риска** В этом случае

   $$X = X_1 + ... + X_\nu,$$

   где ν - число требований (случайная величина), $X_i > 0$ - размер требования (X_i – i-ый по порядку поступления иск. Он не связан с i-ым договором). Фиксируем некоторые предположения:

   - $\nu, X_1, ..., X_\nu-$ независимые в совокупности случайные величины.

- $X_1, ..., X_\nu$– одинаково распределенные случайные величины.

Очевидно в случае коллективной модели

$$EX = E\nu EX_i$$
$$DX = E\nu DX_i + (EX_i)^2 D\nu$$

В случае коллективной модели по каждому договору может поступить несколько требований (общая сумма требований не превышает страховую сумму).

В индивидуальной модели риска требования о изучаются на уровне отдельного договора , а общий размер выплат - по отдельным договорам страхования.

В коллективной модели риска предполагается, что число требований о выплате в целом следует некоторому распределению, и общий размер выплат изучается теперь на уровне портфеля (однородного портфеля). Можно считать, что число требований на выплату представляет собой случайный процесс.

Для построения риск-ставки надо знать условия страхования. Из этих условий отбираются риски, которые должны учитываться при расчете риск-ставки. Для оценки степени каждого риска используется статистика.

Итак, расчет ставок состоит из следующих этапов:

1. сбор данных, выявление факторов, влияющих на размер тарифных ставок

   Замечание. *Во Франции (при расчете ставок в автомобильном страховании) учитываются следующие параметры:*

   a) тип автомобиля (от 4 до 16 типов)

   b) географическая зона использования автомобиля

   c) вид использования (частное, бизнес)

   d) возраст водителя

   e) возраст автомобиля

   f) пол, профессия водителя

   g) стаж водителя

2. построение модели, предположение о распределении числа требований N и распределение величины убытка (требования).

3. Проверка гипотез, оценка параметров распределений

4. Непосредственный тарифный расчет

Далее познакомимся с некоторыми распределениями для числа требований и , так называемыми, распределениями потерь, применяемыми в страховании.

8.2 Распределения для числа страховых требований

Факт 8.1. *Из опыта своей работы западные страховые компании употребляют в качестве распределений числа требований только те дискретные распределения, у которых*

$$DN \geq EN.$$

Биномиальное распределение для этой цели **не подходит** , т.к. $DN = npq < np = EN$.

8.2.1 Распределение Пуассона

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$EN = DN = \lambda.$$

Равенство математического ожидания и дисперсии резко ограничивает применение этого распределения.

Далее рассматривается задача проверки гипотезы о пуассоновости.

Проверка такой гипотезы для **для числа автомобильных аварий во Франции** приводит к отбрасыванию этой гипотезы. Для этого случая вполне подходит **отрицательное биномиальное**.

И пуассоновское, и отрицательно биномиальное распределение являются частными случаями **распределения Хофмана**, которые используется в автостраховании и других видах страхования не-жизни.

Пусть m_i - число страхователей с i страховыми случаями. Воспользуемся **Критерием** χ^2.

Число автомобильных аварий во Франции за год

Число требований	Набл. част. (m_i)	Теор. част. (np_i)	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	881705	873987.9	68.14
1	142217	155729.8	1172.52
2	18088	13874.2	1279.79
3	2118	824.1	2031.80
4	273	36.7	1521.03
5	53	1.3	2056.07

Число степеней свободы в распределении статистики: $\nu = 6 - 1 - 1 = 4$.

Общее число требований: $n = m_0 + \sum_{i=1}^{5} im_i = 1067544$.

Значение статистики: $\chi^2 = \sum\limits_{i=0}^{5} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 8139.31.$

Пусть уровень значимости $\alpha = 0.05$. Тогда нужный квантиль равен $\chi^1_{(1-\alpha)} = 9.49 << \chi^2$. Следовательно, гипотеза о пуассоновском распределении отвергается.

8.2.2 Отрицательно биномиальное распределение

Рассматривается последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Испытания проводятся до появления k -ого успеха. Общее число ν испытаний случайно.

$$\nu = k + r.$$

Испытания прекращаются при появлении k -ого успеха, т.е. до этого произошло $(k-1+r) = (\nu - 1)$ испытаний, среди которых $k-1$ закончились успехом и r неуспехом.

