SITUATION

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

ÉNONCÉ

On considère un plan trois points *A*, *B* et *C* non alignés tels que :

$$A\left(1;0;4\right), \ B\left(-3;3;8\right) \text{ et } C\left(3;-1;-4\right)$$

Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}10\\12\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\left(ABC\right)$.

Etape 1

Rappeler la définition

On rappelle qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

APPLICATION

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan $\left(ABC\right)$ si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Etape 2

Déterminer deux vecteurs non colinéaires du plan

On détermine deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires du plan *P*.

APPLICATION

Les points *A*, *B* et *C* n'étant pas alignés, on peut utiliser les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On détermine leurs coordonnées :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\3-0\\8-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\4\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\-1-0\\-4-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-8\end{pmatrix}$

Etape 3

Calculer les produits scalaires

On calcule les produits scalaires $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}$.

APPLICATION

On calcule les produits scalaires $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}$:

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 10 \times (-4) + 12 \times 3 + 1 \times 4 = -40 + 36 + 4 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 10 \times 2 + 12 \times (-1) + 1 \times (-8) = 20 - 12 - 8 = 0$

Etape 4

Conclure

Si on obtient $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 0$, alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan.

APPLICATION

On obtient :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en conclut que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan.