МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

экономический поток

Уравнения с частными производными

3 курс, группа 332

5-6 семестры

Лектор, семинарист
к. ф.-м. н., доцент
Т.О. Капустина
«___» ________ 2021 г.

Москва, 2021 г.

Техническая информация

Данный PDF содержит примерную программу по предмету "Уравнения с частными производными" 5-ого и 6-ого семестров.

Собрали и напечатали по мотивам лекций студенты 3-го курса Конов Марк и Гащук Елизавета.

Авторы выражают огромную благодарность лектору, семинаристу, кандидату физико-математических наук, доценту Капустиной Татьяне Олеговне за прочитанный курс по предмету «Уравнения с частными производными».

Добавления и исправления принимаются на почты vkonov2@yandex.ru, gashchuk2011@mail.ru.

ПРИЯТНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Программа экзамена по предмету «Уравнения с частными производными»

1. Линейные уравнения с частными производными второго порядка. Понятие характеристики. [4], § 2.2. Классификация уравнений второго порядка. Приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных. [1], глава I, § 1(1). Приведение к каноническому виду уравнений с постоянными коэффициентами в случае трех и более независимых переменных. [5], приложение.

2. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка. Теорема Коши-Ковалевской (без доказательства). [2], § 1.4(7).

3. Корректность постановки задачи. Пример Адамара некорректной задачи. [2], § 1.4(6,8).

4. Задача Коши для уравнения струны. Формула Даламбера. [5], глава I, § 2 Решение неоднородного уравнения, принцип Дюамеля. [2], § 5.1.6.

5. Полуограниченная струна. Методы четного и нечетного продолжения. Решение задачи для полуограниченной струны с неоднородным граничным условием. [5], глава I, § 5

6. Задача Коши для волнового уравнения в R2 и R3 . Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши. [4], § 5.1.1.

7. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. [4], § 5.1.2.

8. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Метод спуска. [4], § 5.1.3.

9. Ограниченная струна. Метод Фурье. [5], глава II, § 6, 7.2, 8.2.

10. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность решения первой краевой задачи. [1], глава III, § 1(5,6).

11. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума в неограниченной области. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. [1], глава III, § 1(7).

12. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. [1], глава III, § 3(1).

13. Метод Фурье для уравнений Лапласа и Пуассона в круге и кольце. [5], глава II, § 9.2.

14. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. [2], § 2.1, 2.2. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. [2], § 3.1(1,2).

15. Формулы Грина. [4], § 3.1.

16. Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. [4], § 3.2.

17. Функция Грина оператора Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина. [4], § 3.6. Метод отражений. Метод конформных отображений. [5], глава IV, § 4, 5

18. Свойства гармонических функций: теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару, принцип максимума, теорема Лиувилля. [4], § 3.5.

19. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. [4], § 3.4. Единственность решения задачи Дирихле. [4], § 3.5. Задача Неймана: условие разрешимости [6], § 5.2, теорема о множестве решений [5], глава IV, § 2(8).

Программа экзамена

1 Линейные уравнения с частными производными второго порядка. Понятие характеристики. Классификация уравнений второго порядка. Приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду уравнений с постоянными коэффициентами в случае трех и более переменных. **7**

2 Задача Коши для линейного уравнения второго порядка. Теорема Коши-Ковалевской (без доказательства). **11**

3 Корректность постановки задачи. Пример Адамара некорректной задачи. **12**

4 Задача Коши для уравнения струны. Формула Даламбера. Решение неоднородного уравнения, принцип Дюамеля. **13**

5 Полуограниченная струна. Методы четного и нечетного продолжения. Решение задачи для полуограниченной струны с неоднородным граничным условием. **17**

6 Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши. **20**

7 Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в R^3. **24**

8 Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в R^2. Метод спуска. **27**

9 Ограниченная струна. Метод Фурье. **30**

10 Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность решения первой краевой задачи. **35**

11 Задача Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума в неограниченной области. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. **37**

12 Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. **39**

13 Метод Фурье для уравнений Лапласа и Пуассона в круге и кольце. **41**

14 Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. **44**

15 Формулы Грина. **49**

16 Фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2 и R^3. **51**

17 Функция Грина оператора Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина. Метод отражений. Метод конформных отображений. **55**

18 Свойства гармонических функций: теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару, принцип максимума, теорема Лиувилля. **61**

19 Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Единственность решения задачи Дирихле. Задача Неймана: условие разрешимости, теорема о множестве решений. **65**

Список используемой литературы **67**

1 Линейные уравнения с частными производными второго порядка. Понятие характеристики. Классификация уравнений второго порядка. Приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду уравнений с постоянными коэффициентами в случае трех и более переменных.

Пусть $u(x, y)$ - неизвестная функция.

Определение 1.1. *Общий вид линейного уравнения с частными производными II порядка:*

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + f(x,y)u_y + h(x,y)u = m(x,y)$$

где a, b, c, d, f, m, h - функции от (x, y).

Определение 1.2. *Сделаем замену в уравнении: $\frac{\partial}{\partial x} \to \lambda$, $\frac{\partial}{\partial y} \to \mu$. Тогда* ***характеристическим многочленом*** *(****главным символом****) называется $A(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2$.*

Определение 1.3. *Линия $y = y(x)$ называется* ***характеристикой****, если на нормали к ней в каждой точке главный символ равен нулю:*

$$A(\overrightarrow{n}) = A(dy, -dx) = a(dy)^2 - 2dydx + c(dx)^2 = 0$$

Классификация уравнений второго порядка.

- если $a \not\equiv 0$, то делим на $(dx)^2$
- если $a \equiv 0$ и $c \not\equiv 0$, то делим на $(dy)^2$

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0, \ \frac{D}{4} = \delta(x, y) = b^2 - ac$$

- если $\delta(x, y) > 0$, то уравнение гиперболического типа
- если $\delta(x, y) < 0$, то уравнение эллиптического типа
- если $\delta(x, y) = 0$, то уравнение параболического типа

Случай двух переменных : $u(x, y)$

1. $\delta(x, y) > 0$, *гиперболический тип*

   Квадратное уравнение имеет два корня: $y' = f_1(x, y)$ и $y' = f_2(x, y)$.
   Решаем эти ДУ и записываем решения в виде $\begin{cases} \psi_1(x, y) = C_1 \\ \psi_2(x, y) = C_2 \end{cases}$.

   - замена: $\begin{cases} \xi = \psi_1(x, y) \\ \eta = \psi_2(x, y) \end{cases}$
     Тогда $\overline{a} = \overline{c} \equiv 0$, $\overline{u_{\xi\eta}} = F(\xi, \eta, \overline{u}, \overline{u_\xi}, \overline{u_\eta})$ - **I-ый канонический вид гиперболического типа**
   - замена: $\begin{cases} \xi = \psi_1 + \psi_2 \\ \eta = \psi_1 - \psi_2 \end{cases}$
     Тогда $\overline{a} = -\overline{c}$, $\overline{b} \equiv 0$, $\overline{u_{\xi\xi}} - \overline{u_{\eta\eta}} = G(\xi, \eta, \overline{u}, \overline{u_\xi}, \overline{u_\eta})$ - **II-ой канонический вид гиперболического типа**

2. $\delta(x, y) < 0$, *эллиптический тип*

   $D < 0$, действительных корней нет, тогда находим комплексные: $y' = f(x, y)$, $y' = f^*(x, y)$, f, f^* - комплексно сопряженные.
   Записываем решения ДУ в виде первых интегралов: $\begin{cases} \varphi(x, y) = C_1 \\ \varphi^*(x, y) = C_2 \end{cases}$

   Замена: $\begin{cases} \xi = \mathbb{R}e\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \\ \eta = \mathbb{I}m\varphi(x, y) = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*) \end{cases}$
   Тогда $\overline{a} = \overline{c}$, $\overline{b} \equiv 0$, $\overline{u_{\xi\xi}} + \overline{u_{\eta\eta}} = H(\xi, \eta, \overline{u}, \overline{u_\xi}, \overline{u_\eta})$ - **канонический вид эллиптического типа**

3. $\delta(x,y)=0$, *параболический тип*

$D=0$, имеем ровно один корень $y'=f(x,y)$.
Решаем ДУ и решение записываем в виде $\varphi(x,y)=C$.
Замена: $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$, где ψ - любая функция, независимая с φ, т.е. якобиан $J\neq 0$.
При невырожденной замене знак D сохраняется: $\overline{\delta}=\delta J^2$, $\overline{\delta}=\overline{b}^2-\overline{ac}\equiv 0$.
Тогда $\overline{a}=\overline{b}\equiv 0$, $\overline{u_{\eta\eta}}=G(\xi,\eta,\overline{u},\overline{u_\xi},\overline{u_\eta})$ - **канонический вид параболического типа**.

Рассмотрим уравнение:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_yy+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \qquad (*)$$

где $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ - зависят от (x,y).
Сделаем невырожденную замену координат:

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases},\quad \begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0$$

Тогда по теореме о дифференцировании сложной функции:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$$
$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y$$

$$\begin{aligned}u_{xx}&=(u_\xi)_x\xi_x+u_\xi\xi_{xx}+(u_\eta)_x\eta_x+u_\eta\eta_{xx}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x+u_\xi\xi_{xx}+u_{\eta\xi}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\eta\eta_{xx}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{xy}&=(u_\xi)_y\xi_x+(u_\eta)_y\eta_x+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x+u_{\xi\eta}(\eta_y\xi_x+\eta_x\xi_y)+u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{yy}&=(u_\xi)_y\xi_y+u_\xi\xi_{yy}+(u_\eta)_y\eta_y+u_\eta\eta_{yy}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y+u_\xi\xi_{yy}+u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\eta\eta_{yy}=\\&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}\end{aligned}$$

Подставим в $(*)$ и получим:

$$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi}+2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta}+\overline{a_{22}}u_{\eta\eta}+\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u=\delta$$
$$\overline{a_{11}}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2$$
$$\overline{a_{12}}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\eta_y)+a_{22}\xi_y\eta_y$$
$$\overline{a_{22}}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2$$

Заметим, что:

$$\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}} \cdot \overline{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2 = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \cdot J^2, \quad J \neq 0$$

Отсюда следует **инвариантность** данного типо уравнения при преобразовании переменных.

Уравнения II-порядка с ≥ 3 независимыми переменными: $u(x_1, \ldots, x_n)$

Определение 1.4. *Общий вид линейного уравнения:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u''_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu'_{x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n), \quad a_i, b_i, c = const$$

Определение 1.5. *Сделаем замену $\frac{\partial}{\partial x_i} \to \lambda_i$. Тогда* ***характеристическим многочленом*** *(главным символом) называется*

$$A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j =$$
$$= \pm(\beta_{11}\lambda_1 + \cdots + \beta_{1n}\lambda_n)^2 \pm \cdots \pm (\beta_{n1}\lambda_1 + \cdots + \beta_{nn}\lambda_n)^2 =$$
$$= \pm\mu_1^2 \pm \cdots \pm \mu_n^2$$

В матричном виде: $\overrightarrow{\mu} = B\overrightarrow{\lambda}$.

Замена: $\overrightarrow{\xi} = (B^{-1})^T\overrightarrow{x}$

Канонический вид: $\pm\overline{u_{\xi_1\xi_1}} \pm \cdots \pm \overline{u_{\xi_n\xi_n}} = F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \overline{u}, \overline{u_{\xi_1}}, \ldots, \overline{u_{\xi_n}})$

- если все $+$, то уравнение эллиптического типа
- если есть $+$ и $-$, то уравнение гиперболического типа
- если есть $= 0$, то уравнение параболического типа

2

Задача Коши для линейного уравнения второго порядка. Теорема Коши-Ковалевской (без доказательства).

Определение 2.1 (**Задача Коши**).
Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ *- поверхность,* $dimS = n-1$, $S : F(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}u''_{x_ix_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_iu'_{x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n), \ \ a_i, b_i, c, f \text{ - функции от } x_1, \ldots, x_n \\ u|_s = \varphi(\overrightarrow{x}), \ S \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}|_S = \psi(\overrightarrow{x}), \text{ где } \overrightarrow{l} \text{ - не касательное направление к поверхности } S \end{cases}$$

Напоминание 2.1. ***Аналитическая функция*** *вещественного переменного - это функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения.*

Теорема 2.1 (**Коши-Ковалевской**). *Пусть выполняется:*

1) $a_{ij}(\overline{x}), b_i(\overline{x}), c, f, \psi, \xi$ *- аналитические функции в области* $\Omega : s \subset \mathbb{R}$
$S : F(\overline{x}) = 0 \ \Rightarrow \ F$ *- тоже аналитическая функция в* Ω

2) *поверхность* S *не характеристическая, т.е.* $A(\overrightarrow{n}) \neq 0$ *ни в одной точке* S.

Тогда $\exists! \ u(\overline{x})$ *- решение задачи Коши в некоторой области* $Q : S \subset Q \subset \Omega$ *и* $u(\overline{x})$ *- аналитическая функция в* Q.

Замечание. *Решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных условий.*

Доказательство. Если $\varphi_n \xrightarrow{\text{равн-но}} \varphi$, $\psi_n \xrightarrow{\text{равн-но}} \psi$, то $u_n \xrightarrow{\text{равн-но}} u$ при $t < t_0$.

$$\begin{cases} \varphi_n(x-t) \xrightarrow{\text{равн-но}} \varphi(x-t) \\ \varphi_n(x+t) \xrightarrow{\text{равн-но}} \varphi(x+t) \end{cases} \Rightarrow |\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi d\xi - \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi_n d\xi| \leq \int\limits_{x-t}^{x+t} |\psi - \psi_n| d\xi \leq$$

$\leq 2t \cdot max|\psi - \psi_n| \to 0$, т.к. $|\psi - \psi_n| \xrightarrow{\text{равн-но}} 0$. ■

3

Корректность постановки задачи. Пример Адамара некорректной задачи.

Определение 3.1. *Задача называется* ***корректной****, если выполнены 3 условия:*

1. *решение существует*
2. *решение единственно*
3. *решение непрерывно зависит от данных задачи (начальных условий)*

Пример Адамара некорректной задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x) \\ u_y|_{y=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Главный символ: $\lambda^2 + \mu^2 \;\Rightarrow$ эллиптический тип.
$(dx)^2 + (dy)^2 = 0$, т.е. $y = 0$ - нехарактеристическое направление, значит сущестует единтвенное решение.
Заметим, что если $\varphi(x) \equiv 0, \psi(x) \equiv 0$, то $u \equiv 0$.

