0.1 Построение прямой (точки), минимально удаленной от множества плоскостей (отрезков)

0.1.1 Постановка задачи

Дано множество из n отрезков на плоскости или n плоскостей в пространстве. Необходимо найти точку на плоскоти, минимально удаленную от заданных отрезков, или прямую в пространстве, минимально удаленную от заданных плоскостей. Меру близости на плоскости выберем равной корню из суммы квадратов расстояний от точки до прямых, содержащих отрезки. Меру близости в пространстве выберем равной корню из суммы квадратов расстояний от прямой до плоскостей: в случае параллельности или совпадения прямой и плоскости берется расстояние от любой точки прямой до плоскости, а в случае пересечения берется расстояние от плоскости до точки прямой, ближайщей к этой плоскости внутри призмы, объемлющей рассматриваемый компакт пространства.

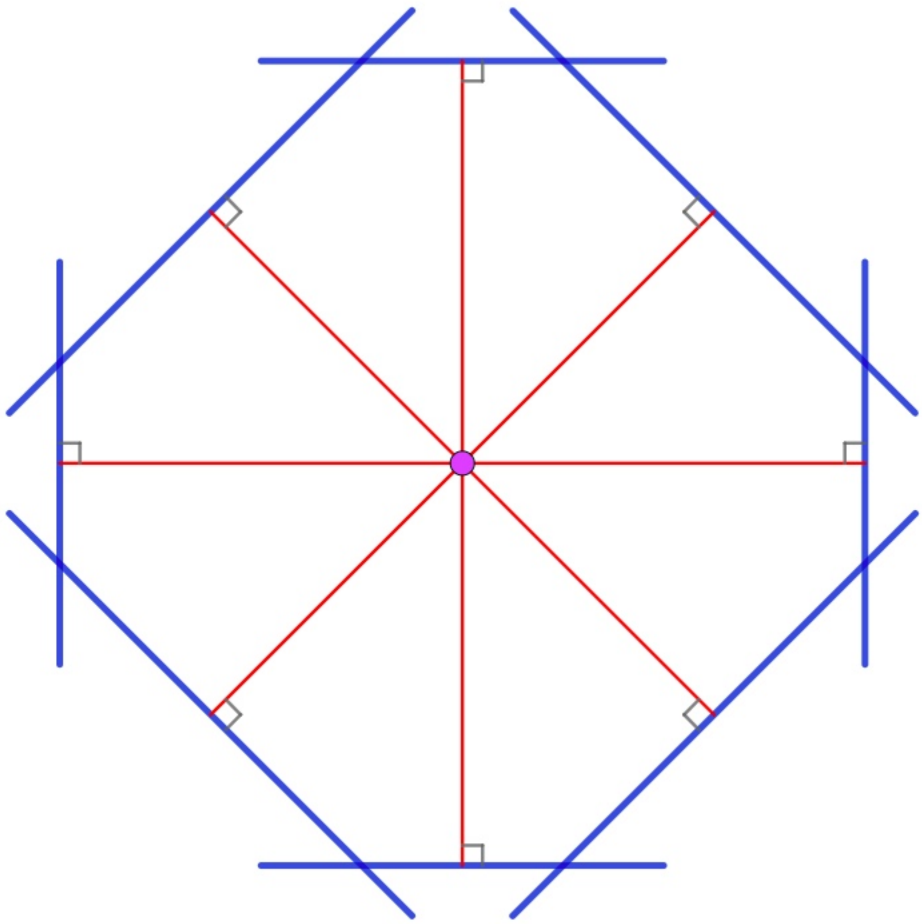

Рис. 0.1: Точка и множество отрезков на плоскости.

