МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

экономический поток

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

4 курс, 8 семестр

Лектор
д. ф.-м. н. Е.И. Кугушев
«___» ________ 2022 г.

Семинарист
к. ф.-м. н., доцент
М.А. Салмина
«___» ________ 2022 г.

Москва, 2022 г.

Техническая информация

Данный PDF содержит примерную программу весеннего семестра 4 курса по предмету «Аналитическая механика».

Пособие собрано и напечатано по мотивам лекций и семинаров студентами 4-го курса Коновым Марком и Гащук Елизаветой.

Авторы пособия выражают огромную благодарность лектору, доктору ф.-м. наук Кугушеву Евгению Ивановичу, а также семинаристу, кандидату ф.-м. наук, доценту Салминой Марии Алексеевне за прочитанный курс по предмету «Аналитическая механика».

Добавления и исправления принимаются на почты:

vkonov2@yandex.ru, mark.konov@math.msu.ru
gashchuk2011@mail.ru, elizaveta.gashchuk@math.msu.ru

ПРИЯТНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Содержание

Уравнения Лагранжа 2-го рода

1. Принцип Даламбера-Лагранжа.

Принцип Даламбера-Лагранжа для систем с геометрическими связями

Пусть у нас есть система материальных точек, у которой: $\overline{r}_1 \dots \overline{r}_N -$ радиусы векторы, $\overline{m}_1 \dots \overline{m}_N -$ массы, $F_1 \dots F_N -$ действующие силы, и на систему наложены геометрические связи

$$f_i(\overline{r}_1 \dots \overline{r}_N, t) = 0 \tag{1}$$
$$i = 1 \dots k$$

Будем считать, что ранг матрицы Якоби максимален

$$rank \left\| \frac{\partial f_i \dots f_N}{\partial \overline{r}_1 \dots \overline{r}_N} \right\| = k$$

Уравнения связи высекают в пространстве гиперповерхность с обобщенными координатами $q = (q_1 \dots q_N)$ (См. рис.1.1)

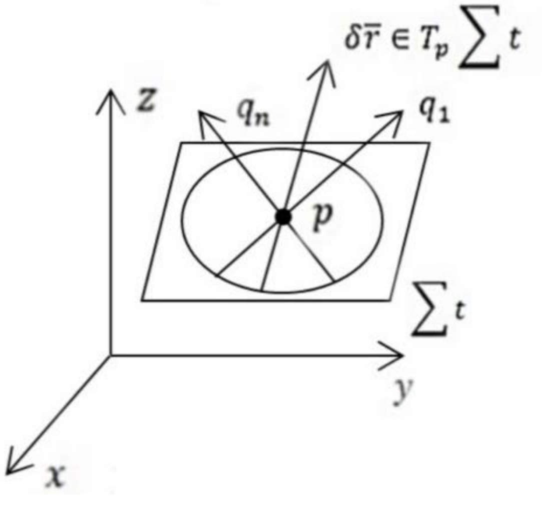

Рис. 1.1. Гиперповерхность, конфигурационное пространство

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i(q_i \dots q_N, t) \tag{2}$$

Если подставить (2) в (1), то уравнения будут тождественно выполняться

$$f(r_1(q,t) \dots r_N(q,t), t) = 0 \tag{3}$$
$$\forall q, \forall t$$
$$n = 3N - k - \text{число степеней свободы системы}$$

$$rank \left\| \frac{\partial \overline{r}_1 \dots \overline{r}_N}{\partial q_1 \dots q_N} \right\| = n$$

Виртуальное перемещение ($\delta\overline{r}$) — это такое перемещение, уравнения которого сохраняются с точностью до малых 2-ого порядка (касательный вектор).

$$\delta\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{4}$$

$$\delta r = (\delta r_1 \dots r_N)$$

$$\forall \delta q = (\delta q_i \dots \delta q_N)$$

Любому физическому движению $\overline{r}(t)$ соответсвует какое-то изменение обобщенных координат во времени $q(t)$

