SITUATION

Il est parfois demandé par l'énoncé de déterminer une primitive particulière d'une fonction *f*, c'est-à-dire une primitive de *f* qui en plus vérifie une certaine condition. Dans la plupart des cas, on demande de déterminer la primitive d'une fonction *f* qui s'annule en un réel *a*.

ÉNONCÉ

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

Déterminer la primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Etape 1

Déterminer la formule générale des primitives

On détermine tout d'abord la forme générale des primitives de la fonction *f*. Pour cela, il suffit de déterminer une primitive *F* de *f*. Les primitives de *f* sont alors toutes de la forme $F + k$ où *k* est un réel.

APPLICATION

D'après les formules des primitives usuelles, la fonction *F* suivante est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$:

$$F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x$$

Les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont donc toutes de la forme $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x + k$ où *k* est un réel.

Etape 2

Utiliser l'information donnée pour déterminer *k*

On utilise la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur du réel *k*.

Si la condition est que la primitive doit s'annuler en *a*, on résout donc l'équation $F(a) + k = 0$ d'inconnue *k*.

APPLICATION

La primitive recherchée s'annule en 1. On résout donc l'équation suivante d'inconnue *k* :

$$\dfrac{1^3}{3} + \dfrac{3 \times 1^2}{2} + 1 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \dfrac{-6 - 2 - 9}{6} = -\dfrac{17}{6}$$

Etape 3

Conclure

On peut donc conclure que la fonction $F + k$ où *k* est le réel déterminé à l'étape précédente est la primitive recherchée.

APPLICATION

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction suivante :

$$x \longmapsto \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x - \frac{17}{6}$$