I Les opérations sur les variables aléatoires

Lorsque plusieurs variables aléatoires sont introduites (parfois plusieurs fois la même), on effectue souvent des opérations sur ces variables aléatoires et notamment des sommes.

PROPRIÉTÉ

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire et soit a un réel non nul.

On a alors :

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $E(aX)=aE(X)$

EXEMPLE

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 deux fois de suite.

On note X la variable aléatoire donnant le résultat obtenu avec le premier dé et Y celle donnant le résultat obtenu avec le deuxième dé.

On a donc :

$$E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{21}{6}=3{,}5$$

$$E(Y)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{21}{6}=3{,}5$$

Soit Z la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

On a : $Z=X+Y$.

Donc $E(Z)=E(X)+E(Y)$.

$$E(Z)=3{,}5+3{,}5=7$$

PROPRIÉTÉ

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire et soit a un réel non nul.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors :

- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
- $V(aX)=a^2V(X)$

EXEMPLE

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 deux fois de suite.

On note X la variable aléatoire donnant le résultat obtenu avec le premier dé et Y celle donnant le résultat obtenu avec le deuxième dé.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

En effet, quels que soient les entiers a et b compris entre 1 et 6, on a :

$$P\left(\{X=a\}\cap\{Y=b\}\right)=P\left(\{X=a\}\right)\times P\left(\{Y=b\}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Or :

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$

$$E(Y)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$

Donc :

$V(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-3{,}5^2=\frac{91}{6}-3{,}5^2=\frac{35}{12}$ et de même $V(Y)=\frac{35}{12}$

Soit Z la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

On a :

$Z=X+Y$

Donc :

$V(Z)=V(X)+V(Y)$ car X et Y sont indépendantes.

$$V(Z)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

II Le cas particulier des lois binomiales

Une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ correspondant à une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$. Les propriétés du paragraphe précédent permettent d'obtenir des résultats sur l'espérance et la variance X.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

Alors l'espérance de X est :

$$E(X) = np$$

DÉMONSTRATION

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

Alors $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Or pour tout entier i compris entre 1 et n, on a :

$$E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

On en déduit donc :

$$E(X) = p + p + ... + p = n \times p$$

EXEMPLE

On lance 100 fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il s'agit d'une succession de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès, « Obtenir un 6 », a une probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces 100 lancers.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$.

Ainsi l'espérance de X est $E(X) = 100 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{50}{3}$.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\ ;p)$.

Alors la variance de X est :

$$V(X) = np(1-p)$$

DÉMONSTRATION

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\ ;p)$.

Alors $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Or pour tout entier i compris entre 1 et n, on a :

$$E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

Donc :

$$V(X_i) = 1^2 \times P(X_i = 1) + 0^2 \times P(X_i = 0) - p^2 = 1 \times p + 0 \times (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1 -$$

Comme les variables X_i sont indépendantes, on en déduit :

$$V(X) = p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p) = n \times p(1-p)$$

EXEMPLE

On lance 100 fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il s'agit d'une succession de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès, « obtenir un 6 », a une probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces 100 lancers.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100\ ;\dfrac{1}{6}\right)$.

Ainsi la variance de X est $V(X) = 100 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{125}{9}$.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\ ;p)$.

Alors l'écart-type de X est :

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

EXEMPLE

On lance 100 fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il s'agit d'une succession de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès, « obtenir un 6 », a une probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces 100 lancers.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100\ ;\dfrac{1}{6}\right)$.

Ainsi l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{100\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}} = \sqrt{\dfrac{125}{9}} = \dfrac{\sqrt{125}}{3}$.

III Les échantillons d'une loi de probabilité

Une loi de probabilité étant donnée, on peut étudier une variable aléatoire suivant cette loi et dont on répète l'expérience plusieurs fois. On construit alors des échantillons de résultats obtenus avec cette variable aléatoire. On s'intéresse alors à la moyenne de ces résultats, à son espérance, sa variance et son écart-type.

DÉFINITION **Échantillon d'une loi de probabilité**

Soit n un entier naturel non nul et soit une loi de probabilité.

On appelle **échantillon de taille** n de cette loi de probabilité toute liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiques suivant toutes cette loi de probabilité.

EXEMPLE

Jeanne joue au dé tous les jours d'une semaine donnée.

Elle joue avec un dé cubique équilibré.

Chaque fois, elle lance le dé 50 fois et compte le nombre de 6 obtenus.

En notant X_i la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus le i^{ieme} jour, toutes les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}\left(50\ ;\dfrac{1}{6}\right)$.

La liste $(X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6; X_7)$ est donc un échantillon de taille 7 de cette loi de probabilité.

PROPRIÉTÉ

Soient un entier naturel non nul n et $(X_1; X_2; ...; X_n)$ un échantillon de taille n d'une loi de probabilité.

Soit S_n la variable aléatoire somme des n variables aléatoires précédentes.

C'est-à-dire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

On a alors :

- $E(S_n) = n \times E(X_1)$
- $V(S_n) = n \times V(X_1)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X_1)$

EXEMPLE

Jeanne joue au dé tous les jours d'une semaine donnée.

Elle joue avec un dé cubique équilibré.

Chaque fois, elle lance le dé 50 fois et compte le nombre de 6 obtenus.

En notant X_i la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus le i^{ieme} jour, toutes les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}\left(50 ; \dfrac{1}{6}\right)$.

La liste $(X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6; X_7)$ est donc un échantillon de taille 7 de cette loi de probabilité.

On sait que pour tout entier i compris entre 1 et 7, on a :

- $E(X_i) = 50 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{3}$
- $V(X_i) = 50 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{125}{18}$
- $\sigma(X_i) = \sqrt{50 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}} = \sqrt{\dfrac{125}{18}}$

Soit S la somme des variables aléatoires de l'échantillon.

On a donc :

- $E(S) = 7 \times \dfrac{25}{3} = \dfrac{175}{3}$
- $V(S) = 7 \times \dfrac{125}{18} = \dfrac{875}{18}$
- $\sigma(S) = \sqrt{7} \times \sqrt{\dfrac{125}{18}} = \sqrt{\dfrac{875}{18}}$

PROPRIÉTÉ

Soient un entier naturel non nul n et $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$ un échantillon de taille n d'une loi de probabilité.

Soit M_n la variable aléatoire moyenne des n variables aléatoires précédentes.

C'est-à-dire $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

On a alors :

- $E(M_n) = E(X_1)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X_1)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$

EXEMPLE

Jeanne joue au dé tous les jours d'une semaine donnée.

Elle joue avec un dé cubique équilibré.

Chaque fois, elle lance le dé 50 fois et compte le nombre de 6 obtenus.

En notant X_i la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus le i^{ieme} jour, toutes les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}\left(50 \ ; \dfrac{1}{6}\right)$.

La liste $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; X_6 ; X_7)$ est donc un échantillon de taille 7 de cette loi de probabilité.

On sait que pour tout entier i compris entre 1 et 7, on a :

- $E(X_i) = 50 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{3}$
- $V(X_i) = 50 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{125}{18}$
- $\sigma(X_i) = \sqrt{50 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}} = \sqrt{\dfrac{125}{18}}$

Soit M la moyenne des variables aléatoires de l'échantillon.

On a donc :

- $E(M) = \dfrac{25}{3}$
- $V(M) = \dfrac{125}{18} \div 7 = \dfrac{125}{126}$
- $\sigma(M) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{125}{18}}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{125}{126}}$