Учреждение образования

«Белорусский государственный технологический университет»

Факультет информационных технологий

Кафедра информационных систем и технологий

Электронный конспект по дисциплине

**«Математическое программирование»**

Выполнил:

Студент 2 курса 8 группы

Савин Владислав Александрович

Принял:

Берников Владислав Олегович

**Лабораторная работа № 3   
Метод ветвей и границ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Выполнение работы:** составить матрицу для задачи о коммивояжере для своего варианта и решить данную задачу с помощью метода ветвей и границ.

**Задание 1**

Сформулировать условие задачи коммивояжера с параметром. Для этого:

* принять элементы матрицы расстояний равными:

где *n* – номер варианта;

{INF, 26, 34, INF, 13},

{13, INF, 18, 55, 71},

{15, 39, INF, 86, 62},

{30, 45, 52, INF, 39},

{80, 79, 52, 26, INF}};

**Задание 2**   
Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.

**Метод ветвей и границ** – это общий алгоритмический метод решения задач комбинаторной оптимизации. Метод ветвей и границ был предложен для решения общей задачи целочисленного линейного программирования.

Метод является вариацией полного перебора с отсевом подмножеств допустимых решений, не содержащих оптимальных решений.

В основе метода лежат две процедуры:

* процедура ветвления (BR), позволяющая разбивать множество допустимых решений на непересекающиеся подмножества,
* процедура вычисления нижней или верхней границы (EV).

Процедура вычисления нижней или верхней границы основывается на двух утверждениях:

**Утверждение 1.** Изменение всех элементов строки матрицы расстояний на одно и то же число не влияет на выбор оптимального маршрута коммивояжера.

**Утверждение 2.** Изменение всех элементов столбца матрицы расстояний на одно и то же число не влияет на выбор оптимального маршрута коммивояжера.

В соответствии с утверждением 1 выполним операцию приведение таблицы по строке с константой проведения – минимальным расстоянием от города до города в строке; Полученная матрица продемонстрирована на рисунке 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|  | **1** | INF | 13 | 21 | INF | 0 |
|  | **2** | 0 | INF | 3 | 42 | 58 |
|  | **3** | 0 | 24 | INF | 71 | 47 |
| di,j = | **4** | 0 | 6 | 13 | INF | 9 |
|  | **5** | 54 | 53 | 26 | 0 | INF |
|  |
|  |

Рисунок 1.

Затем выполним приведение таблицы по столбцу, где константой приведения также является минимальный элемент в столбце;

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|  | **1** | INF | 7 | 18 | INF | 0 |
|  | **2** | 0 | INF | 0 | 42 | 58 |
| di,j = | **3** | 0 | 18 | INF | 71 | 47 |
|  | **4** | 0 | 0 | 10 | INF | 9 |
|  | **5** | 54 | 47 | 23 | 0 | INF |

Рисунок 2.

Данную таблицу будем называть полностью приведенной таблицей.

Сумма константа приведения получилась равна 106. Эту величину можно принять в качестве нижней границы длины кратчайшего кольцевого маршрута.

Затем исследуются дуги таблицы, имеющие нулевую длину.

0(1,5) = 16

0(2,1)=0

0(2,3)=10

0(3,1)=18

0(4,1) = 0

0(4,2) =7

0(5,4) = 65

Вычисления показывают, что удаление дуги (5, 4) позволяет получить самую большую сумму констант приведения (65), а значит, выбор этой дуги для ветвления с помощью процедуры **BR** даст самое большое увеличение нижней границы длины кольцевых маршрутов.

Все допустимые кольцевые маршруты не будут включать путь из города 5 в город 4, а длина этих кольцевых маршрутов не будет меньше, чем нижняя граница, построенная для полностью приведенной таблицы увеличенная на 87.

Кроме того, очевидно, что допустимый кольцевой маршрут, содержащий дугу (5, 4), не может содержать дугу (4, 5).

Таблица после удаления 5 строки, 4 столбца и подставления значения бесконечности в 4 строку 5 столбца:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1** | **2** | **3** | **5** |
|  | **1** | INF | 7 | 18 | 0 |
|  | **2** | 0 | INF | 0 | 58 |
| di,j = | **3** | 0 | 18 | INF | 47 |
|  | **4** | 0 | 0 | 10 | 9 |

Рисунок 3.

Все допустимые кольцевые маршруты не будут включать путь из города 5 в город 4, а длина этих кольцевых маршрутов не будет меньше, чем нижняя граница, построенная для ***полностью приведенной таблицы*** увеличенная на 65. Элемент графа T продемонстрирован на рисунке 4.

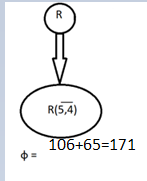


Рисунок 4

В ходе дальнейших преобразований было выявлено следующее:

Анализ таблицы позволяет выявить дугу (1,5), удаление которой приводит к максимальной сумме констант приведения (16).

Полученная таблица представлена на рисунке 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1** | **2** | **3** |
|  | **2** | 0 | INF | 0 |
| di,j = | **3** | 0 | 18 | INF |
|  | **4** | 0 | 0 | 10 |

Рисунок 5.

Заменяем столбцы с нулевыми значениями на INF для выявления новой удаляемой строки и столбца:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | |  | | | |  |  |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Ячейка, заменяемая на INF | | | Сумма констант полученной таблицы | | | |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | 2 строка |  |  | 0 | |  |  |  | |  | 2 столбец |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | 2 строка |  |  | 10 | |  |  |  | |  | 3 столбец |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | 3 строка |  |  | 18 | | Вычеркиваем 3 строку и 1 столбец | | | |  | 1 столбец |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | 4 строка |  |  | 0 | |  |  |  | |  | 1 столбец |  |  |  |  |  | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 строка |  |  | 18 |
| 2 столбец |  |  |

Полученная в результате удаления дуги и приведения таблица:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | **1** | **3** |
|  | **2** | 0 | 0 |
| di,j = | **4** | 0 | 10 |

Рисунок 6.

Анализ таблицы позволяет выявить два последних звена кольцевого маршрута: (2, 3) (4, 1);

Для получения окончательного решения следует расставить выбранные дуги в правильном порядке (1,5) (5,4) (4,2) (2,3) (3,1) Сложив расстояния, соответствующие дугам кольцевого маршрута, получим 117, что совпадает с нижней границей, приписанной последнему узлу графа **T**.

13+26+45+18+15=117

Демонстрация работы программного кода для решения задачи о коммивояжере с текущей матрицей расстояний показана на рисунке 8.

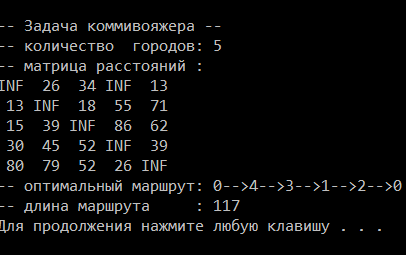


Рисунок 8.

Вывод: в результате лабораторной работы был изучен метод ветвей и границ, его практическое применение на задаче о коммивояжере. Полученное решение получилось равно решению, посчитанному программно, что свидетельствует о правильности ответа.