I L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$

La notion d'intégrale d'une fonction est une notion d'analyse très utile, y compris en dehors du champ des mathématiques. Elle est notamment liée au calcul d'aire de surface. Elle permet de calculer des aire de surface pour lesquelles les formules usuelles ne sont d'aucun secours.

DÉFINITION **Aire sous la courbe d'une fonction positive**

Soit f une fonction continue et positive, définie sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle **aire sous la courbe de f sur** $[a; b]$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

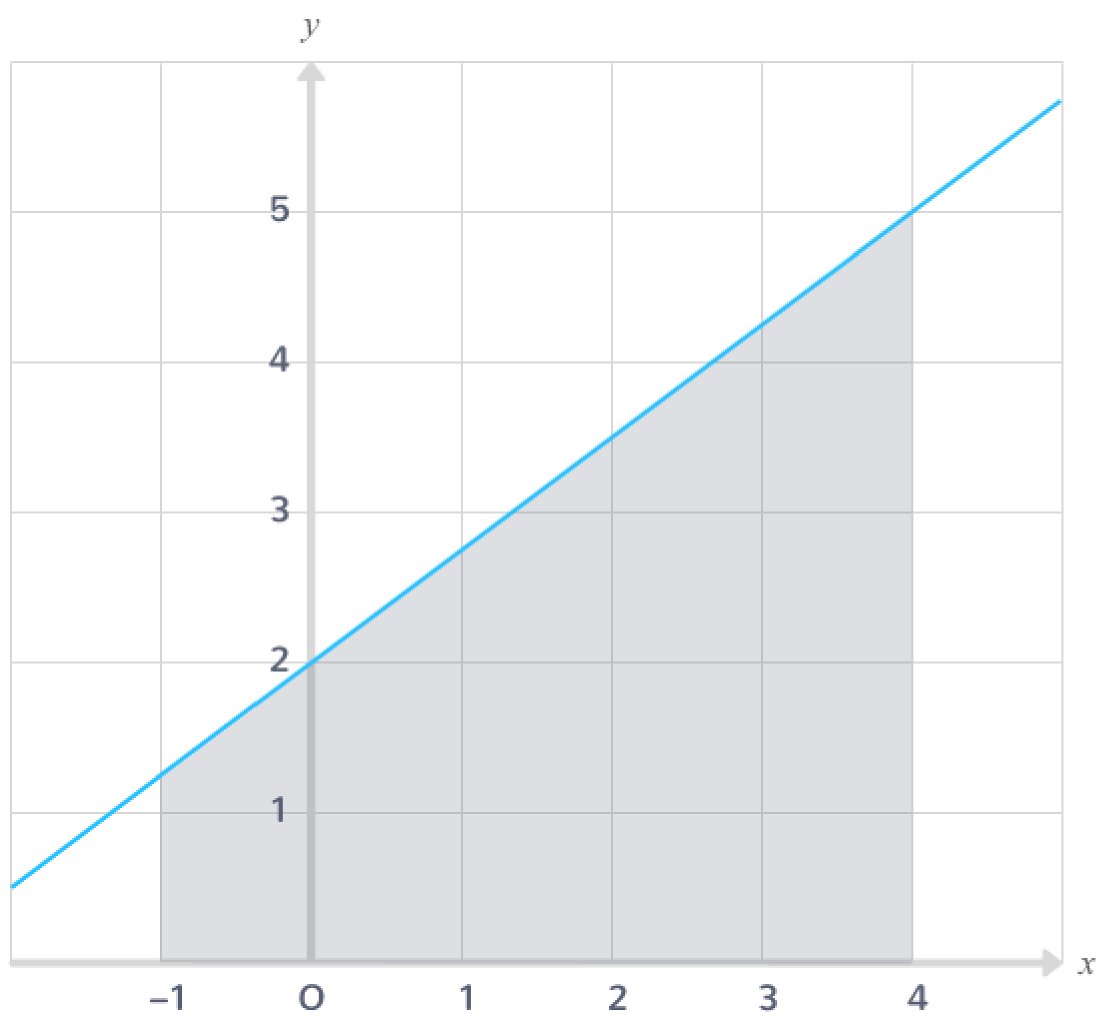
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[-1; 4]$ par $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.