Теперь рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} (u_n)_{xx} + (u_n)_{yy} = 0 \\ u_n|_{y=0} = \frac{1}{n^2}\sin{(nx)} \; (\xrightarrow[n\to\infty]{} 0) \\ (u_n)_y|_{y=0} = \frac{1}{n}\sin{(nx)} \; (\xrightarrow[n\to\infty]{} 0) \end{cases}$$

Решение: $u_n = \frac{1}{n^2}\sin{(nx)}e^{ny}$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а должно стремиться к 0 (из показанного выше).

Т.о. задача Коши для уравнения Лапласа (эллиптического уравнения) поставлена некорректно.

4

Задача Коши для уравнения струны. Формула Даламбера. Решение неоднородного уравнения, принцип Дюамеля.

Уравнение колебаний струны: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

1. **начальные** условия: $t = 0$ $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \text{ - отклонение} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \text{ - скорость} \end{cases}$

2. **граничные** (краевые) условия: $x = 0, x = l$

I рода : $\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=0} = \mu(t) \end{cases}$

II рода : $\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = \nu(t) \end{cases}$

III рода : $\begin{cases} (\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = \gamma(t) \\ (\alpha u_x + \beta u)|_{x=l} = \delta(t) \end{cases}$

Задача Коши для уравнения струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$u(t, x)$ - положение точки x струны в момент времени t (отклонение от оси x в одномерном случае).

$$A(\lambda, \mu) = \lambda^2 - a^2\mu^2$$
$$A(dx, -dt) = (dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0 \ \Rightarrow \ (x_t')^2 = a^2 \ \Rightarrow \ x_t = \pm a \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ x = \pm at + c \text{ - уравнения характеристик.}$$

Делаем замену:

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \quad \Rightarrow \; u_x = u_\xi + u_\eta, \; u_t = au_\xi - au_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \; u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} \; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0 \; \Rightarrow \; u_{\xi\eta} = 0$$
$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} = 0 \; \Rightarrow \; u_\xi = F(\xi) \; \Rightarrow \; u = f(\xi) + c(\eta) \; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; u(x,t) = f(x + at) + c(x - at)$$

Определим f и c так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям:

$$\varphi(x) = f(x) + c(x)$$
$$u_t = af'(x + at) - ac'(x - at) \; \Rightarrow \; \psi(x) = a(f'(x) - c'(x))$$

Проинтегрируем:

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy + K = f(x) - c(x) \; \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy + \varphi(x)\right) + \frac{K}{2} \\ c(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\right) - \frac{K}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \varphi(x + at) + \varphi(x - at)\right)$$ - **формула Даламбера**

Замечание. *Полученное* $u(t, x)$ *- действительно единственное решение задачи Коши, но в предположении, что* $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \; \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Примеры задачи Коши для разных струн:

1. ограниченная струна: $x \in (0, l)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \; x \in (0, l), \; t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = \nu(t) \\ (\alpha u_x + \beta u)|_{x=l} = \gamma(t) \end{cases}$$

2. бесконечная струна: $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

3. полуограниченная струна: $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ x > 0,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = \nu(t) \end{cases}$$

Принцип Дюамеля

Рассмотрим неоднородное уравнение:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$\begin{cases} (u_1)_{tt} = a^2 (u_1)_{xx},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ (u_1)|_{t=0} = \varphi(x) \\ (u_1)_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} (u_2)_{tt} = a^2 (u_2)_{xx} + f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ (u_2)|_{t=0} = 0 \\ (u_2)_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение для u_1 получаем по формуле Даламбера. Решим систему для u_2. Рассмотрим вспомогательную задачу для $v(t, x, \tau)$:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx},\ t > \tau,\ x \in \mathbb{R} \\ v|_{t=\tau} = 0 \\ v_t|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases}$$

$$u_2(t,x) \overset{?}{=} \int\limits_0^t v(t,x,\tau)d\tau$$

$$u_2|_{t=0} = 0$$

$$u_{2t} = v(t,x,t) + \int\limits_0^t v_t(t,x,\tau)d\tau,\ v(t,x,t) = 0\ \Rightarrow\ u_{2t}|_{t=0} = 0$$

$$u_{2xx} = \int\limits_0^t v_{xx}(t,x,\tau)d\tau$$

$$u_{2tt} = v_t(t,x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(t,x,\tau)d\tau = f(t,x) + a^2\int\limits_0^t v_{xx}(t,x,\tau)d\tau = f(t,x) + a^2 u_{xx}$$

Введем замену $z = t - \tau$, тогда:

$$\begin{cases} v_{zz} = a^2 v_{xx},\ z > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ v|_{z=0} = 0 \\ v_z|_{z=0} = f(\tau, x) \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$v(z,x,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-az}^{x+az} f(\tau,y)dy$$

$$v(t,x,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)dy$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)dyd\tau$$

Получаем итоговую формулу:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)dyd\tau\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right)$$

5

Полуограниченная струна. Методы четного и нечетного продолжения. Решение задачи для полуограниченной струны с неоднородным граничным условием.

Однородное уравнение с однородным граничным условием I рода

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x > 0 \\ \left.\begin{matrix} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{matrix}\right\} \text{ - начальные условия для } x > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ t > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Нечетно отразим начальные условия:

$$\varphi(x) \ = \begin{cases} \varphi(x),\ x \geq 0 \\ -\varphi(-x),\ x < 0 \end{cases} \qquad \psi(x) \ = \begin{cases} \psi(x),\ x \geq 0 \\ -\psi(-x),\ x < 0 \end{cases}$$

Т.е. свели задачу к виду:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \left.\begin{matrix} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{matrix}\right\},\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

По формуле Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy$$

Проверим, что $u|_{x=0} = 0$:

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\varphi(at) + \varphi(-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \psi(y)dy = 0, \text{ т.к. функции нечетные.}$$

Т.е. если надо решить $*$, то продолжим нечетным образом начальные условия. Тогда функция $\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy$ определена при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ и $u|_{x=0} = 0$. Кроме того, эта функция при $x > 0$ удовлетворяет условиям $u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x)$. Т.е. рассматривая полученную функцию при $x \geq 0,\ t \geq 0$, получим функцию, удовлетворяющую $*$.

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy,\ x > at \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) - \varphi(at-x)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(y)dy,\ x < at \end{cases}$$

Однородное уравнение с однородным граничным условием II рода

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x > 0 \\ \left.\begin{array}{c} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{array}\right\} \text{ - начальные условия для } x > 0 \\ u_x|_{x=0} = 0,\ t > 0 \end{cases}$$

В этом случае отразим начальные условия четным образом:

$$\varphi(x) \quad = \quad \begin{cases} \varphi(x),\ x \geq 0 \\ \varphi(-x),\ x < 0 \end{cases} \qquad \psi(x) \quad = \quad \begin{cases} \psi(x),\ x \geq 0 \\ \psi(-x),\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \left.\begin{array}{c} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{array}\right\},\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

По формуле Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\varphi'(at) + \varphi'(-at)\right) + \frac{1}{2}\left(\psi(at) - \psi(-at)\right) = 0$$

Аналогично предыдущему получаем:

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy,\ x > at \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right) + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{0}^{x+at}\psi(y)dy + \int\limits_{0}^{at-x}\psi(y)dy\right),\ x < at \end{cases}$$

Однородное уравнение с неоднородным граничным условием III рода

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x > 0 \\ \left.\begin{matrix} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{matrix}\right\},\ x > 0 \\ (\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0 \end{cases}$$

В этом случае решение ищется в виде:

$$u(t,x) = \begin{cases} f(x+at) + g(x-at),\ x > at \text{ (по формуле Даламбера)} \\ f(x+at) + h(x-at), x < at \end{cases}$$

Т.е. по формуле Даламбера найдем решение при $x > at$ и также найдем f, остается найти h. Воспользуемся начальным граничным условием $(\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = \mu(t)$. Выразим $h(y) = \cdots + C$. Чтобы найти C, воспользуемся тем, что при $x = at$ $g(0) = h(0)$.

Неоднородное уравнение с граничным условием III рода

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x),\ t > 0,\ x > 0 \\ \left.\begin{matrix} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{matrix}\right\},\ x > 0 \\ (\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $w(t,x)$: $w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(t,x)$ (w подбирается так, чтобы это было верно).

Пусть теперь $u = w + v$, тогда подставим это в $**$ и получим:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ v_t|_{t=0} = \psi_1(x) \\ (\alpha v_x + \beta v)|_{x=0} = \mu_1(t) \end{cases}$$

Алгоритм решения данной системы описан ранее.

6 Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши.

Напоминание

1. **формула Гаусса-Остроградского**

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\overline{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} w \cdot n_i \cdot d\sigma$$

2. **формула интегрирования по частям**

$$w = f \cdot g, \ \iint\limits_{\Omega} (\frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial g}{\partial x_i} f) d\overline{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} f \cdot g \cdot n_i d\sigma \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g d\overline{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} f \cdot g \cdot n_i d\sigma - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f d\overline{x}$$

3. **теорема о потоке**

$$w = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot d\overline{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot n_i d\sigma \text{ - суммируем по } i:$$

$$\iint\limits_{\Omega} \triangle f d\overline{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} (\overline{\nabla} f, n) d\sigma = \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{n}} d\sigma$$

4. **производная интеграла по параметру**

$$F(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} h(t,x)dx, \;\; F'(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)dx + h(t,b(t)) \cdot b'(t) - h(t,a(t)) \cdot a'(t)$$

Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u = a^2(u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n})$$

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u, \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n \\ \left. \begin{array}{l} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{array} \right\}, \;\; \overline{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

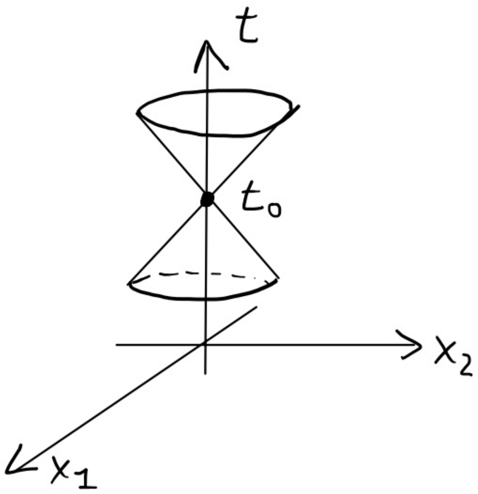
Рассмотрим случай $\mathbf{n = 2}$:

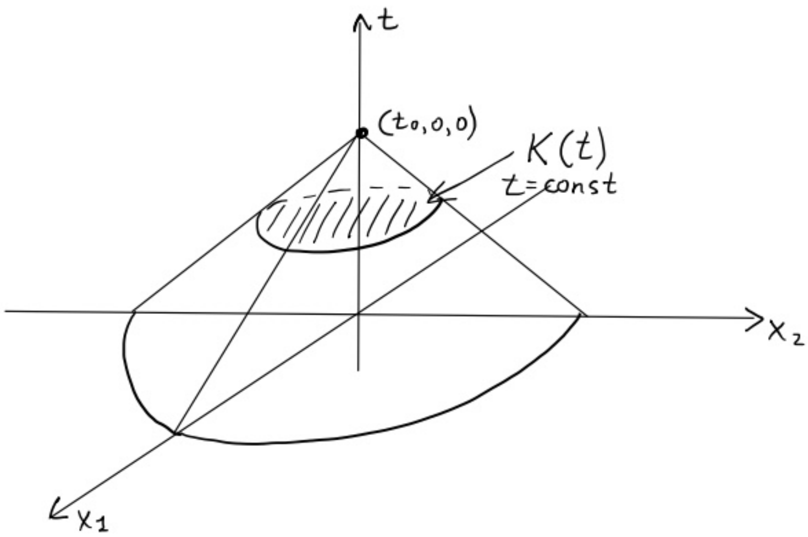
$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0$$

$A(\lambda, \mu_1, \mu_2) = \lambda^2 - a^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)$ - характеристический многочлен

$$\overline{n} = (n_t, n_1, n_2), \;\; A(\overline{n}) = (n_t)^2 - a^2(n_1^2 + n_2^2) = 0$$

Т.о. характеристической поверхностью является конус:





Получаем уравнение:

$$a^2(t_0 - t)^2 = x_1^2 + x_2^2, \;\; a^2(t_0 - t)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0 = F(t, x_1, x_2)$$

Нормаль к конусу:

$$\overline{n} = (F_t, F_{x_1}, F_{x_2}) = (2a^2(t - t_0), -2x_1, -2x_2) = 2(a^2(t - t_0), -x_1, -x_2)$$

Получаем уравнение характеристик:

$$a^4(t-t_0)^2 - a^2(x_1^2+x_2^2) = 0$$

Определение 6.1. ***Интегралом энергии*** *называется величина*

$$E(t) := \frac{1}{2}\oiint\limits_{K(t)} \left[(u_t)^2 + a^2\left((u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2\right)^2\right] d\overline{x} = \frac{1}{2}\oiint\limits_{|\overline{x}|\le a(t_0-t)} \left[(u_t)^2 + a^2\left|\overline{\nabla}_x u\right|^2\right] d\overline{x}$$

Теорема 6.1 (**Энергетическое неравенство**). *Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет волновому уравнению в конусе Ω. Тогда:*

$$\forall t_1, t_2 \in (0, t_0), t_1 < t_2 : \; E(t_1) \ge E(t_2)$$

Доказательство. Хотим показать, что $E(t)$ убывает по t. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть $E'(t)$ и показать, что она ≤ 0.
Запишем $E(t)$ в следующем виде:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a(t_0-t)} \oint\limits_{|\overline{x}|=\tau} \left[(u_t)^2 + a^2\left((u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2\right)^2\right] d\sigma d\tau$$

