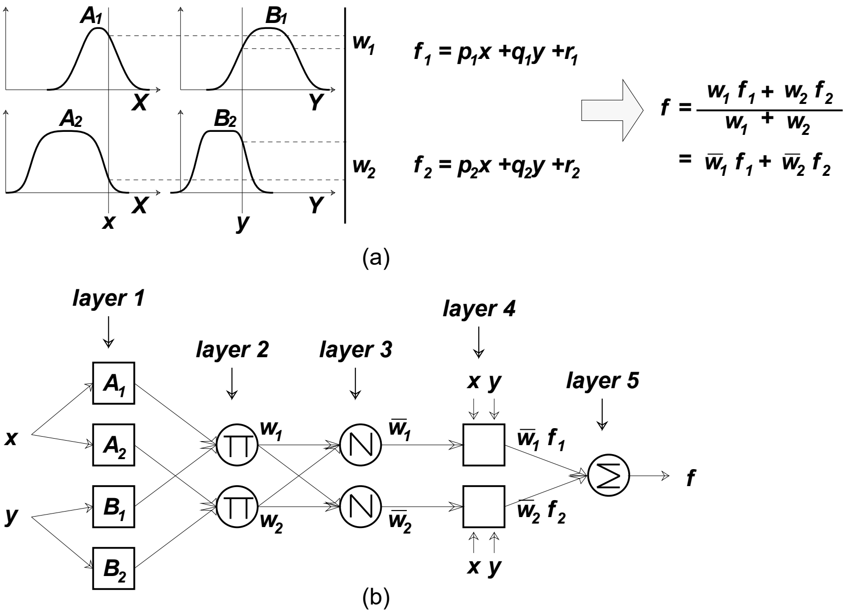
Sadržaj

Popis slika

1 Sustav ANFIS

Sustav ANFIS (engl. *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*) koji je objašnjen u [1] hibridni je sustav nastao kombiniranjem neuronskih mreža i sustava neizrazitog zaključivanja. Primjer takvog sustava prikazan je na slici 1.

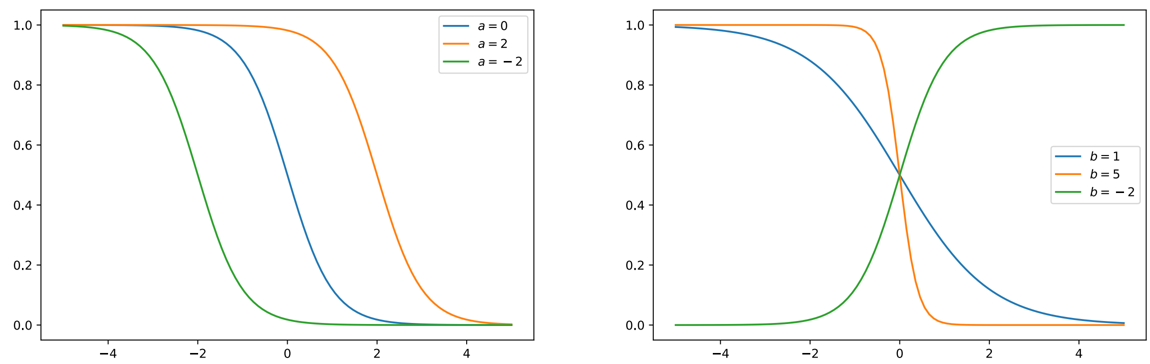


Slika 1: ANFIS mreža koja ostvaruje neizraziti sustav (slika preuzeta iz [1])

Prikazana mreža predstavlja sustav koji ima 2 ulazne varijable x i y te na temelju njih računa rezultat f. Pritom sustav raspolaže sa 2 pravila, što se na slici vidi kao parovi (A_1, B_1) i (A_2, B_2), odnosno 2 neurona u slojevima 2, 3 i 4. Kako bi se odredile točne vrijednosti brojeva A_i i B_i definira se funkcija pripadnosti, te je u daljnjem radu korištena sigmoidalna funkcija pripadnosti oblika:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + e^{b_i(x-a_i)}}.$$