Для действительных движений:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \delta\overline{r}_i) = 0 \tag{5}$$

$$\forall \delta\overline{r}$$

Кинетическая энергия системы

Используя (2) можем сказать, что

$$\dot{\overline{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{6}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\overline{r}}_i^2}{2} = T_2 + T_1 + T_0 = T(q, \dot{q}, t)$$

$$T_2 = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(q,t)\dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\dot{q}_i$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\dot{q}_i$$

$$T_0 = c(q,t)$$

Обобщенные силы

$$Q = (Q_1 \dots Q_N)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_j \frac{\partial \overline{r_j}}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t)$$

2. Уравнения Лагранжа второго рода. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно старших производных. Обобщенные силы. Случай потенциальных сил, лагранжиан. Первые интегралы уравнений Лагранжа обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби), циклические координаты и циклические интегралы.

Принцип Даламбера-Лагранжа виртуальных перемещений эквивалентен выполнению уравнения Лагранжа 2 – го рода:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \delta\overline{r}_i) = 0 <=> \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Доказательство:

Подставим в (5) (4) и получим:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j) = 0$$

$$\forall\delta q = (\delta q_1 \dots \delta q_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_j})\delta q_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = 0$$

Лемма:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Доказательство:

Воспользуемся правилом Лейбница

$$(\dot{fg}) = \dot{f}g - f\dot{g}$$

$$f = (m_i \ddot{\bar{r}}_i)$$

$$g = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

$$(m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}(m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) - m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) \tag{7}$$

Будем пользоваться соотношениями:

$$\text{а)}\ \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

$$\text{б)}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t}$$

$$g = \sum \frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial q}{\partial t}$$

Функцию (7) разобьём на две части, 1а и 1б:

$$1\text{а} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_{i_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}\right))$$

$$u \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(\frac{u^2}{2})$$

$$1\text{б} = -m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{m_i \dot{r}_i^2}{2})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = 1\text{а}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} = 1\text{б}$$

Лемму доказали и получили уравнения Лагранжа 2-ого рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

3. Понижение порядка по Раусу.

Разрешимость относительно старших производных

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(A(q,t),\dot{q},\dot{q})$$

$$T_1 = (B(q,t),\dot{q})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} + B$$

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) + \frac{d}{dt}(B)$$

$$\frac{d}{dt}(B) = \frac{\partial B}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) = A\ddot{q} + (\frac{d}{dt}A)\dot{q}$$

Если подставить выражения в уравнение Лагранжа 2-ого рода, выражения будут иметь вид:

$$A(q,t)\ddot{q} = H(q,\dot{q},t)$$

$\ddot{q} = A^{-1}H$- уравнение разрешили относительно старших производных

Матрица А положительно определенная $(Au,u) > 0, \forall u \neq 0, u \in R^n$

Обобщённые силы

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

Чтобы вычислить обобщённую силу, посчитаем мощность сил:

$$\sum_i F_i \dot{r}_i = \sum_j (\sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j)$$

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Чтобы вычислить обобщённую силу, нужно зафиксировать связи и начать изменять координату Q_{j*}

Потенциальные силы

Существует какая-то функция $V((r_1 \dots r_N, t))$ такая, что $F_j = -\frac{\partial V}{\partial r_j}$

$U = -V, U -$ силовая функция

Рассмотрим случай, когда силы потенциальны и консервативны, не зависят от времени. А связи стационарны. $r_i = r_i(q)$, $V(r_1 \dots r_N)$

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$V(q_1 \dots q_N) = V(r_1 \dots r_N) = V(r_1(q), r_2(q) \dots r_N(q))$$

Уравнение Лагранжа 2-ого рода будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

L- функция Лагранжа (Лагранжиан)

Свойства лагранжевых систем:

Первые интегралы уравнений Лагранжа:

1) Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби)

Если $L = (q, \dot{q})$- не зависит от t, то $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$- первый интеграл системы уравнения Лагранжа

2) Циклические интегралы

Если $L = (q, \dot{q})$- не зависит от q_j, то q_j- циклическая координата, а $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \beta_j = const$- первый интеграл системы уравнения Лагранжа.

4. Поле симметрий. Теорема Нётер о первых интегралах.

5. Вариационные принципы. Функционал действия и его вариация. Принцип Гамильтона. Метрика Якоби. Вариация по Гамильтону и по Мопертюи-Якоби. Принцип Мопертюи-Якоби.

Устойчивость положений равновесия. Малые колебания

6. Положения равновесия натуральных лагранжевых систем. Устойчивость положения равновесия лагранжевой системы по Ляпунову. Теорема Лагранжа-Дирихле.

7. Линеаризация уравнений Лагранжа около положения равновесия. Нормальные координаты. Уравнение малых колебаний.

8. Диссипативные и гироскопические силы. Диссипативность сил Релея. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия (обобщение теоремы Лагранжа-Дирихле при наложении диссипативных и гироскопических сил).

9. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению (формулировка). Степень неустойчивости. Теорема о невозможности гироскопической стабилизации. Четность характеристического полинома линеаризованных уравнений в потенциальном случае. Парность корней характеристического уравнения.

10. Инвариантная мера. Мера с гладкой плотностью. Плотность при замене координат. Теорема Лиувилля об инвариантной мере. Построение инвариантной меры на многообразии уровней первых интегралов – локально (Существование инвариантной меры у ограничения системы на инвариантное многообразие.)

11. Интегрируемость в квадратурах. Теорема Якоби о последнем множителе.

12. Теорема Пуанкаре о возвращении.

Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

13. Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера. Уравнения Пуассона. Первые интегралы уравнений Эйлера-Пуассона.

14. Инвариантная мера уравнений Эйлера-Пуассона и интегрируемость в квадратурах. Понятие о трех классических случаях интегрируемости Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

15. Случай волчка Эйлера. Уравнения движения, первые интегралы, стационарные вращения. Фазовый портрет уравнений Эйлера. Устойчивость стационарных вращений. Эллипсоид инерции. Геометрическая интерпретация Пуансо движения волчка Эйлера. Регулярная прецессия в случае Эйлера.

16. Случай Лагранжа. Функция Лагранжа. Циклические интегралы. Понижение порядка по Раусу. Фазовый портрет приведенной системы. След оси динамической симметрии на сфере.

Гамильтонова механика I

17. Функция Гамильтона, канонические уравнения движения Гамильтона. Гамильтониан натуральной системы.

18. Свойства уравнений Гамильтона интеграл энергии; циклические интегралы и понижение порядка в уравнениях Гамильтона; инвариантная мера уравнений Гамильтона (теорема Лиувилля о сохранении фазового объема)

19. Принцип Гамильтона в фазовом пространстве. Лемма об аннуляторе канонической 2формы. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Интегральный инвариант Пуанкаре.

20. Инвариантность канонической 2-формы при сдвиге по траекториям.

21. Канонические преобразования. Производящая функция. Свободные канонические преобразования. Производящая функция тождественного преобразования.

22. Уравнение Гамильтона-Якоби. Его полный интеграл. Разрешимость в квадратурах.

23. Понижение порядка по Уиттекеру. Автономизация системы.

Гамильтонова механика II

24. Симплектическое многообразие. Формулировка теоремы Дарбу о канонических координатах. Гамильтоново векторное поле.

25. Скобка Пуассона и ее свойства. Тождество Якоби. Алгебры Ли - примеры. Связь коммутатора функций и гамильтоновых векторных полей. Теорема Пуассона о первых интегралах.

26. Теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах.

27. Переменные действие-угол. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Переменные действие-угол для гармонического осциллятора.

Литература

[1] Курс лекций Е.И.Кугушева, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2021-2022 гг.

[2] Курс семинаров М.А.Салминой, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2021-2022 гг.

[3] Конспект по аналитической механике Е.И.Кугушева, Teach-In.