Новая концепция интеграла, предложенная Лебегом, и ее развитие

Власов Максим Сергеевич, студент группы 3823М1ПМкн

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

04.12.2024

Содержание

Введение

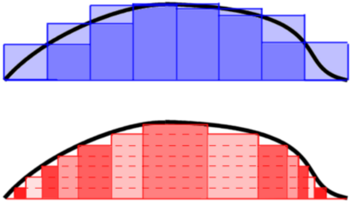
Необходимость интегрального исчисления:

- нахождение площади под кривой
- нахождение пройденного пути при неравномерном движении
- нахождение массы неоднородного тела
- восстановление функции по её производной

Введение

Подходы к интегрированию:

- Интеграл Римана
- Интеграл Лебега



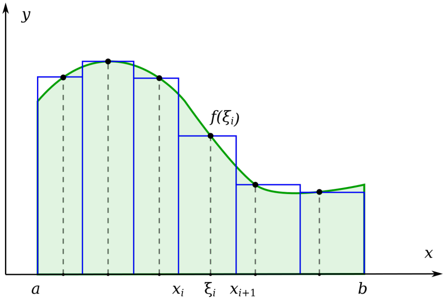
Интеграл Римана

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками:

$$y = 0, y = f(x), x = a, x = b$$

Формализация понятия площади под графиком некоторой функции $f(x)$:

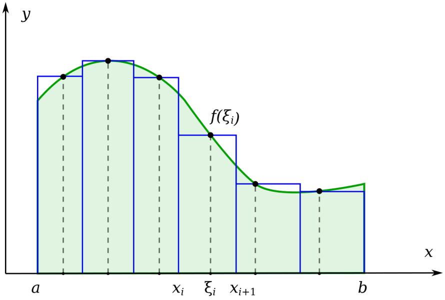
$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$



Определение интеграла Римана

- функция $f(x)$ определена на области $[a;b]$ почти всюду
- область разбита на n интервалов шириной Δx_i, в каждом из которых выбрана точка ξ_i
- $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

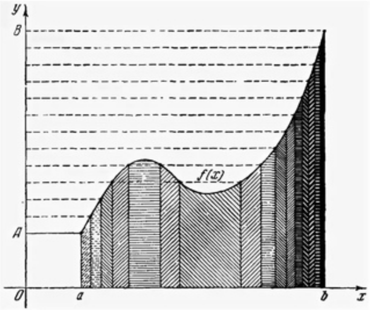


Особенности интеграла Римана

- применим к функциям, которые определены на конечном отрезке и ограничены на нем (точки разрыва, если есть, должны образовывать конечное или счетное множество нулевой меры)
- не определен для функций, разрывных на бесконечном множестве точек, даже если эти точки образуют множество с нулевой мерой
- не подходит для задач, требующих переход к пределу последовательности функций

Интеграл Лебега

- Возможность работы с функциями, определенными на произвольных множествах
- Разбиение области значений функции $f(x)$, а не области определения $[a; b]$
- Использование меры Лебега μ для множеств (длина, площадь, объем)



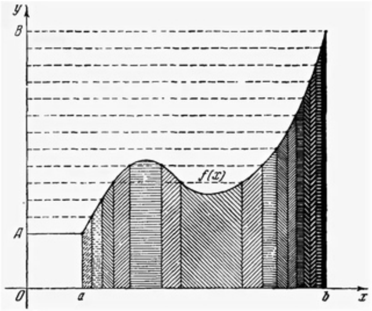
Определение интеграла Лебега

Разбиение области значений функции f на меры Лебега μ вдоль горизонтальной оси:

$$f^*(t) = \mu(\{x : f(x) > t\})$$

Интеграл Лебега через интеграл Римана:

$$\int_a^b f(x) d\mu = \int_0^\infty f^*(t)\, dt$$



Особенности интеграла Лебега

- Более широкий класс интегрируемых функций
- Удобство для работы с пределами функций
- Обработка разрывных функций
- Интегрирование по произвольным множествам
- Гибкость при преобразованиях функций

Приложения интеграла Лебега

- **Функциональный анализ:** исследование пространств Лебега L^p

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

- **Вероятность и статистика:** сложные распределения случайных величин

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

($\mathbb{P}$ – мера вероятности)

- **Теория дифференциальных уравнений:** поиск слабых решений

$$\int \phi(x) f'(x) \, dx = - \int \phi'(x) f(x) \, dx$$

- **Гармонический анализ:** преобразования с пределами

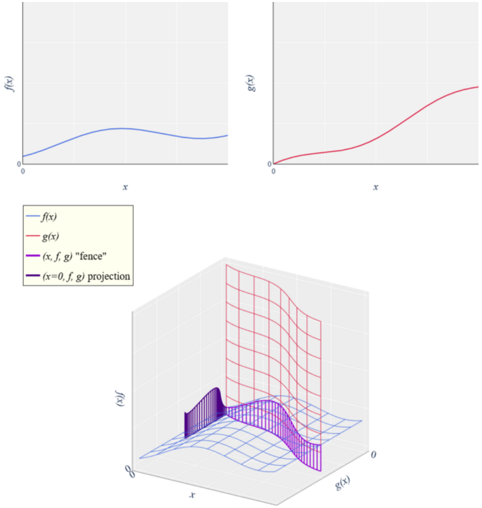
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

- **Физика:** квантовая механика и статистическая механика

Интеграл Лебега-Стилтьеса

Обобщение интегралов Лебега и Римана, которое позволяет интегрировать измеримую функцию $f(x)$ относительно произвольной монотонной функции $g(x)$ в качестве меры:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$



Заключение

- **Интеграл Римана** – эффективный инструмент для непрерывных и ограниченных функций.
- **Интеграл Лебега** можно применять для более широкого класс функций, например, определенных на множествах со сложной структурой или с разрывами на бесконечном множестве.
- Интеграл Лебега позволяет решать сложные задачи в различных разделах математического анализа, физики, теории вероятностей.
- Обобщения этих подходов, например, **интеграл Лебега-Стилтьеса**, открыли новые горизонты для исследований в математике и смежных областях.