Korištenjem ove funkcije pripadnosti, svako pravilo ima 2 parametra za svaku ulaznu varijablu, točnije a_i i b_i. Izgled funkcije u ovisnosti o parametrima prikazana je na slici 2. Iz slike 2a može se primjetiti kako parametar a_i zapravo određuje središte sigmoide, odnosno vrijednost x koordinate u kojoj funkcija ima vrijednost 0.5. Promjenom ovog parametra, sigmoida se "pomiče" lijevo ili desno. Na slici 2b prikazano je ponašanje prijenosne funkcije u odnosu na parametar b_i te se može primjetiti kako ovaj parametar određuje



(a) (b)

Slika 2: Graf prijenosne funkcije sa različitim parametrima

strminu funkcije. Povećavanjem vrijednosti ovog parametra funkcija postaje strmija, dok se negativnom vrijednosti parametra dobiva zrcalna funkcija.

Vrijednosti neurona u 2. računaju se kao $T-$norma, te je za potrebe toga korišten algebarski produkt:

$$\mu_{A_i \cap B_i}(x) = \mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{B_i}(x).$$

3. sloj koristi se za normalizaciju vrijednosti prethodnog sloja, te se u njemu računa:

$$\bar{w_i} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

U 4. sloju računa se vrijednost funkcije uz trenutno pravilo, za dane ulazne vrijednosti. Korištena je linearna funkcija oblika:

$$f_i = p_i \cdot x + q_i \cdot y + r_i.$$

Vrijednost funkcije se dodatno množi sa w_i iz prethodnog sloja. Primjećuje se da su u ovom sloju dodana 3 nova parametra za svako pravilo, točnije: p_i, q_i i r_i.

U konačnici se u 5. sloju računa konačna vrijednost kao zbroj svih vrijednosti 4. sloja.

2 Izvod algoritma učenja

Neka je dostupno N primjera za učenje oblika $(\vec{x_i}, y_i)$. Neka je za neki uzorak k izlaz neuronske mreže označen sa o_k, tada se pogreška za taj primjer može definirati kao

$$E_k = \frac{1}{2}(y_k - o_k)^2.$$

Ako parametre ažuriramo u skladu s algoritmom gradijentnog spusta, za ažuriranje nekog proizvoljnog parametra ψ koristi se izraz:

$$\psi(t+1) = \psi(t) - \eta \frac{\partial E_k}{\partial \psi}.$$

2.1 Stohastički gradijentni spust

2.1.1 Izvod pravila za ažuriranje parametara p, q i r

Izlaz sustava definiran je kao težinska suma:

$$o_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i},$$

gdje je α_i jakost paljenja $i-$tog pravila, što je definirano sigmoidalnom funkcijom, odnosno u slučaju ovog konkretnog projekta vrijedi da je:

$$\alpha_i = A_i(x_k^{(1)}) \cdot B_i(x_k^{(2)}).$$

Oznaka z_i jednaka je izračunatoj vrijednosti funkcije za $i-$to pravilo, odnosno:

$$z_i = p_i \cdot x_k^{(1)} + q_i \cdot x_k^{(2)} + r_i.$$

Potrebno je izračunati parcijalnu derivaciju $\frac{\partial E_k}{\partial z_i}$, za što se koristi pravilo ulančavanja:

$$\frac{\partial E_k}{\partial z_i} = \frac{\partial E_k}{\partial o_k} \cdot \frac{\partial o_k}{\partial z_i}.$$

Svaku od dobivenih parcijalnih derivacija moguće je izračunati zasebno:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial o_k} &= \frac{\partial}{\partial o_k}(\frac{1}{2}(y_k - o_k)^2) \\ &= -(y_k - o_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial o_k}{\partial z_i} &= \frac{\partial}{\partial o_k}(\frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot z_j}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j}) \\ &= \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j}.\end{aligned}$$

Čime se dobije da vrijedi:

$$\frac{\partial E_k}{\partial z_i} = -(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j}.$$

