Задание №1

1)

$$a \in \mathbf{R}^N, x \in \mathbf{R}^N$$

$$a^T x : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^1 \Rightarrow \frac{\partial a^T x}{\partial x} = \nabla_x (a^T x)$$

$$a^T x = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

$$\frac{\partial a^T x}{\partial x} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_i x_i \right)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1 x_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_2 x_2}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial a_N x_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = a$$

2)

$$Ax : \mathbf{R}^{m \times n} \to \mathbf{R}^m$$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{1i} x_i \right)}{\partial x_1} & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{1i} x_i \right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{1i} x_i \right)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{mi} x_i \right)}{\partial x_1} & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{mi} x_i \right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N a_{mi} x_i \right)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

3)

$A \in \mathbf{R}^{N\times N}$

$$\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = (A + A^T)x$$

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j}{\partial x_k} = \frac{\partial\left(a_{kk}x_k^2 + \sum_{i=1,i\neq k}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1,j\neq k}^{N} a_{ij}x_j\right)}{\partial x_k} =$$

$$= 2a_{kk}x_k + \sum_{i=1,i\neq k}^{N} a_{ik}x_k + \sum_{j=1,j\neq k}^{N} a_{kj}x_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ik}x_k + \sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_k = \sum_{i=1}^{N} x_k(a_{ik} + a_{ki})$$

$$\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_i\right)}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_i\right)}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_1(a_{i1} + a_{1i}) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_N(a_{iN} + a_{Ni}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{21} + a_{12} & \cdots & a_{n1} + a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} + a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} = (A + A^T)x$$

В частности, если $A = A^T$, то $\dfrac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = 2Ax$

4)

$$\|x\|^2 = (\sqrt{x^T x})^2 = x^T x = \sum_{i=1}^{N} x_i^2; \frac{\partial\|x\|^2}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)}{\partial x_N} \end{pmatrix} = 2x$$

5)

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g(x_N)}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g(x_N)}{\partial x_N} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} g\prime(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g\prime(x_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g\prime(x_N) \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}(g\prime(x))$$

$$(*)\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_j} = \begin{cases} g\prime(x_i), i \neq j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

6)

$$x \in \mathbf{R}^n; h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m; g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$$

$$\frac{\partial g(h(x))}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial x_n} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial h_i} \cdots \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_1} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial h_1} \cdots \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial h_i} \cdots \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_1} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial h_1} \cdots \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial h_1} & \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial g_1(h(x))}{\partial h_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial h_1} & \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial g_p(h(x))}{\partial h_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial g(h(x))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial x}$$

$$(*) \frac{\partial g_k(h(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k(h(x))}{\partial h_1} \cdot \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k(h(x))}{\partial h_2} \cdot \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_k(h(x))}{\partial h_m} \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x_i}$$

Задание №2

Пусть $g(\beta) = \|X\beta - y\|^2$. Покажем, что $\beta^* = \arg\min \|X\beta - y\|$ является решением системы линейных уравнений $X^T X\beta = X^T y$.

Найдем градиент $\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\|X\beta - y\|^2\right) = \frac{\partial}{\partial \beta}\left((X\beta - y)^T(X\beta - y)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^T X^T X\beta - \beta^T X^T y - y^T X\beta + y^T y) \overset{(*)}{=} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^T X^T X\beta - 2\beta^T X^T y + y^T y) \overset{(**)}{=} 2X^T X\beta - 2X^T y
\end{aligned}$$

$$(*) y^T X\beta = ((y^T X)\beta)^{TT} = (\beta^T (y^T X)^T)^T = (\beta^T X^T y)^T = \beta^T X^T y$$

$$(**) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^T X^T X\beta) \overset{A=X^T X}{=} \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^T A\beta) = 2A\beta = 2X^T X\beta \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(2\beta^T X^T y) = 2X^T y \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(y^T y) = 0 \end{cases}$$

Найдем точку, подозрительную на экстремум:

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow 2X^T X\beta - 2X^T y = 0 \Leftrightarrow X^T X\beta = X^T y$$

$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y$ - точка, подозрительная на экстремум.

