ION VLAD-DORU

GRUPA 408

Tema 1

(A 1.1) Demonstrați teorema 1.1.1.

Fie sistemul de inecuații liniare:

$$(S_1) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \text{pt } i = \overline{1,m}$$

Fie x_k o variabilă pt eliminare.

$K_0 := \{ i \mid a_{ik} = 0 \}$, $K_+ := \{ i \mid a_{ik} > 0 \}$, $K_- := \{ i \mid a_{ik} < 0 \}$

Fie sistemul (S_2): $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in K_0$.

$$a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \right) - a_{lk} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq a_{ik} b_l - a_{lk} b_i$$

pt $\forall (i,l) \in K_+ \times K_-$

- Fie $P := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ sol pt } S_1 \}$

  $P_1 := \{ x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x' \text{ sol pt } S_2 \}$

Avem $P^k \Rightarrow$ proiecția lui P pe direcția x_k:

$$P^k = \{ (x_1 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n) \mid (x_1 \ldots x_n) \in P \}.$$

Teoremă $P^k = P_1$

Demonstrație: Vom arăta întâi că $P^k \subseteq P_1$

Fie $x \in P^k$. $x = (x_1 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n)$

$\exists\, x_k \in \mathbb{R}$ a.î. $x' = (x_1 \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \ldots x_n) \in P$.

- Vom arăta că i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$; $i \in k_0$. este verificată de x.

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij}x_j + \underset{\substack{\| \\ 0}}{a_{ik} x_k} + \sum_{j=k+1} a_{ij}x_j \le b_i \quad \text{deoarece } x' \in P.$$

Deci x verifică ineg i) din sistemul S_2.

- Vom arăta că ii) x verifică ineg.

$$a_{ik}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j\Big) - a_{lk}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big) \le a_{ik}b_l - a_{lk}b_i$$

$(i,l) \in K_+ \times K_-$

Deoarece $x' \in P$ el verifică:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \;\Big|\cdot(-a_{lk})$ Cum $a_{lk} \le 0$, $-a_{lk} \ge 0$

$$\Rightarrow \quad -a_{lk} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -a_{lk} b_i$$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j \le b_l \;\Big|\cdot a_{ik}$, $a_{ik} > 0$

$$a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j \le a_{ik} b_l .$$

Adunând (1) și (2) $\Rightarrow$ x' satisface și această inegalitate.

x_k nu apare

Am demonstrat deci că $P^k \subseteq P_L$.

Vom demonstra că $P_L \subseteq P^K$

Fie $x \in P_L$. Vom arăta că $\exists$ $x_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$x = (x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1} \dots x_n)$, $x \in P_L$.

$x' = (x_1 \dots x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \dots x_n)$

$x' \in P$.

$x' \in P$ dacă $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i$, $i = \overline{1,m}$

Putem rescrie inegalitățile anterioare astfel:

$$a_{ik} x_k \leq \underbrace{b_i - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=k+1}^{m} a_{ij} x_j}_{c_i}$$

Putem rescrie.. $a_{ik} x_k \leq c_i$

Se observă că pt $i \in K_0$ se verifică inegalitatea anterioară

pt $i \in K_+ \Rightarrow x_k \leq \frac{c_i}{a_{ik}}$ $\Rightarrow$ $0 \leq \frac{c_i}{a_{ik}} - \frac{c_l}{a_{lk}} \Big| (-a_{lk} \cdot a_{ik})$

$l \in K_- \Rightarrow x_k \leq \frac{-c_l}{a_{lk}}$ $\Downarrow$

$0 \leq -c_i a_{lk} + a_{ik} c_l$.

~~Acum~~ $\Rightarrow$ este echivalent cu a doua ~~ultima~~ ineg din S_1.

Deci $x \in P_L \Rightarrow \exists$ x_k a.î. $x' \in P$ Deci $P^k \subseteq P_1$.

Cum $p^k \subseteq P_\perp$ și $P_\perp \subseteq p^k \Rightarrow p^k = P_\perp$. qed.

(Lema 2) Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ și $b \in \mathbb{R}^m$. Sistemul $Ax \leq b$ are soluție dacă și numai dacă $y^t b \geq 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$ cu $y \geq 0$ și $y^t A = 0^t$

Dem: „$\Rightarrow$" Fie $x_0 \in \mathbb{R}^m$ o soluție a.î. $Ax_0 \leq b$.