Найдем производную:

$$E'(t) = \frac{2}{2}\oiint\limits_{K(t)} \left[u_t u_{tt} + a^2(u_{x_1}u_{x_1t} + u_{x_2}u_{x_2t})\right] d\overline{x} - \frac{a}{2}\oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} \left[(u_t)^2 + a^2\left|\overline{\nabla}_x u\right|^2\right] d\sigma =$$

$$= \oiint\limits_{K(t)} u_t \triangle u d\overline{x} + a^2\left[\oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} (u_{x_1}u_{x_1}n_1 + u_{x_2}u_{x_2}n_2) d\sigma - \right.$$

$$\left. - \oiint\limits_{K(t)} (u_{x_1x_1}u_t + u_{x_2x_2}u_t) d\overline{x}\right] - \frac{a}{2}\oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} \left[(u_t)^2 + a^2\left|\overline{\nabla}_x u\right|^2\right] d\sigma$$

(применили формулу интегрирования по частям для $f = u_t$ и $g = u_{x_1}$)

Таким образом получаем:

$$E'(t) = -\frac{a}{2} \oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} \Big[(u_t)^2 + a^2(u_{x_1})^2(n_1^2+n_2^2) + a^2(u_{x_2})^2(n_1^2+n_2^2)+$$

$$+a^2(u_{xx})^2(n_1^2+n_2^2) - 2au_tu_{x_1}n_1 - 2au_tu_{x_2}n_2\Big]d\sigma = -\frac{a}{2} \oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} \Big[a^2(u_{x_1})^2n_2^2+$$

$$+a^2(u_{x_2})^2n_1^2 - 2a^2u_{x_1}u_{x_2}n_1n_2 + (u_t - au_{x_1}n_1 - au_{x_2}n_2)^2\Big]d\sigma =$$

$$= -\frac{a}{2} \oiint\limits_{|\overline{x}|=a(t_0-t)} \Big[(u_t - au_{x_1}n_1 - au_{x_2}n_2)^2 + (au_{x_1}n_2 - au_{x_2}n_1)^2\Big]d\sigma \le 0$$

Т.е. $E'(t) \le 0$ (не возрастает), что и требовалось доказать. ■

Следствие 6.1. *Решение задачи Коши единственно.*

Доказательство. Имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\triangle u,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ \left.\begin{matrix} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{matrix}\right\},\ \overline{x}\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Предположим, что существует два различных решения u_1 и u_2. Рассмотрим их разность $z = u_1 - u_2$, для нее задача Коши имеет вид:

$$\begin{cases} z_{tt} = a^2\triangle z,\ t>0,\ z\in\mathbb{R}^n \\ \left.\begin{matrix} z|_{t=0} = 0 = z(0,x_1,x_2) \\ z_t|_{t=0} = 0 \end{matrix}\right\},\ \overline{x}\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$E(t) = \oiint\limits_{K(t)} \left[(z_t)^2 + a^2\left((z_{x_1})^2 + (z_{x_2})^2\right)^2\right]d\overline{x}$$

$$E(0) = \oiint\limits_{K(0)} \left[(z_t)^2|_{t=0} + a^2\left((z_{x_1})^2 + (z_{x_2})^2\right)^2|_{t=0}\right]d\overline{x} = 0$$

(из начальных условиях задачи Коши)

Из энергетического неравенства имеем: $\forall t : E(t) \le E(0) = 0$. Тогда получаем, что $E(t) \equiv 0 \Rightarrow z_t \equiv z_{x_1} \equiv z_{x_2} \equiv 0 \Rightarrow z \equiv 0$. Т.к. $z|_{t=0} = 0$, то $z \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$. ■

7

Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в R^3.

Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 7.1 (**Формула Киргхгофа**). *Формула решения задачи Коши для волнового уравнения имеет вид:*

$$u(t, \overline{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\overline{x}-\xi|=at} \psi(\overline{\xi}) d\sigma_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\overline{x}-\xi|=at} \varphi(\overline{\xi}) d\sigma_\xi \right)$$

Доказательство. Разобьем исходную задачу u на сумму двух задач u_1 и u_2:

$$u = u_1 + u_2$$

$$\begin{cases} (u_1)_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u_1 \\ (u_1)|_{t=0} = \varphi(x) \\ (u_1)_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (u_2)_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = 0 \\ (u_2)_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Найдем такую функцию $v(t, \overline{x})$, что:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} v \\ v|_{t=0} = 0 = v(0, x_1, x_2, x_3) \\ v_t|_{t=0} = \varphi(\overline{x}) \end{cases}$$

Докажем, что $u_1 = v_t$. Имеем:

$$v_t|_{t=0} = \varphi(\overline{x}) = u_1|_{t=0}$$

$$v_{tt}|_{t=0} = a^2 \triangle_x v|_{t=0} = 0 = (u_1)_t|_{t=0}$$

$$(u_1)_{tt} = v_{ttt} = a^2 \triangle v_t = a^2 \triangle u_1$$

Доказательство свелось к рассмотрению следующей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} v, \ t > 0, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^3 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = \varphi(\overline{x}) \end{cases}$$

Хотим доказать следующую формулу:

$$v(t, \overline{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} \varphi(\overline{\xi}) d\sigma_\xi$$

Сделаем замену координат:

$$\overline{y} = \frac{1}{at}(\overline{\xi} - \overline{x}) \ \Rightarrow \ \overline{\xi} = \overline{x} + at\overline{y} \ \Rightarrow \ d\sigma_\xi = (at)^2 d\sigma_y$$

Подставим в формулу:

$$v(t, \overline{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} \varphi(\xi) d\sigma_\xi = \frac{t}{4\pi} \oiint\limits_{|y| = 1} \varphi(\overline{x} + at\overline{y}) d\sigma_y$$

Проверим начальные условия:

$$v|_{t=0} = 0$$

$$v_t = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|y|=1} \varphi(\overline{x} + at\overline{y}) d\sigma_y + \frac{at}{4\pi} \oiint\limits_{|y|=1} (\varphi_{\xi_1} a y_1 + \varphi_{\xi_2} a y_2 + \varphi_{\xi_3} a y_3) d\sigma_y$$

$$v_t|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|y|=1} \varphi(\overline{x}) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \varphi(\overline{x}) \cdot \oiint\limits_{|y|=1} d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \varphi(\overline{x}) \cdot 4\pi R^2|_{R=1} = \varphi(\overline{x})$$

Таким образом, начальные условия выполнены. Теперь сделаем обратную замену. Для начала заметим, что:

$$\varphi_{\xi_1} n_1 + \varphi_{\xi_2} n_2 + \varphi_{\xi_3} n_3 = (\overline{\nabla} \varphi, \overline{n}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}}$$

Найдем v_t:

$$v_t = \frac{1}{t} v + \frac{at}{4\pi (at)^2} \oiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} (\varphi_{\xi_1} n_1 + \varphi_{\xi_2} n_2 + \varphi_{\xi_3} n_3) d\sigma_\xi = \frac{1}{t} v + \frac{1}{4\pi a t} \oiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{n}} d\sigma_\xi$$

По теореме о потоке имеем:

$$v_t = \frac{1}{t} v + \frac{1}{4\pi a t} \iiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} \triangle_\xi \varphi d\xi$$

Найдем v_{tt}:

$$v_{tt} = -\frac{1}{t^2}v + \frac{1}{t}v_t - \frac{1}{4\pi a t^2}\oiiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi \varphi d\xi + \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\oiiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi \varphi d\xi\right) =$$

$$= -\frac{1}{t^2}v + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}v + \frac{1}{4\pi a t}\oiiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi \varphi d\xi\right) - \frac{1}{4\pi a t^2}\oiiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi \varphi d\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\oiiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi \varphi d\xi\right) = \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{at}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=\tau} \triangle\varphi d\sigma_\xi d\tau\right)$$

Отсюда по формуле дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом получаем:

$$v_{tt} = \frac{a}{4\pi a t}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle\varphi d\sigma_\xi = \frac{1}{4\pi t}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle\varphi d\sigma_\xi$$

Найдем $\triangle_x v$:

$$\triangle_x v = \frac{t}{4\pi}\oiint\limits_{|y|=1} \triangle\varphi(\overline{x}+at\overline{y})d\sigma_y = \frac{t}{4\pi a^2 t^2}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi\varphi d\sigma_\xi = \frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \triangle_\xi\varphi d\sigma_\xi$$

Таким образом, получаем, что $v_{tt} = a^2\triangle v$. Отсюда имеем формулу:

$$v(t,\overline{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\overline{\xi}-\overline{x}|=at} \varphi(\xi)d\sigma_\xi, \quad u_1 = v_t$$

Итак, получаем итоговую формулу:

$$u(t,\overline{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\overline{x}-\xi|=at} \psi(\overline{\xi})d\sigma_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\overline{x}-\xi|=at} \varphi(\overline{\xi})d\sigma_\xi\right)$$

$\blacksquare$

8

Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в R^2. Метод спуска.

Имеем задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u, \ t > 0, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \left. \begin{array}{c} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{array} \right\}, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Теорема 8.1 (**формула Пуассона**). *Формула решения задачи Коши для волнового уравнения в* $\mathbb{R}^2$ *имеет вид:*

$$u(t, \overline{x}) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|\overline{x}-\xi| \le at} \frac{\psi(\overline{\xi}) d\overline{\xi}}{\sqrt{(at)^2 - |\overline{\xi} - \overline{x}|^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|\overline{x}-\xi| \le at} \frac{\varphi(\overline{\xi}) d\overline{\xi}}{\sqrt{(at)^2 - |\overline{\xi} - \overline{x}|^2}} \right)$$

Доказательство. Пусть $u(t, x_1, x_2, x_3)$ - решение задачи Коши в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u, \ t > 0, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \left. \begin{array}{c} u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{array} \right\}, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad (*)$$

Пространство трехмерное, но начальные условия зависят только от x_1, x_2. Решение такой задачи находится по формуле Кирхгофа.
Сделае сдвиг по оси x_3 на $x_3^0 \in \mathbb{R}$. Функция $u(t, x)$ перейдет в $\tilde{u}(t, \overline{x}) = u(t, x_1, x_2, x_3 + x_3^0)$. Но волновое уравнение от сдвига по оси не изменится, как не изменятся и начальные условия. Тогда $\tilde{u}(t, \overline{x})$ является решением задачи $(*)$, как и функция $u(t, \overline{x})$. В силу единственности решения задачи Коши $(*)$ $\tilde{u}(t, \overline{x}) = u(t, \overline{x})$, т.е. $u(t, \overline{x})$ не зависит от x_3.

Вернемся к исходной двумерной задаче: $u = u(t, x_1, x_2)$. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$, значит $u(t, \overline{x})$, задаваемая формулой Кирхгофа, является и решением двумерной задачи Коши, если начальные условия не зависят от x_3.

Разобьем исходную задаче на две:

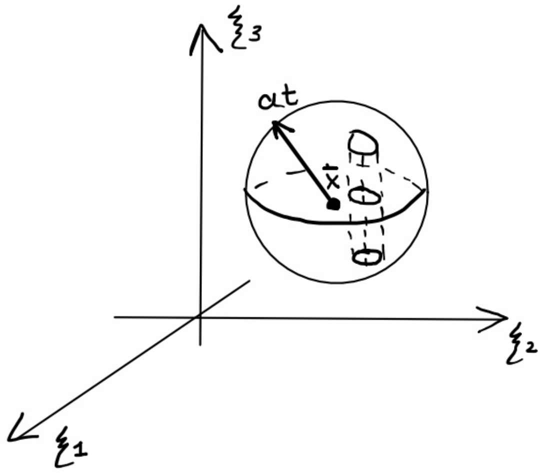
$$u = u_1 + u_2$$

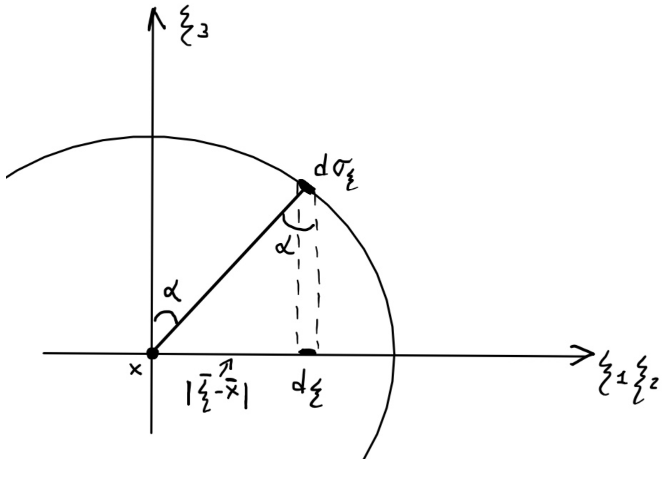
$$\begin{cases} (u_1)_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u_1 \\ (u_1)|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ (u_1)_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (u_2)_{tt} = a^2 \triangle_{\overline{x}} u_2 \\ (u_2)|_{t=0} = 0 \\ (u_2)_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

По формуле Кирхгофа получаем:

$$u_2(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| = at} \psi(\xi_1, \xi_2) d\sigma_\xi$$

Сведем интегрирование по сфере к интегрированию в $\mathbb{R}^2$:





Сфера проектируется на круг $|\overline{\xi} - \overline{x}| \le at$, α - угол между нормалью к сфере и ξ_3, $d\sigma_\xi$ - элемент площади на сфере, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ - элемент площади на круге.

$$\sin\alpha = \frac{|\overline{\xi} - \overline{x}|}{at} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{|\overline{\xi} - \overline{x}|^2}{a^2 t^2}} = \frac{\sqrt{a^2 t^2 |\overline{\xi} - \overline{x}|^2}}{at} = \frac{d\xi}{d\sigma_\xi}$$

Отсюда получаем:

$$u_2(t, x_1, x_2) = \frac{2}{4\pi a^2 t} \iint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| \le at} \psi(\xi_1, \xi_2) \frac{d\xi \cdot at}{\sqrt{a^2 t^2 - |\overline{\xi} - \overline{x}|^2}} = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|\overline{\xi} - \overline{x}| \le at} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{a^2 t^2 - |\overline{\xi} - \overline{x}|^2}}$$

Умножение на 2 происходит, потому что в каждую точку круга проецируется две точки сферы (с верхней и нижней частей). Итак, формула Пуассона имеет вид (аналогично формуле Кирхгофа):

$$u(t,\overline{x}) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|\overline{x}-\xi|\leq at}\frac{\psi(\bar{\xi})d\bar{\xi}}{\sqrt{(at)^2-|\bar{\xi}-\bar{x}|^2}} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|\overline{x}-\xi|\leq at}\frac{\varphi(\bar{\xi})d\bar{\xi}}{\sqrt{(at)^2-|\bar{\xi}-\bar{x}|^2}})$$

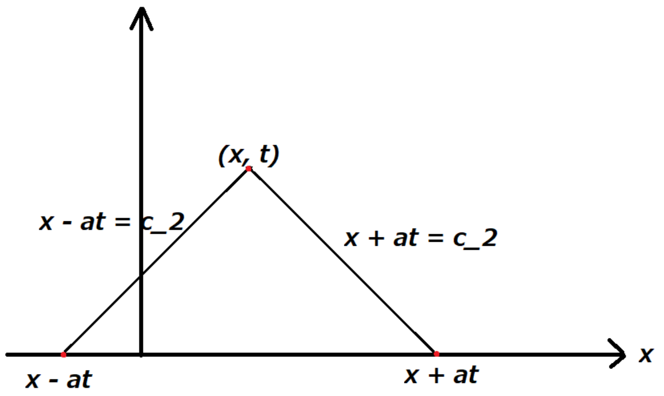
■

Метод, позволяющий свести задачу большей размерности к задаче меньшей размерности, называется **методом спуска**.