Comme restriction d'une fonction affine à l'intervalle $[-1; 4]$, f est continue.

De plus f est strictement croissante et $f(-1) = \frac{-3}{4} + 2 = \frac{5}{4} > 0$.

Donc f est positive sur $[-1; 4]$.



L'aire sous la courbe de f sur $[-1; 4]$ est l'aire, en unités d'aire, du trapèze correspondant à la zone hachurée.

L'aire sous la courbe de f est donc :

$$\frac{(1{,}25 + 5) \times 5}{2}$$

soit 15,625 unités d'aire.

DÉFINITION Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

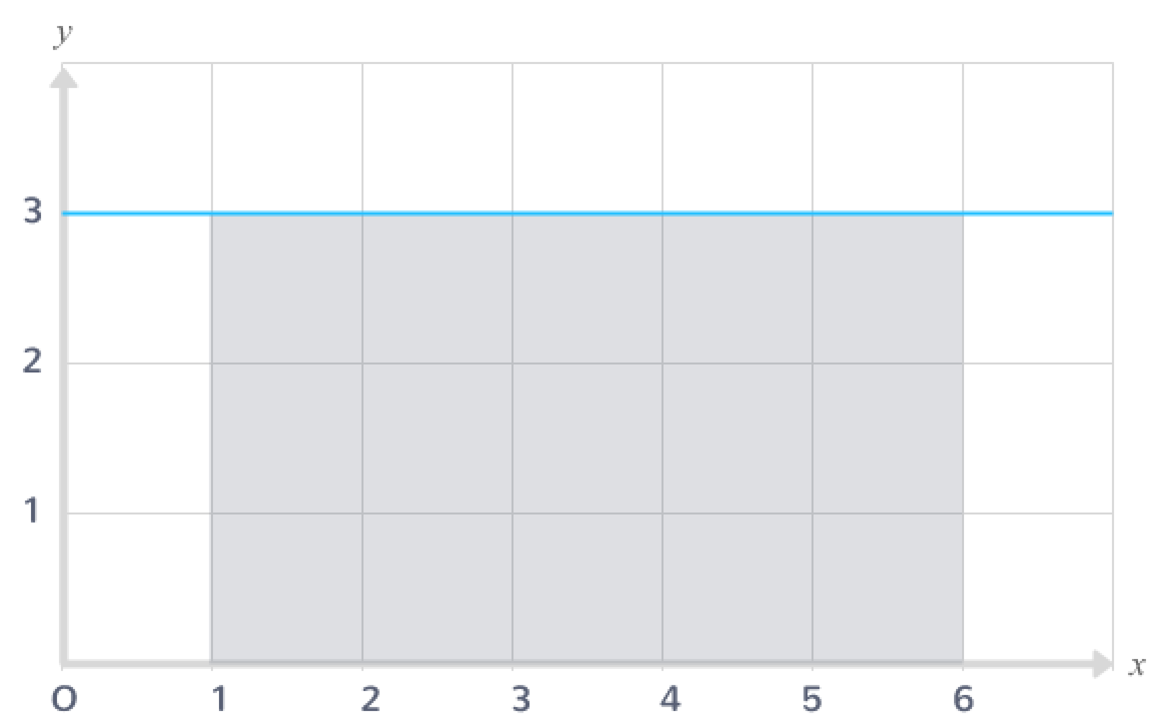
On appelle **intégrale de f entre a et b** l'aire, en unités d'aire, sous la courbe de f sur $[a ; b]$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3$.