Чтобы выяснить, является ли найденная точка минимумом или максимумом, найдем гессиан.

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}(2X^T X\beta - 2X^T y) = 2\left(\frac{\partial X^T X\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial X^T y}{\partial \beta}\right) = 2X^T X$$

β^* является точкой минимума в том случае, если гессиан $g(\beta)$ неотрицательно определен. Пусть $d \neq 0$ - произвольный вектор.

$$d^T X^T X d = (dX)^T (Xd) \overset{y=dX}{=} y^T y \geq 0 \Rightarrow \text{ матрица } X^T X \text{ неотрицательно определена.}$$

Таким образом, β^* является точкой, в которой функция принимает минимальное значение, в то же время она является решением уравнения $X^T X\beta = X^T y$, что и требовалось доказать.

Задание №3

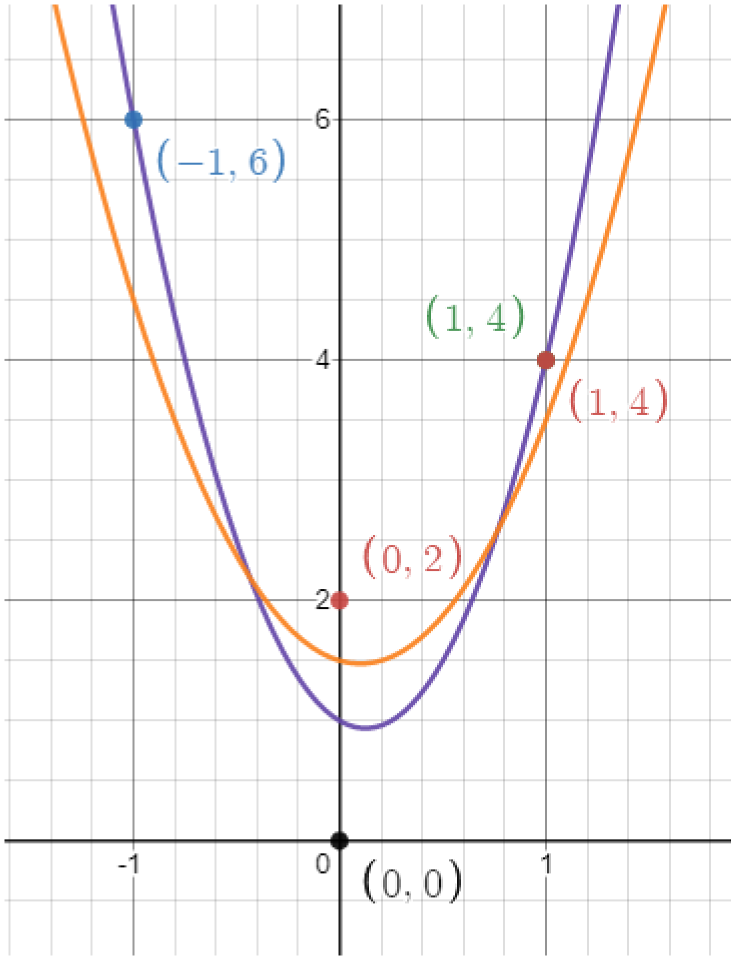
1)

x	1	1	0	0	-1
y	4	4	0	2	6

На рисунке справа представлены графики функций

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

(линия фиолетового цвета - функция из пункта 2, линия оранжевого цвета - функция из пункта 3), а также указанные в таблице выше точки.



2)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$X^T X \beta = X^T y$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = 1 - x + 4x^2$$

3)

$$\lambda = 1$$

$$X^T X + \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(X^T X + \lambda I)\beta = X^T y$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = 1.5 - 0.5x + 2.5x^2$$