Fie $y \geq 0$, $y^t A = 0^t$.

Atunci $Ax_0 \leq b \Rightarrow y^t A x_0 \leq y^t b$

$\Rightarrow 0^t x_0 \leq y^t b$

$\Rightarrow 0 \leq y^t b \Rightarrow y^t b \geq 0$

„$\Leftarrow$" Fie $y \geq 0$ și $y^t A = 0$. ~~Conform~~

Conform ipotezei $y^t b \geq 0$.

Pp că $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $Ax > b \Rightarrow y^t A x > y^t b$

$\Rightarrow 0^t x > y^t b$

$\Rightarrow 0 > y^t b \geq 0$ Contradicție

Deci $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ a.î. $Ax_0 \leq b$. qed.

(H 1.3) Un poliedru este o mulțime convexă.

Un poliedru este intersecția unui număr finit de semispații.

Un semispațiu este definit astfel:

$$H = \{ a^t \cdot x \leq \beta \mid x \in \mathbb{R}^n \} \text{ pt } a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}.$$

O mulțime convexă $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ddacă:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C \quad \forall x_1, x_2 \in C, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \; \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Dem: Fie $x_1, x_2 \in P$ poliedru.

Cum P este ~~…~~ aflat ca intersecția unui nr finit de semispații fie H un semispațiu ales arbitrar.

Cum $x_1, x_2 \in P \Rightarrow x_1, x_2 \in H \Rightarrow a^t \cdot x_1 \leq \beta$

$a^t x_2 \leq \beta.$

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$$a^t \cdot x_1 \leq \beta \mid \cdot \lambda_1 \Rightarrow a^t \lambda_1 x_1 \leq \lambda_1 \beta$$

$$a^t x_2 \leq \beta \mid \lambda_2 \Rightarrow a^t \lambda_2 x_2 \leq \lambda_2 \beta$$

$$a^t (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{= 1} \beta$$

Deci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in P$, deci P e convexă qed.

(H 1.4) Dem teorema 1.3.8.

Fie x o soluție fezabilă a unui LP, iar y o soluție fezabilă a dualei LP. Atunci x, y sunt optime ddacă sunt complementare pt (P) și (D).

Obs x, y sunt complementare dacă

$$y_i(b_i - a_i x) = 0, \quad \forall i = \overline{1,m}$$

Dem: "$\Leftarrow$" Fie x, y cu $y_i(b_i - a_i x) = 0. \ \forall i = \overline{1,m}$

$$\Downarrow$$

$$y^t A x = \sum_{i=1}^{m} y_i(a_i x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot b_i = y^t \cdot b$$

Dar $y^t A x = c^t x$ deoarece $y^t A = c^t$ (y e fezabil a dualei)

Deci $c^t x = y^t b \xRightarrow[\text{slabă}]{\text{Dualitate}}$ x, y sunt optimale.

"$\Rightarrow$" Fie x, y optimale.

Deoarece (P) și (D) sunt fezabile $\xRightarrow[\text{tare}]{\text{Dualitate}} y^t b = c^t x = y^t A x \leq y^t b$

$$\Rightarrow y^t(b - Ax) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \underbrace{y_i}_{\substack{\geq 0 \\ y \geq 0}} \underbrace{(b_i - a_i x)}_{\geq 0 \ (Ax \leq b)} = 0. \Rightarrow$$ $y_i(b_i - a_i x) = 0 \ \forall i = \overline{1,m}$

q.e.d.

(Ex. 5) Dem că duala dualei lui LP este echivalentă cu primala lui LP.

Avem problema primală LP:

$\max \{c^t x \mid Ax \leq b\}$.

Avem duala $\min \{y^t b \mid y \geq 0, \ y^t A = c^t\}$

Vom construi duala dualei.

Avem $y^t A = c^t \Rightarrow y^t A x = c^t x$.

Fie x a.î. $Ax \leq b$.

Dar ~~$y^t b \geq 0$~~ $c^t x = y^t A x \leq y^t b \ (y \geq 0)$

Deci $c^t x \leq y^t b$, $Ax \leq b$.

Deci duala dualei este $\max \{c^t x \mid Ax \leq b\}$

care coincide cu primala ~~qed~~