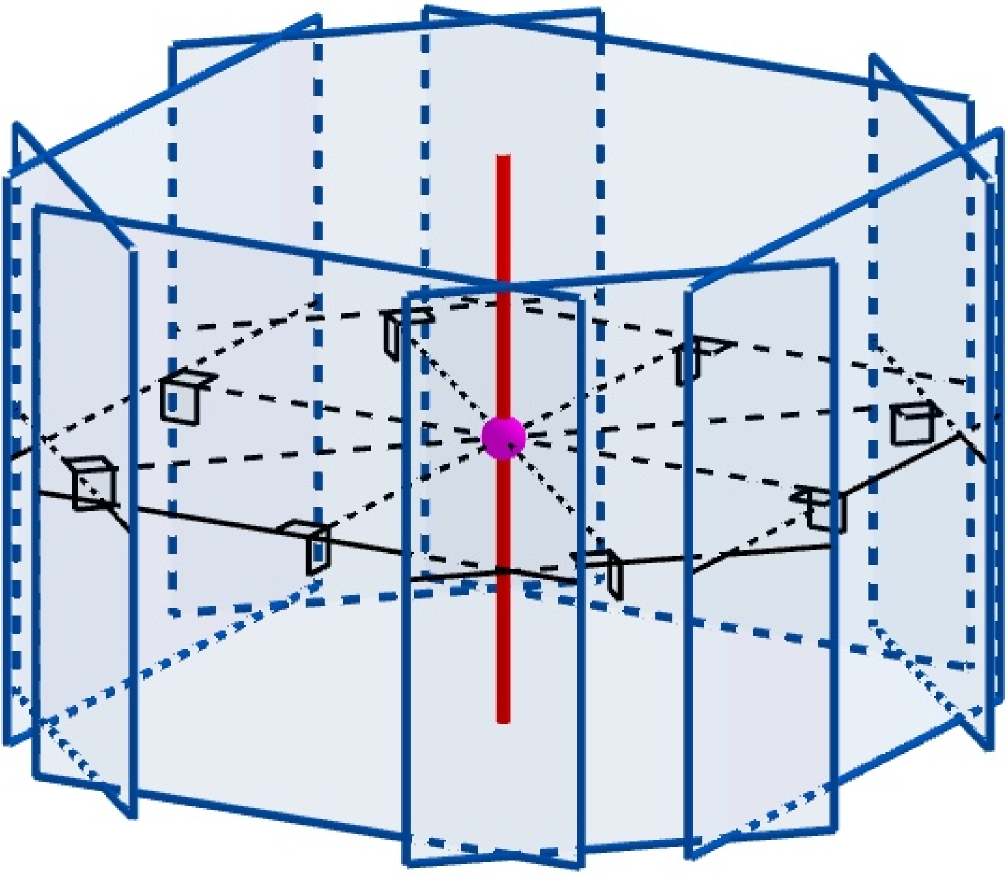

Рис. 0.2: Отрезок и множество плоскостей в пространстве.

0.1.2 Двумерный случай

Пусть дан набор из n отрезков в виде набора пар их вершин:

$$S = \{\ ((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}))\ :\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Таким образом, у нас имеется точка, через которую проходит каждый отрезок, и направление прямой, на которой лежит каждый отрезок, и можно переписать множетсво отрезков следующим образом:

$$S^* = \left\{\ \left((x_i^{(c)}, y_i^{(c)}), (l_i^x, l_i^y)\right)\ :\ i = 1, 2, \ldots, n-1\right\}$$

$$x_i^{(c)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ y_i^{(c)} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$l_i^x = x_{i+1} - x_i,\ l_i^y = y_{i+1} - y_i$$

Отнормируем напрявляющие векторы прямых, содержащих отрезки:

$$\tilde{l}_i^x = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}},\ \tilde{l}_i^y = \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

Тогда нормальные уравнения этих прямых будут иметь вид:

$$a_i x + b_i y - p_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

(p_i - длина перпендикуляра из начала координат на прямую)

$$p_i = \frac{\tilde{l}_i^x y_i^{(c)} - \tilde{l}_i^y x_i^{(c)}}{\pm\sqrt{(\tilde{l}_i^x)^2 + (\tilde{l}_i^y)^2}},\ a_i = \frac{\tilde{l}_i^x}{\pm\sqrt{(\tilde{l}_i^x)^2 + (\tilde{l}_i^y)^2}},\ b_i = \frac{\tilde{l}_i^y}{\pm\sqrt{(\tilde{l}_i^x)^2 + (\tilde{l}_i^y)^2}}$$

(выбираем знак корня так, чтобы p_i было положительно)

Без ограничения общности будем считать, что имеет знак $+$, тогда:

$$a_i + b_i y + c_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1$$
$$a_i = \tilde{l}_i^x,\ b_i = \tilde{l}_i^y,\ c_i = x_i^{(c)}\tilde{l}_i^y - y_i^{(c)}\tilde{l}_i^x$$

Будем искать точку $O = (x_0, y_0)$, наименее удаленную от данного множества отрезков.

Формула расстояния от точки прямой, содержащей каждый отрезок:

$$\rho(O, l_i) = \frac{|a_i x_0 + b_i y_0 + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} = |a_i x_0 + b_i y_0 + c_i|,\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

Наша мера будет иметь вид:

$$L_0(x_0, y_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2}$$

Будем работать не с этой меру, а с выражением под корнем (в силу монотонности функции корня это эквивалентная задача), т.е. имеем функционал:

$$L(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2$$

Таким образом, задача свелась к поиску минимального значения выражения $L(x_0, y_0)$.

Составим систему из двух уравнений, приравняв к нулю частные производные функционала $L(x_0, y_0)$ по x_0 и y_0:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_0}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_0}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-1} (2a_i(a_ix_0 + b_iy_0 + c_i)) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} (2b_i(a_ix_0 + b_iy_0 + c_i)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) x_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i\right) y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ic_i = 0 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i\right) x_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right) y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_ic_i = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Для выяснения совместности системы воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли и следствием из нее:

Теорема 1 (**Кронекера-Капелли**). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, т.е.* $rkA = rk\tilde{A}$

Следствие 0.1. *Из теоремы Кронекера-Капелли получаем утвреждения:*

1. *если* $rkA \neq rk\tilde{A}$, *то СЛАУ несовместна*
2. *если* $rkA = rk\tilde{A} < n$, *то СЛАУ имеет бесконечное число решений*
3. *если* $rkA = rk\tilde{A} = n$, *то СЛАУ имеет ровно одно решение*

В нашем случае имеем:

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 \end{pmatrix},\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ic_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_ic_i \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем:

- если $rkA = rk\tilde{A} = 1 < 2$, т.е. $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_ic_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i}$, то система имеет бесконечное число решение, т.е. существует прямая, равноудаленная от исходного множества отрезков (прямых) - любое из уравнений системы $(*)$
- если $rkA \neq rk\tilde{A} \Leftrightarrow rkA = 1, rk\tilde{A} = 2$, т.е. $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_ic_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_ic_i}$, то система несовместна (нет решений)

- если $rkA = rk\tilde{A} = 2$, т.е. $\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение (одну точку):

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)} \\ y_0 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)} \end{cases}$$

0.1.3 Трехмерный случай

ждет заполнения

0.1.4 Примеры работы программ

Двумерный случай

ждет заполнения

Трехмерный случай

ждет заполнения