9 Ограниченная струна. Метод Фурье.

Правило параллелограмма

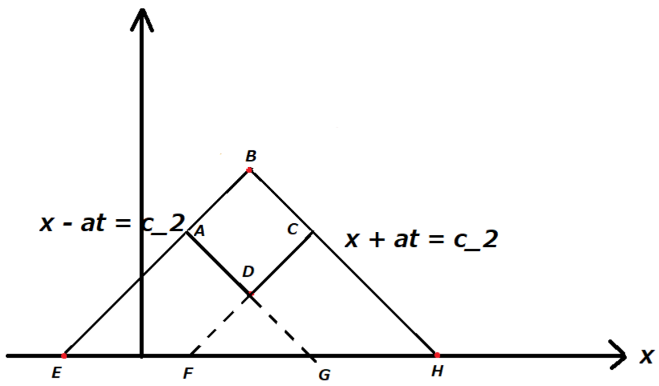
Напоминание 9.1.



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Общее решение: $u(t,x) = f(x-at) + g(x+at)$. *Значение функции в точке* (t,x) *зависит от* $x \pm at$, *не зависит от точек вне отрезка* $[x-at, x+at]$ $\Rightarrow$ *боковые стороны треугольника - характеристики. Треугольник называется* ***характеристическим***.

Утверждение 9.1 (**Правило параллелограмма**)**.** *Для описанной функции* u *справедливо следующее равенство:* $u(A) + u(C) = u(B) + u(D) = 0$.



Доказательство. По формуле Д'Аламбера:

$$u = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy$$

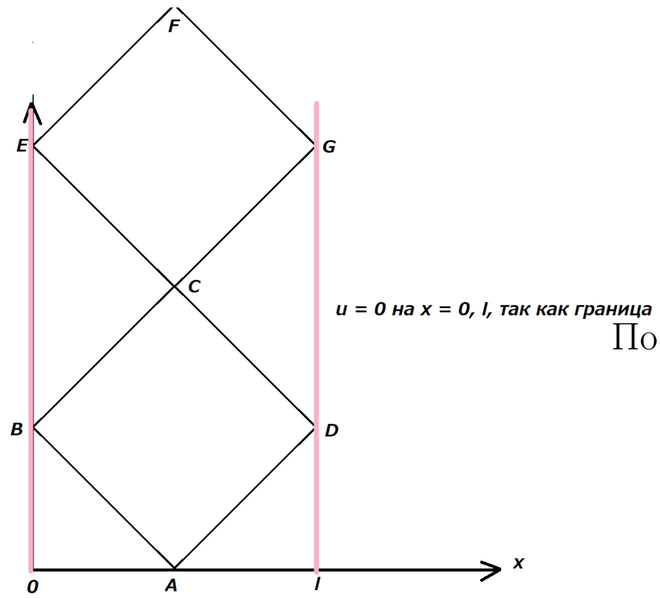
Тогда получаем следующие значения функции в точках:

$$u(A) = \frac{1}{2}(\varphi(E) + \varphi(G)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{E}^{G} \psi(y)dy,\ u(C) = \frac{1}{2}(\varphi(F) + \varphi(H)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{F}^{H} \psi(y)dy$$

$$u(B) = \frac{1}{2}(\varphi(E) + \varphi(H)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{E}^{H} \psi(y)dy,\ u(D) = \frac{1}{2}(\varphi(F) + \varphi(G)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{F}^{G} \psi(y)dy$$

■

Рассмотрим следующую задачу:



$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x \in (0, l) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

По правилу параллелограмма получаем:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D) = 0$$
$$u(C) + u(F) = u(G) + u(E) = 0$$

Таким образом получаем, что $u(A) = -u(C)$ и $-u(C) = u(F)$. Абсцисса точки A совпадает с абсциссой точки F, значит функция периодическая. Найдем период:

$$l = \frac{T}{2}a \ \Rightarrow\ T = \frac{2l}{a},\ u(t,x) = u(t + \frac{2l}{a}, x)$$

Ряд Фурье

Пусть $x \in (0, l)$ и $X_n(x)$ - базис, т.е. $(X_n, X_m) = \int\limits_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0$ при $n \neq m$.

Рассмотрим представление функции в виде *ряда Фурье*: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)X_n(x)$. Найдем f_k, скалярно домножив на X_k:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)X_n(x) \quad \Big| \cdot X_k$$

$$(f(x), X_k) = f_k(x)||X_k||^2 \ \Rightarrow \ f_k(x) = \frac{(f(x), X_k)}{(X_k, X_k)}$$

Будем искать решение $u(t, x)$ в виде ряда: $u(t, x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$.

1. Найдем базис. Введем вспомогательную функцию $v(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0$ – одно слагаемое ряда.

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \ t > 0, \ x \in (0, l) \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \\ T(t)X(0) = 0 \\ T(t)X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{T''(t)}{T(t)a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const \ \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Задача Штурма - Луивилля

Задача Штурма - Луивилля – задача на отыскание нетривиальных собственных функций и собственных значений оператора.

- $\lambda = 0 \ \Rightarrow \ X(x) = c_1 x + c_2 \equiv 0$.
  В силу дополнительных условий λ - не собственное значение.

- $\lambda < 0 \ \Rightarrow \ X(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$.
  В силу дополнительных условий $c_1 = c_2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda$ - не собственное значение.

- $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = c_1\sin(x\sqrt{\lambda}) + c_2\cos(x\sqrt{\lambda})$.
  В силу дополнительных условий $c_2 = 0,\ c_1\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow$
  $$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = c_1\sin(\frac{\pi n}{l}x),\ n = 1, 2, \dots \\ X_0 = 0 \\ n < 0 \text{ не подходят, так как } \sin(x) \text{ - нечетная функция} \end{cases}$$
  Пусть $c_1 = 1 \Rightarrow X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{l}x),\ n = 1, 2, \dots$

2. Найдем коэффициенты $T_n(t)$. $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{\pi n}{l}x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\sin(\frac{\pi n}{l}x) = -\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{\pi n}{l}x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin(\frac{\pi n}{l}x) = \varphi(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin(\frac{\pi n}{l}x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\frac{\pi n}{l}x),\ \varphi_n = \frac{(\varphi(x), X_n(x))}{(X_n(x), X_n(x))}\ \Big(\text{аналогично для } \psi(x)\Big)$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} T_n''(t) = -(\frac{a\pi n}{l})^2 T_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_n(t) = A_n\sin(\frac{a\pi n}{l}t) + B_n\cos(\frac{a\pi n}{l}t) \\ T_n(0) = B_n = \varphi_n \\ T_n'(0) = \frac{a\pi n}{l}A_n = \psi_n \end{cases}$$

Итоговая формула имеет вид:

$$T_n(t) = \psi_n\frac{l}{a\pi n}\sin(\frac{a\pi n}{l}t) + \varphi_n\cos(\frac{a\pi n}{l}t)$$

Метод Фурье: общий случай

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ t > 0,\ x \in (0, l) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ (\alpha u_x - \beta u)|_{x=0} = \mu(t) \\ (\gamma u_x - \delta u)|_{x=l} = \nu(t) \end{cases}$$

1. Сделаем граничные условия однородными. Введем вспомогательную функцию $\omega(t, x)$:

$$\begin{cases} (\alpha\omega_x - \beta\omega)|_{x=0} = \mu(t) \\ (\gamma\omega_x - \delta\omega)|_{x=l} = \nu(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Допустим, что такая функция найдена. Пусть $z = u - \omega$, тогда $u = z + \omega$ и наша задача для функции z имеет вид:

$$\begin{cases} z_{tt} = a^2 z_{xx} + f(x),\ t > 0,\ x \in (0, l) \\ z|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ z_t|_{t=0} = \psi_1(x) \\ (\alpha z_x - \beta z)|_{x=0} = 0 \\ (\gamma z_x - \delta z)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

- если $\left[\begin{array}{l} \alpha = 0, \gamma = 0 \\ \alpha = 0,\ \delta = 0 \\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \end{array}\right.$, то $\omega = g(t)x + c(t)$
- если $\beta = 0,\ \delta = 0$, то $\omega = d(t)x^2 + g(t)x + c(t)$

  (коэффициенты $d(t), g(t), c(t)$ находятся из условия $(*)$)

2. Свели задачу к задаче с однородными граничными условиями. Пусть $u = z$. Знаем, что $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) X_n(x),\ f_k(x) = \dfrac{(f(x), X_k)}{(X_k, X_k)}$.

   Тогда здача Коши для $T_n(t)$ примет вид:

$$\begin{cases} T_n''(t) = -(\dfrac{a\pi n}{l})^2 T_n(t) + f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

Базисы в зависимости от граничных условий на x

$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$ $X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{l}x)$

$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ $X_n(x) = \sin(\frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})x)$

$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ $X_n(x) = \cos(\frac{\pi n}{l}x)$

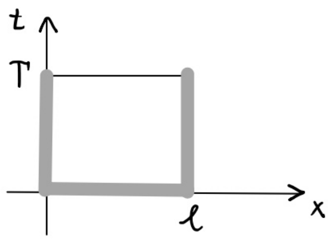
$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$ $X_n(x) = \cos(\frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})x)$

10 Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность решения первой краевой задачи.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – координата, $t \in \mathbb{R}$ – время., $u(t, \bar{x})$ – температура стержня в точке x в момент времени t. Тогда **уравнение теплопроводности** записывается следующим образом:

$$u_t = a^2 \Delta_x u \equiv a^2(u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n})$$

Теорема 10.1 (**принцип максимума в ограниченной области (в стакане)**). *Пусть задано уравнение теплопроводности $u_t = a^2 \Delta_x u$ в некоторой области $\Omega = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$.*



Имеем границу:

$\Sigma = \{x = 0\} \cup \{x = l\} \cup \{t = 0\}$

Также пусть заданы величины:

$m = \min\limits_{\Sigma}(u)$ *и* $M = \max\limits_{\Sigma}(u)$

Тогда:

$$m \leq u(t, \overline{x}) \leq M \ \forall (t, \overline{x}) \in \Omega$$

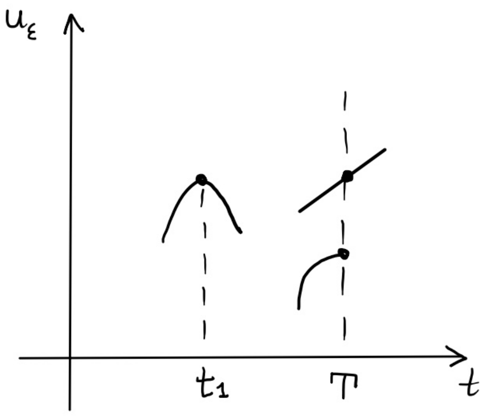
Доказательство. **(от противного)**

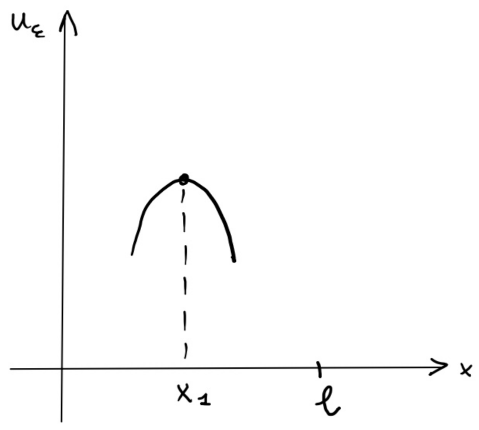
Докажем для утверждение для максимума, для минимума доказательство аналогично.

Пусть max достигается в точке (t_0, x_0) внутри Ω или на $t = T$. Введем вспомогательную функцию:

$$u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) + \varepsilon x^2$$
$$(\text{для } min: \ u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon x^2)$$

Пусть $max\ u_\varepsilon(t,x)$ - точка (t_1,x_1) внутри Ω или на $t=T$, т.е.:





$$\begin{cases} \text{либо } (u_\varepsilon)_t(t_1,x_1)=0,\ t_1<T \\ \text{либо } (u_\varepsilon)_t(t_1,x_1)<0,\ t_1=T \\ \text{либо } (u_\varepsilon)_t(t_1,x_1)=0,\ t_1=T \end{cases}$$

$$(u_\varepsilon)_{xx}(t_1,x_1)\leq 0$$

$$\underbrace{(u_\varepsilon)_t}_{\geq 0}-\underbrace{a^2(u_\varepsilon)_{xx}}_{\leq 0}\geq 0 \text{ в } (t_1,x_1)$$

$$(u_\varepsilon)_t-a^2(u_\varepsilon)_{xx}=\underbrace{u_t-a^2u_{xx}}_{=0}-2\varepsilon a^2=-2a^2\varepsilon<0$$

Получаем противоречие, значит $max\in\Sigma$.