8.2.3 Смешанное пуассоновское распределение

Рассматривается пуассоновское распределение, в котором параметр λ - случайная величина. Точнее, λ - одно из возможных значений непрерывной случайной величины Λ с плотностью $f(\lambda)$.

Замечание. *Для смешанного пуассоновского распределения*

$$EN = E\Lambda$$
$$DN = E\Lambda + D\Lambda.$$

В том случае, когда Λ имеет гамма-распределение , т.е.

$$f(\lambda) = \frac{\beta^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\beta\lambda},$$

можно считать, что смешанное пуассоновское распредление сводится к отрицательно биномиальному.

8.3 Система Бонус-Малус

Страхуем автомобили. При подсчёте величины страхового взноса хотелось бы учесть качество езды клиентов (поощрительная система). При этом можем опираться на предыдущий опыт (имеющиеся данные).

Пусть n_1 - число требований клиента, зафиксированные в 1-ом году;

n_2 - число требований того же клиента, зафиксированные во 2-ом году;

...

n_t - число требований того же клиента, зафиксированные во t-ом году;

N_{t+1} - случайная величина. О ней нам хотелось бы узнать по прошлым наблюдениям.

На основании t наблюдений $n_1, n_2, ..., n_t$ построим апостериорное распределение для N_{t+1}.

Предполагаем, что $N_1, ..., N_t$ - случайные величины, имеющие смешанное пуассоновское распредление, в котором λ - реализация случайной величины Λ с плотностью распределения $f(\lambda)$.

$$P(N = k) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} d\lambda.$$

Допустим, что при фиксированном $\Lambda = \lambda$ случайные величины $N_1, ..., N_t, N_{t+1}$ - независимы.

(Мы можем под λ понимать качество вождения отдельно взятого водителем. В этом случае $N_1, ..., N_t, N_{t+1}$ - независимы).

Обозначим через $f^{n_1,...,n_t}(\lambda)$ апостериорную плотность распредления Λ.

По **формуле Байеса**

$$P(\frac{A_i}{B}) = \frac{P(A_i)P(\frac{B}{A_i})}{P(B)},$$

в которой для нашего случая будем считать, что

$$B : n_1, ..., n_t$$
$$A_i : \Lambda = \lambda.$$

Тогда

$$f^{n_1,...,n_t}(\lambda) = ... \sim f(\lambda) \prod i = 1^t ... \sim f(\lambda) e^{-t\lambda} \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^t}}{\prod\limits_{i=1}^t n_i}$$

Апостериорное распределение числа требований на $(T + 1$ **год** $(N + 1)$
Имеем

$$P(N_{t+1} = m | N_1 = n_1, ..., N_t = n_t) =$$

$$= \int\limits_0^\infty P(N_{t+1} = m | N_1 = n_1, ..., N_t = n_t, \Lambda = \lambda) f^{n_1,...,n_t}(\lambda) d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} f^{n_1,...,n_t}(\lambda) d\lambda$$

8.4 Нетто-ставка страхового взноса

Нетто-ставка без учета предыдущей информации $n_1, ..., n_t$

$$\pi = EN_{t+1}EC,$$

где EC - средняя стоимость требования за все года наблюдения.

Рассматривается **однородный портфель**, т.е.

$$C_{N_1}, ..., C_{N_t}$$

- одинаково распределенные сл.в. и средняя стоимость требований за все годы одна и та же

$$EC_{N_1} = ... = EC_{N_t} = EC.$$

Хотелось бы брать премию с учетом предыдущей информации

$$I_{t+1} = \frac{E(N_{t+1}|N_1 = n_1, ..., N_t = n_t)EC}{EN_{t+1}EC}.$$

Данная величина называется **частотным индексом (коэффициентом) за (t+1) год**. В числителе стоит премия, учитывающая предыдущую информацию (сведения о качестве вождения). В знаменателе - премия, которую берут с клиента, когда он приходит первый раз в страховую компанию.

Таким образом, частотный индекс может быть выражен

$$I_{t+1} = \frac{E(\Lambda|N_1 = n_1, ..., N_t = n_t)}{E(\Lambda)} = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda f^{n_1,...,n_t}(\lambda)d\lambda}{\int\limits_0^\infty \lambda f(\lambda)d\lambda}.$$

Для построения I_{t+1} нам надо знать $f(\lambda)$ и $f^{n_1,...,n_t}(\lambda)$. Подсчитывам премию π , а с клиента берем πI_{t+1}.