La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

L'intégrale de f entre 1 et 6 correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré :



L'intégrale de f entre 1 et 6 est donc égale à :

$3 \times (6-1)$

soit 15 unités d'aire.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On note $\int_a^b f(x) \mathrm{d} x$ l'intégrale de f entre a et b.

REMARQUE

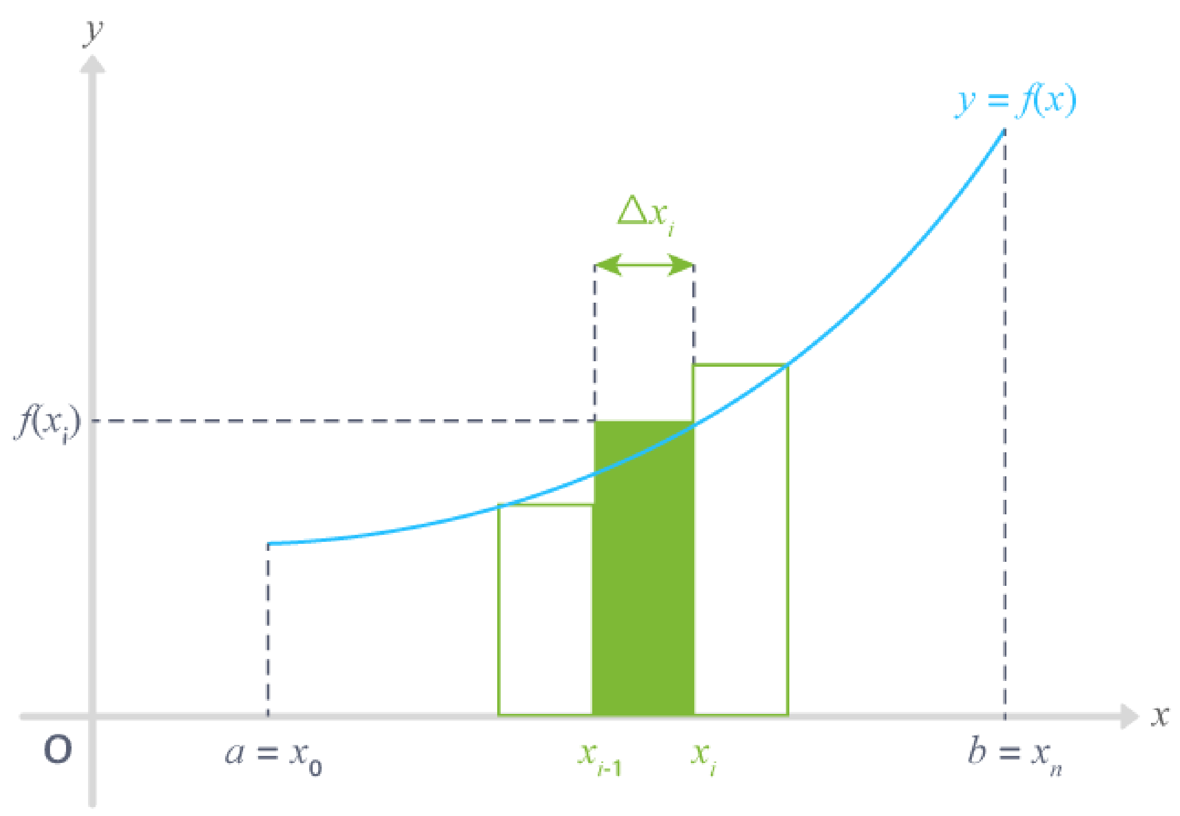
- Le symbole $\int$ ressemble à un S et se dit « intégrale » ou « somme ».
- La variable x est dite « muette ». On peut donc la remplacer par n'importe quel autre nom.
- La notation « $\mathrm{d} x$ » indique quelle variable varie entre a et b.

REMARQUE

Dans de nombreux cas, il est impossible de déterminer l'aire sous la courbe d'une fonction continue positive de façon exacte. On détermine donc uniquement une valeur approchée. Différentes méthodes sont utilisables.