$\blacksquare$

Следствие 10.1 (**единственность решения 1-ой краевой задачи**)**.** *Пусть имеем 1-ую краевую задачу:*

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx},\ t>0,\ x\in(0,l) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u|_{x=0}=\mu(t) \\ u|_{x=l}=\nu(t) \end{cases}$$

Тогда ее решение существует и единственно.

Доказательство. Предположим, что $\exists\ u_1,\ u_2$ – решения такие, что $u_1\neq u_2$. Введем $z=u_1-u_2$, тогда для z имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} z_t=a^2z_{xx},\ t>0,\ x\in(0,l) \\ z|_{t=0}=0 \\ z|_{x=0}=0 \\ z|_{x=l}=0 \end{cases}$$

. Используя принцип максимума, получаем, что $z\equiv 0\Longrightarrow u_1=u_2$. $\blacksquare$

11 Задача Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума в неограниченной области. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ |u| \leq C, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема 11.1 (**Принцип максимума в неограниченной области**). *Пусть* $m = \min\limits_{\mathbb{R}}(\varphi(x)), \ M = \max\limits_{\mathbb{R}}(\varphi(x))$. *Тогда* $m \leq u(t,x) \leq M, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем для максимума (для минимума аналогично, но с другими знаками).

Будем доказывать, что $M - u(t_0, x_0) \geq 0$. Введем вспомогательную функцию $\nu(t,x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

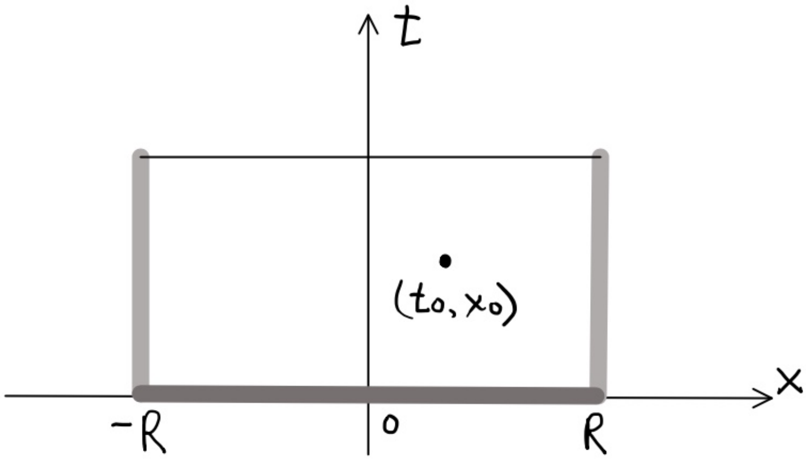
$$\nu(t,x) \geq 0, \ \nu_t = a^2\nu_{xx} \ \Rightarrow \ \nu(t,x) = 2a^2t + x^2 \geq 0, \ \ \nu_t - a^2\nu_{xx} = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$u_\varepsilon(t,x) = M - u(t,x) + \varepsilon\frac{v(t,x)}{\nu(t_0,x_0)}$$

Для нее задача Коши имеет вид:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t,x) = M - u(t,x) + \varepsilon\dfrac{v(t,x)}{\nu(t_0,x_0)} \\ u_\varepsilon|_{t=0} = \underbrace{M-\varphi(x)}_{\geq 0} + \varepsilon\dfrac{x^2}{\nu(t_0,x_0)} \geq 0 \\ u_\varepsilon|_{x=\pm R} = M - u(t,\pm R) + \varepsilon\dfrac{2a^2t+R^2}{\nu(t_0,x_0)} \geq \underbrace{M-u(t,\pm R)}_{\geq C_1,\text{ т.к. } |u|\leq C} + \varepsilon\dfrac{R^2}{\nu(t_0,x_0)} \geq 0 \ (R\to\infty) \end{cases}$$



По принципу максимума на стакане $u_\varepsilon \geq 0$ в прямоугольнике. Значит $u_\varepsilon(t_0,x_0)\geq 0$, тогда $M - u(t_0,x_0) + \varepsilon \geq 0$, значит $u(t_0,x_0)\leq M+\varepsilon$, т.е. $u_(t_0,x_0)\leq M$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

■

Следствие 11.1. *Ограниченное решение задачи Коши единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два разные решения $u_1\neq u_2$. Рассмотрим их разность $z = u_1 - u_2$. Запишем для z задачу Коши:

$$\begin{cases} z_t = a^2u_{xx},\ t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ z|_{t=0} = 0 \\ |z|\leq \tilde{C},\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

По принципу максимума получаем $z\equiv 0$, откуда $u_1 = u_2$. ■

12 Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Имеем задачу Коши: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ |u| \le C,\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Теорема 12.1 (**Формула Пуассона**). *Формула Пуассона решения задачи Коши имеет вид:*

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi$$

Доказательство. Проверим, что формула удовлетворяет уравнению:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi \\ u_x &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x-\xi}{2a^2t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi \\ u_{xx} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a^2t\sqrt{t}} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

Проверим, что удовлетворяет начальным условиям:

$$\text{замена: } y = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} \ \Rightarrow\ \xi = 2a\sqrt{t}y + x,\ d\xi = 2a\sqrt{t}dy$$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \varphi(2a\sqrt{t}y + x) dy \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \varphi(x)$$

■

Имеем многомерную задачу Коши: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \varphi(\bar{x}) \\ |u| \leq C,\ t \geq 0,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

Теорема 12.2 (**Многомерная формула Пуассона**)**.** *Формула Пуассона решения многомерной задачи Коши имеет вид:*

$$u(t, x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\substack{\cdots \\ \mathbb{R}^n}} \int e^{-\frac{|\bar{x}-\bar{\xi}|^2}{4a^2 t}} \varphi(\bar{x}) d\xi_1 \ldots \xi_n,$$

где $|\bar{x} - \bar{\xi}|^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2$.

13

Метод Фурье для уравнений Лапласа и Пуассона в круге и кольце.

Определение 13.1. $u \in C^2, \triangle u = 0$, *тогда* u *- гармоническая функция*

Определение 13.2. $\triangle u = 0$ *- уравнение Лапласа*

Определение 13.3. $\triangle u = f(x)$ *- уравнение Пуассона*

1) **Задача Дирихле**: $\begin{cases} \triangle u = f(x), \vec{x} \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = h(\vec{x}) \end{cases}$

2) **Задача Неймана**: $\begin{cases} \triangle u = f(x), \vec{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = g(\vec{x}) \end{cases}$

Условие разрешимости: $\iint\limits_{\Omega} f(\vec{x})d\vec{x} = \oint g(\vec{x})d\sigma$

(если $\neq$, то решений нет, а если $=$, то решений бесконечно много)

3) **Смешанная задача**: $\begin{cases} \triangle u = 0, \vec{x} \in \Omega \\ (\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \beta u)|_{\partial\Omega} = q(\vec{x}) \end{cases}$

Решим задачу Дирихле в кольце (окружности радиусов r_1 и r_2):

$$\begin{cases} \triangle u = 0, r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2 \\ u|_{x^2+y^2=r_1^2} = f_1(x,y) \\ u|_{x^2+y^2=r_2^2} = f_2(x,y) \end{cases}$$

Решение.
1) Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = arctg\frac{y}{x} \end{cases}$$

В этих координатах задача имеет вид:

$$\begin{cases} \triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{1}{r}u_r = 0, r_1 < r < r_2 \\ u|_{r=r_1} = f_1(\phi), 0 \le \phi \le 2\pi \\ u|_{r=r_2} = f_2(\phi) \\ u(r, \phi + 2\pi) = u(r, \phi), \quad u_\phi(r, \phi + 2\pi) = u_\phi(r, \phi) \end{cases}$$

2) Решение ищем в виде ряда $u(r, \phi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(r)X_n(\phi)$. Подставим в уравнение:

$$R''(r)X(\phi) + \frac{1}{r}R'(r)X(\phi) + \frac{1}{r^2}R(r)X''(\phi) = 0$$

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{X''(\phi)}{X(\phi)} = \lambda \;\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{X''(\phi)}{X(\phi)} = \lambda \\ X(\phi + 2\pi) = X(\phi) \end{cases}$$

Имеем уравнение: $-X''(\phi) = \lambda X(\phi) \;\Rightarrow\; X''(\phi) + \lambda X(\phi) = 0$

- $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; X(\phi) = a\cos(\sqrt{\lambda}\phi) + b\sin(\sqrt{\lambda}\phi)$. Тогда базис состоит их $\cos(n\phi)$ и $\sin(n\phi)$, $n \in \mathbb{N}$.

- $\lambda < 0 \;\Rightarrow\; X(\phi) = c_1e^{\sqrt{\lambda}\phi} + c_ne^{-\sqrt{\lambda}\phi}$ – не периодическая, отпадает.

- $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; X(\phi) = c_1\phi + c_2$. Из условия периодичности: $c_1(\phi + 2\pi) + c_2 = c_1\phi + c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = 0,\ c_2 = 1 \;\Rightarrow\; X_0(\phi) = 1$

Получаем базис: $\{\sin(n\phi), \cos(n\phi), 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Итоговая формула:

$$u(r, \phi) = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r)\cos(m\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r)\sin(n\phi)$$

Пусть $f_i(\phi) = c_i + \sum\limits_{k_i=1}^{\infty} \cos(k_i\phi)a_{k_i} + \sum\limits_{s_i=1}^{\infty} \sin(s_i\phi)b_{s_i},\ i = 1, 2,\ c_i,\ a_{k_i},\ b_{s_i} \in \mathbb{R}$.

3) Подставляем решение ввиде ряда $u(r, \phi)$ в исходную систему и получаем задачи Коши на $R_n(r)$ и $V_n(r)$:

$$\begin{cases} R_0''(r) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} R_m''(r)\cos(m\phi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n''(r)\sin(n\phi) + \dfrac{1}{r}(R_0'(r) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} R_m'(r)\cos(m\phi) + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n'(r)\sin(n\phi)) - \dfrac{1}{r^2}(\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^2R_m(r)\cos(m\phi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2V_n(r)\sin(n\phi)) = 0 \\ R_0(r_1) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_n(r_1)\cos(n\phi) + V_n(r_1)\sin(n\phi)) = f_1(\phi) \\ R_0(r_2) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_n(r_2)\cos(n\phi) + V_n(r_2)\sin(n\phi)) = f_2(\phi) \end{cases}$$

- задача на R_0 : $\begin{cases} R_0''(r) + \dfrac{1}{r}R_0'(r) = 0 \\ R_0(r_1) = c_1 \\ R_0(r_2) = c_2 \end{cases}$

- задача на R_m :

$$\begin{cases} r^2 R_{k_{12}}''(r) + rR_{k_{12}}'(r) - k_i^2 R_{k_{12}}(r) = 0,\ k_{12} = k_1 = k_2 \text{ – номер в ряде,} \\ \text{соответствующий } m \\ R_{k_{12}}(r_1) = a_{k_1} \\ R_{k_{12}}(r_2) = a_{k_2} \end{cases}$$

- задача на V_n :

$$\begin{cases} r^2 V_{k_{12}}''(r) + rV_{k_{12}}'(r) - k_i^2 V_{k_{12}}(r) = 0,\ k_{12} = k_1 = k_2 \text{ – номер в ряде,} \\ \text{соответствующий } n \\ V_{k_{12}}(r_1) = b_{k_1} \\ V_{k_{12}}(r_2) = b_{k_2} \end{cases}$$

4) Решаем задачи на R_0, R_n, V_n, пишем ответ $u(r,\phi)$, используя найденные R_0, R_n, V_n

$\blacksquare$

Замечание. *В случае круга, $r \in [0,\rho]$, граничные условия:* $\begin{cases} u|_{r=\rho} = f(\phi) \\ |u|_{r=0}| < \infty \end{cases}$

14 Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Определение 14.1. ***Финитная функция $\varphi(x)$:*** $\varphi(x) = \begin{cases} \neq 0, & x \in K \\ \equiv 0, & x \notin K \end{cases}$

где $K \subset \Omega$ - компакт и носитель функции $\varphi(x)$.

Определение 14.2. ***Основные(пробные) функции*** *– бесконечно дифференцируемые финитные функции.*

Определение 14.3. $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ – ***множество бесконечно дифференцируемых функций.***

Определение 14.4. $\varphi_n(x) \in D(\Omega) \underset{\text{равномерно}}{\longrightarrow} \varphi(x)$, *если:*

1. $\exists\, K:\ K_n \subseteq K \subset \Omega,\ K_n$ *– носитель* $\varphi_n(x)$
2. $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi_n(x)}{\partial x^\alpha} \underset{K}{\rightrightarrows} \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x^\alpha}$, $|\alpha| = 0,\ 1, \ldots,$ *т.е.* $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \equiv \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Определение 14.5. ***Обобщенные функции*** *– линейные непрерывные функционалы над $D(\Omega)$. Обозначение: $D'(\Omega)$ или $D^*(\Omega)$.*

Определение 14.6. ***Функционал:*** L: $\varphi(x) \in D(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Определение 14.7. ***Линейный функционал:*** $L(\varphi_1(x)\alpha + \varphi_2(x)\beta) = \alpha L(\varphi_1(x)) + \beta L(\varphi_2(x))$.

Определение 14.8. ***Непрерывный функционал:*** $\varphi_n(x) \underset{\text{равномерно}}{\longrightarrow} \varphi(x) \Longrightarrow L(\varphi_n(x)) \longrightarrow L(\varphi(x))$

Определение 14.9. L_{1loc} – *интегрируемые на* $\forall$ *компакте* $K \subset \Omega$.

