МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра Вычислительной Математики

Курсовая работа

Восстановления отрезка по проекциям на плоскостях

Конов Марк Андреевич

3 курс, группа 332

Научный руководитель
к.ф.-м.н.
Валединский Владимир Дмитриевич
«___» ________ 2021 г.

Москва, 2021 г.

Оглавление

1 Постановка задачи

Даны три множества из n_1, n_2 и n_3 точек на трех плоскостях π_1, π_2, π_3 в пространстве. Необходимо восстановить отрезок, являющегося прообразом проекций на плоскостях, как можно точнее.

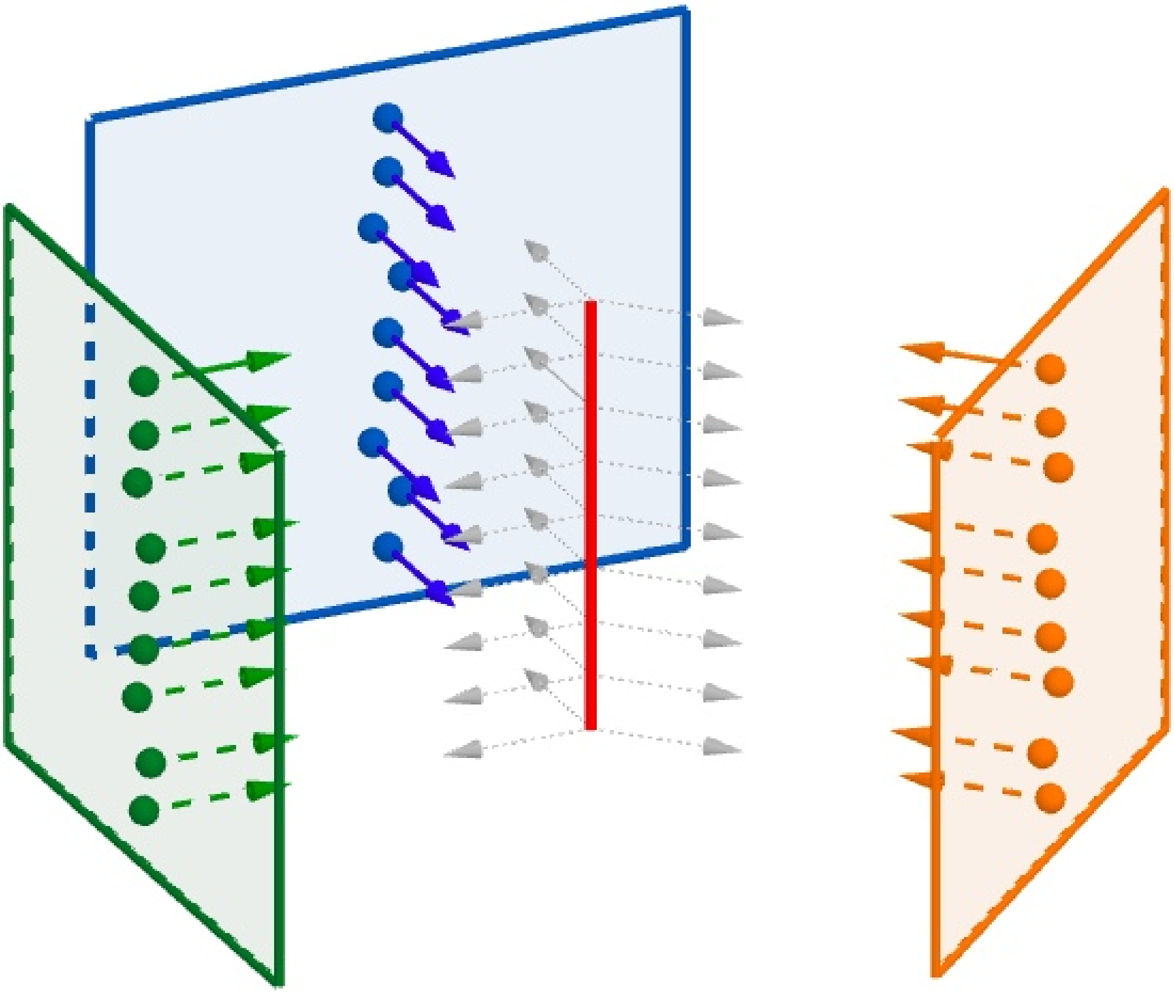


Рис. 1.1: Три множества точек, три плоскости и отрезок.

История задачи:

Имеется отрезок и три плоскости. По трем заданным направлениям отрезок проецируется на эти плоскости, где мы получаем три отрезка.

Теперь стоит обратная задача. Даны три множества точек, каждое из которых находится на соответствующей плоскости. Направления изначального проецирования заданы. По этим наборам точек на плоскостях и по направлениям проецирования нужно найти исходный отрезок.

2 Решение

2.1 Метод №1

2.1.1 Идея

1) Аппроксимируем множества точек прямыми.

2) Проводим плоскости через полученные прямые и направления проектирования и получаем некую призму в пересечении трех плоскостей.

3) Ищем прямую, минимально удаленную от данных трех плоскостей.

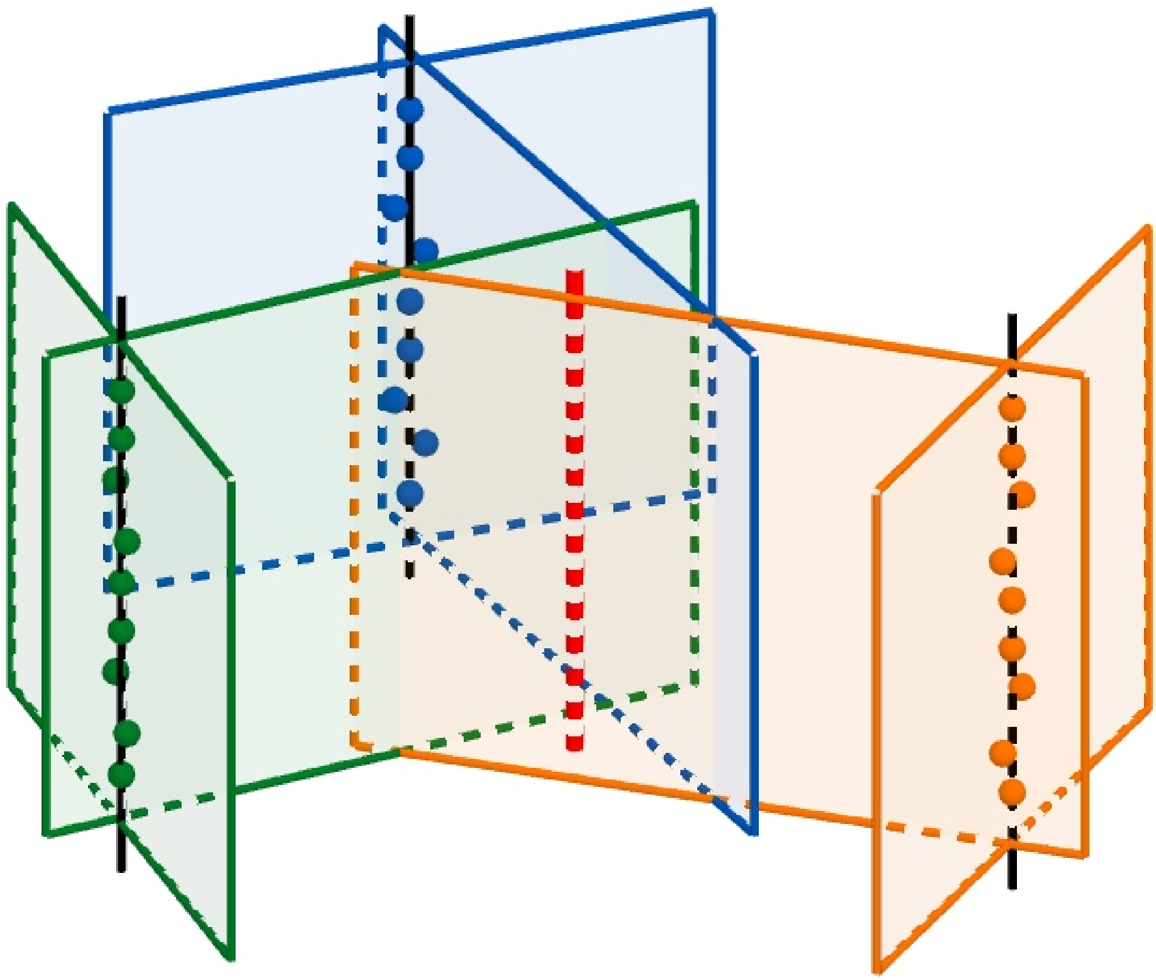


Рис. 2.1: Построение прямых и плоскостей через точки множеств.

2.1.2 Решение

Пусть имеем три множества:

$$P_1 = \left\{p_i^1 = (x_i^1, y_i^1, z_i^1) \colon i = 1, 2, \dots, n_1\right\}$$
$$P_2 = \left\{p_i^2 = (x_i^2, y_i^2, z_i^2) \colon i = 1, 2, \dots, n_2\right\}$$
$$P_3 = \left\{p_i^3 = (x_i^3, y_i^3, z_i^3) \colon i = 1, 2, \dots, n_3\right\}$$

Используя алгоритм аппроксимации множества точек прямой 3.1.3, получаем три прямые, приближающие наши множества P_1, P_2 и P_3:

$$l_1 : \begin{cases} x = x_0^1 + m^1 \cdot t \\ y = y_0^1 + n^1 \cdot t \\ z = z_0^1 + p^1 \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

$$l_2 : \begin{cases} x = x_0^2 + m^2 \cdot t \\ y = y_0^2 + n^2 \cdot t \\ z = z_0^2 + p^2 \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

$$l_3 : \begin{cases} x = x_0^3 + m^3 \cdot t \\ y = y_0^3 + n^3 \cdot t \\ z = z_0^3 + p^3 \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

Пусть $(m_1, n_1, p_1)^T$, $(m_2, n_2, p_2)^T$, $(m_3, n_3, p_3)^T$ - направления проектирования.

Тогда плоскости через найденные прямые и направления проектирования имеют вид:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = x_0^1 + m^1 \cdot t_1 + m_1 \cdot t_2 \\ y = y_0^1 + n^1 \cdot t_1 + n_1 \cdot t_2 \\ z = z_0^1 + p^1 \cdot t_1 + p_1 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = x_0^2 + m^2 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 \\ y = y_0^2 + n^2 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 \\ z = z_0^2 + p^2 \cdot t_1 + p_2 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

$$\pi_3 : \begin{cases} x = x_0^3 + m^3 \cdot t_1 + m_3 \cdot t_2 \\ y = y_0^3 + n^3 \cdot t_1 + n_3 \cdot t_2 \\ z = z_0^3 + p^3 \cdot t_1 + p_3 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

Используя алгоритм нахождения прямой, минимально удаленной от данного множества плоскостей 3.2.3, получаем искомый отрезок (прямую).

2.1.3 Погрешность и примеры работы программ

Погрешность метода состоит из погрешности аппроксимации множеств точек прямыми и погрешности нахождения прямой, минимально удаленной от данного множества прямых.

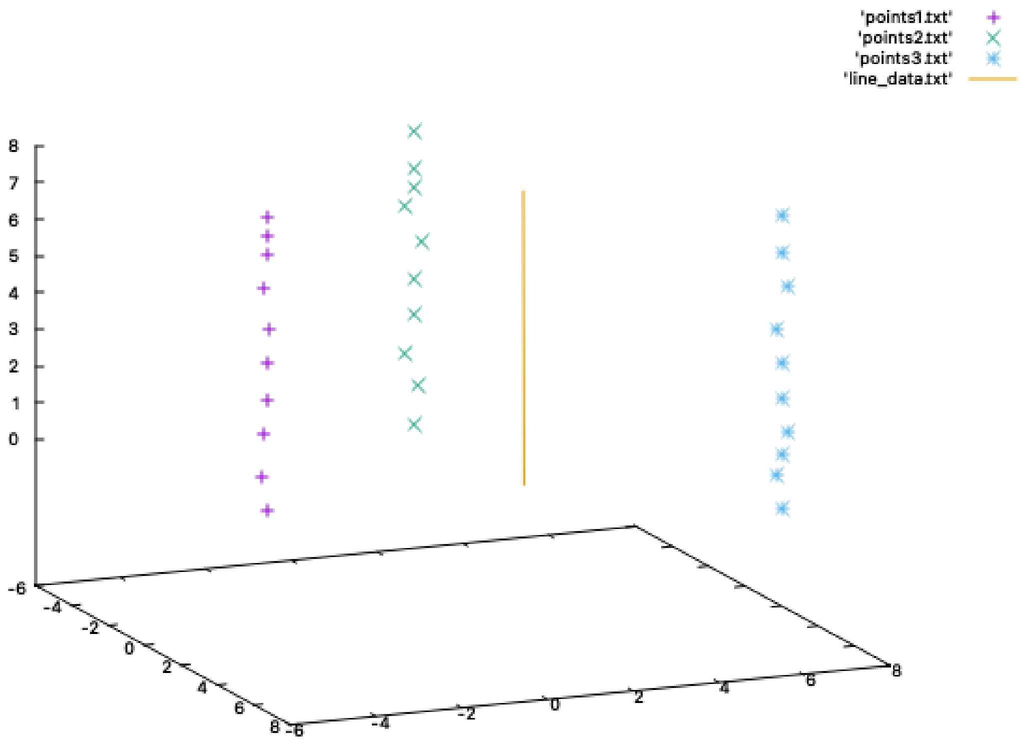
Искусственные данные

Исходные данные - три множетсва точек и три направления проектирования:

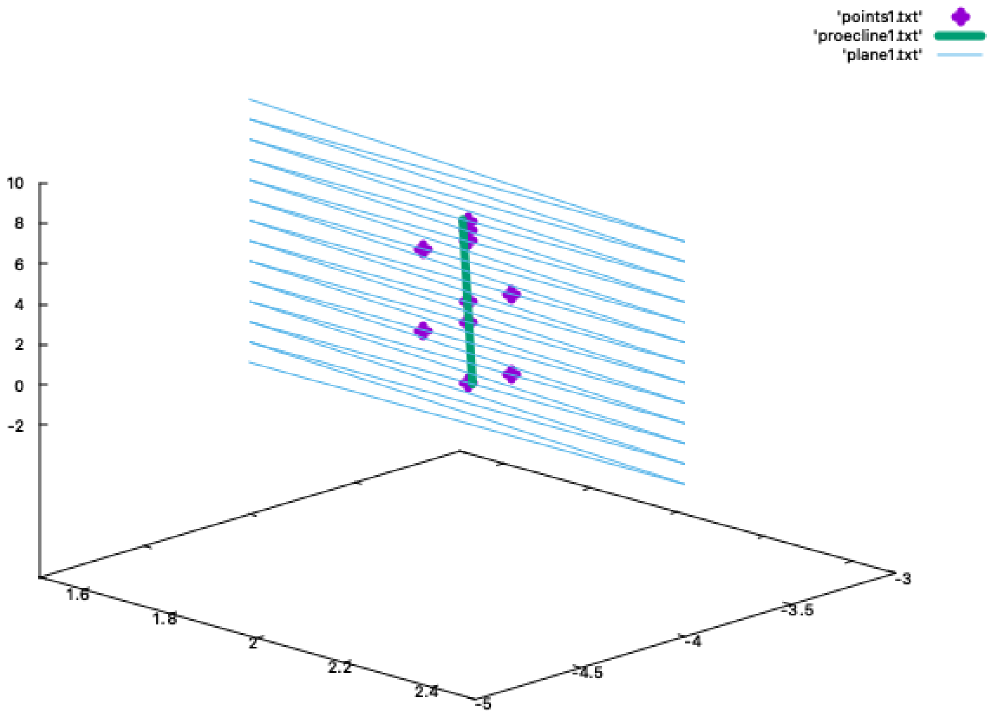
```
(2, -4, 0)         (-4, 2, 0)          (6.242641, 6.242641, 0)
(2.1, -4, 1)       (-4, 2.1, 1)        (6.342641, 6.142641, 1)
(1.9, -4, 2)       (-4, 1.9, 2)        (6.242641, 6.242641, 1.5)
(2, -4, 3)         (-4, 2, 3)          (6.142641, 6.342641, 2)
(2, -4, 4)         (-4, 2, 4)          (6.242641, 6.242641, 3)
(2.1, -4, 5)       (-4, 2.1, 5)        (6.242641, 6.242641, 4)
(1.9, -4, 6)       (-4, 1.9, 6)        (6.342641, 6.142641, 5)
(2, -4, 7)         (-4, 2, 6.5)        (6.142641, 6.342641, 6)
(2, -4, 7.5)       (-4, 2, 7)          (6.242641, 6.242641, 7)
(2, -4, 8)         (-4, 2, 8)          (6.242641, 6.242641, 8)

(0, 1, 0)          (1, 0, 0)           (-0.707107, -0.707107, 0)
```

Полученные данные - направляющие векторы и точки прямых, аппроксимирующих исходные множества, а также две точки искомой прямой и значение функционала:

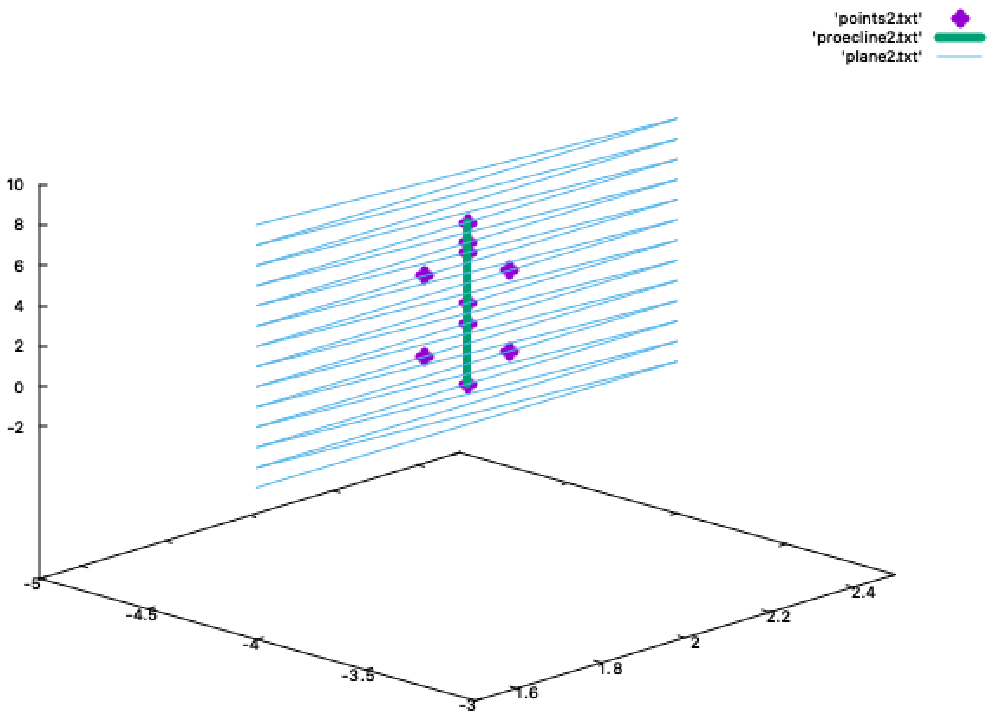
```
vector of line 1:                   point of line 1:
(-0.002817, -0.000000, 1.000000)    (2.000001, -4.000001, 4.350000)
vector of line 2:                   point of line 2:
(-0.000000, -0.003049, 1.000000)    (-4.000001, 2.000001, 4.250000)
vector of line 3:                   point of line 3:
(-0.003051, 0.003051, 1.000000)     (6.242641, 6.242641, 3.750000)

TWO POINTS OF RESULT LINE:
2.012064 2.000192 0.000000
1.989034 2.000686 8.000000
Lambda = 0.005286
```



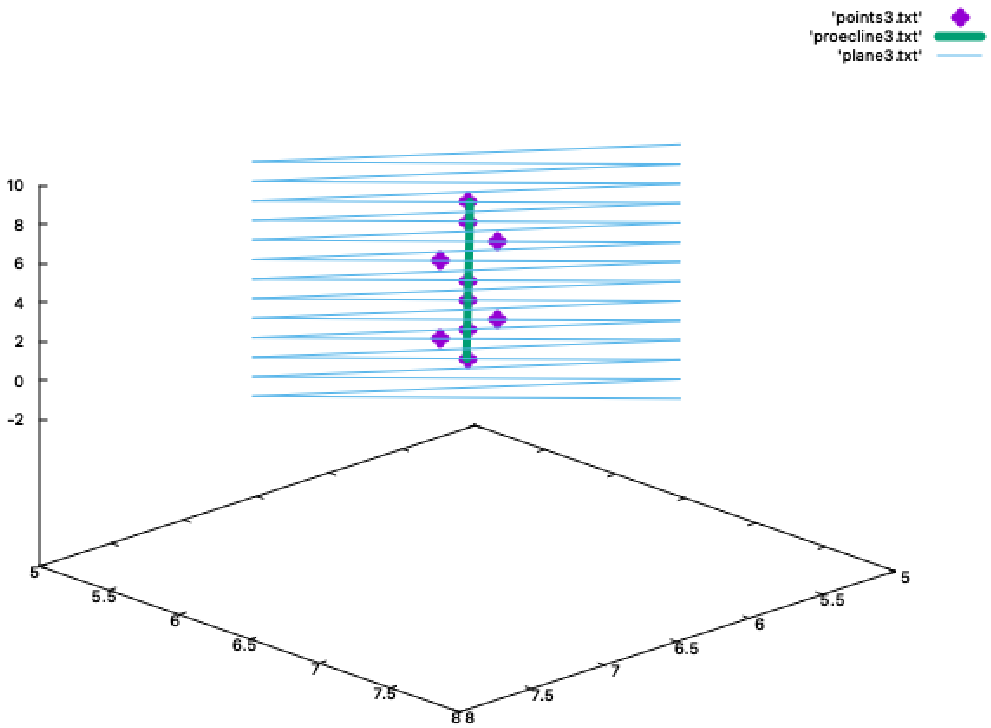
полученный отрезок и исходные множества



проекция полученного отрезка на плоскость первого множества



проекция полученного отрезка на плоскость второго множества



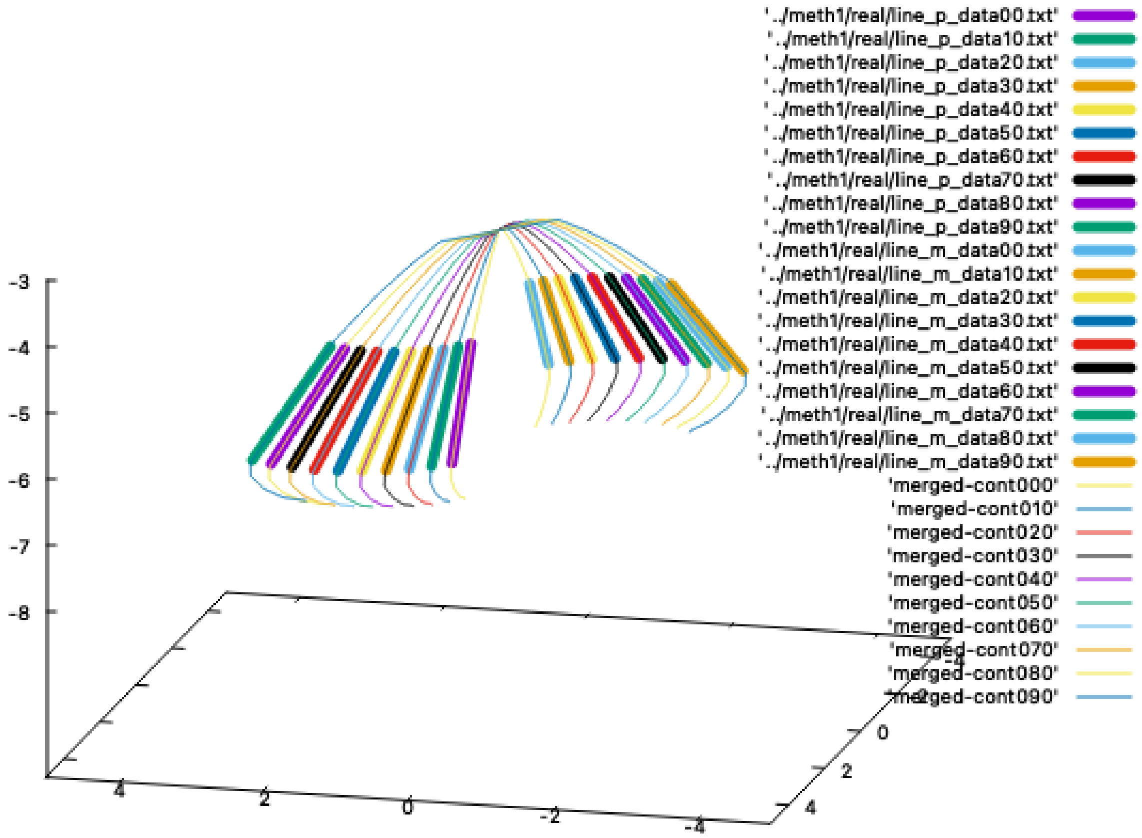
проекция полученного отрезка на плоскость третьего множества

Реальные данные

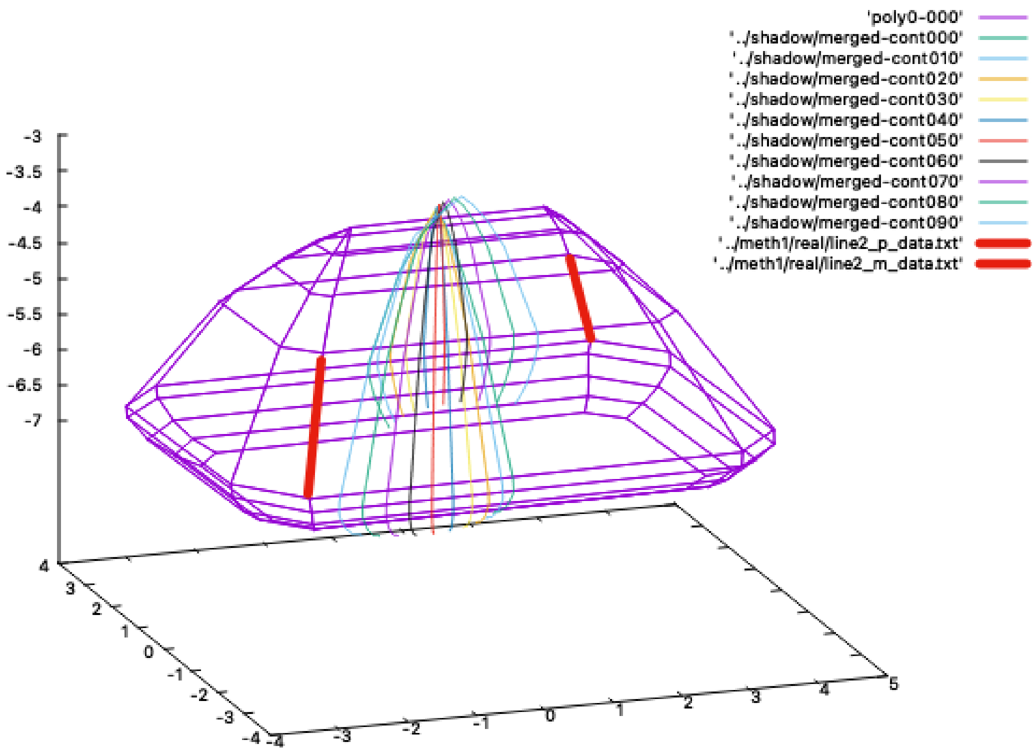
Исходные данные - 100 множетсв точек и 100 направлений проектирования отрезка, ограниченного по z значениями -6.08332812434530 и -4.57712089734895. Фигура симметричная, поэтому имеем два искомых отрезка.

Полученные данные - по две точки искомых прямых и значения функционала:

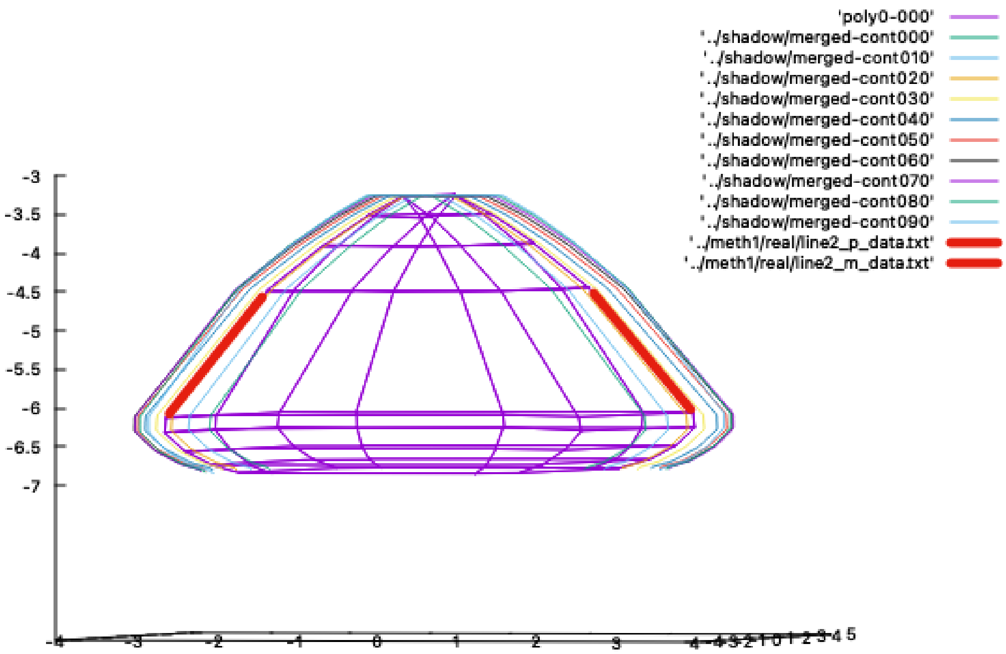
```
DATA FOR POSITIVE SET:
(3.227280, 2.584213, -6.083328)
(2.505698, 1.505435, -4.577121)
Lambda = 0.000003
DATA FOR NEGATIVE SET:
(-2.979147, -2.780110, -6.083328)
(-2.377633, -1.727098, -4.577121)
Lambda = 0.000030
```



прямые, аппорксимирующие множества точек



искомые отрезки, идеальный контур фигуры и исходные контуры проекций



искомые отрезки, идеальный контур фигуры и исходные контуры проекций

2.2 Метод №2

2.2.1 Идея

1) Выделяем сетку из всех значений координаты z всех точек трех множеств.

2) В каждом множестве добавляем точки с теми z, которые присутствуют в сетке, но отсутствуют в текущем множестве: эти точки добавляются на отрезки, соединяющие две ближашие точки множества. Таким образом, получаем разбиение точек трех множеств по "слоям".

3) В каждом слое проводим прямые из точек, параллельные направлениям проектирования, и получаем некоторый треугольник. Находим точку, минимально удаленную от трех данных прямых.

4) Аппроксимируем полученное множество точек прямой.

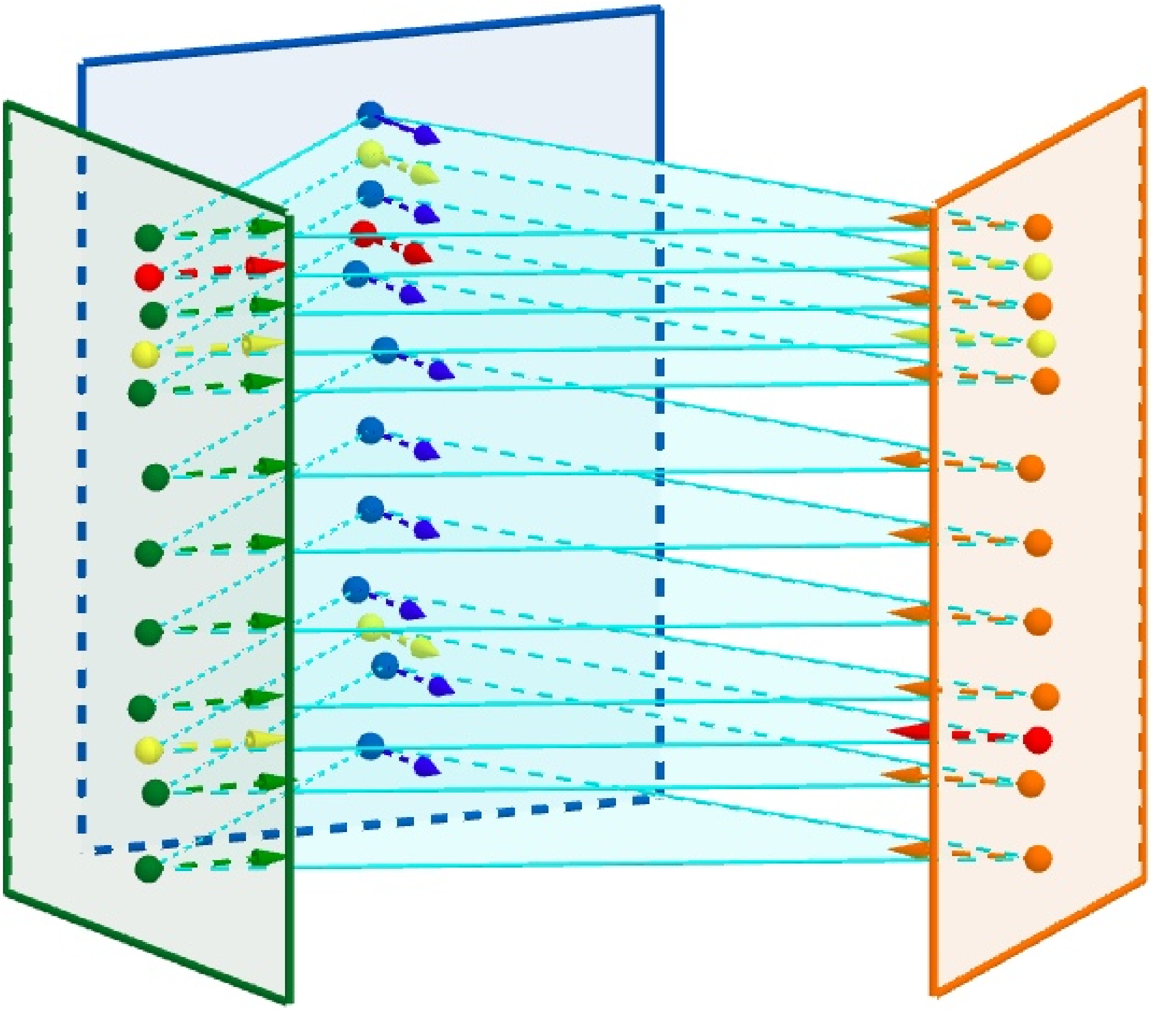


Рис. 2.2: Добавление точек и разбивка по слоям.

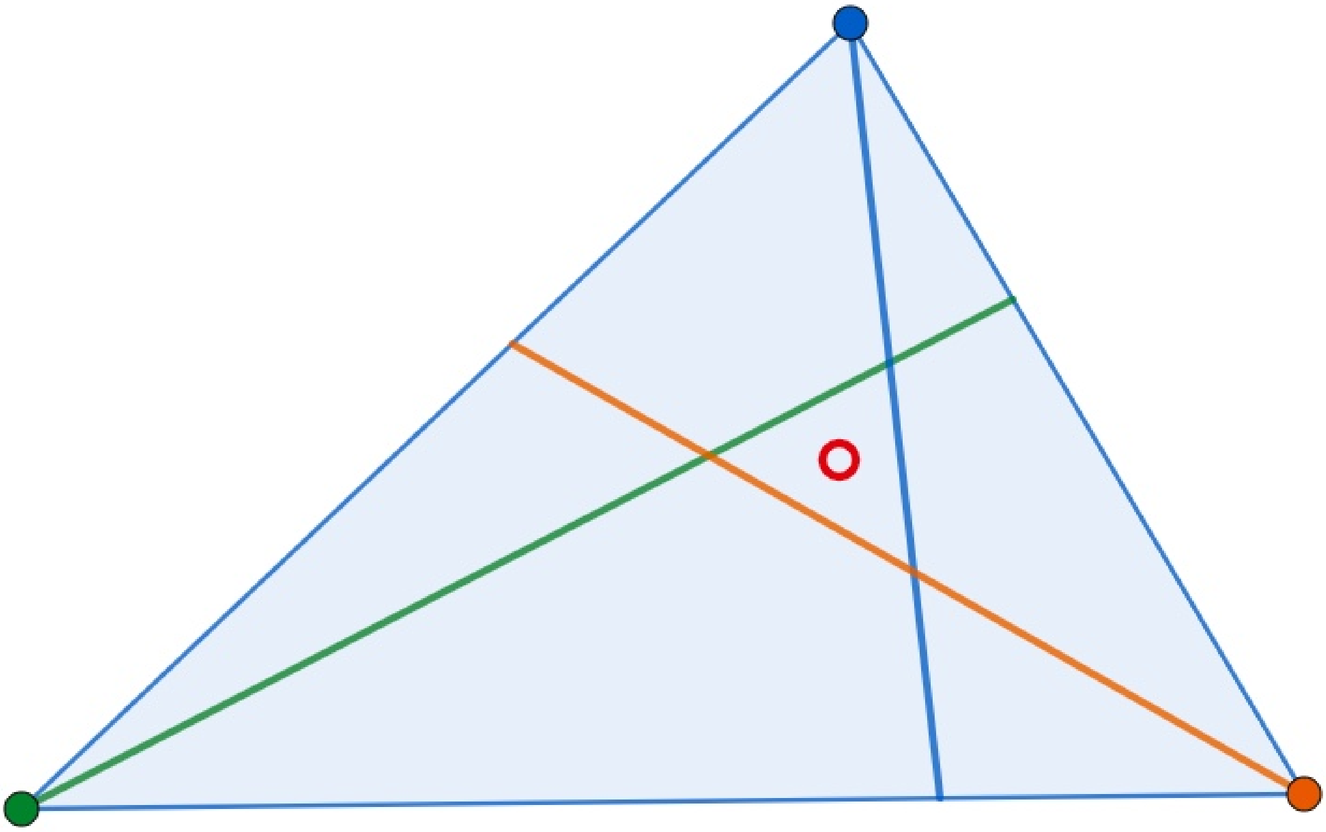


Рис. 2.3: Нахождение точки, наименее удаленной от данных прямых.

2.2.2 Решение

Алгоритм состоит в множественном применении алгоритма нахождении точки 3.2.2 в каждом слое, минимально удаленных от проведенных прямых. После этого применяем алгоритм аппрокисимации множества полученных точек прямой 3.1.3.

2.2.3 Погрешность и примеры работы программ

Погрешность складывается из погрешности добавления точек, погрешности множественного применения нахождения точек, минимально удаленных от прямых, и погрешности аппроксимации полученных точек прямой.

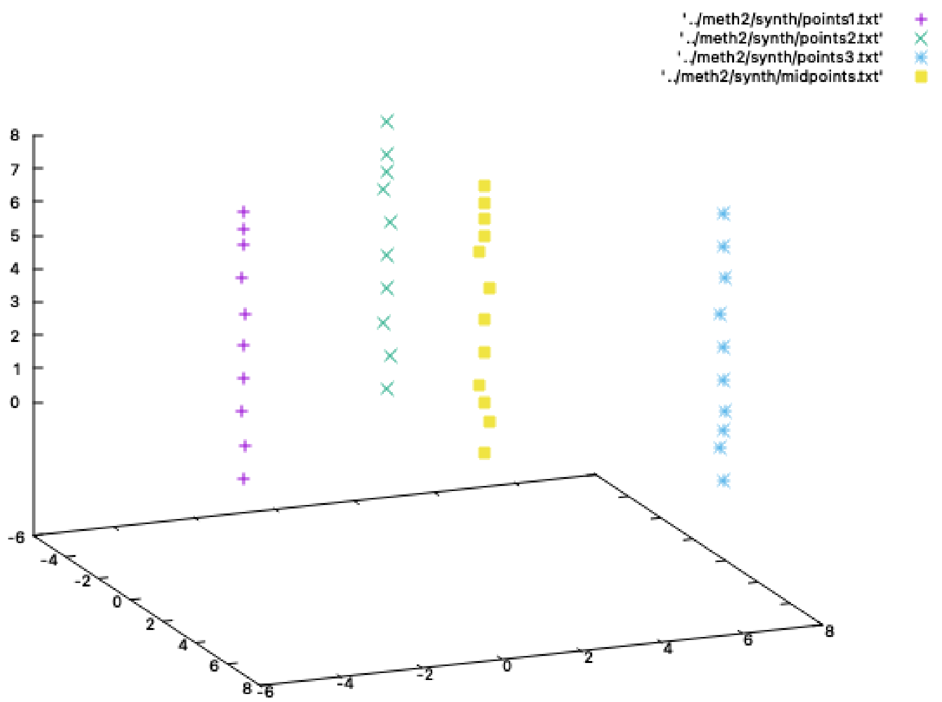
Искусственные данные

Исходные данные - три множетсва точек и три направления проектирования:

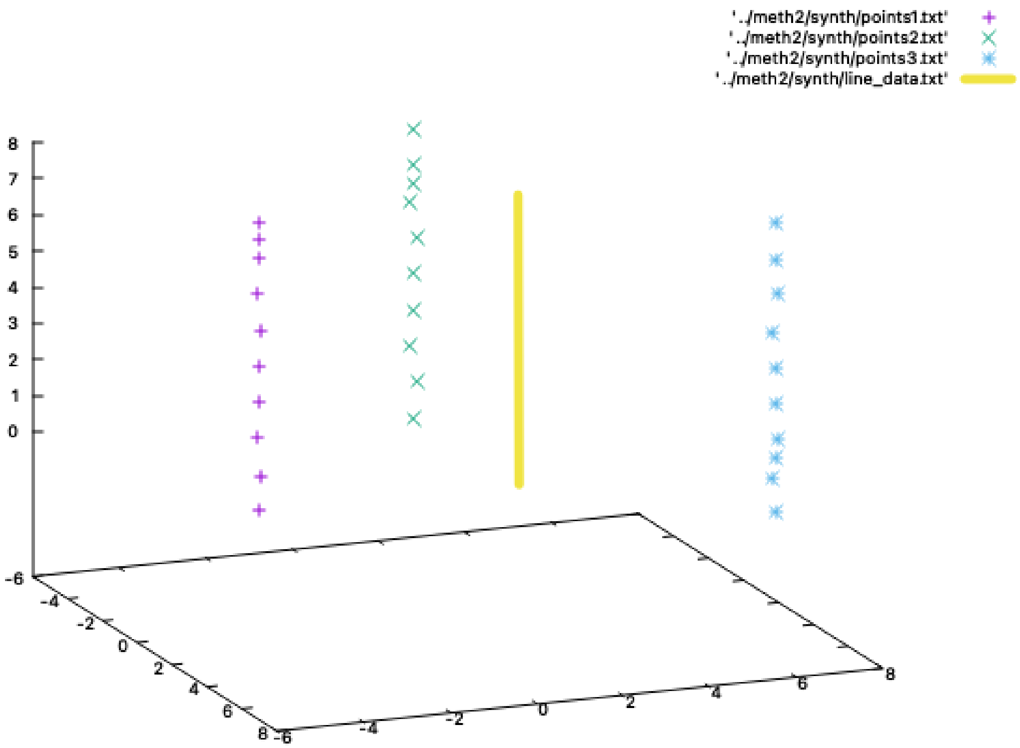
(2, -4, 0)	(-4, 2, 0)	(6.242641, 6.242641, 0)
(2.1, -4, 1)	(-4, 2.1, 1)	(6.342641, 6.142641, 1)
(1.9, -4, 2)	(-4, 1.9, 2)	(6.242641, 6.242641, 1.5)
(2, -4, 3)	(-4, 2, 3)	(6.142641, 6.342641, 2)
(2, -4, 4)	(-4, 2, 4)	(6.242641, 6.242641, 3)
(2.1, -4, 5)	(-4, 2.1, 5)	(6.242641, 6.242641, 4)
(1.9, -4, 6)	(-4, 1.9, 6)	(6.342641, 6.142641, 5)
(2, -4, 7)	(-4, 2, 6.5)	(6.142641, 6.342641, 6)
(2, -4, 7.5)	(-4, 2, 7)	(6.242641, 6.242641, 7)
(2, -4, 8)	(-4, 2, 8)	(6.242641, 6.242641, 8)
(0, 1, 0)	(1, 0, 0)	(-0.707107, -0.707107, 0)

Полученные данные - направляющий вектор прямой, точка прямой и значение функционала:

```
l = (-0.004403, -0.001467, 1.000000)
p = (1.999266, 2.000773, 4.291667)
Lambda = 0.006596
```



«средние» точки в каждом слое и исходные множества



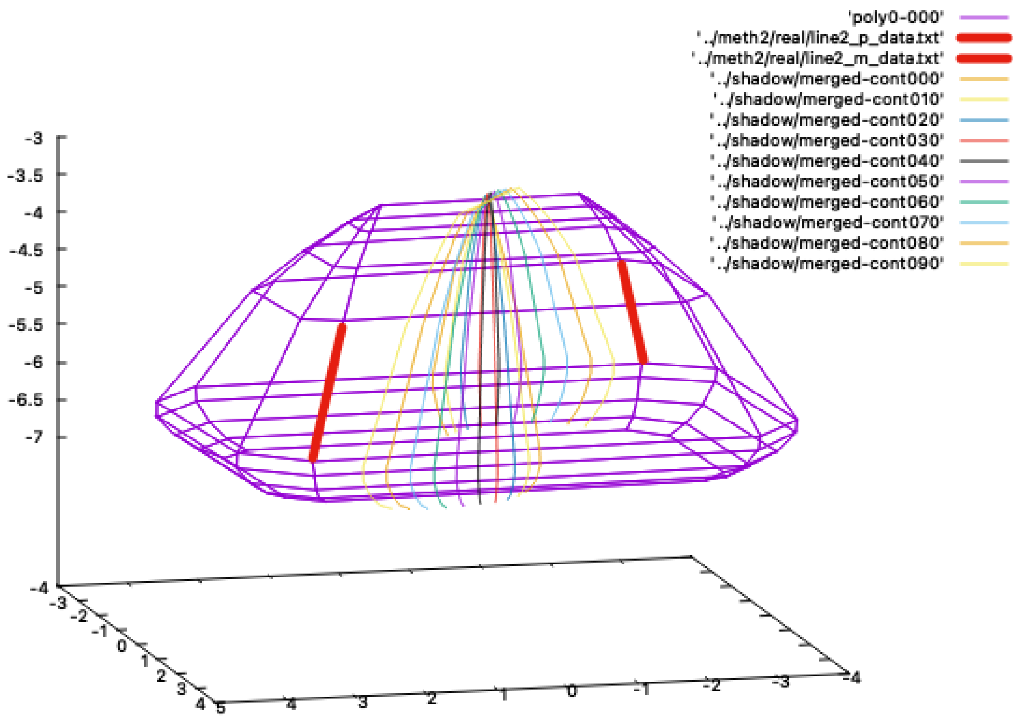
полученный отрезок и исходные множества

Реальные данные

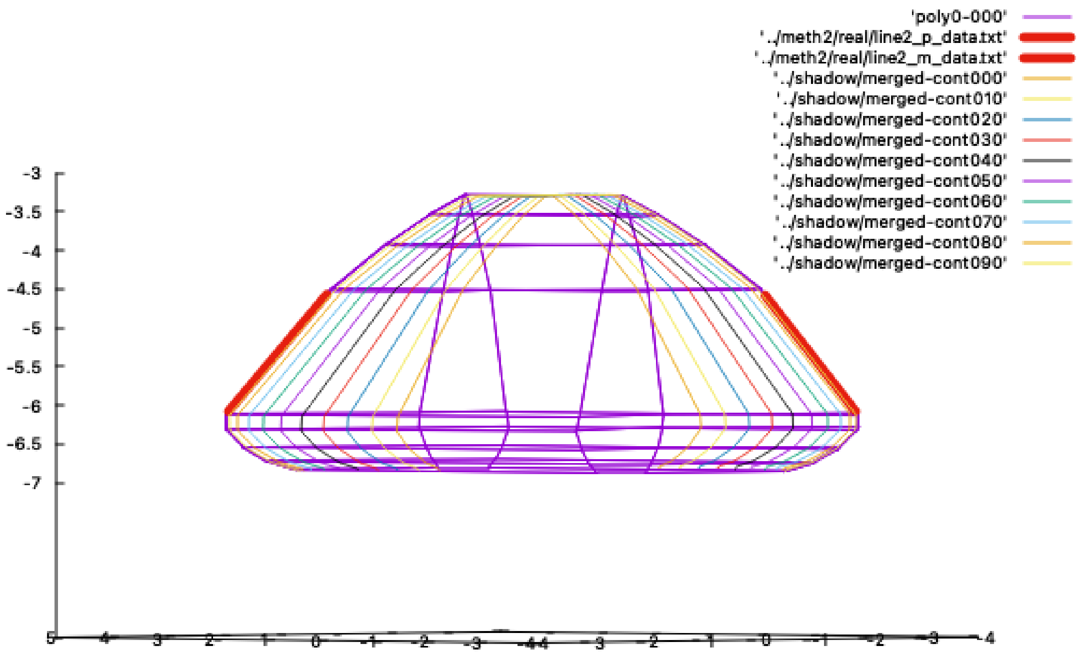
Исходные данные - 100 множетсв точек и 100 направлений проектирования отрезка, ограниченного по z значениями -6.08332812434530 и -4.57712089734895. Фигура симметричная, поэтому имеем два искомых отрезка.

Полученные данные - по две точки искомых прямых и значения функционала:

```
DATA FOR POSITIVE SET:
(3.227402, 2.584165, -6.083328)
(2.505786, 1.505411, -4.577121)
Lambda = 0.007525
DATA FOR NEGATIVE SET:
(-2.979351, -2.779962, -6.083328)
(-2.377752, -1.727015, -4.577121)
Lambda = 0.000030
```



искомые отрезки, идеальный контур фигуры и исходные контуры проекций



искомые отрезки, идеальный контур фигуры и исходные контуры проекций

2.3 Алгоритм сравнения методов и проверки результатов

Пусть мы нашли исходный отрезок (прямую). Идея состоит в том, чтобы спроецировать эту прямую на плоскости точек и найти сумму квадратов расстояний от точек до проекций. Сравнение значений данного функционала будет показывать степень отклонения полученной прямой от исходной или степень погрешности метода.

Имеем полученную прямую:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

Проведем через нашу прямую и направления проектирования плоскости:

$$\pi_1: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t_1 + r_1^1 \cdot t_2 \\ y = y_0 + n \cdot t_1 + r_2^1 \cdot t_2 \\ z = z_0 + p \cdot t_1 + r_3^1 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

$$\pi_2: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t_1 + r_1^2 \cdot t_2 \\ y = y_0 + n \cdot t_1 + r_2^2 \cdot t_2 \\ z = z_0 + p \cdot t_1 + r_3^2 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

$$\pi_3: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t_1 + r_1^3 \cdot t_2 \\ y = y_0 + n \cdot t_1 + r_2^3 \cdot t_2 \\ z = z_0 + p \cdot t_1 + r_3^3 \cdot t_2 \end{cases} \text{, где } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ - параметры.}$$

Аналогично методу 3 **??**, найдем нормальные уравнения этих плоскостей:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &: \; A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{nr_3^1 - pr_2^1}{\sqrt{(nr_3^1-pr_2^1)^2+(pr_1^1-mr_3^1)^2+(mr_2^1-nr_1^1)^2}} \\ B_1 = \frac{pr_1^1 - mr_3^1}{\sqrt{(nr_3^1-pr_2^1)^2+(pr_1^1-mr_3^1)^2+(mr_2^1-nr_1^1)^2}} \\ C_1 = \frac{mr_2^1 - nr_1^1}{\sqrt{(nr_3^1-pr_2^1)^2+(pr_1^1-mr_3^1)^2+(mr_2^1-nr_1^1)^2}} \\ D_1 = \frac{-(nr_3^1-pr_2^1)x_0-(pr_1^1-mr_3^1)y_0-(mr_2^1-nr_1^1)z_0}{\sqrt{(nr_3^1-pr_2^1)^2+(pr_1^1-mr_3^1)^2+(mr_2^1-nr_1^1)^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{nr_3^2 - pr_2^2}{\sqrt{(nr_3^2-pr_2^2)^2+(pr_1^2-mr_3^2)^2+(mr_2^2-nr_1^2)^2}} \\ B_2 = \frac{pr_1^2 - mr_3^2}{\sqrt{(nr_3^2-pr_2^2)^2+(pr_1^2-mr_3^2)^2+(mr_2^2-nr_1^2)^2}} \\ C_2 = \frac{mr_2^2 - nr_1^2}{\sqrt{(nr_3^2-pr_2^2)^2+(pr_1^2-mr_3^2)^2+(mr_2^2-nr_1^2)^2}} \\ D_2 = \frac{-(nr_3^2-pr_2^2)x_0-(pr_1^2-mr_3^2)y_0-(mr_2^2-nr_1^2)z_0}{\sqrt{(nr_3^2-pr_2^2)^2+(pr_1^2-mr_3^2)^2+(mr_2^2-nr_1^2)^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \frac{nr_3^3 - pr_2^3}{\sqrt{(nr_3^3-pr_2^3)^2+(pr_1^3-mr_3^3)^2+(mr_2^3-nr_1^3)^2}} \\ B_3 = \frac{pr_1^3 - mr_3^3}{\sqrt{(nr_3^3-pr_2^3)^2+(pr_1^3-mr_3^3)^2+(mr_2^3-nr_1^3)^2}} \\ C_3 = \frac{mr_2^3 - nr_1^3}{\sqrt{(nr_3^3-pr_2^3)^2+(pr_1^3-mr_3^3)^2+(mr_2^3-nr_1^3)^2}} \\ D_3 = \frac{-(nr_3^3-pr_2^3)x_0-(pr_1^3-mr_3^3)y_0-(mr_2^3-nr_1^3)z_0}{\sqrt{(nr_3^3-pr_2^3)^2+(pr_1^3-mr_3^3)^2+(mr_2^3-nr_1^3)^2}} \end{cases}$$

Найдем плоскости, которым принадлежат множества точек:

$$\begin{aligned} w_1 &: \; r_1^1 x + r_2^1 y + r_3^1 z - (r_1^1 x_1^1 + r_2^1 y_1^1 + r_3^1 z_1^1) = 0 \\ w_2 &: \; r_1^2 x + r_2^2 y + r_3^2 z - (r_1^2 x_1^2 + r_2^2 y_1^2 + r_3^2 z_1^2) = 0 \\ w_3 &: \; r_1^3 x + r_2^3 y + r_3^3 z - (r_1^3 x_1^3 + r_2^3 y_1^3 + r_3^3 z_1^3) = 0 \end{aligned}$$

В пересечении плоскостей π_1 и w_1, π_2 и w_2, π_3 и w_3 получаем проекции исходного отрезка l_1, l_2, l_3 на плоскости множеств w_1, w_2, w_3. Тогда расстояния от точек множества P_i до проекции l_i на соответствующую плоскость w_i равно расстоянию от этих точек до плоскости π_i, проходящую через искомый отрезок l.

$$\rho(p_i^j, l_j) = |A_j x_i^j + B_j y_i^j + C_j z_i^j + D_j|$$

где i - номер соответствующей точки множества,

j - номер соответствующей плоскости π_j.

Тогда функционал суммы квадратов расстояний от точек множеств до проекций исходного отрезка равен:

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n_1, n_2, n_3} (A_j x_i^j + B_j y_i^j + C_j z_i^j + D_j)^2$$

Итоговый фунционал получается из полученного выше делением на количество исходных множеств точек и на среднее число точек в каждом множетсве.

3 Вспомогательные алгоритмы

3.1 Построение прямой, аппроксимирующей множество точек

3.1.1 Постановка задачи

Дано множество из n точек в плоскости или пространстве. Необходимо построить прямую, максимально близкую к заданному множетсву. Меру близости выберем равной корню из суммы квадратов расстояний от точек множества до прямой. Соответственно, необходимо подобрать такие коэффициенты прямой, чтобы для данного набора точек мера на данном множестве и прямой с этими коэффициентами была минимальна.

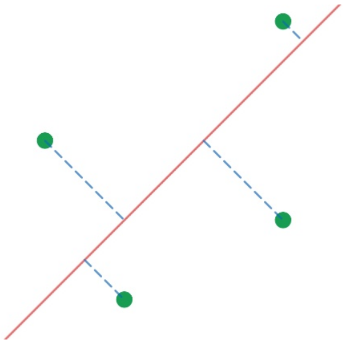


Рис. 3.1: Прямая и набор точек в плоскости.

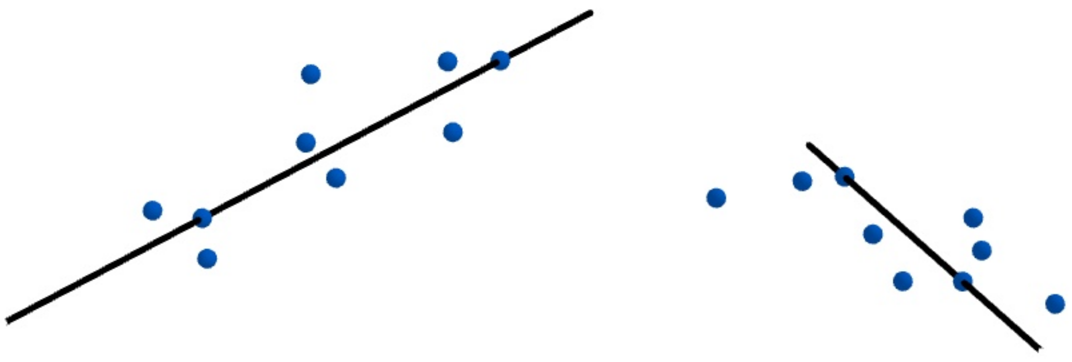


Рис. 3.2: Прямая и набор точек в пространстве.

3.1.2 Двумерный случай

Пусть имеется набор из n точек: $P = \{(x_i, y_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Будем искать прямую в виде $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$, где a, b, d - неизвестные коэффициенты.

По определению расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + d = 0$ определяется по следующей формуле:

$$\rho(ax + by + d = 0, (x_0, y_0)) = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Тогда наша мера будет иметь вид:

$$\Lambda(ax + by + d = 0, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(ax_i + by_i + d)^2}{a^2 + b^2}}$$

Будем искать нормированное уравнение прямой, которое получается из общего уравнения делением всех членов на $\sqrt{a^2 + b^2}$: $a^{'}x + b^{'}y + d^{'} = 0$. Тогда расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой равно абсолютному значению отклонения и вычисляется по формуле:

$$\rho(a^{'}x + b^{'}y + d^{'} = 0, (x_0, y_0)) = |a^{'}x_0 + b^{'}y_0 + d^{'}|$$

Тогда наша мера будет иметь вид:

$$\Lambda(a^{'}x + b^{'}y + d^{'} = 0, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a^{'}x_i + b^{'}y_i + d^{'})^2}, \ (a^{'})^2 + (b^{'})^2 = 1$$

Будем исследовать не саму меру, а подкоренное выражение, и для простоты будем рассматривать коэффициенты без индексов.

Таким образом, задача свелась к поиску минимального значения выражения $\sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + d)^2$ с ограничением $a^2 + b^2 = 1$.

Будем искать коэффициенты методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L(a, b, d, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + d)^2 - \lambda(a^2 + b^2 - 1)$$

.

Составим систему из четырех уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа $L(a, b, d, \lambda)$ по a, b, d и λ:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}(\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+d)^2-\lambda(a^2+b^2-1))=0 \\ \frac{\partial}{\partial b}(\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+d)^2-\lambda(a^2+b^2-1))=0 \\ \frac{\partial}{\partial d}(\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+d)^2-\lambda(a^2+b^2-1))=0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}(\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+d)^2-\lambda(a^2+b^2-1))=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i(ax_i+by_i+d)-\lambda a=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i(ax_i+by_i+d)-\lambda b=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+d)=0 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$$

Выразим из третьего уравнения d:

$$d=\left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\cdot a+\left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}\right)\cdot b$$

Подставим полученное выражение в первые два уравнения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\left((x_i^2-x_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})\cdot a+(x_iy_i-x_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n})\cdot b\right)-\lambda a=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left((x_iy_i-y_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})\cdot a+(y_i^2-y_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n})\cdot b\right)-\lambda b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right) & \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-x_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-y_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right) & \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i^2-y_i\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Таким образом, задача свелась к поиску собственных значений матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i)^2 \end{pmatrix}$$

Тем или иным способом, найдем собственные значения. В программе удобно пользоваться методом Якоби, здесь будет изложен прямой метод нахождения собственных значений через характеристический многочлен.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} A_{1,1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2 \\ A_{1,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ A_{2,1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ A_{2,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i)^2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \lambda & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (A_{1,1} - \lambda)(A_{2,2} - \lambda) - A_{1,2}A_{2,1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (A_{1,1} + A_{2,2})\lambda + (A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (A_{1,1} + A_{2,2})^2 - 4(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1})$$

Будем считать, что в случае решения задачи имеем дело с невырожденным случаем, то $D > 0$, тогда:

$$\lambda_1 = \frac{A_{1,1} + A_{2,2} + \sqrt{(A_{1,1} + A_{2,2})^2 - 4(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1})}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A_{1,1} + A_{2,2} - \sqrt{(A_{1,1} + A_{2,2})^2 - 4(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1})}}{2}$$

Получаем две системы:

$$\begin{cases}(A_{1,1}-\lambda_i)a + A_{1,2}b = 0\\ A_{2,1}a + (A_{2,2}-\lambda_i)b = 0\end{cases}, \ i = 1, 2.$$

Данная система однородная, поэтому имеет бесконечное число решений.

Найдем теперь собтвенные векторы. Выразим a через b, например, из первых уравнений последних систем:

$$a = -\tfrac{A_{1,2}}{A_{1,1}-\lambda_i}b, \ i = 1, 2$$

Положим $b = 1$, тогда $a_i = -\frac{A_{1,2}}{A_{1,1}-\lambda_i}, \ i = 1, 2.$

Уравнение для d через a и b получаем следующее:

$$d_i = \tfrac{1}{n}(a_i * \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j), \ i = 1, 2$$

Далее узнаем значение нашего функционала при данных значениях a_i, b_i, d:

$$L_i(a_i, b = 1, d_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_i x_j + y_j + d_i)^2, \ i = 1, 2$$

Выбираем $L = min\{L_1, L_2\}$. Без ограничения общности пусть $L_1 < L_2 \ \Rightarrow \ a = a_1, b = 1, d = d_1$.

Таким образом, итоговые формулы для коэффициентов прмяой получаются следующие:

$$a = -\tfrac{A_{1,2}}{A_{1,1}-\lambda_1}, \ b = 1, \ d = -\tfrac{1}{n}(a * \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j)$$

.

3.1.3 Трехмерный случай

Пусть имеется набор из n точек: $P = \{(x_i, y_i, z_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Будем искать прямую в параметрическом виде. Пусть (m, n, p) - напрявляющий вектор прямой, (x_0, y_0, z_0) - некоторая точка прямой. Тогда следующая система задает прямую в $\mathbb{R}^3$:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

В качестве точки (x_0, y_0, z_0) выбирем центр масс системы данных точек. Таким образом: $x_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $y_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $z_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i$.

По определению расстояние от точки M_1 до прямой l определяется по следующей формуле:

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на прямой l

$l = (m, n, p)$ - напрявляющий вектор прямой

$$d(M_1, l) = \frac{|[\bar{l}, \overline{M_0M_1}]|}{|\bar{l}|}$$

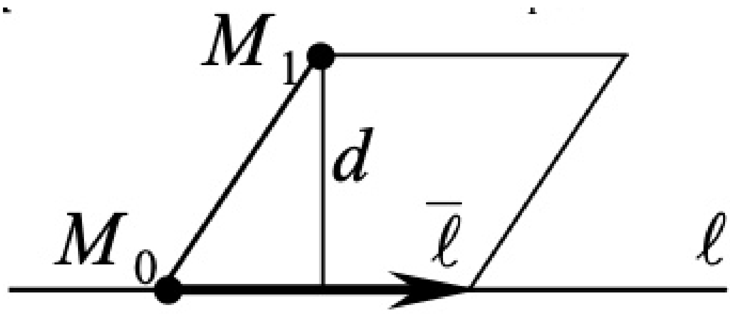


Рис. 3.3: Расстояние от точки до прямой.

Распишем составляющие элементы формулы для расстояния:

$$|\bar{l}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$[\bar{l}, \overline{M_0M_1}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m & n & p \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} n & p \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m & p \\ x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (n(z_1 - z_0) - p(y_1 - y_0), p(x_1 - x_0) - m(z_1 - z_0), m(y_1 - y_0) - n(x_1 - x_0)) =$$

$$= (n\triangle_{z_1} - p\triangle_{y_1}, p\triangle_{x_1} - m\triangle_{z_1}, m\triangle_{y_1} - n\triangle_{x_1}), \text{ где } \begin{cases} \triangle_{x_1} = x_1 - x_0 \\ \triangle_{y_1} = y_1 - y_0 \\ \triangle_{z_1} = z_1 - z_0 \end{cases}$$

$$|[\bar{l}, \overline{M_0 M_1}]| = \sqrt{(n\triangle_{z_1} - p\triangle_{y_1})^2 + (p\triangle_{x_1} - m\triangle_{z_1})^2 + (m\triangle_{y_1} - n\triangle_{x_1})^2}$$

Тогда формула расстояния принимает вид:

$$d(M_1, l) = \sqrt{\frac{(n\triangle_{z_1} - p\triangle_{y_1})^2 + (p\triangle_{x_1} - m\triangle_{z_1})^2 + (m\triangle_{y_1} - n\triangle_{x_1})^2}{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Тогда наша мера примет вид:

$$\Lambda(l, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(n\triangle_{z_i} - p\triangle_{y_i})^2 + (p\triangle_{x_i} - m\triangle_{z_i})^2 + (m\triangle_{y_i} - n\triangle_{x_i})^2}{m^2 + n^2 + p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((n\triangle_{z_i} - p\triangle_{y_i})^2 + (p\triangle_{x_i} - m\triangle_{z_i})^2 + (m\triangle_{y_i} - n\triangle_{x_i})^2)}$$

Будем искать нормированное уравнение прямой, которое получается из общего уравнения делением всех членов на $\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$. Тогда расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до прямой равно абсолютному значению векторного произведения и вычисляется по формуле:

$$d(M_1, l) = \sqrt{(n\triangle_{z_1} - p\triangle_{y_1})^2 + (p\triangle_{x_1} - m\triangle_{z_1})^2 + (m\triangle_{y_1} - n\triangle_{x_1})^2}$$

Тогда наша мера будет иметь вид:

$$\Lambda(l, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((n\triangle_{z_i} - p\triangle_{y_i})^2 + (p\triangle_{x_i} - m\triangle_{z_i})^2 + (m\triangle_{y_i} - n\triangle_{x_i})^2)}$$

Будем исследовать не саму меру, а подкоренное выражение.

Таким образом, задача свелась к поиску минимального значения выражения $\sum\limits_{i=1}^{n}\left((n\triangle_{z_i}-p\triangle_{y_i})^2+(p\triangle_{x_i}-m\triangle_{z_i})^2+(m\triangle_{y_i}-n\triangle_{x_i})^2\right)$ с ограничением $m^2+n^2+p^2=1$.

Будем искать коэффициенты методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L(m,n,p,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\left((n\triangle_{z_i}-p\triangle_{y_i})^2+(p\triangle_{x_i}-m\triangle_{z_i})^2+(m\triangle_{y_i}-n\triangle_{x_i})^2\right)-$$

$$-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)$$

Преобразуем выражение под знаком суммы:

$$(n\triangle_{z_i}-p\triangle_{y_i})^2+(p\triangle_{x_i}-m\triangle_{z_i})^2+(m\triangle_{y_i}-n\triangle_{x_i})^2=$$

$$=n^2((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{z_i})^2)+m^2((\triangle_{y_i})^2+(\triangle_{z_i})^2)+p^2((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{y_i})^2)-$$

$$-2np\triangle_{y_i}\triangle_{z_i}-2mp\triangle_{x_i}\triangle_{z_i}-2mn\triangle_{x_i}\triangle_{y_i}$$

Тогда получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left((n\triangle_{z_i}-p\triangle_{y_i})^2+(p\triangle_{x_i}-m\triangle_{z_i})^2+(m\triangle_{y_i}-n\triangle_{x_i})^2\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(n^2((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{z_i})^2)+m^2((\triangle_{y_i})^2+(\triangle_{z_i})^2)+p^2((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{y_i})^2)-$$

$$-2np\triangle_{y_i}\triangle_{z_i}-2mp\triangle_{x_i}\triangle_{z_i}-2mn\triangle_{x_i}\triangle_{y_i}\Big)=$$

$$=n^2\sum_{i=1}^{n}\left((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{z_i})^2\right)+m^2\sum_{i=1}^{n}\left((\triangle_{y_i})^2+(\triangle_{z_i})^2\right)+p^2\sum_{i=1}^{n}\left((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{y_i})^2\right)-$$

$$-2np\sum_{i=1}^{n}\triangle_{y_i}\triangle_{z_i}-2mp\sum_{i=1}^{n}\triangle_{x_i}\triangle_{z_i}-2mn\sum_{i=1}^{n}\triangle_{x_i}\triangle_{y_i}$$

Для простоты чтения обозначим коэффициенты в данной формуле следующим образом:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{z_i})^2\right)=a_{xz}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left((\triangle_{y_i})^2+(\triangle_{z_i})^2\right)=a_{yz}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left((\triangle_{x_i})^2+(\triangle_{y_i})^2\right)=a_{xy}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\triangle_{y_i}\triangle_{z_i}=b_{yz}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\triangle_{x_i}\triangle_{z_i}=b_{xz}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\triangle_{x_i}\triangle_{y_i}=b_{xy}\end{cases}$$

Таким образом, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L(m,n,p,\lambda)=a_{xz}n^2+a_{yz}m^2+a_{xy}p^2-2b_{yz}np-2b_{xz}mp-2b_{xy}mn-$$

$$-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)$$

Составим систему из четырех уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа $L(m,n,p,\lambda)$ по m,n,p и λ:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial m}\left(a_{xz}n^2+a_{yz}m^2+a_{xy}p^2-2b_{yz}np-2b_{xz}mp-2b_{xy}mn-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial n}\left(a_{xz}n^2+a_{yz}m^2+a_{xy}p^2-2b_{yz}np-2b_{xz}mp-2b_{xy}mn-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial p}\left(a_{xz}n^2+a_{yz}m^2+a_{xy}p^2-2b_{yz}np-2b_{xz}mp-2b_{xy}mn-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(a_{xz}n^2+a_{yz}m^2+a_{xy}p^2-2b_{yz}np-2b_{xz}mp-2b_{xy}mn-\lambda(m^2+n^2+p^2-1)\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_{yz}m-2b_{xz}p-2b_{xy}n-2\lambda m=0\\ 2a_{xz}n-2b_{yz}p-2b_{xy}m-2\lambda n=0\\ 2a_{xy}p-2b_{yz}n-2b_{xz}m-2\lambda p=0\\ m^2+n^2+p^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_{yz}-\lambda)m+(-b_{xy})n+(-b_{xz})p=0\\ (-b_{xy})m+(a_{xz}-\lambda)n+(-b_{yz})p=0\\ (-b_{xz})m+(-b_{yz})n+(a_{xy}-\lambda)p=0\\ m^2+n^2+p^2=1\end{cases}$$

Решение первых трех уравнений эквивалентно решению матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{yz}-\lambda & -b_{xy} & -b_{xz} \\ -b_{xy} & a_{xz}-\lambda & -b_{yz} \\ -b_{xz} & -b_{yz} & a_{xy}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A-\lambda E)\cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = 0, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{yz} & -b_{xy} & -b_{xz} \\ -b_{xy} & a_{xz} & -b_{yz} \\ -b_{xz} & -b_{yz} & a_{xy} \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда задача свелась к поиску собственных значений для матрицы A. Тем или иным способом (например, методом Якоби) находим три собственных значения: $\lambda_i, \ i = 1, 2, 3$.

Получаем три системы:

$$\begin{cases} (a_{yz}-\lambda_i)m + (-b_{xy})n + (-b_{xz})p = 0 \\ (-b_{xy})m + (a_{xz}-\lambda_i)n + (-b_{yz})p = 0 \\ (-b_{xz})m + (-b_{yz})n + (a_{xy}-\lambda_i)p = 0 \end{cases}, \ i = 1, 2, 3.$$

Данная система однородная, поэтому имеет бесконечное число решений.

Найдем теперь собтвенные векторы. Выразим m через n и p, например, из первых уравнений систем:

$$m = \frac{b_{xy}n + b_{xz}p}{a_{yz}-\lambda_i}, \ i = 1, 2, 3.$$

Подставим данное выражение во второе и третье уравнения систем:

$$\begin{cases} (-\frac{b_{xy}^2}{a_{yz}-\lambda_i} + a_{xz} - \lambda_i)n + (-\frac{b_{xy}b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_i} - b_{yz})p = 0 \\ (-\frac{b_{xz}b_{xy}}{a_{yz}-\lambda_i} - b_{yz})n + (-\frac{b_{xz}^2}{a_{yz}-\lambda_i} + a_{xy} - \lambda_i)p = 0 \end{cases}, \ i = 1, 2, 3.$$

Выразим n через p из первого уравнения текущей системы:

$$n = \frac{\frac{b_{xy}b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_i} + b_{yz}}{-\frac{b_{xy}^2}{a_{yz}-\lambda_i} + a_{xz} - \lambda_i} p, \ i = 1, 2, 3.$$

Положим $p = 1$. Тогда получаем следующие выражения:

$$n = \frac{\frac{b_{xy}b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_i} + b_{yz}}{-\frac{b_{xy}^2}{a_{yz}-\lambda_i} + a_{xz} - \lambda_i}, \ i = 1, 2, 3.$$

$$m = \frac{b_{xy}\left(\frac{\frac{b_{xy}b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_i} + b_{yz}}{-\frac{b_{xy}^2}{a_{yz}-\lambda_i} + a_{xz} - \lambda_i}\right) + b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_i}, \ i = 1, 2, 3.$$

Далее узнаем значение нашего функционала при данных значениях m_i, n_i, p:

$$L_i(m_i, n_i, p = 1) = a_{xz}n_i^2 + a_{yz}m_i^2 + a_{xy} - 2b_{yz}n_i - 2b_{xz}m_i - 2b_{xy}m_in_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Выбираем $L = min\{L_1, L_2, L_3\}$. Без ограничения общности пусть $L_1 < L_2 < L_3 \ \Rightarrow \ m = m_1, n = n_1, p = 1$.

Таким образом, итоговые формулы для коэффициентов прмяой получаются следующие:

$$\begin{cases} m = \frac{b_{xy}\left(\frac{\frac{bxybxz}{ayz-\lambda_1}+byz}{-\frac{b_{xy}^2}{ayz-\lambda_1}+axz-\lambda_1}\right)+b_{xz}}{a_{yz}-\lambda_1} \\ n = \frac{\frac{bxybxz}{ayz-\lambda_1}+b_{yz}}{-\frac{b_{xy}^2}{ayz-\lambda_1}+a_{xz}-\lambda_1} \\ p = 1 \\ (x_0, y_0, z_0) \text{ - центр масс системы:} \\ x_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\ y_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,\ z_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i \end{cases}$$

3.1.4 Примеры работы программ

Двумерный случай

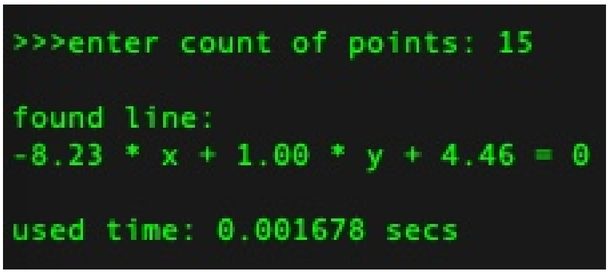


Рис. 3.4: Пример ввода данных и выдачи результата.

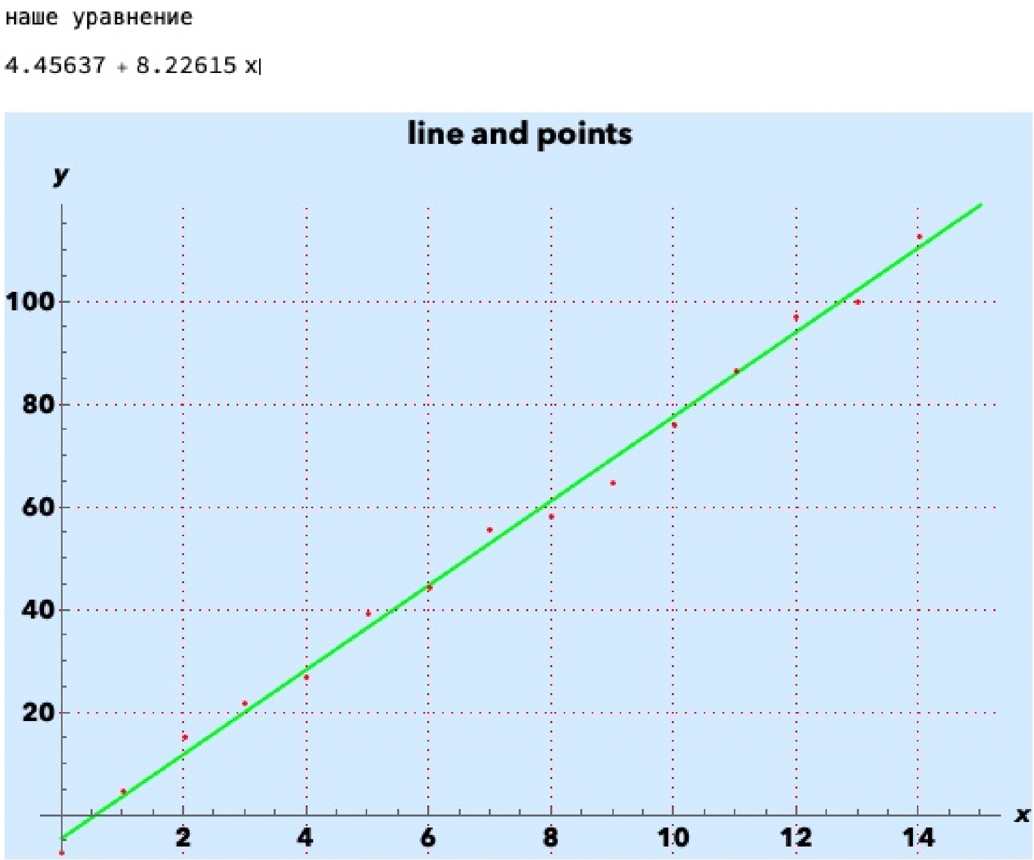


Рис. 3.5: Визуализация результата в Wolfram Mathematica.

Трехмерный случай

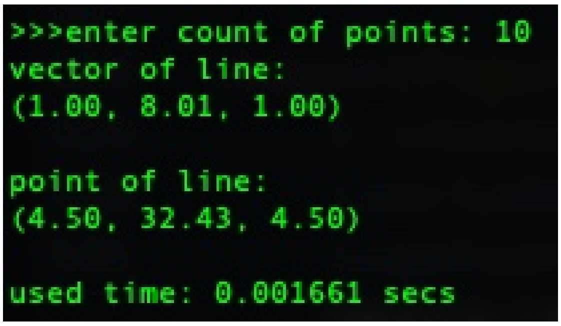


Рис. 3.6: Пример ввода данных и выдачи результата.

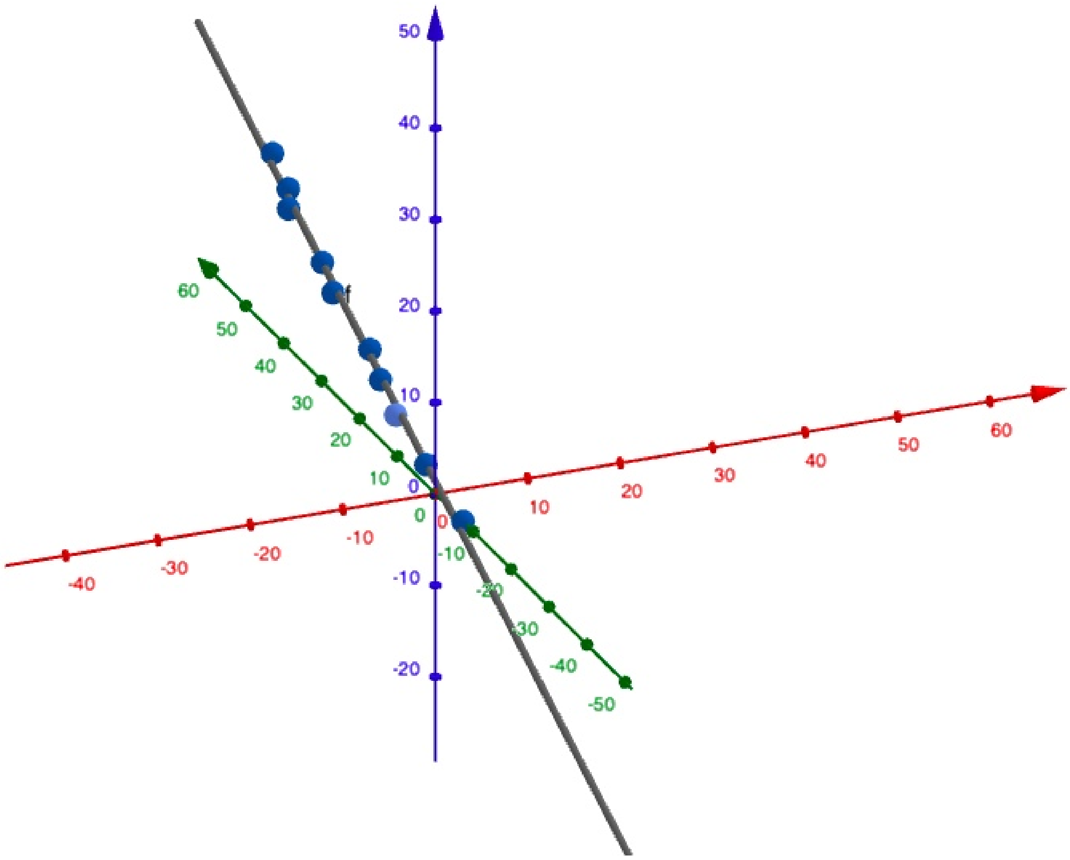


Рис. 3.7: Визуализация результата в GeoGebra3D.

3.2 Построение прямой (точки), минимально удаленной от множества плоскостей (отрезков)

3.2.1 Постановка задачи

Дано множество из n отрезков на плоскости или n плоскостей в пространстве. Необходимо найти точку на плоскоти, минимально удаленную от заданных отрезков, или прямую в пространстве, минимально удаленную от заданных плоскостей. Меру близости на плоскости выберем равной корню из суммы квадратов расстояний от точки до прямых, содержащих отрезки. Меру близости в пространстве выберем равной корню из суммы квадратов расстояний от прямой до плоскостей: в случае параллельности или совпадения прямой и плоскости берется расстояние от любой точки прямой до плоскости, а в случае пересечения берется расстояние от плоскости до точки прямой, ближайщей к этой плоскости внутри призмы, объемлющей рассматриваемый компакт пространства.

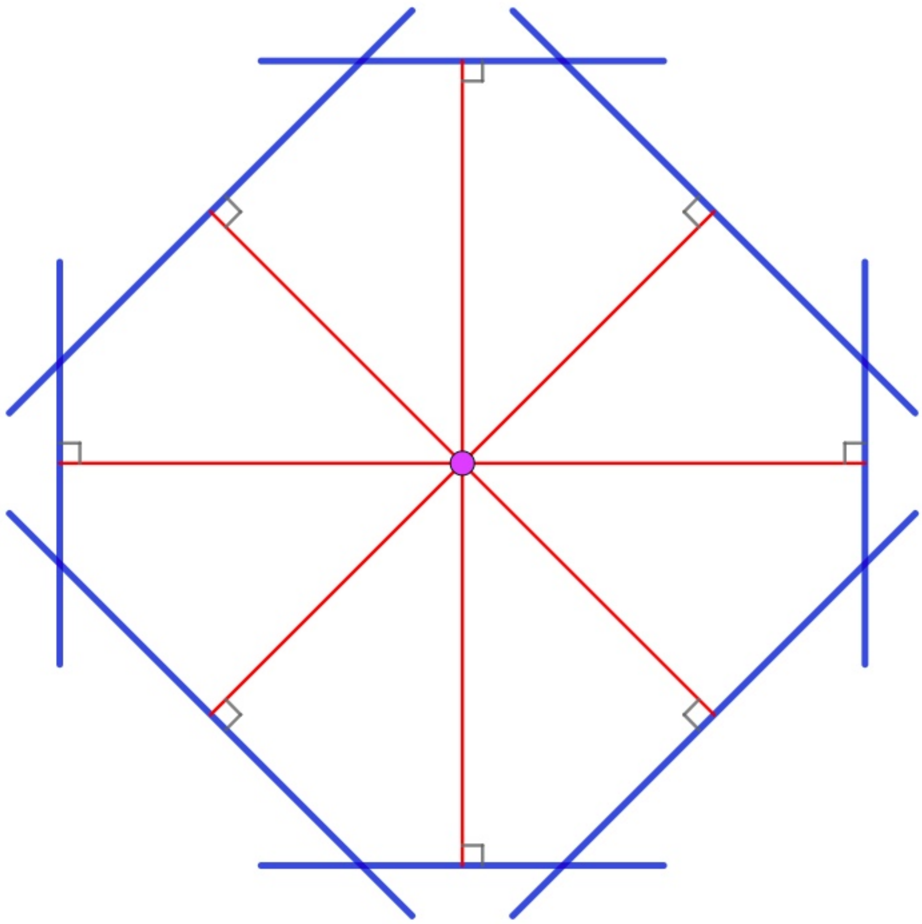


Рис. 3.8: Точка и множество отрезков на плоскости.

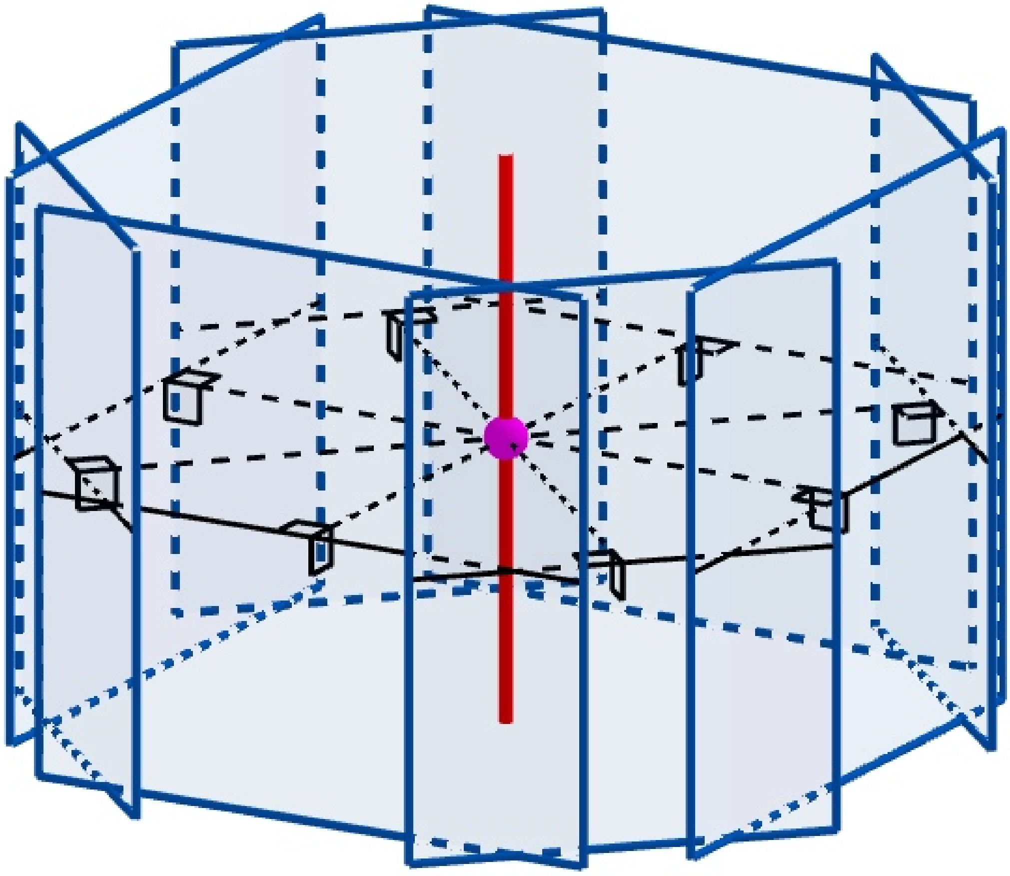


Рис. 3.9: Отрезок и множество плоскостей в пространстве.

3.2.2 Двумерный случай

Пусть дан набор из $n-1$ отрезков в виде набора пар их вершин:

$$S = \{\ ((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}))\ :\ i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

Таким образом, у нас имеется точка, через которую проходит каждый отрезок, и направление прямой, на которой лежит каждый отрезок, и можно переписать множетсво отрезков следующим образом:

$$S^* = \left\{\ \left((x_i^{(c)}, y_i^{(c)}), (l_i^x, l_i^y)\right)\ :\ i = 1, 2, \dots, n-1\right\}$$
$$x_i^{(c)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ y_i^{(c)} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$
$$l_i^x = x_{i+1} - x_i,\ l_i^y = y_{i+1} - y_i$$

Отнормируем напрявляющие векторы прямых, содержащих отрезки:

$$\tilde{l}_i^x = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}},\ \tilde{l}_i^y = \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

Тогда нормальные уравнения этих прямых будут иметь вид:

$$a_i x + b_i y + c_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1$$
$$a_i = \tilde{l}_i^y,\ b_i = -\tilde{l}_i^x,\ c_i = -(a_i x_i^{(c)} + b_i y_i^{(c)})$$

Будем искать точку $O = (x_0, y_0)$, наименее удаленную от данного множества отрезков.

Формула расстояния от точки прямой, содержащей каждый отрезок:

$$\rho(O, l_i) = \frac{|a_i x_0 + b_i y_0 + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} = |a_i x_0 + b_i y_0 + c_i|,\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

Наша мера будет иметь вид:

$$L_0(x_0, y_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2}$$

Будем работать не с этой меру, а с выражением под корнем (в силу монотонности функции корня это эквивалентная задача), т.е. имеем функционал:

$$L(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2$$

Таким образом, задача свелась к поиску минимального значения выражения $L(x_0, y_0)$.

Составим систему из двух уравнений, приравняв к нулю частные производные функционала $L(x_0, y_0)$ по x_0 и y_0:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_0} \sum\limits_{i=1}^{n-1} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_0} \sum\limits_{i=1}^{n-1} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_0} (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)^2 \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-1} (2a_i (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} (2b_i (a_i x_0 + b_i y_0 + c_i)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right) x_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i \right) y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i = 0 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i \right) x_0 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 \right) y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Для выяснения совместности системы воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли и следствием из нее:

Теорема 1 (**Кронекера-Капелли**). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, т.е. $rkA = rk\tilde{A}$*

Следствие 3.1. *Из теоремы Кронекера-Капелли получаем утвреждения:*

1. *если $rkA \neq rk\tilde{A}$, то СЛАУ несовместна*
2. *если $rkA = rk\tilde{A} < n$, то СЛАУ имеет бесконечное число решений*
3. *если $rkA = rk\tilde{A} = n$, то СЛАУ имеет ровно одно решение*

В нашем случае имеем:

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 \end{pmatrix},\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем:

- если $rkA = rk\tilde{A} = 1 < 2$, т.е. $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i}$, то система имеет бесконечное число решение, т.е. существует прямая, равноудаленная от исходного множества отрезков (прямых) - любое из уравнений системы $(*)$

- если $rkA \neq rk\tilde{A} \iff rkA = 1, rk\tilde{A} = 2$, т.е. $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i}$, то система несовместна (нет решений), но это невозможно, докажем это. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}),\ b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$. Тогда матрица A является матрицей скалярных произведений векторов a и b:

  $$A = \begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (a,b) & (b,b) \end{pmatrix}$$

  Из неравенства Коши-Буняковского знаем, что произведение квадратов норм векторов не меньше, чем произведение скалярных произведений этих векторов, причем равенство достигается, только если векторы пропорциональны. Таким образом, если они не пропорциональны, то $rkA = rk\tilde{A} = 2$, а если пропорциональны, то $rkA = rk\tilde{A} = 1$, т.е. случай $rkA \neq rk\tilde{A}$ невозможен.

- если $rkA = rk\tilde{A} = 2$, т.е. $\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i & \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение (одну точку):

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)} \\ y_0 = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i c_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i c_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)} \end{cases}$$

3.2.3 Трехмерный случай

Случай параллельности плоскостей и прямой

Пусть дан набор из n плоскостей в виде набора пар их векторов нормали и точек, принадлежащих им:

$$S = \{\ ((x_i, y_i, z_i), (m_i, n_i, p_i))\ : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

По смыслу задачи координата l_i для всех плоскостей равна 0, или существует афинная замена координат, приводящая к такой ситуации, т.е. пользуемся алгоритмом замены координат 3.3.3. Таким образом, имеем следующий набор:

$$S = \{\ ((x_i, y_i, z_i), (m_i, n_i, 0))\ : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Отнормируем вектора нормали плоскостей:

$$\tilde{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2}},\ \tilde{n_i} = \frac{n_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2}}$$

Тогда уравнения наших плоскостей имеют вид:

$$\tilde{m_i}(x - x_i) + \tilde{n_i}(y - y_i) = 0$$

Если рассматривать обычное уравнение плоскости, то получаем следующие тождества:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A = \tilde{m_i},\ B = \tilde{n_i},\ C = 0,\ D = -\tilde{m_i}x_i - \tilde{n_i}y_i$$

Будем искать прямую l, наименее удаленную от данного множества плоскостей:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases} \text{, где } t \in \mathbb{R} \text{ - параметр.}$$

Т.к. все плоскости параллельны оси OZ, то и искомая прямая будет параллельна ей, т.е. направляющий вектор будет равен $(0, 0, 1)$. Таким образом, задача свелась к нахождению точки, наименее удаленной от множества данных плоскостей, в любой плоскости, например, $z = 0$. В пересечении плоскости $z = 0$ и исходного набора плоскостей получаем набор отрезков (прямых), и задача полностью свелась к двумерному случаю 3.2.2.

Случай непараллельности плоскостей и прямой

Аналогично случаю параллельности 3.2.3 имеем нормальные уравнения плоскостей:

$$\pi_i: \; A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$
$$A_i = \frac{m_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + p_i^2}}, \; B_i = \frac{n_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + p_i^2}}$$
$$C_i = \frac{p_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + p_i^2}}, \; D_i = -\frac{m_i x_i + n_i y_i + p_i z_i}{\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + p_i^2}}$$

Будем рассматривать задачу внутри объемлющей призмы, ограниченной z_{min} и z_{max}, т.е. концы искомого отрезка будем искать на этих плоскостях, ограничивающий призму «сверху» и «снизу». Наша прямая будет определяться точками $P_1 = (x_1, y_1, z_{min})$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_{max})$.

Будем искать расстояние от прямой до каждой их плоскостей следующим образом: пусть $d_1 = \rho\left(P_1, \pi_i\right), \;\; d_2 = \rho\left(P_2, \pi_i\right)$, тогда $\rho(l, \pi_i) = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2}{3}$.

$$d_{1i} = \rho\left(P_1, \pi_i\right) = |A_i x_1 + B_i y_1 + C_i z_{min} + D_i|$$
$$d_{2i} = \rho\left(P_2, \pi_i\right) = |A_i x_2 + B_i y_2 + C_i z_{max} + D_i|$$
$$\rho(l, \pi_i) = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2}{3} =$$
$$= \frac{\left(A_i x_1 + B_i y_1 + C_i z_{min} + D_i\right)^2 + \left(A_i x_2 + B_i y_2 + C_i z_{max} + D_i\right)^2}{3} +$$
$$+ \frac{|A_i x_1 + B_i y_1 + C_i z_{min} + D_i||A_i x_2 + B_i y_2 + C_i z_{max} + D_i|}{3}$$

В плоскостях $z = z_{min}$ и $z = z_{max}$ будем искать точки P_1 и P_2 так, чтобы они были наименее удалены от исходных плоскостей π_i.

$$d_{ji} = \rho\left(P_1, \pi_i\right) = |A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i|, \;\; j = 1, 2, \;\; z_j = \begin{cases} z_{min}, \; j = 1 \\ z_{max}, \; j = 2 \end{cases}$$

Тогда функционал имеет вид:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} (A_i x_j + B_i y_j + C_i z_{min} + D_i)^2$$

Найдем частные производные функционала по x_j и y_j:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum\limits_{i=1}^{n} (A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i)^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \sum\limits_{i=1}^{n} (A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i)^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i)^2 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2A_i(A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2B_i(A_i x_j + B_i y_j + C_i z_j + D_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2\right) x_j + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i B_i\right) y_j + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(C_i z_j + D_i) = 0 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i B_i\right) x_j + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2\right) y_j + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(C_i z_j + D_i) = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} a_{11} = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2 \\ a_{12} = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i B_i \\ a_{22} = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2 \\ b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(C_i z_j + D_i) \\ b_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(C_i z_j + D_i) \end{cases}$$

Если система невырождена, то получаем решение:

$$\begin{cases} x_j = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \\ y_j = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \end{cases}$$

Таким образом, имеем две точки, по которым однозначно определяется искомая прямая.

3.3 Замена координат

3.3.1 Постановка задачи

На плоскости или в пространстве заданы некоторые геометрические объекты в своем базисе. Необходимо найти координат этих объектов при замене базиса на новый.

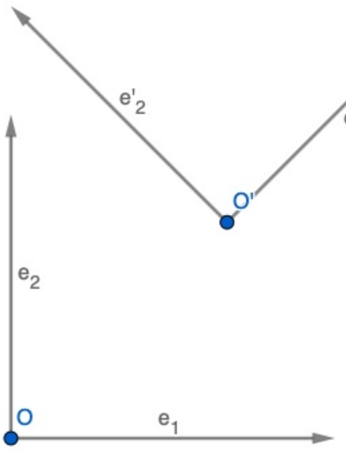


Рис. 3.10: Два базиса на плоскости.

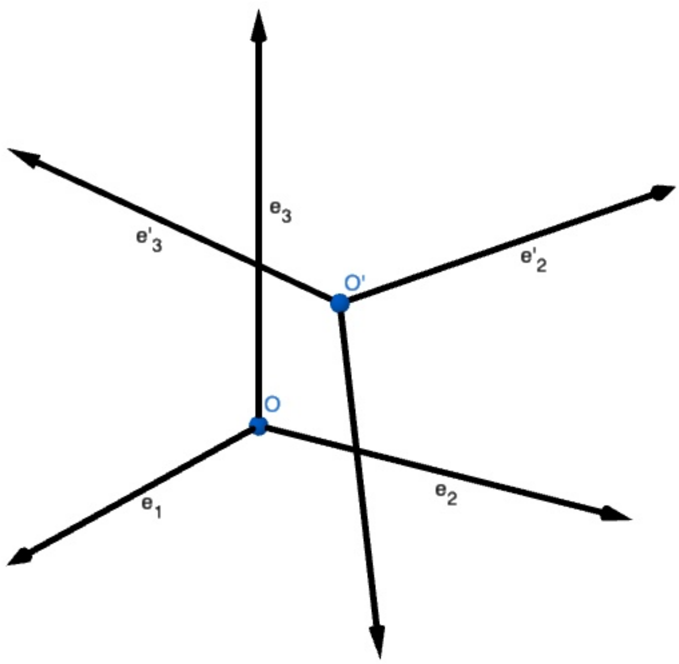


Рис. 3.11: Два базиса в пространстве.

3.3.2 Двумерный случай

Рассмотрим ортогональную матрицу как матрицу перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2 к ортонормированному базису e_1', e_2'. Тогда вектор e_1' имеет координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ для некоторого φ. Перпендикулярные ему векторы единичной длины (таких два) равны $(\mp\sin\varphi, \pm\cos\varphi)$.

Таким образом, ортогональные матрицы 2x2 имеют один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Угол φ можно считать принадлежащим $[0, 2\pi)$.

Координаты точки в старой и новой с. к. связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

где C - матрица перехода от старого базиса к новому,
(x, y) и (x', y') - координаты точки в старой и новой с.к.
(x_0, y_0) - координаты нового начала координат O' в старой с.к.

Координаты векторов в старой и новой с. к. связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

Чтобы найти обратную замену, необходимо умножить на C^{-1}, а для ортогональных матриц $C^{-1} = C^T$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - C^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

3.3.3 Трехмерный случай

Рассмотрим переход от прямоугольной системы координат $Oe_1e_2e_3$ к другой прямоугольной системе координат $Oe'_1e'_2e'_3$.

При коолинеарности одного из базисных векторов, например, e_3 первого репера и одного базисного вектора, например, e'_3 из второго репера замена сводится к замене координат на плоскости с определителем соответствующего знака в зависимости от направленности коллинерных векторов.

Теперь будем считать, что все векторы неколлинеарны, в частности, e_3 и e'_3 неколлинеарны:

$$e_3 \text{ - вектор нормали к плоскости } Oe_1e_2$$

$$e'_3 \text{ - вектор нормали к плоскости } O'e'_1e'_2$$

Определим вектор $f := \frac{[e_3, e'_3]}{|||[e_3, e'_3]|||}$ - это направляющий вектор прямой пересечения плоскостей Oe_1e_2 и $O'e'_1e'_2$.

Также определим *углы Эйлера*:

- угол φ - это угол от e_1 к f, $\varphi \in [0, 2\pi)$
- угол θ - это угол от e_3 к e'_3, $\theta \in [0, \pi]$
- угол ψ - это угол от f к e'_1, $\psi \in [0, 2\pi)$

Будем последовательно производить замены координат: повороты в соответствующих плоскостях.

1. Переход от $Oe_1e_2e_3$ к $Ofge_3$ с сохранением ориентации - это вращение вокруг e_3 на угол ϕ. Соответствующая матрица перехода имеет вид:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Проведем вращение вокруг f так, чтобы e_3 совместился с e'_3 - это вращение на угол θ (в силу определения f). Получаем переход к реперу $Ofhe'_3$, причем плоскости Ofh и $Oe'_1e'_2$ совпадают. Соответствующая матрица перехода имеет вид:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Проведем вращение вокруг e'_3 в плоскости $Oe'_1e'_2$ для совмещения f и e'_1. При этом в силу согласованности ориентаций образ e_2 перейдет в e'_2. Соответствующая матрица перехода имеет вид:

$$C_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда результирущая матрица перехода от базиса $e_1e_2e_3$ к $e_1'e_2'e_3'$ равна:

$$C = C_1C_2C_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Координаты точки в старой и новой с. к. связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

где C - матрица перехода от старого базиса к новому,
(x, y, z) и (x', y', z') - координаты точки в старой и новой с.к.
(x_0, y_0, z_0) - координаты нового начала координат O' в старой с.к.

Координаты векторов в старой и новой с. к. связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

Чтобы найти обратную замену, необходимо умножить на C^{-1}, а для ортогональных матриц $C^{-1} = C^T$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - C^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Литература

[1] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 478 с.

[2] Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб. пособие. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. 2002. — 160 с.