SITUATION

On cherche parfois à déterminer la limite en a de la fonction h définie comme la composée de deux fonctions f et g ($h = f \circ g$), où a représente un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

ÉNONCÉ

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h\left(x\right) = e^{\dfrac{1}{x}}$$

Etape 1

Déterminer la limite de la première fonction

On a $h = f \circ g$.

On détermine dans un premier temps la limite de g en a.

APPLICATION

On sait que :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$$

Etape 2

Effectuer le changement de variable

On pose le changement de variable $X = g\left(x\right)$ dans l'expression de la fonction h.

APPLICATION

En posant le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$e^{\frac{1}{x}} = e^X$$

Etape 3

Calculer la deuxième limite

On détermine la limite quand X tend vers b de la fonction f, où b est la limite de la fonction g lorsque x tend vers a.

APPLICATION

De plus, on sait que :

$$\lim\limits_{X \to 0} e^X = 1$$

Etape 4

Conclure

En notant l la limite trouvée précédemment, on peut conclure :

$$\lim_{x \to a} h\left(x\right) = \lim_{x \to a} f\left(g\left(x\right)\right) = l$$

APPLICATION

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$