Теорема 14.1. $\forall L\ \exists f(x) \in L_{1loc}:\ \forall\ \varphi(x) \in D\ L(\varphi(x)) = (f(x), \varphi(x))$, *где*

$$(f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Определение 14.10. ***Регулярные обобщенные функции***:

$$\text{функционалы } L:\ \exists f(x) \in L_{1loc}(\Omega):\ \forall\ \varphi(x) \in D(\Omega)$$

$$(f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Определение 14.11. ***Сингулярные обобщенные функции*** :

$$\text{функционалы } L:\ \nexists f(x) \in L_{1loc}(\Omega):\ L(\varphi(x)) = (f(x), \varphi(x))$$

Определение 14.12. ***Дельта-функция***: $\delta(x) = \begin{cases} 0,\ x \neq 0 \\ \infty,\ x = 0 \end{cases}$

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) = (\delta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\Omega} \delta(x)\varphi(x)dx$$

Действия с обобщенными функциями

1. Линейная комбинация обобщенных функций:

$$f_1(x),\ f_2(x) \in D'(\Omega)\ \Rightarrow\ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\ \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \in D'(\Omega)$$
$$(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \varphi(x)) = \alpha(f_1, \varphi) + \beta(f_2, \varphi)\ \forall \varphi \in D.$$

2. Линейная замена переменных в аргументе обобщенных функций:

$$f \in D'(\Omega)\ \Rightarrow\ f(Ax + b) \in D'(\Omega),\ det(A) \neq 0$$
$$(f(Ax + b), \varphi(x)) \equiv \frac{1}{|A|}(f(x), \varphi(A^{-1}(x - b)))$$

Рассмотрим $\mathbb{R}^1$: пусть $f(x)$ - регулярная функция, тогда:

$$(f(Ax + b), \varphi(x)) = \int\limits_{R} f\underbrace{(Ax + b)}_{=y}\varphi(x)dx = \frac{1}{|A|}\int\limits_{R} f(y)\varphi(\frac{y - b}{A})dy$$

Для $\mathbb{R}^n$ аналогично: A^{-1} - обратная матрица, $\frac{1}{|A|}$ - якобиан многомерной линейной замены переменных.

3. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию:
$$f(x) \in D'(\Omega),\ a(x) \in C^{\infty}(\Omega) \longrightarrow a(x)f(x) \in D'(\Omega)$$
$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x))$$
Если $f(x)$ - регулярная, то $(a(x)f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\Omega} a(x)f(x)\varphi(x)dx$.

4. Дифференцирование обобщенной функции: $f(x) \in D'(\Omega)$. Рассмотрим $\mathbb{R}^1$:
$$f'(x) \in D(\Omega):\ (f'(x), \varphi(x)) \equiv -(f(x), \varphi'(x))$$
$$(f^{(k)}(x), \varphi(x)) \equiv (-1)^k (f(x), \varphi^{(k)}(x))$$
Если $f(x)$ - регулярная, то:
$$(f', \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)df(x) = \underbrace{f(x)\varphi(x)\ |_{-\infty}^{\infty}}_{0,\text{ т.к. } \varphi \text{ -- финитная}} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Свертка обобщенных функций

Пусть $f(x),\ g(x) \in L_1$. Тогда верны следующие свойства:

1. $(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = (g * f)(x)$
2. $(f * g)'(x) = (f' * g)(x) = (f * g')(x)$
3. $(f * g)^m(x) = (f^k * g^{m-k})(x) = (f^{m-k} * g^k)(x)$
4. $f(x),\ g(x) \in D' \ \Rightarrow\ (f * g)(x) \in D'$:

   Доказательство.
$$((f * g)(x), \varphi(x)) \equiv (f(x), (g(x), \varphi(x+t))_t)$$
$$\forall \varphi(x) \in D$$
$$((f * g)(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)dt)dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\varphi(x))dtdx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(y+t))dtdy$$

■

5. $((f*g)'(x), \varphi(x)) = -((f*g)(x), \varphi'(x))$

Доказательство.

$$((f*g)'(x), \varphi(x)) = -((f*g)(x), \varphi'(x)) = (f(x), (g(x), \varphi'(x+t))_t)_x =$$

- $= (f(x), (g'(x), \varphi(x+t))_t)_x = ((f*g')(x), \varphi(x))$
- $= -(f(x), (g(x), \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x+t))_t)_x = -(f(x), \dfrac{\partial}{\partial x}(g(x), \varphi(x+t))_t)_x =$
  $= (\dfrac{\partial}{\partial x}f(x), (g(x), \varphi(x+t))_t)_x = ((f'*g)(x), \varphi(x))$

■

Фундаментальное решение дифференциального оператора

Имеем дифференциальное уравнение и дифференциальный оператор:

$$Ly \equiv y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = f(x)$$
$$L \equiv \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_1\frac{d}{dx} + a_0$$

Определение 14.13. $\varepsilon(x) \in D'$ – ***фундаментальное решение дифференциального оператора L***, *если* $L\varepsilon(x) = \delta(x)$.

Замечание. *Если* y_0 *- решение, т.е.* $Ly_0 = 0$, *тогда* $\varepsilon(x) + y_0$ *- фундаментальное решение.*

Определение 14.14. $\theta(x)$ – ***функция Хевисайда:***

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases} \quad \text{и } \theta'(x) = \delta(x)$$

Теорема 14.2 (**нахождение фундаментального решения**). *Формула нахождения фундаментального решения имеет вид:* $\varepsilon(x) = \theta(x)u(x)$, *где* $u(x)$ *является решением системы:*

$$\begin{cases} Lu(x) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ \dots \\ u^{(m-2)}(0) = 0 \\ u^{(m-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon'(x) = \theta'(x)u(x) + \theta(x)u'(x) = \delta(x)u(x) + \theta(x)u'(x) = \\
&\qquad = \delta(x)u(0) + \theta(x)u'(x) = \theta(x)u'(x) \\
&\varepsilon''(x) = \theta'(x)u'(x) + \theta(x)u''(x) = \theta(x)u''(x) \\
&\ldots \\
&\varepsilon^{(m-1)}(x) = \theta(x)u^{(m-1)}(x) \\
&\varepsilon^{(m)}(x) = \theta'(x)u^{(m-1)}(x) + \theta(x)u^{(m)}(x) = \delta(x)u^{(m-1)}(x) + \theta(x)u^{(m)}(x) = \\
&\qquad\quad = \delta(x)u^{(m-1)}(0) + \theta(x)u^{(m)}(x) = \delta(x) + \theta(x)u^{(m)}(x)
\end{aligned}
$$

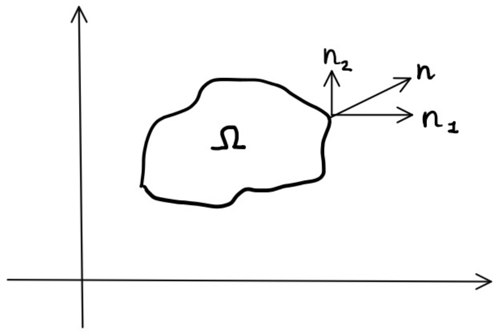
Тогда получаем:

$$
L\varepsilon(x) = \delta(x) + \theta(x)u^{(m)}(x) + a_{m-1}\theta(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1\theta(x)u'(x) + a_0\theta(x)u(x) = \\
= \theta(x)(L(u(x))) + \delta(x) = \delta(x).
$$

■

15 Формулы Грина.

Теорема 15.1 (**Формула Гаусса - Остроградского**). *Для функции w имеем следующую формулу:*



$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int \frac{\partial \omega}{\partial x_i} d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} \omega n_i d\sigma$$

Теорема 15.2 (**Многомерная формула интегрирования по частям**). *Для функции $\omega = uv$ имеем следующую формулу:*

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int u\frac{\partial v}{\partial x_i} d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} uvn_i d\sigma - \int\limits_{\Omega}\!\!\int v\frac{\partial u}{\partial x_i} d\bar{x}.$$

Теорема 15.3 (**I формула Грина**). *Для функции $\omega = u\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ имеем следующую формулу:*

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i} n_i d\sigma - \int\limits_{\Omega}\!\!\int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} d\bar{x} \mid \sum_{i=1}^{k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\Omega}\!\!\int u\Delta v d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} d\sigma - \int\limits_{\Omega}\!\!\int (\bar{\nabla} u, \bar{\nabla} v) d\bar{x}$$

Теорема 15.4 (**II формула Грина**).

$$\int\int\limits_{\Omega} v\Delta u d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma - \int\int\limits_{\Omega} (\bar{\nabla} v, \bar{\nabla} u) d\bar{x}$$

$$-$$

$$\int\int\limits_{\Omega} u\Delta v d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} d\sigma - \int\int\limits_{\Omega} (\bar{\nabla} u, \bar{\nabla} v) d\bar{x}$$

$$=$$

$$\int\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}) d\sigma.$$

Теорема 15.5 (**Теорема о потоке**). *Если* $\omega = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, *то справедлива формула:*

$$\int\int\limits_{\Omega} \Delta u d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma.$$

16

Фундаментальное решение оператора Лапласа в R^2 и R^3.

Рассмотрим оператор Лапласа: $L = \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Теорема 16.1 (**Фундаментальное решение оператора Лапласа**). *Фундаментальное решение оператора Лапласа имеет вид:*

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|\vec{x}|, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|\vec{x}|}, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ -\dfrac{1}{\sigma_n|\vec{x}|^{n-2}}, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 4 \end{cases}$$

где σ_n - площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Необходимо проверить, что $\triangle\varepsilon(x) = \delta(x)$, т.е. что:

$$(\triangle\varepsilon(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$$

1) Рассмотрим $\mathbb{R}^2$, то есть когда $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}|$.

$$(\triangle\varepsilon(x), \varphi(x)) = (\varepsilon_{x_1x_1} + \varepsilon_{x_2x_2}, \varphi(x)) = (\varepsilon(x), \varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2}) =$$
$$= (\varepsilon(x), \triangle\varphi(x)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varepsilon(x)\triangle\varphi(x)d\vec{x} = \lim_{\alpha\to 0} \iint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varepsilon(x)\triangle\varphi(x)d\vec{x} =$$
$$= \Big|\text{2-ая формула Грина}\Big| = \lim_{\alpha\to 0}\left(\iint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varphi(x)\triangle\varepsilon(x)d\vec{x} + \oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} (\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{n}})d\sigma \right)$$

(интеграл $\oint\limits_{|\vec{x}|=R} = 0$, т.к. в силу финитности $\varphi \equiv 0$ на $|x| = R$)

Введем обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varphi(x)\triangle\varepsilon(x)d\vec{x},\ I_2 = \oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}d\sigma,\ I_3 = -\oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} \varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{n}}d\sigma$$

Рассмотрим I_1. Перейдем в полярные координаты, тогда оператор Лапласса записывается следующим образом:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$

Так как $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$, т.е. не зависит от θ, то $\left(+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$ не нужно.

$$\triangle\varepsilon = (\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho})(\frac{1}{2\pi}\ln\rho) = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\rho}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}) = 0$$

Таким образом, $I_1 = 0$, т.к. в кольце $(\alpha < \rho < R)$ нет нуля.

Рассмотрим I_2:

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi}(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\rho)|_{\rho=\alpha}d\theta = \Big|\rho \text{ - якобиан полярной замены}\Big| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\ln\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\rho)|_{\rho=\alpha}d\theta = \frac{1}{2\pi}\alpha\ln\alpha\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}d\theta}_{=const} \xrightarrow[\alpha\to0]{} 0$$

Рассмотрим I_3. На внутренней границе $\dfrac{\partial}{\partial\vec{n}} = -\dfrac{\partial}{\partial\rho}$. Тогда:

$$I_3 = -\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{n}})\rho)|_{\rho=\alpha}d\theta = \int\limits_0^{2\pi}(\varphi\frac{1}{2\pi\rho}\rho)|_{\rho=\alpha}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\rho,\theta)|_{\rho=\alpha}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\alpha,\theta)d\theta = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\varphi(\alpha,\theta^*)\int\limits_0^{2\pi}d\theta}_{\text{теорема о среднем}} = \varphi(\alpha,\theta^*) \xrightarrow[\alpha\to0]{} \varphi(0)$$

2) Рассмотрим $\mathbb{R}^3$, то есть когда $\varepsilon(x) = -\dfrac{1}{4\pi|\vec{x}|},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$(\triangle\varepsilon(x), \varphi(x)) = (\varepsilon_{x_1x_1} + \varepsilon_{x_2x_2} + \varepsilon_{x_3x_3}, \varphi(x)) = (\varepsilon(x), \varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} +$$
$$\varphi_{x_3x_3}) = (\varepsilon(x), \triangle\varphi(x)) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(x)\triangle\varphi(x)d\vec{x} = \lim_{\alpha\to 0} \iiint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varepsilon(x)\triangle\varphi(x)d\vec{x} =$$

$$= \Big|\text{2-ая формула Грина}\Big| = \lim_{\alpha\to 0}\left(\iiint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varphi(x)\triangle\varepsilon(x)d\vec{x} + \oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} (\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{n}})d\sigma \right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left(\underbrace{\iiint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varphi(x)\triangle\varepsilon(x)d\vec{x}}_{I_1} + \underbrace{\oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}d\sigma}_{I_2} + \underbrace{\oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} -\varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{n}}d\sigma}_{I_3} \right)$$

- $I_1 = \iiint\limits_{\alpha<|\vec{x}|<R} \varphi(x)\triangle\varepsilon(x)d\vec{x} = 0$, так как

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi\rho},\ \triangle\varepsilon = \varepsilon_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}\varepsilon_\rho$$
$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{4\pi\rho^2},\ \varepsilon_{\rho\rho} = \frac{-2}{4\pi\rho^3} \Longrightarrow \triangle\varepsilon = 0$$

- $I_2 = \oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} \varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}d\sigma$. Сделаем замену:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\sin\theta\cos\phi \\ x_2 = \rho\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = \rho\cos\theta \end{cases},\theta \in [0, \pi],\ \phi \in [0, 2\pi), \mathbb{J} = \begin{vmatrix} x_{1\rho} & x_{1\theta} & x_{1\phi} \\ x_{2\rho} & x_{2\theta} & x_{2\phi} \\ x_{3\rho} & x_{3\theta} & x_{3\phi} \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta,$$

тогда

$$I_2 = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}|_{\rho=\alpha}(\rho^2\sin\theta)|_{\rho=\alpha}d\theta d\phi =$$
$$= \frac{\alpha^2}{4\pi\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}|_{\rho=\alpha}\sin\theta d\theta d\phi = \frac{\alpha}{4\pi}const \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

- $I_3 = -\oint\limits_{|\vec{x}|=\alpha} \varphi \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\sigma$

$$I_3 = \frac{\alpha^2}{4\pi\alpha^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \varphi(\alpha, \theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$= \Big| \text{теорема о среднем} \Big| = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\alpha, \theta^*, \phi) \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta}_{=-\cos\theta|_0^{\pi}=2} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\alpha, \theta^*, \phi) d\phi = \varphi(\alpha, \theta^*, \phi^*) \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} \varphi(0, 0, 0),\ \theta^* \in [0, \pi],\ \phi^* \in [0, 2\pi)$$

■

17

Функция Грина оператора Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина. Метод отражений. Метод конформных отображений.

Функция Грина оператора Лапласа, ее симметрия.

Рассмотрим фундаментальное решение оператора Лапласса:

$$\triangle\varepsilon(x) = \delta(x),\ \varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}|,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|\vec{x}|},\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Дирихле: $\begin{cases} \triangle u = f(x), x\in\Omega \\ u|_{x\in\partial\Omega} = h(x) \end{cases}$

Определение 17.1. ***Функция Грина*** *$G(x,y)$ задачи Дирихле для области Ω имеет вид:*

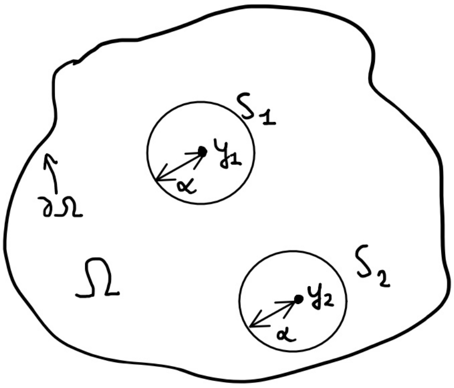
$$\begin{cases} \Delta_x G(x,y) = \delta(x-y),\ x\in\Omega \\ G(x,y)|_{x\in\Omega} = 0 \end{cases} \quad \forall\, y\in\Omega$$

Определение 17.2 (**эквивалентное определение функции Грина**). ***Функция Грина*** *представляется в виде $G(x,y) = \varepsilon(x-y) + g(x,y)$, где:*

$$\begin{cases} \Delta_x g(x,y) = \delta(x-y),\ x\in\Omega \\ g(x,y)|_{x\in\Omega} = -\varepsilon(x-y) \end{cases} \quad \forall\, y\in\Omega$$

Теорема 17.1 (**Симметрия функции Грина**). $G(x,y) = G(y,x)$

Доказательство.



Рассмотрим две функции:
$G_1 = G(x, y_1),\ G_2 = G(x, y_2)$

Рассмотрим область:
$\Omega_1 = \Omega \setminus (\{|x - y_1| < \alpha\} \cup \{|x - y_2| < \alpha\})$

Применим 2-ую формула Грина для G_1, G_2 в области Ω_1:

$$0 = \iint\limits_{\Omega_1} (G_1 \underbrace{\triangle_x G_2}_{=0} - G_2 \underbrace{\triangle_x G_1}_{=0}) d\vec{x} = 0 = \oint\limits_{\partial\Omega_1} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_x} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_x} \right) d\sigma =$$

$$= \underbrace{\oint\limits_{\partial\Omega} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_x} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_x} \right) d\sigma}_{I_1} + \underbrace{\oint\limits_{S_1} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_x} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_x} \right) d\sigma}_{I_2} + \underbrace{\oint\limits_{S_2} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_x} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_x} \right) d\sigma}_{I_3}$$

(S_1 и S_2 - вырезанные окружности)

$I_1 = 0$, т.к. G_1 и G_2 равны 0 на Ω.
Рассмотрим I_2:

$$\oint\limits_{S_1} \left(G(x, y_1) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y_2) - G(x, y_2) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y_1) d\sigma_x \right) =$$

$$= \oint\limits_{S_1} (\varepsilon(x - y_1) + \underbrace{g(x, y_1)}_{\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y_2) - G(x, y_2) \frac{\partial}{\partial n_y} (\varepsilon(x - y_1) + \underbrace{g(x, y_1)}_{\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}) d\sigma_x$$

Сделаем замену: $|x - y_1| = \rho$, $\frac{\partial}{\partial n_x} = -\frac{\partial}{\partial \rho}$. Тогда при $\alpha \to 0$ интеграл стремится к:

$$\int\limits_0^{2\pi} (\frac{1}{2\pi} \ln \rho (-\frac{\partial G_2}{\partial \rho}) \rho)|_{\rho=\alpha} d\theta - \int\limits_0^{2\pi} (G_2 (-\frac{1}{2\pi\rho}) \rho)|_{\rho=\alpha} d\theta =$$

$$= \underbrace{\alpha \ln \alpha \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{\partial G_2}{\partial \rho})|_{\rho=\alpha} d\theta}_{\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} G_2|_{\rho=\alpha} d\theta$$

$$= \left| \text{по теореме о среднем} \right| = G(x^*, y_2)|_{x^* \in S_1} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\theta}_{=1} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} G(y_1, y_2)$$

Для $\oint\limits_{S_2}$ все аналогично, только меняем местами G_1 и G_2. Тогда $\oint\limits_{S_2} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} G(y_2, y_1)$.

В итоге получаем, что $G(y_1, y_2) - G(y_2, y_1) = 0$. Т.к. y_1, y_2 – произвольные точки из Ω, то $G(y_1, y_2) = G(y_2, y_1)\ \forall\ y_1, y_2 \in \Omega$.

■

Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина.

Имеем задачу Дирихле: $\begin{cases} \triangle u = f(x), x \in \Omega \\ u|_{x \in \partial\Omega} = h(x) \end{cases}$

Воспользуемся 2-ой формулой Грина для $u(y), G(x, y)$:

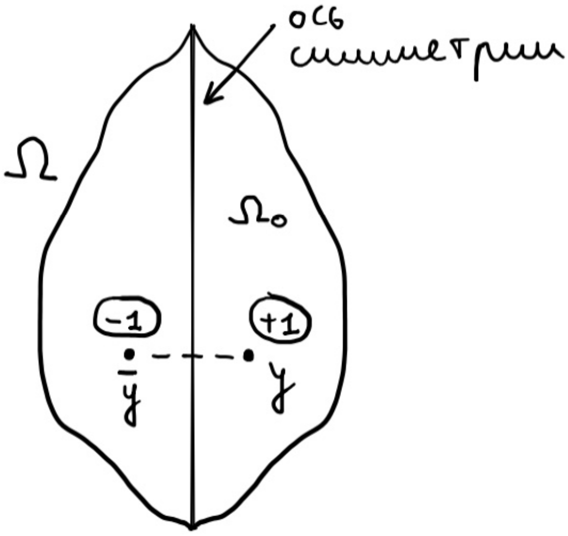
$$\iint\limits_{\Omega} \left(u(y) \underbrace{\triangle_y G(x, y)}_{=\delta(y-x)} - G(x, y) \underbrace{\triangle_y u(y)}_{=f(y)} \right) dy = \oint\limits_{\partial\Omega} \left(\underbrace{u(y)}_{=h(y)} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} - \underbrace{G(x, y)}_{=0} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) d\sigma$$

$$\iint\limits_{\Omega} \underbrace{u(y)\delta(y - x)}_{=u(x)\delta(y-x)} dy = u(x) \underbrace{\iint\limits_{\Omega} \delta(y - x) dy}_{=1} = u(x)$$

Тогда получаем формулу:

$$u(x) = \iint\limits_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \oint\limits_{\partial\Omega} h(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} d\sigma_y$$

Метод отражений.



Воспользуемся тем, что одной из физических интерпретаций функции Грина задачи Дирихле в области Ω_0 является потенциал поля, создаваемого в точке $x \in \Omega_0$ точечным зарядом величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$, расположенным в точке $y \in \Omega_0$, если граница $\partial\Omega_0$ области Ω_0 является заземленной идеально проводящей поверхностью.

Предположим, что вне области Ω_0 можно расположить фиктивные электрические заряды таким образом, чтобы суммарный потенциал поля, создаваемого зарядом $q = \dfrac{1}{4\pi}$, расположенным в точке $y \in \Omega_0$, и этими фиктивными зарядами, на границе $\partial\Omega_0$ обращался в нуль. Такие фиктивные заряды называются электростатическими изображениями заряда, помещенного в точку $y \in \Omega_0$. Потенциал поля, порожденного зарядами, находящимися вне области, представляет собой гармоническую внутри области Ω_0 функцию, то есть искомое гармоническое слагаемое в функции Грина.

Тогда в условиях вышеописанной задачи потенциал есть $u(x) = \varepsilon(x-y) + g(x,y) = G(x,y),\ g(x,y)$ – гармоническая. $G_0(x,y)$ – функция Грина для половинки, тогда

$$\begin{cases} \Delta_x G_0(x,y) = \delta(x-y),\ x \in \Omega_0 \\ G_0(x,y)|_{x\in\Omega_0} = 0 \end{cases} \qquad \forall y \in \Omega_0$$

Теорема 17.2. $G_0(x,y) = G(x,y) - G(x,\bar{y})$.

Доказательство.

1.
   - $G_0(x,y)|_{x\in\Omega} = 0,$ т.к. $G(x,y)|_{x\in\Omega} = 0$
   - $G_0(x,y)|_{\text{на } l} = 0,$ т.к. суммарный потенциал поля обращается в нуль на l

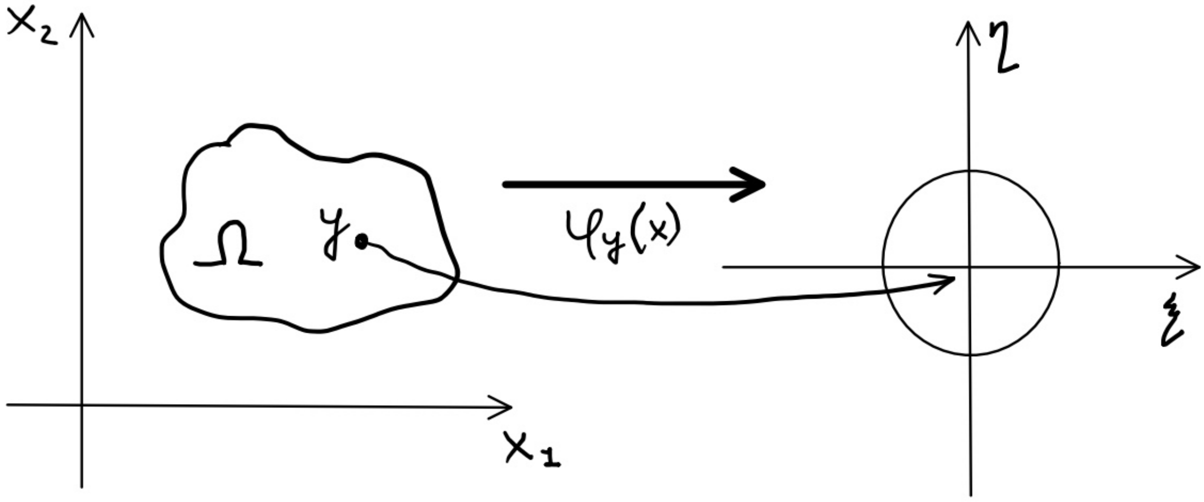
   Значит $G_0(x,y)|_{x\in\Omega_0} = 0.$

2. $\triangle_x G_0(x,y) = \delta(x-y)$, т.к.:

$$\triangle_x G_0(x,y) = \triangle_x G(x,y) - \triangle_x G(x,\bar{y}) = \delta(x-y) - \underbrace{\delta(x-\bar{y})}_{=0 \text{ в } \Omega_0\ (\bar{y}\notin\Omega_0)}$$

Таким образом, $G_0(x,y) = G(x,y) - G(x,\bar{y})$. ■

Метод конформных отображений.



$$\varphi(x):\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi(x) = \xi(x_1,x_2) + i\eta(x_1,x_2)$$

Определение 17.3. *$\varphi(x)$ – **конформное отображение**, если $\varphi(x)$ есть аналитическая функция ($\mathbb{C}$ - дифференцируема, $\varphi'(x) \neq 0$).*

Определение 17.4. *$\varphi(x)$ - **аналитическая функция** $\Leftrightarrow$ выполнены условия Коши - Римана:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\eta}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\xi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\eta}{\partial x_1} \end{cases}$$

Функция $\varphi_y(x)$ – аналитическая, $\frac{\partial\varphi_y(x)}{\partial x} \neq 0$. Пусть $\varphi_y(x)$ такая, что удовлетворяет условиям:

$$x \to \varphi_y(x),\ y \to 0$$
$$\Omega \to |\varphi_y| < 1,\ \partial\Omega \to |\varphi_y| = 1$$

Получаем, что $G(x,y) \to G(\varphi_y, 0)$.

$$G(\varphi_y,0) = \varepsilon(\varphi_y - 0) = \varepsilon(\varphi_y) = \frac{1}{2\pi}\log|\varphi_y|$$
$$\triangle\varepsilon(\varphi_y) = \xi_{\varphi_y\varphi_y} + \eta_{\varphi_y\varphi_y} = \delta(\varphi_y)$$

Значит: $\begin{cases} \Delta_{\varphi_y} G(\varphi_y, 0) = \delta(\varphi_y - 0), |\varphi_y| < 1 \\ G(\varphi_y, 0)|_{|\varphi_y|=1} = 0 \end{cases}$

Утверждение 17.1. $G(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |\varphi_y(x)|$.

Доказательство.

1. $\partial\Omega \to |\varphi_y| = 1 \Rightarrow G(x,y)|_{x \in \partial\Omega} = \dfrac{1}{2\pi} \ln |\varphi_y(x)|\Big|_{|\varphi_y|=1} = \dfrac{1}{2\pi} \ln 1 = 0.$

2. Рассмотрим случай $x \neq y$:

   $\ln z = \ln |z| + iArg(z)$ - аналитическая при $z \neq 0$, тогда $\varphi_y(x)$ – аналитическая при $\varphi_y(x) \neq 0$.

   $$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln |\varphi_y(x)| = \frac{1}{2\pi} \Re e(\ln(\varphi_y(x))) \text{ - гармоническая при } x \neq y.$$

   Тогда $\triangle_x G(x,y) = 0$ при $x \neq y$.

3. Рассмотрим случай $x \to y$.

   $$\varphi_y(x) = \underbrace{\varphi_y(y)}_{=0} + \underbrace{\frac{d\varphi_y(x)}{dx}\Big|_{x=y}}_{\neq 0} \cdot (x-y) + \underbrace{\alpha(x,t)}_{\underset{x\to y}{\longrightarrow} 0}(x-y)$$

   Тогда

   $$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln |\varphi_y(x)| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{d\varphi_y(x)}{dx}\Big|_{x=y} (x-y) + \alpha(x,t)(x-y) \right| =$$
   $$= \frac{1}{2\pi} \ln \left(|x-y| \left| \frac{d\varphi_y(x)}{dx}\Big|_{x=y} + \alpha(x,t) \right| \right) =$$
   $$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln |x-y|}_{=\epsilon(x-y)} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \underbrace{\frac{d\varphi_y(x)}{dx}|_{x=y}}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha(x,t)}_{\to 0} \right| =$$
   $$= \varepsilon(x-y) + g(x,y), \ |g(x,y)| < C \ x \longrightarrow y.$$

   Отсюда следует, что

   $$\triangle_x G(x,y) = \triangle_x(\varepsilon(x-y) + g(x,y)) = \delta(x-y) + \triangle_x g(x,y) =$$
   $$= \underbrace{\delta(x-y)}_{=0, \text{ при } x \neq y} + \triangle_x g(x,y)$$

   $$\begin{cases} \triangle_x g(x,y) = 0, \ x \neq y \\ |g(x,y)| < C, \ x \to y \end{cases} \Rightarrow \triangle_x g(x,y) = 0$$

   Получаем, что $\triangle_x G(x,y) = \delta(x-y)$.

■

18

Свойства гармонических функций: теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару, принцип максимума, теорема Лиувилля.

Свойства гармонических функций

Напоминание 18.1. *Напомним несколько важных определений:*

1. *Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ называется* ***гармонической****, если $\Delta u = 0$.*

2. *Фундаментальное решение оператора Лапласса имеет вид:*

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, \ x \in \mathbb{R}^2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|x|}, \ \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad \Delta\varepsilon(x) = \delta(x)$$

Введем обозначения:

- сфера: $S^R_{x_0} = \{|x - x_0| = R\}$, $|S^R_{x_0}| = \begin{cases} 2\pi R, \ x \in \mathbb{R}^2 \\ 4\pi R^2, \ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

- шар: $B^R_{x_0} = \{|x - x_0| \leq R\}$, $|B^R_{x_0}| = \begin{cases} \pi R^2, \ x \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{4}{3}\pi R^3, \ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

Теорема 18.1 (**Теорема о потоке для гармонической функции**).
Пусть $\Delta u = 0$, $x \in \Omega$, тогда: $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \Delta u d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma = 0.$

Доказательство. Следует из теоремы о потоке для обычной функции. ■

Теорема 18.2 (**Теорема о среднем на сфере**).
Пусть $\Delta u = 0$, $x \in B_{x_0}^R$, *тогда* $u(x_0) = \dfrac{1}{|S_{x_0}^R|} \oint\limits_{S_{x_0}^R} u(x) d\sigma$

Доказательство. Докажем для $\mathbb{R}^3$, доказательство для $\mathbb{R}^2$ аналогично.
Применим 2-ую формулу Грина для $u(x)$, $\varepsilon(x - x_0)$:

$$\iint\limits_{B_{x_0}^R} (\underbrace{\Delta\varepsilon(x - x_0)}_{=\delta(x-x_0)} u(x) - \underbrace{\Delta u(x)}_{=0} \varepsilon(x - x_0) dx =$$

$$= \iint\limits_{B_{x_0}^R} \underbrace{\delta(x - x_0) u(x)}_{=\delta(x-x_0)u(x_0)} dx = u(x_0) \underbrace{\iint\limits_{B_{x_0}^R} \delta(x - x_0) dx}_{=1} = u(x_0) =$$

$$= \oint\limits_{S_{x_0}^R} \left(u(x) \frac{\partial \varepsilon(x - x_0)}{\partial \bar{n}} - \varepsilon(x - x_0) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}} \right) d\sigma =$$

$$= \oint\limits_{S_{x_0}^R} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial \rho} (-\frac{1}{4\pi\rho}) + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{\rho = R} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{S_{x_0}^R} u(x) d\sigma + \frac{1}{4\pi R} \oint\limits_{S_{x_0}^R} \underbrace{\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}}}_{=0} d\sigma = \frac{1}{|S_{x_0}^R|} \oint\limits_{S_{x_0}^R} u(x) d\sigma$$

■

Теорема 18.3 (**Теорема о среднем по шару**).
Пусть $\Delta u = 0$, $x \in B_{x_0}^R$, *тогда* $u(x_0) = \dfrac{1}{|B_{x_0}^R|} \iint\limits_{B_{x_0}^R} u(x) d\bar{x}$.

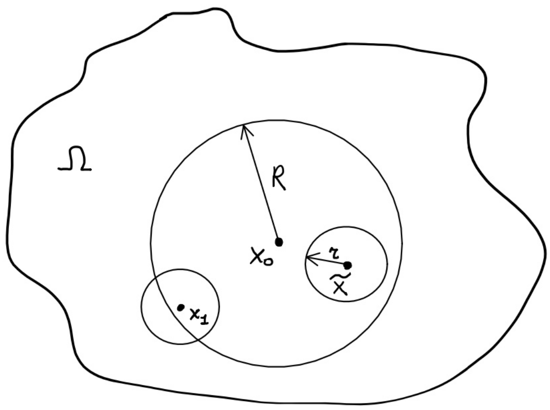
Доказательство. Распишем преобразования:

$$\iint\limits_{B_{x_0}^R} u(x) d\bar{x} = \int\limits_0^R (\oint\limits_{S_{x_0}^R} u(x) d\sigma) d\rho = \int\limits_0^R u(x_0) |S_{x_0}^R| d\rho = u(x_0) \int\limits_0^R \oint\limits_{S_{x_0}^R} 1 d\sigma d\rho = u(x_0) |B_{x_0}^R|$$

Тогда $u(x_0) = \dfrac{1}{|B_{x_0}^R|} \iint\limits_{B_{x_0}^R} u(x) d\bar{x}$. ■

Теорема 18.4 (**Строгий принцип максимума**). *Пусть* $\Delta u \equiv 0,\ x \in \Omega,\ u \not\equiv const$ *и* $M = \max\limits_{\partial\Omega} u(x),\ m = \min\limits_{\partial\Omega} u(x)$, *тогда* $\forall\, x \in \Omega\ m < u(x) < M$.

Доказательство. Докажем, что, если $u(x)$ достигает max во внутренней точке области Ω, то $u(x) \equiv const$.



Положим $M = \max\limits_{\bar\Omega} u(x)$.

Пусть $\exists x_0 \in \Omega$ - такая внутренняя точка Ω, что $u(x_0) = M$.

x_0 - внутренняя, тогда $\exists B_{x_0}^R \subset \Omega$.

Пусть $u(x) \not\equiv M$ в $B_{x_0}^R$, а также пусть $u(x) \le M\ \forall\, x \in \Omega$.

Тогда $\exists \tilde{x} \in B_{x_0}^R:\ u(\tilde{x}) < M$.

$u(x)$ – непрерывная, значит $\exists B_{\tilde{x}}^r:\ u(x) < M$ в $B_{\tilde{x}}^r$.

Применим теорему о среднем по шару $B_{x_0}^R$:

$$u(x_0) = M = \frac{1}{B_{x_0}^R} \iint\limits_{B_{x_0}^R} u(x) d\bar{x} = \frac{1}{B_{x_0}^R} \left(\iint\limits_{B_{\tilde{x}}^r} \underbrace{u(x)}_{<M} d\bar{x} + \iint\limits_{B_{x_0}^R \setminus B_{\tilde{x}}^r} \underbrace{u(x)}_{\le M} d\bar{x} \right) <$$

$$< \frac{M}{|B_{x_0}^R|}(|B_{\tilde{x}}^r| + |B_{x_0}^R| - |B_{\tilde{x}}^r|) = M \text{ – противоречие } \Rightarrow\ u(x) \equiv M \text{ в } B_{x_0}^R.$$

■

Теорема 18.5 (**∞ дифференцируемость гармонической функции**). *Пусть* $\Delta u = 0,\ x \in \Omega$, *тогда* $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Применим 2-ую формулу Грина для $u(y)$ и $\varepsilon(y - x)$:

$$\iint\limits_{\Omega} (u(y) \underbrace{\Delta_y \varepsilon(y-x)}_{\delta(y-x)} - \varepsilon(y-x) \underbrace{\Delta_y u(y)}_{=0}) dy = \oint\limits_{\partial\Omega} (u(y) \frac{\partial \varepsilon(y-x)}{\partial \bar{n}_y} - \varepsilon(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y}) d\sigma_y$$

$$u(x) = \oint\limits_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial \varepsilon(y-x)}{\partial \bar{n}_y} - \varepsilon(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y} \right) d\sigma_y$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \oint\limits_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial \varepsilon(y-x)}{\partial \bar{n}_y}) - \frac{\partial \varepsilon(y-x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y} \right) d\sigma_y$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x^\alpha} = -||-, \text{ т.к. } \varepsilon(y-x) \in C^\infty \text{ при } x \ne y.$$

■

Теорема 18.6 (Теорема Луивилля).
Пусть $\Delta u = 0$ *в* $\mathbb{R}^n$ *и* $u(x) \geq c$ *в* $\mathbb{R}^n$, *тогда* $u \equiv const$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $v(x) = u(x) - c \geq 0$, тогда $\Delta\nu(x) = 0$ и $\Delta(\dfrac{\partial\nu(x)}{\partial x_i})$. Применим теорему о среднем по шару $B^R_{x_0}$:

$$\frac{\partial\nu(x_0)}{\partial x_i} = \frac{1}{|B^R_{x_0}|}\iint\limits_{B^R_{x_0}} \frac{\partial\nu(x)}{\partial x_i} d\bar{x}$$

По формуле Гаусса - Остроградского:

$$\frac{1}{|B^R_{x_0}|}\oint\limits_{S^R_{x_0}} \underbrace{\nu(x)}_{\geq 0} n_i d\sigma = \frac{n_i(x^*)}{|B^R_{x_0}|}\oint\limits_{S^R_{x_0}} \nu(x) d\sigma = \frac{n_i(x^*)}{|B^R_{x_0}|}\nu(x_0)|S^R_{x_0}|$$

Тогда $|\dfrac{\partial\nu(x_0)}{\partial x_i}| \leq \dfrac{c}{R} \underset{R\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Значит:

$$\frac{\partial\nu(x_0)}{\partial x_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\nu(x)}{\partial x_i} = 0,\; i = 1,\ldots,n \;\Rightarrow\; v \equiv const \;\Rightarrow\; u \equiv const$$

■

19

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Единственность решения задачи Дирихле. Задача Неймана: условие разрешимости, теорема о множестве решений.

Определение 19.1. *Имеем несколько видов уравнений:*

- $\Delta u = 0$ – ***уравнение Лапласа***
- $\Delta u = f(x)$ – ***уравнение Пуассона***

Теорема 19.1 (**Единственность решения задачи Дирихле**).
Имеем задачу Дирихле: $\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ u(x) \mid_{\partial\Omega} = h(x) \end{cases}$.
Тогда $\exists! u(x)$ *- решение для* $\forall$ *непрерывных* $f(x), \ h(x)$.

Доказательство. Доказываем *единственность*, т.к. существование уже доказано через функцию Грина.

Пусть $\exists u_1, u_2$ - два различных решения. Рассмотрим их разность $z = u_1 - u_2$ и задачу Дирихле для нее:

$$\begin{cases} \Delta z(x) = 0, \ x \in \Omega \\ z(x) \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Тогда по принципу максимума max и min достигаются на границе, а значит $z \equiv 0$, т.е. $u_1 \equiv u_2$. ■

Определение 19.2 (**Условие разрешимости задачи Неймана**).

$$\iint\limits_{\Omega} f(x)dx = \oint\limits_{\partial\Omega} h(x)dx$$

Теорема 19.2 (**Теорема о множестве решений задачи Неймана**).

Имеем задачу Неймана: $\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \; x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}} \mid_{\partial\Omega} = h(x) \end{cases}$

Если выполнено условия разрешимости и u_1, u_2 *- решения задачи Неймана, то* $u_1 - u_2 \equiv const$*, т.е. решений бесконечно много. Если условие разрешимости не выполнено, то решений нет.*

Доказательство. Отстутствие решение в случае невыполнения условия разрешимости очевидно следует из теоремы о потоке.

Теперь предположим, что $\exists u_1, u_2$ - два различных решения. Рассмотрим их разность $z = u_1 - u_2$ и задачу Неймана для нее:

$$\begin{cases} \Delta z(x) = 0, \; x \in \Omega \\ \dfrac{\partial z(x)}{\partial \bar{n}} \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Условие разрешимости автоматически выполнено. Воспользуемся 1-ой формулой Грина для $\nu = \omega = z$:

$$\iint\limits_{\Omega} \nu \Delta\omega d\bar{x} = \oint\limits_{\partial\omega} \nu \frac{\partial\omega}{\partial\bar{n}} d\sigma - \iint\limits_{\Omega} (\bar{\nabla}\nu, \bar{\nabla}\omega) d\bar{x}$$

$$\underbrace{\iint\limits_{\Omega} z\Delta z d\bar{x}}_{=0} = \underbrace{\oint\limits_{\partial z} z \frac{\partial z}{\partial\bar{n}} d\sigma}_{=0} - \iint\limits_{\Omega} ||\bar{\nabla}z||^2 d\bar{x} = 0 \;\Rightarrow\; \iint\limits_{\Omega} ||\bar{\nabla}z||^2 d\bar{x} = 0$$

Так как $||\bar{\nabla}z||^2 \geq 0$ и $||\bar{\nabla}z|| = (\dfrac{\partial z}{\partial x_1})^2 + \cdots + (\dfrac{\partial z}{\partial x_n})^2 \equiv 0$, то:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} \equiv 0, \; i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow\; z \equiv const \;\Rightarrow\; u_1 - u_2 \equiv const$$

■

Литература

[1] Курс лекций Т.О.Капустиной, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2020-2021 гг.

[2] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.: 6-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2020. — 260 с.

[3] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 404 с.

[4] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 400 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.: изд. 5-е, стереотипное, учебное пособие для высших учебных заведений, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 736 стр.