Un même simple consiste à découper l'intervalle $[a;b]$ utilisé pour $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ en plusieurs sous-intervalles, et à approcher l'air sous la courbe de f sur chacun des sous-intervalles par l'aire d'un rectangle.

On a alors :
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ où Δx_i est la largeur de chacun des rectangles.



Si l'on diminue la largeur des rectangles, on fait tendre leur nombre vers $+\infty$, la somme des aires des rectangles tend vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

II Le lien avec les primitives

La notion d'intégrale possède un lien avec les primitives des fonctions qui permettent de calculer de façon exacte de nombreuses intégrales.

THÉORÈME Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction F_a définie sur $[a;b]$ par :

$$F_a(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

DÉMONSTRATION

On va démontrer le résultat dans le cas où f est croissante.

On admettra le résultat dans le cas général.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Soient x_0 et h deux réels tels que $x_0 \in [a;b]$ et $x_0+h \in [a;b]$.

- Si $h>0$:

$$\dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}=\dfrac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

Comme $h>0$, $\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe de f entre x_0 et x_0+h.

Comme f est croissante, l'aire précédente est comprise entre l'aire du rectangle de dimensions $f(x_0)$ et h et l'aire du rectangle de dimensions $f(x_0+h)$ et h.

On a donc :

$$f(x_0)\times h \leq \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0+h)\times h$$

En divisant par h, on en déduit :

$$f(x_0)\leq \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}\leq f(x_0+h)$$

- Si $h<0$, on a toujours :

$$\dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}=\dfrac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

Comme $h<0$, $\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'opposé de l'aire sous la courbe de f entre x_0+h et x_0.

Comme f est croissante, l'aire précédente est comprise entre l'aire du rectangle de dimensions $f(x_0+h)$ et $-h$ et l'aire du rectangle de dimensions $f(x_0)$ et $-h$.

On a donc :

$$f(x_0+h)\times(-h)\leq \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0)\times(-h)$$

En divisant par $-h$, on en déduit :

$$f(x_0+h)\leq \dfrac{F_a(x_0)-F_a(x_0+h)}{-h}\leq f(x_0)$$

soit $f(x_0+h) \leq \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

- Fin du raisonnement :

Comme f est continue, on a :

$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Ainsi que $h<0$ ou $h>0$, on en déduit :

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$

La fonction F_a est donc bien dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

Ceci étant valable quel que soit $x_0 \in [a;b]$, F est bien une primitive de f sur $[a;b]$.

De plus $F_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

F_a est donc bien la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = x^2$.

La fonction f est bien continue et positive sur $[-10;10]$.

La fonction F définie sur $[-10;10]$ par $F(x) = \int_{-10}^x f(t)\mathrm{d}t$ est donc la primitive de f sur $[-10;10]$ qui s'annule en -10.

Or la primitive de f sur l'intervalle $[-10;10]$ qui s'annule en -10 est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1\ 000}{3}$.

On a donc, pour tout réel $x \in [-10;10]$:

$\int_{-10}^x t^2\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1\ 000}{3}$

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ admettant une primitive F sur $[a;b]$.

On a :
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ admettant une primitive F sur $[a;b]$.

Soit F_a la fonction définie sur $[a;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

On sait qu F_a est une primitive de f sur $[a;b]$.

Alors il existe un réel k tel que :

$F(x) = F_a(x) + k$ pour tout réel $x \in [a;b]$

Or $F_a(a) = 0$, donc $F(a) = k$.

On en déduit :
$F(x) = F_a(x) + F(a)$ pour tout réel $x \in [a;b]$

En particulier, $F_a(b) = F(b) - F(a)$, soit $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = x^2$.

La fonction f est bien continue et positive sur $[-10;10]$.

La fonction F définie sur $[-10;10]$ par $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ est une primitive de f sur $[-10;10]$.