Как это реализуется на практике?

Авторы статьи выбирают в качестве распределения для Λ - гамма-распределение

$$f(\lambda) = \frac{\beta^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\beta\lambda}.$$

При этом, мы знаем, что смешанное пуассоновское распредедение переходит в отрицательно биномиальное. Последнее распределение достаточно хорошо соответствует тому, что происходит на практике (число появления требований).

При этой плотности $f(\lambda)$, апостериорная плотность

$$f^{n_1,\dots,n_t}(\lambda) = f(\lambda)e^{-t\lambda}\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{t} n_i}}{\prod\limits_{i=1}^{t}(n_i!)} =$$

$$= e^{-\lambda(t+\beta)}\lambda^{(2+\sum\limits_{i=1}^{t} n_i)-1}\frac{\beta^r}{\Gamma(r)}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{t}(n_i!)}$$

Авторы считают, что это можно считать гамма-распределением с точностью до множителя $\frac{\beta^r}{\Gamma(r)}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{t}(n_i!)}$.

Предположив, что Λ имеет гамма-распределение , для априорного распределения Λ опять гамма-распределением, только с другими параметрами.

Для гамма-распределения $f(\lambda) \;\; \rightarrow \;\; E\Lambda = \frac{r}{\beta}$.

Для апостериорного $f^{n_1,\dots,n_t}(\lambda) \;\; \rightarrow \;\; E\Lambda = \frac{r+\sum\limits_{i=1}^{t} n_i}{\beta+t}$.

Распределение числа аварий - отрицательно биномиальное и в силу этого , как мы видим, для нахождения I_{t+1} используются только смешивающие $(f(\lambda),\ f^{n_1,\dots,n_t}(\lambda))$распределения.

$$I_{t+1} = \frac{r+\sum\limits_{i=1}^{t} n_i}{\beta+t}\frac{\beta}{r}.$$

По имевшимся данным была проведена оценка параметров r и β

$$\hat{r} = 1.67305$$
$$\hat{\beta} = 9.38950$$

и построена таблица для I_{t+1} (по столбцам значения $\sum n_i$, по строкам значения t):

	0	1	2
0	100		
1	90.4	144.4	
2	82.4		
3	75.8		
4	70.1		
5	65.3		
6	61.0		
7	57.3		
8	54.0		
9	51.1		
10	48.4		

На следующий год страховки клерки по таблице значений I_{t+1}, принятых во Франции, находят соответствующий %.

Во Франции закон:

- если не было страховых случаев, то страховой взнос уменьшается каждый год на 5% от предыдущего
- если такие случаи были, то увеличивается на 25% от предыдущего за каждый страховой случай
- $50\% \leq$ *Premium* $\leq 350\%$.

8.5 Распределения потерь

Страховой портфель компании из большого числа договоров. Все эти договоры разбиваются на отдельные группы по отдельным видам страховых рисков. По каждой такой группе договоров за некоторый временной промежуток (год) приходится выплачивать страховые возмещения (claim). Эти выплаты (по индивидуальным страховым возмещениям, относящимся к одной группе), подчиняются некоторому распределению, называемому **распределением потерь**.

Мы должны определить, к какому распределению относится неизвестное распределение. Эту задачу + оценку неизвестных параметров мы разрешаем, используя статистические данные.

Рассмотрим таблицу, состоящую из 96 различных значений страховых возмещений по какой-то группе однородных полисов. (Величина возмещения указана в фунтах стерлингов)

Стоим. возм.	набл.част.	теор.част.(эксп.)	Pareto a)	Pareto b)	Weibull $W(c, \gamma)$
0-260	12	8	12.7	15.4	17.6
260 - 545	18	8	11.4	13.0	11.9
545 - 860	10	8	10.2	10.9	10.0
860 - 1212	8	8	9.1	9.3	8.8
1212 - 1612	7	8	8.2	8.0	7.9
1612 - 2073	10	8	7.4	6.9	7.1
2073 - 2618	5	8	6.7	6.0	6.5
2618 - 3285	6	8	6.1	5.3	6.0
3285 - 4145	6	8	5.6	4.8	5.5
4145 - 5357	3	8	5.2	4.4	5.1
5357 - 7430	4	8	5.1	4.2	4.8
7430 - ∞	7	8	8.3	7.7	4.8

Строим гистограмму:

Первоначальный общий вывод о типе распределения : оно ассиметричное с длинным хвостом.

