MÉTHODE 1

En utilisant la formule du cours

SITUATION

On peut déterminer une équation cartésienne d'un plan *P* à partir d'un point du plan et d'un vecteur normal au plan.

ÉNONCÉ

Déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $A\left(2;1;1\right)$ et admettant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$.

ETAPE 1

Déterminer un point et un vecteur normal du plan

On détermine les coordonnées d'un point *A* du plan et d'un vecteur normal au plan noté $\overrightarrow{n}$:

- Soit l'énoncé donne directement le point *A* et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
- Soit l'énoncé donne le point *A* et précise que le plan doit être perpendiculaire à une droite $\left(d\right)$ dont la représentation paramétrique est donnée. Dans ce cas, on choisit un vecteur directeur de $\left(d\right)$ comme vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

APPLICATION

L'énoncé fournit directement :

- Un point *A* de *P* : $A\left(2;1;1\right)$
- Un vecteur normal à *P* : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

ETAPE 2

Déterminer *a*, *b* et *c*

Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à *P*, *P* admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où *d* est un réel à déterminer.

APPLICATION

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à *P*, donc *P* admet une équation cartésienne de la forme $x+3y-z+d=0$.

ETAPE 3

Déterminer *d* en utilisant les coordonnées du point

On utilise les coordonnées du point *A* pour déterminer *d*. Comme *A* est un point du plan, *d* est obtenu en résolvant l'équation suivante d'inconnue *d* :

$$ax_A+by_A+cz_A+d=0$$

APPLICATION

Le point $A\left(2;1;1\right)$ est un élément du plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation de *P*. On a donc :

$$2+3\times1-1+d=0$$

Soit finalement :

$$d=-4$$

ETAPE 4

Conclure

On peut donc conclure que $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne du plan *P*.

APPLICATION

Une équation cartésienne de *P* est donc $x+3y-z-4=0$.

MÉTHODE 2

En redémontrant la formule

SITUATION

On peut déterminer une équation cartésienne d'un plan *P* à partir d'un point du plan et d'un vecteur normal au plan en réutilisant la démarche de la démonstration vue en cours.

ÉNONCÉ

Déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $A\left(2;1;1\right)$ et admettant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ETAPE 1

Déterminer un point et un vecteur normal du plan

On détermine les coordonnées d'un point *A* du plan et d'un vecteur normal au plan noté $\overrightarrow{n}$:

- Soit l'énoncé donne directement le point *A* et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
- Soit l'énoncé donne le point *A* et précise que le plan doit être perpendiculaire à une droite (d) dont la représentation paramétrique est donnée. Dans ce cas, on choisit un vecteur directeur de (d) comme vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

APPLICATION

L'énoncé nous fournit directement :

- Un point *A* de *P* : $A\left(2;1;1\right)$
- Un vecteur normal à *P* : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

ETAPE 2

Écrire la condition d'appartenance d'un point *M* au plan *P*

Un point $M\left(x;y;z\right)$ est un élément de *P* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

APPLICATION

Un point $M\left(x;y;z\right)$ est un élément de *P* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

ETAPE 3

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AM}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ sont notées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Elles sont données par l'énoncé.

En notant respectivement $A\left(x_A \quad y_A \quad z_A\right)$ et $M\left(x \quad y \quad z\right)$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

APPLICATION

D'après l'énoncé, on a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En notant $M\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

ETAPE 4

Expliciter et simplifier la condition d'appartenance du point *M* au plan *P*

On peut donc maintenant expliciter et simplifier la condition d'appartenance trouvée en étape 2. Cette dernière devient :

$$a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$$

Soit finalement :

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

APPLICATION

On a donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) + 3(y - 1) - (z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - z - 2 - 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - z - 4 = 0$$

ETAPE 5

Conclure

On peut donc finalement conclure qu'une équation cartésienne du plan *P* est l'équation suivante :

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

APPLICATION

Une équation cartésienne du plan *P* est donc l'équation suivante :

$$x + 3y - z - 4 = 0$$