SITUATION
On étudie la continuité d'une fonction sur un intervalle *I* en particulier lorsque l'expression de cette fonction est différente suivant les valeurs de *x*.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie sur $[2;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f\left(2\right)=4 \\ \forall x>2,\ f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction *f* sur $[2;+\infty[$.

Etape 1

Utiliser le cours pour justifier la continuité sur l'intervalle (ou les intervalles)

D'après le cours, on sait que :

- Les fonctions de références sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction construite comme somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur *I*) ou composée de deux fonctions continues sur *I* est continue sur *I*.

On justifie ainsi la continuité de la fonction sur le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est définie.

APPLICATION

La fonction $x\mapsto x^2-4$ est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que fonction polynôme.

De même, $x\mapsto x-2$ est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que fonction polynôme. De plus, elle ne s'annule pas sur $]2;+\infty[$.

Par quotient, *f* est continue sur $]2;+\infty[$.

.

Etape 2

Justifier éventuellement la continuité aux points à problème

Pour les éventuels points pour lesquels la fonction est définie d'une autre manière, on étudie la continuité.

Pour cela, on sait que si $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)=f\left(a\right)$, alors la fonction *f* est continue en $x=a$.

APPLICATION

f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$. On a :

- $f\left(2\right)=4$
- Pour tout $x>2$, $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=x+2$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x \to 2}\left(x+2\right)=4$.

On en déduit que :

$$\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$$

Par conséquent, la fonction f est continue en $x=2$.

Etape 3

Conclure

On conclut en donnant le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction f est continue.

APPLICATION

D'après les questions précédentes, f est continue sur $\left]2;+\infty\right[$ et en $x=2$.

On en conclut que f est continue sur $\left[2;+\infty\right[$.