SITUATION
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale lorsqu'elle dénombre les succès dans une suite d'expériences de Bernoulli répétées de manière indépendante.

Afin de démontrer qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale, il convient de respecter scrupuleusement les étapes de la rédaction suivante.

ÉNONCÉ

$0{,}2\%$ des pièces fabriquées dans une usine sont défectueuses. On prélève un échantillon de 100 pièces (le nombre de pièces étant suffisamment grands pour considérer les tirages indépendants).

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Etape 1

Identifier un schéma de Bernoulli

On identifie une expérience à deux issues possibles :

- Le succès, obtenu avec une probabilité p que l'on détermine.
- L'échec, obtenu avec la probabilité $q = 1 - p$.

APPLICATION
L'expérience "prélever une pièce" a deux issues possibles :

- Succès (la machine est défectueuse) obtenu avec la probabilité $p = 0{,}002$.
- Echec (la machine n'est pas défectueuse) obtenu avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}998$.

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli.

Etape 2

Expliquer la répétition de l'expérience

On justifie que l'expérience est répétée n fois, de manière indépendante.

APPLICATION
On répète cette expérience 100 fois de manière indépendante (les tirages sont supposés indépendants d'après l'énoncé).

Etape 3

Enoncer le rôle de X

On précise que X est la variable aléatoire qui dénombre les succès lors de la répétition de l'expérience de Bernoulli.

APPLICATION
X est la variable aléatoire qui dénombre les succès.

Etape 4

Conclure sur la loi de X et ses paramètres

On conclut que X suit alors une loi binomiale de paramètres n et p.

APPLICATION

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}002$.

ASTUCE

Lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on sait que :

- $X\left(\Omega\right)=\left\{0;1;...;n\right\}$
- pour tout k de $X\left(\Omega\right)$, $p\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$
- $E\left(X\right)=np$
- $V\left(X\right)=np\left(1-p\right)$