Kako je već ranije rečeno da vrijedi da je

$$z_i = p_i \cdot x_k^{(1)} + q_i \cdot x_k^{(2)} + r_i,$$

sad je moguće izračunati parcijalne derivacije po parametrima p_i, q_i i r_i, čime se dobiju sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial p_i} &= \frac{\partial E_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial E_k}{\partial z_i} \cdot x_k^{(1)} \\ &= -x_k^{(1)}(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial q_i} &= \frac{\partial E_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial E_k}{\partial z_i} \cdot x_k^{(2)} \\ &= -x_k^{(2)}(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial r_i} &= \frac{\partial E_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial r_i} \\ &= -(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j}.\end{aligned}$$

Iz čega slijede sljedeća pravila za ažuriranje težina:

$$
\begin{aligned}
p_i(t+1) &= p_i(t) + \eta \cdot x_k^{(1)}(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j},\\
q_i(t+1) &= q_i(t) + \eta \cdot x_k^{(2)}(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j},\\
r_i(t+1) &= r_i(t) + \eta(y_k - o_k)\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j}.
\end{aligned}
$$

2.1.2 Izvod pravila za ažuriranje parametra a_i

Kao i u prethodnom slučaju, potrebno je izračunati parcijalnu derivaciju, što se postiže pravilom ulančavanja:

$$
\frac{\partial E_k}{\partial a_i} = \frac{\partial E_k}{\partial o_k}\frac{\partial o_k}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i}.
$$

Komponente su tada redom:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial o_k} &= -(y_k - o_k),\\
\frac{\partial o_k}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \cdot z_j}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j}\right)\\
&= \frac{z_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j - \sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j}{(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j)^2}\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(z_i - z_j)}{(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j)^2}.
\end{aligned}
$$

Prije računanja treće parcijalne derivacije uvodi se uznaka $\gamma = -b_i(x - a_i)$, tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial a_i}, \\
\frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma}(\frac{1}{1+e^{-\gamma}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma}(1+e^{-\gamma})^{-1} \\
&= -(1+e^{-\gamma})^{-2} \cdot (-e^{-\gamma}) \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{(1+e^{-\gamma})^2} \\
&= \frac{1}{1+e^{-\gamma}} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{1+e^{-\gamma}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-\gamma}} \cdot (\frac{1+e^{-\gamma}}{1+e^{-\gamma}} - \frac{1}{1+e^{-\gamma}}) \\
&= \frac{1}{1+e^{-\gamma}}(1 - \frac{1}{1+e^{-\gamma}}) \\
&= \alpha_i(1-\alpha_i), \\
\frac{\partial \gamma}{\partial a_i} &= \frac{\partial}{\partial a_i}(-b_i(x-a_i)) \\
&= \frac{\partial}{\partial a_i}(-b_i x - b_i a_i)) \\
&= b_i, \\
\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i} &= b_i \alpha_i (1-\alpha_i).
\end{aligned}$$

Iz izračunatoga slijedi da se parametar a_i ažurira prema sljedećem pravilu:

$$a_i(t+1) = a_i(t) + \eta(y_k - o_k)\frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(z_i - z_j)}{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j)^2} b_i \alpha_i (1-\alpha_i)$$

2.1.3 Izvod pravila za ažuriranje parametra b_i

Kod izvođenja pravila za ažuriranje parametra b_i potrebno je odrediti parcijalnu derivaciju:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_i} = \frac{\partial E_k}{\partial o_k} \frac{\partial o_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial b_i}.$$

Od prije su poznate sve parcijalne derivacije osim $\frac{\partial \gamma}{\partial b_i}$, za koju vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial b_i} &= \frac{\partial}{\partial b_i}(-b_i(x-a_i)) \\ &= -(x-a_i).\end{aligned}$$

Iz čega slijedi pravilo za ažuriranje parametra b_i:

$$b_i(t+1) = b_i(t) - \eta(y_k - o_k)\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(z_i - z_j)}{(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j)^2}(x-a_i)\alpha_i(1-\alpha_i)$$

2.2 Gradijentni spust

U postupku gradijentnog spusta potrebno je iyra;unati gradijent za cijeli skup primjera za učenje, zbog čega se greška definira kao:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - o_k)^2,$$

nakon čega je potrebno sve parcijalne derivacije izračunati u skladu sa ovako definiranom sumom.

2.2.1 Izvod pravila za ažuriranje parametara

Potrebno je izračunati parcijalnu derivaciju $\frac{\partial E}{\partial z_i}$, što je jednako:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial z_i} &= \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - o_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{2}(y_k - o_k)^2,\end{aligned}$$

što je zapravo jednako sumi parcijalnih derivacija iz stohastičkog gradijentnog spusta po svim primjerima. Zbog toga slijedi da je pravilo za ažuriranje parametara:

$$p_i(t+1) = p_i(t) + \eta \sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)} (y_k - o_k) \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j},$$

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \eta \sum_{k=1}^{N} x_k^{(2)} (y_k - o_k) \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j},$$

$$r_i(t+1) = r_i(t) + \eta \sum_{k=1}^{N} (y_k - o_k) \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j},$$

$$a_i(t+1) = a_i(t) + \eta \sum_{k=1}^{N} (y_k - o_k) \frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (z_i - z_j)}{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j)^2} b_i \alpha_i (1 - \alpha_i),$$

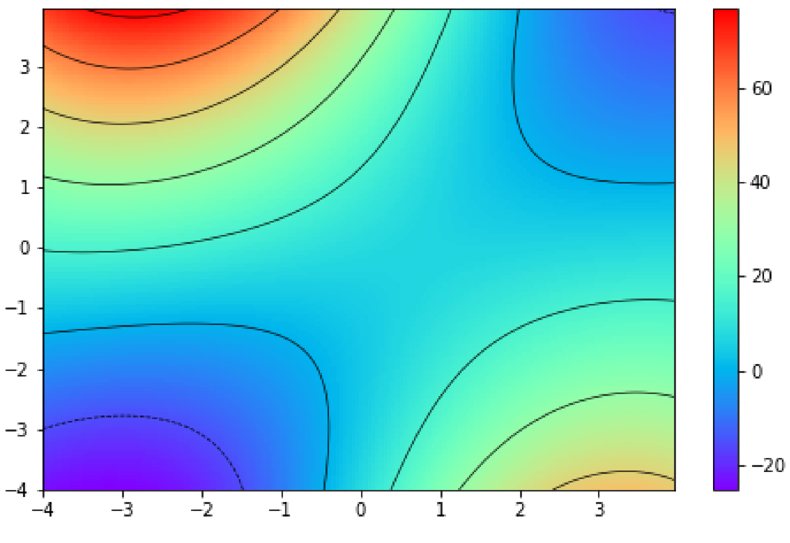
$$b_i(t+1) = b_i(t) - \eta \sum_{k=1}^{N} (y_k - o_k) \frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (z_i - z_j)}{(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j)^2} (x - a_i) \alpha_i (1 - \alpha_i).$$

3 Rezultati

Za potrebe ove vježbe treniran je sustav koji aproksimira funkciju:

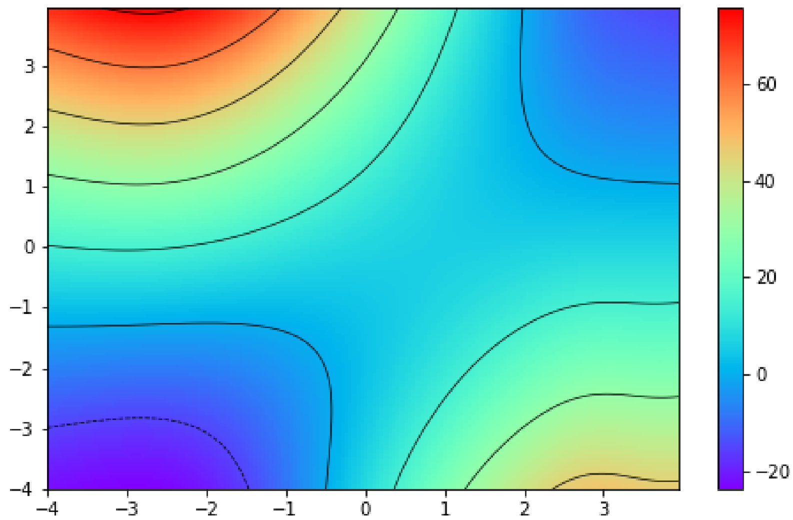
$$z = ((x-1)^2 + (y+2)^2 - 5xy + 3) \cdot \cos(\frac{x}{5})^2.$$

Na slici 3 prikazan je graf funkcije koju aproksimiramo. Korištenjem navedene funkcije



Slika 3: Prikaz grafa funkcije

stvoren je skup podataka za učenje na način da su uzorkovani svi cjelobrojni parovi brojeva iz intervala $[-4, 4]$. Tako dobiveni brojevi korišteni su za treniranje sustava. Napravljen je sustav koji koristi 4 pravila te postiže pogrešku u iznosu 0.14. Slika 4 prikazuje graf



Slika 4: Prikaz grafa funkcije dobivene kao rezultat sustava

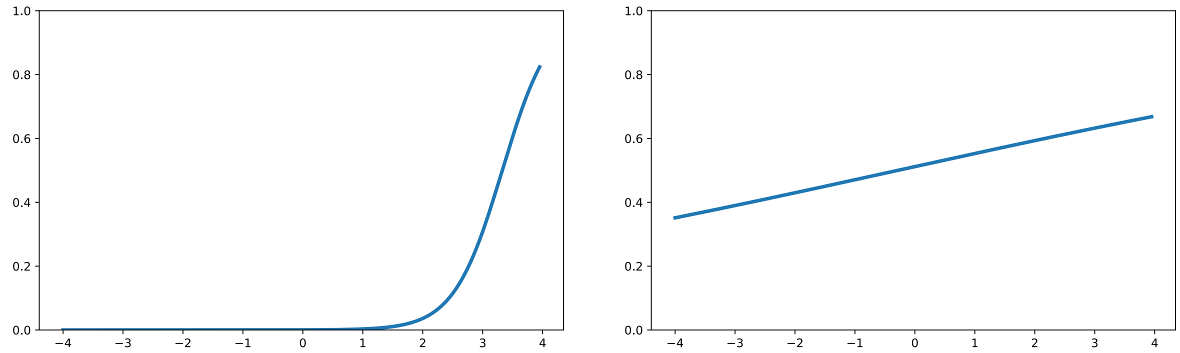
funkcije koja je dobivena kao rezultat opisanog sustava.

3.1 Pravilo 1

Prvo naučeno pravilo sastoji se od sljedećih težina:

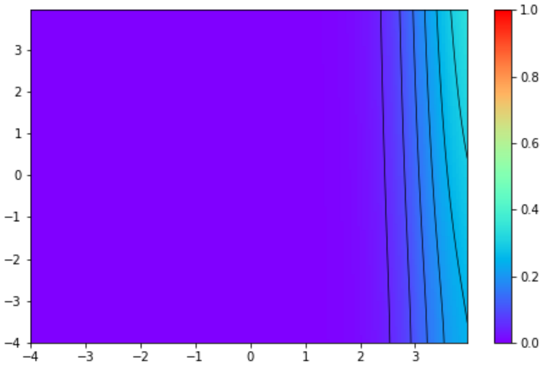
$$[3.3265, -2.4756, -0.2856, -0.1651, -1.3213, 3.6077, 1.3015].$$

Iz slike 11 vidimo grafove funkcije pripadnosti prvog pravila za interval $[-4, 4]$. Iz slike 5a vidimo kako je ovo pravilo specijalizirano za velike vrijednosti x, odnosno mogli bismo reći "x oko 4". Iz slike 5b vidimo kako je pravilo malo više specijalizirano za veće vrijednosti y, no svejedno djeluje i na svim vrijednostima iz intervala. Konačno područje na kojemu djeluje ovo pravilo prikazano je slikom 6. Funkcija koja je dobivena ovim pravilom prikazana je na slici 7.

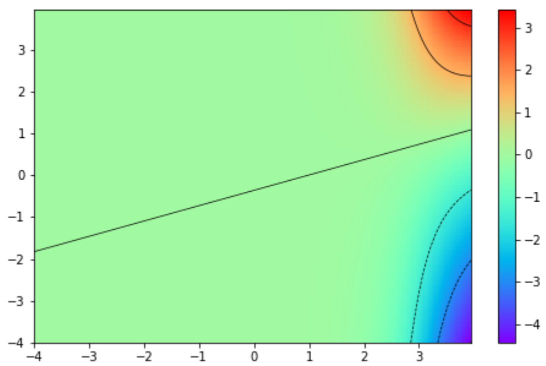


(a) (b)

Slika 5: Graf funkcija pripadnosti za pravilo 1



Slika 6: Prikaz područja na kojemu djeluje pravilo 1



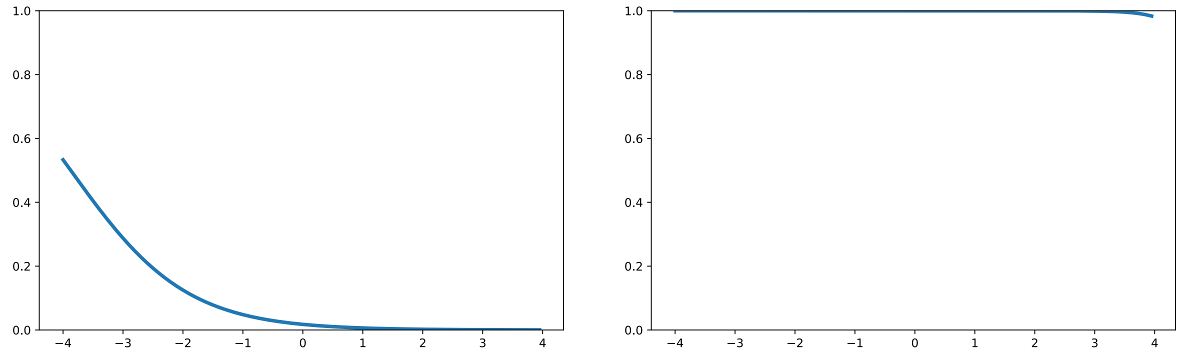
Slika 7: Prikaz vrijednosti funkcije dobivene pravilom 1

3.2 Pravilo 2

Drugo naučeno pravilo sastoji se od sljedećih težina:

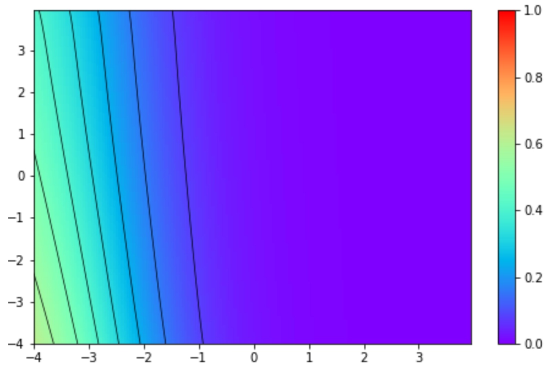
$$[-3.8725, 1.0394, 5.2885, 3.0510, 1.9408, 1.4077, 4.9346].$$

Iz slike 11 vidimo grafove funkcije pripadnosti drugog pravila za interval $[-4, 4]$. Iz slike 8a vidimo kako je ovo pravilo specijalizirano za manje vrijednosti x, odnosno mogli bismo reći "x manje od -2". Iz slike 8b vidimo kako ovo pravilo podjednako obuhaća sve vrijednosti y. Konačno područje na kojemu djeluje ovo pravilo prikazano je slikom 9. Funkcija koja je dobivena ovim pravilom prikazana je na slici 10.

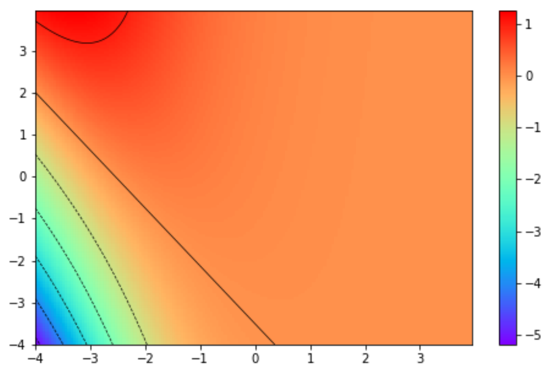


(a) (b)

Slika 8: Graf funkcija pripadnosti za pravilo 2



Slika 9: Prikaz područja na kojemu djeluje pravilo 2



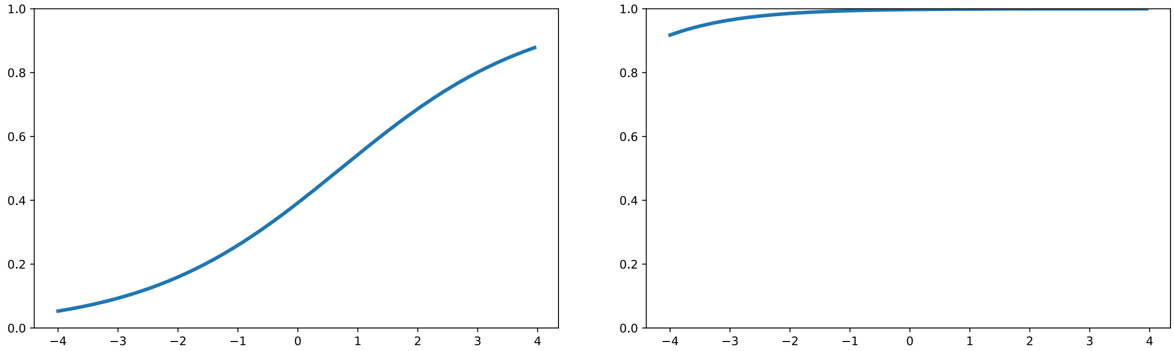
Slika 10: Prikaz vrijednosti funkcije dobivene pravilom 2

3.3 Pravilo 3

Treće naučeno pravilo sastoji se od sljedećih težina:

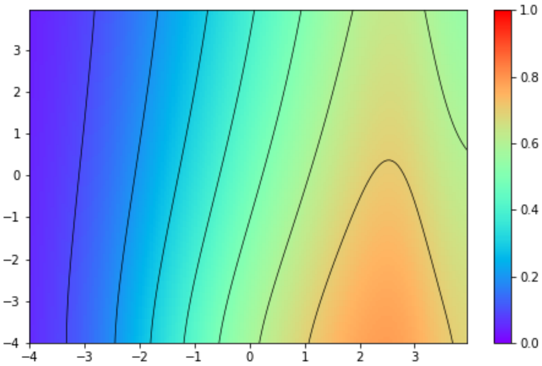
$$[0.7183, -0.6112, -6.6786, -0.9003, 1.9795, -17.0886, 9.7541].$$

Iz slike 11 vidimo grafove funkcije pripadnosti trećeg pravila za interval $[-4, 4]$. Iz slike 11a vidimo kako je ovo pravilo specijalizirano za veće vrijednosti x, odnosno mogli bismo reći "x veće od 0". Iz slike 11b vidimo kako je pravilo jednako specjalizirano za sve vrijednosti y. Konačno područje na kojemu djeluje ovo pravilo prikazano je slikom 12. Funkcija koja je dobivena ovim pravilom prikazana je na slici 13.

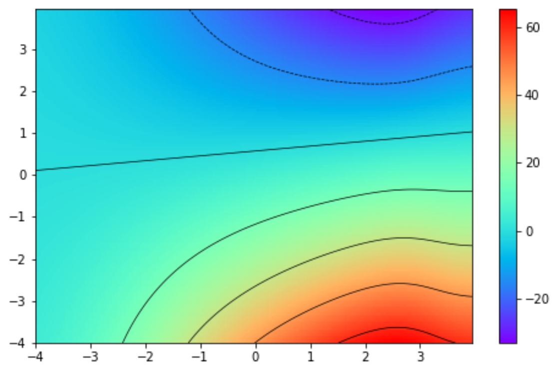


(a) (b)

Slika 11: Graf funkcija pripadnosti za pravilo 3



Slika 12: Prikaz područja na kojemu djeluje pravilo 3



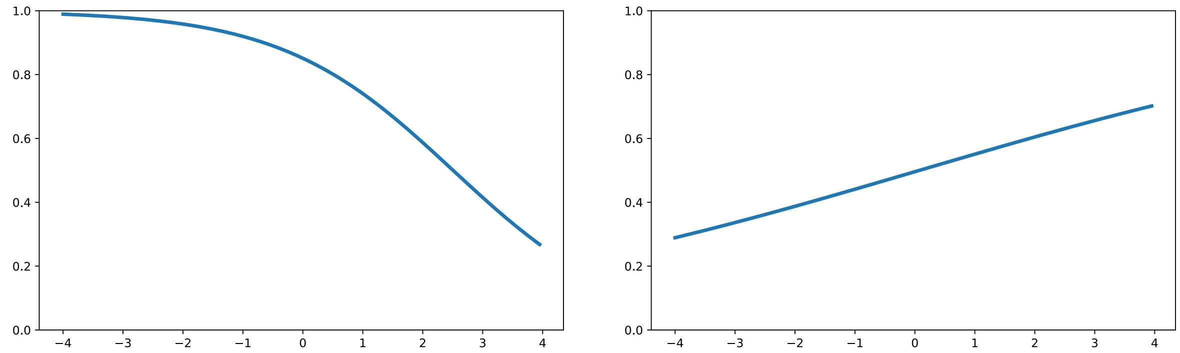
Slika 13: Prikaz vrijednosti funkcije dobivene pravilom 3

3.4 Pravilo 4

Četvrto naučeno pravilo sastoji se od sljedećih težina:

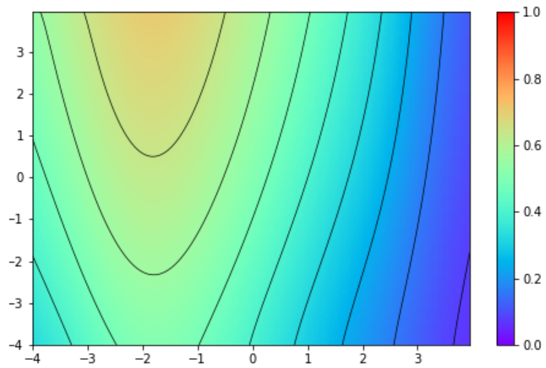
$$[2.5067, 0.6958, 0.0760, -0.2208, -7.3340, 24.5469, 5.7858].$$

Iz slike 14 vidimo grafove funkcije pripadnosti četvrtog pravila za interval $[-4, 4]$. Iz slike 14a vidimo kako je ovo pravilo specijalizirano za manje vrijednosti x, odnosno mogli bismo reći "x je manje od 2". Iz slike 14b vidimo kako je pravilo malo više specijalizirano za veće vrijednosti y, no svejedno djeluje i na svim vrijednostima iz intervala. Konačno područje na kojemu djeluje ovo pravilo prikazano je slikom 15. Funkcija koja je dobivena ovim pravilom prikazana je na slici 16.

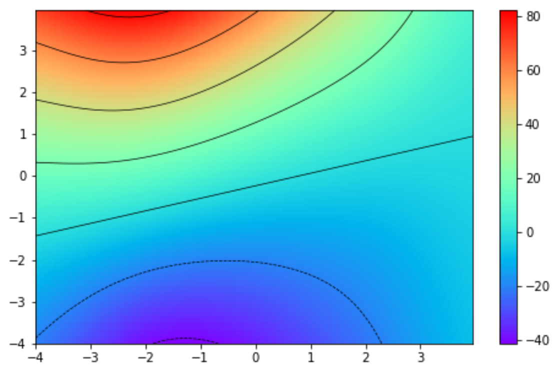


(a) (b)

Slika 14: Graf funkcija pripadnosti za pravilo 4



Slika 15: Prikaz područja na kojemu djeluje pravilo 4



Slika 16: Prikaz vrijednosti funkcije dobivene pravilom 4

Literatura

[1] Marko Čupić, Bojana Dalbelo Bašić, and Marin Golub. *Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo*. 2013.