On en déduit :
$\int_{-10}^{10} t^2\mathrm{d}t = F(10) - F(-10)$

Soit $\int_{-10}^{10} t^2\mathrm{d}t = \dfrac{1\ 000}{3} - \left(\dfrac{-1\ 000}{3}\right)$, c'est-à-dire $\int_{-10}^{10} t^2\mathrm{d}t = \dfrac{2\ 000}{3}$.

PROPRIÉTÉ

On note $\left[F(x)\right]_a^b$ pour $F(b)-F(a)$.

EXEMPLE

L'exemple précédent peut donc se rédiger ainsi :

Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x)=x^2$.

La fonction f est bien continue et positive sur $[-10;10]$.

La fonction F définie sur $[-10;10]$ par $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ est une primitive de f sur $[-10;10]$.

On en déduit :

$\int_{-10}^{10} t^2 \mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_{-10}^{10}$

soit $\int_{-10}^{10} t^2 \mathrm{d}t = \dfrac{1\ 000}{3} - \left(\dfrac{-1\ 000}{3}\right)$,

c'est-à-dire $\int_{-10}^{10} t^2 \mathrm{d}t = \dfrac{2\ 000}{3}$.

THÉORÈME **Existence de primitives**

Tout fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\left(x^2\right)$.

Comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

On appelle **intégrale de f entre a et b**, notée à nouveau $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, le réel $F(b)-F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$.

Comme la fonction $\sin$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a :

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = \left[\sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(\pi)-\sin(-\pi)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = 0$

REMARQUE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f sur I.

III Les propriétés algébriques

Le calcul intégral possède de nombreuses propriétés algébriques qui permettent de découper en tâches simples le calcul de l'intégrale d'une fonction dont l'expression peut être complexe.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Alors :

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)$ et $g(x)=\cos(x)$.

On a donc :
$\int_0^\pi (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi g(x)\mathrm{d}x$

Soit $\int_0^\pi (\sin(x)+\cos(x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I tels que $a<b$.

Si $f(x)\geq 0$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et sur $[0;\pi]$, $\sin(x)\geq 0$.

Donc $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Soit $\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I tels que $a<b$.

Si $f(x)\leq g(x)$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Pour tout réel $x\in[0;1]$, on a $x^2\leq x$.

Les fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto x$ étant continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I.

Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Soit $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