8.5.1 Экспоненциальное распределение

Пусть $\overline{\lambda}$ оценка параметра λ. Используя метод максимального правдоподобия , найдем, что

$$\overline{\lambda} = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}.$$

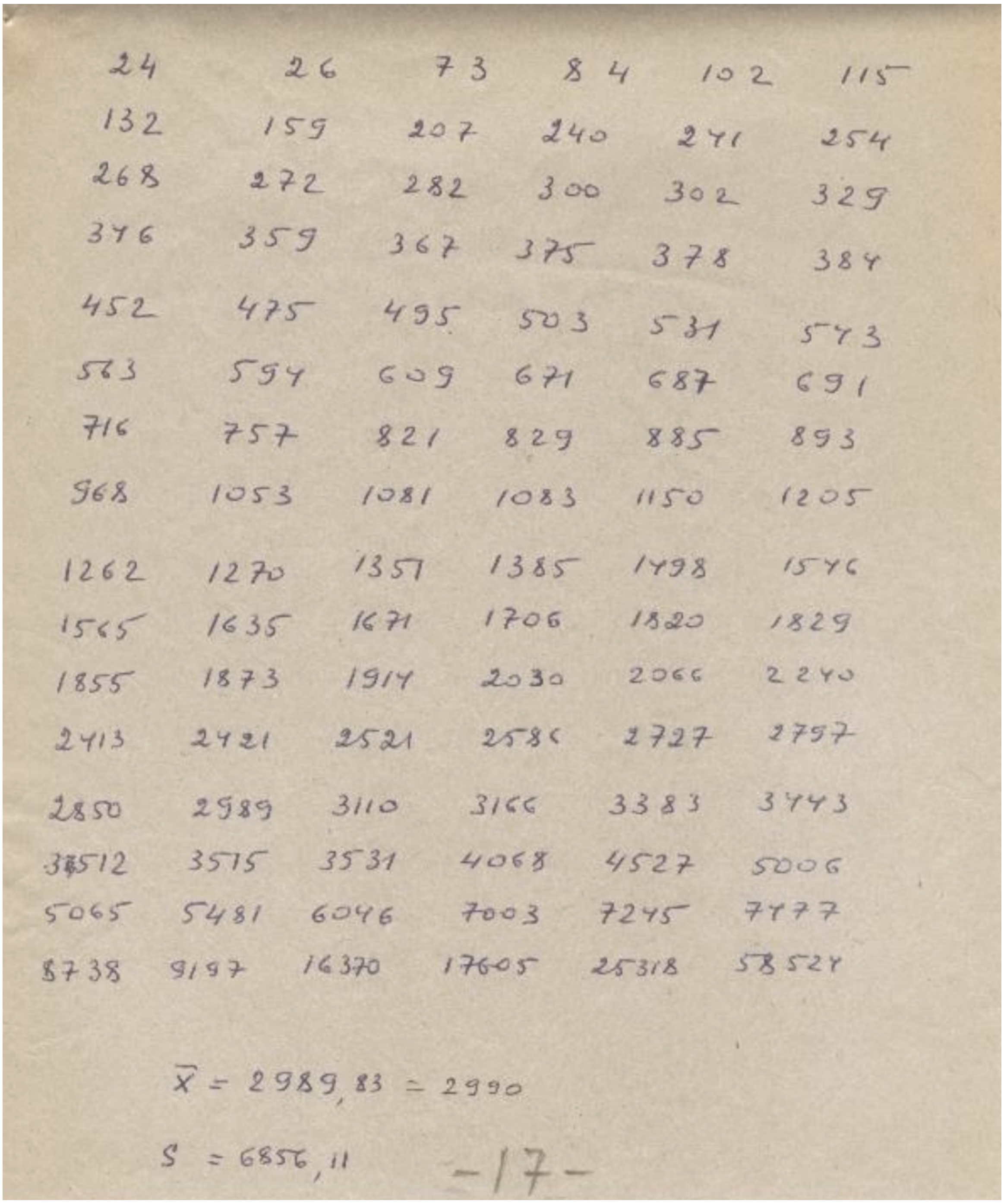
Для нашего случая $\overline{X} = 2990 = \overline{\lambda}$.

Проверяем гипотезу об экспоненциальном распределении с параметром $\overline{\lambda} = 2990$.