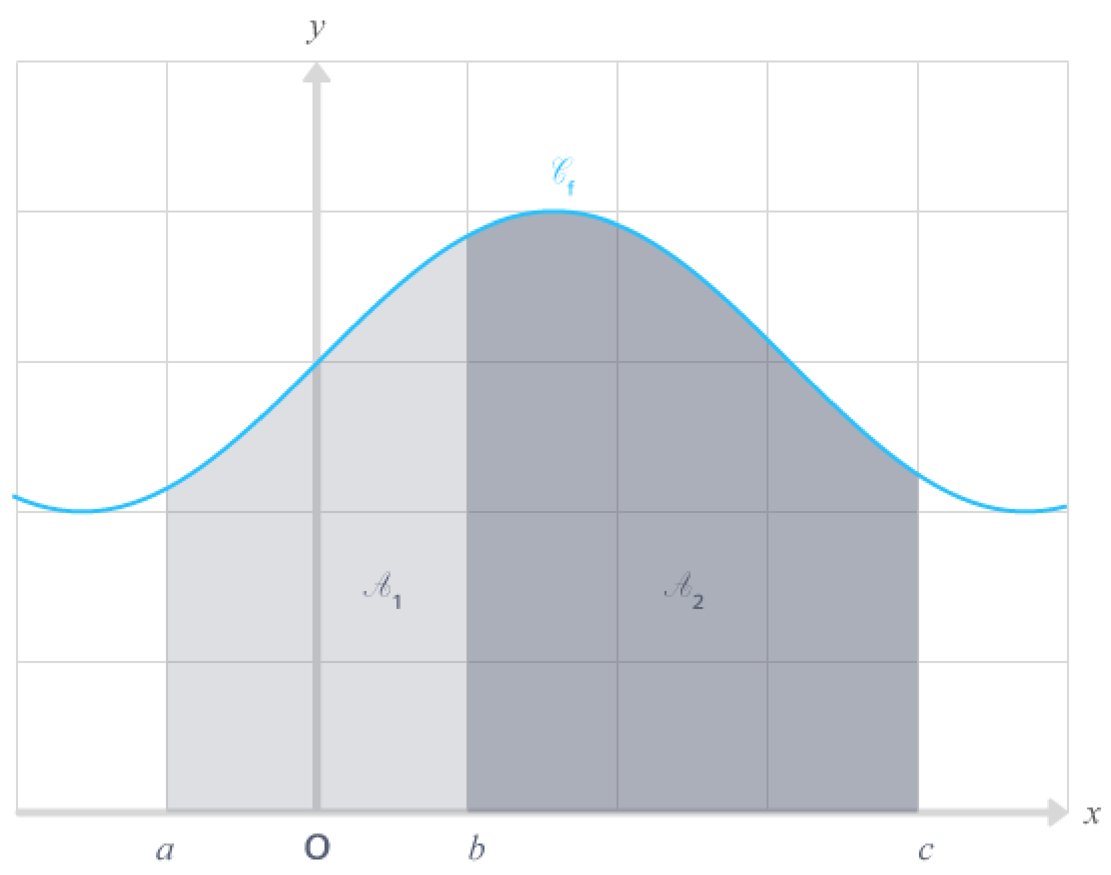
REMARQUE

La relation précédente est appelée « relation de Chasles ».

REMARQUE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I.

Si $f(x) \geq 0$ sur I et si $a \leq b \leq c$, alors la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.



PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur intervalle I symétrique par rapport à 0.

Soit un réel $a \in I$ un réel.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

EXEMPLE

Comme la fonction $\sin$ est impaire, on a :

$$\int_{-\pi}^0 \sin(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$$

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées soient continues.

Soient a et b deux réels de l'intervalle I.

Alors on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Cette formule est nommée « intégration par parties ».

DÉMONSTRATION

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées soient continues.

Soient a et b deux réels de l'intervalle I.

On sait que pour tout réel x de I, on a :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

On peut donc en déduire que pour tout réel x de I :

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$$

Or, par produit de fonctions continues sur I, les fonctions $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues sur I.

On en déduit :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Une primitive de $(uv)'$ étant uv, on a :

$$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b$$

$$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$$

Ainsi :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Soit $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

En posant $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$, on a donc :

$$I = \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$, on définit donc sur $\mathbb{R}$ deux fonctions u et v dérivables dont les dérivées sont continues.

La formule d'intégration par parties donne alors :

$$I = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$I = \mathrm{e}^1 - 0\mathrm{e}^0 - [\mathrm{e}^x]_0^1$$

$$I = \mathrm{e} - \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^0$$

$$I = 1$$

REMARQUE

Cela permet dans certains cas de calculer une intégrale (ou une primitive) alors qu'il est difficile, à première vue, de donner une expression d'une primitive de la fonction à intégrer.

EXEMPLE

Soit x un réel strictement positif et $I=\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$.

On a donc :

$I=\int_1^x 1\times\ln(t)\mathrm{d}t$

En posant $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln(t)$, on en déduit :

$u(t)=t$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t}$ conviennent.

Les fonctions ainsi définies sur $\left]0;+\infty\right[$ sont toutes continues.

On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties qui donne :

$I=\left[t\ln(t)\right]_1^x-\int_1^x t\times\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$

$I=x\ln(x)-1\ln(1)-\int_1^x 1\mathrm{d}t$

$I=x\ln(x)-\left[t\right]_1^x$

$I=x\ln(x)-x+1$

Or, la fonction $x\mapsto\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de ln sur $\left]0;+\infty\right[$.

Ainsi, la fonction $x\mapsto x\ln(x)-x+1$ est une primitive de ln sur $\left]0;+\infty\right[$, et la fonction $x\mapsto x\ln(x)-x$ est également une primitive de ln sur $\left]0;+\infty\right[$.

IV Deux applications du calcul intégral

A La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Le calcul intégral permet de définir la notion de valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, très proche intuitivement de la notion de moyenne d'une série statistique.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ le nombre défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

La fonction $\sin$ étant une fonction continue sur $[0; \pi]$, sa valeur moyenne sur cet intervalle est :

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^\pi$$

$$\mu = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(\pi) + \cos(0)\right]$$

$$\mu = \frac{1}{\pi}\left(-(-1) + 1\right)$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}$$

REMARQUE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

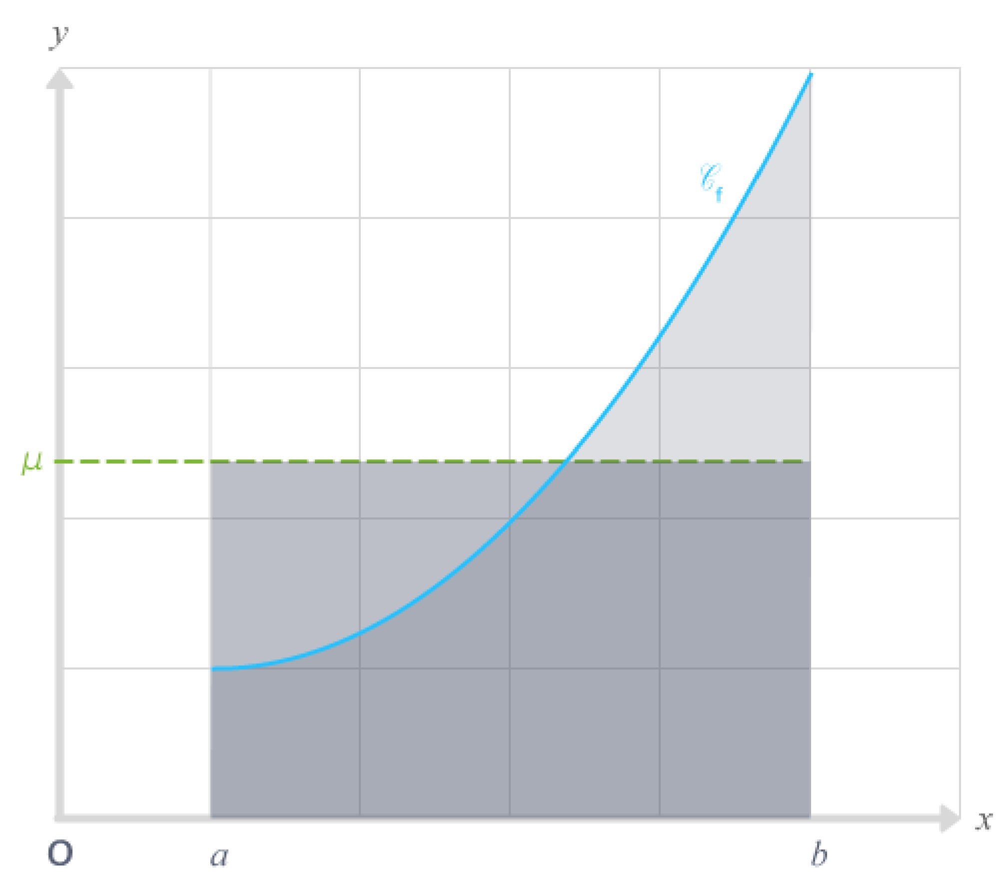
Soit μ la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

On a donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu \times (b-a)$$

Si f est positive sur $[a; b]$, le rectangle de dimensions μ et $b-a$ a pour aire :

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ unités d'aire



Ⓑ Le calcul d'aire

Une application importante du calcul intégral est le calcul d'aire de surface. Dès lors que l'on est capable de modéliser le contour d'une surface par la courbe d'une ou de plusieurs fonctions mathématiques, le calcul intégral permet de déterminer l'aire de la surface.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$.