Проверяем с помощью критерия $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{12} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$.

Весь интервал разбит на 12 интервалов, m_i известны,np_i подсчитываем. Получаем $\chi^2 = 23$ (у нас χ^2 с 12 - 1 -1 = 10 степенями свободы). Тогда

$$\alpha = 0.01 \;\; \chi^2_{1-\alpha} = 23.2 \;\Rightarrow \quad \text{гипотеза отбрасывается}$$
$$\alpha = 0.05 \;\; \chi^2_{1-\alpha} = 18.31$$



24	26	73	84	102	115
132	159	207	240	241	254
268	272	282	300	302	329
346	359	367	375	378	384
452	475	495	503	531	543
563	594	609	671	687	691
716	757	821	829	885	893
968	1053	1081	1083	1150	1205
1262	1270	1351	1385	1498	1546
1565	1635	1671	1706	1820	1829
1855	1873	1914	2030	2066	2240
2413	2421	2521	2586	2727	2797
2850	2989	3110	3166	3383	3443
3512	3515	3531	4068	4527	5006
5065	5481	6046	7003	7245	7477
8738	9197	16370	17605	25318	58524

$\bar{x} = 2989{,}83 \approx 2990$

$S = 6856{,}11$ -17-

Рис. 8.1: Таблица страховых возмещений

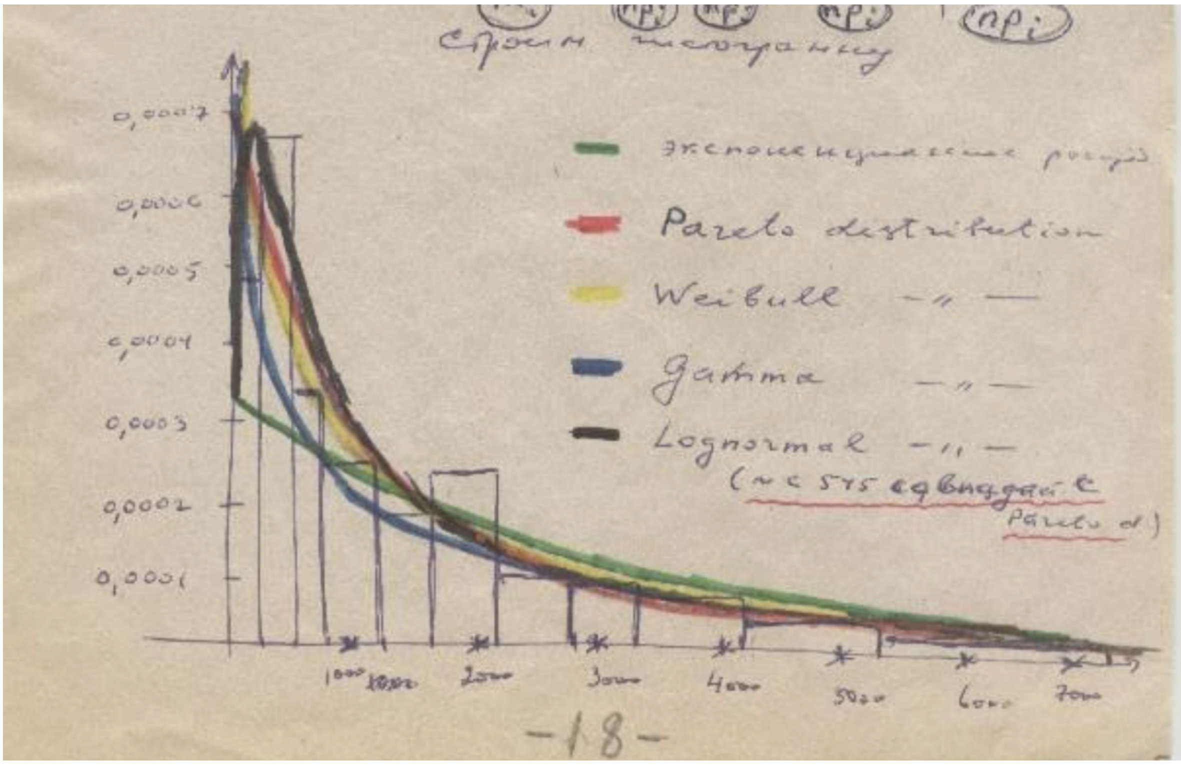


Рис. 8.2: Гистограмма