L'aire, unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\mathcal{A}=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

La fonction $\sin$ est négative sur $[-\pi;0]$, donc l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de la fonction $\sin$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\pi$ et $x=0$ est :

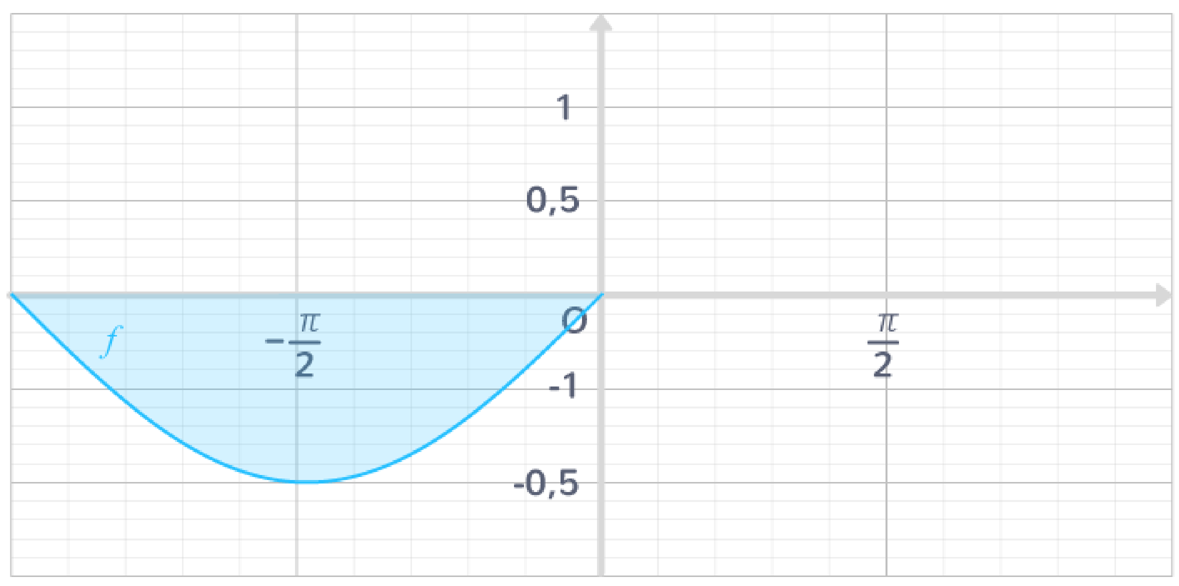
$$\mathcal{A}=-\int_{-\pi}^0 \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}=-\left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^0$$

$$\mathcal{A}=-\left[-\cos(0)+\cos(-\pi)\right]$$

$$\mathcal{A}=-\left[-1+(-1)\right]$$

$$\mathcal{A}=2$$



PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$.

L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Soit f la fonction exponentielle.

Comme cette fonction est convexe, sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.

En particulier, la courbe de f est au-dessus de sa tangente, T au point d'abscisse 0, c'est-à-dire le point $A(0; 1)$.

Une équation de cette tangente est :
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Comme $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x, on obtient comme équation :

$$y = x + 1$$

Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^x \geq x + 1$$

Ainsi, l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - (x + 1))\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A} = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - x - 1)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A} = \left[\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$$
$$\mathcal{A} = \left[\mathrm{e} - \frac{1}{2} - 1 - \left(\mathrm{e}^0 - \frac{0^2}{2} - 0\right)\right]$$
$$\mathcal{A} = \mathrm{e} - \frac{5}{2}$$