SITUATION
Dans la plupart des cas, on calcule la valeur d'une intégrale grâce à une primitive de la fonction *f* sous l'intégrale. Il est donc indispensable de connaître parfaitement les formules des primitives usuelles.

ÉNONCÉ

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *f* définie par :

$$f\left(x\right)=\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Etape 1
Préciser le domaine où *f* admet des primitives

Avant de déterminer une primitive de *f*, il est impératif de mentionner sur quel(s) intervalle(s) la fonction *f* admet des primitives. Pour rappel, toute fonction continue sur un intervalle *I* admet des primitives sur *I*.

APPLICATION

L'énoncé précise ici qu'on cherche une primitive sur $\mathbb{R}$.

Etape 2
Identifier la formule à utiliser

Si la fonction *f* est une somme de fonctions de référence, on peut directement calculer une primitive sans passer par les étapes qui suivent.

Sinon, selon l'expression de *f*, on détermine si l'on va utiliser la formule de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une racine, d'une puissance ou d'une composée de fonctions.

Les expressions possibles pour la fonction *f* sont de la forme :

- $u^{'}u^n$
- $\dfrac{u^{'}}{u}$
- $\dfrac{-u^{'}}{u^2}$
- $u^{'}e^u$
- $\dfrac{u^{'}}{\sqrt{u}}$

Cette étape ne s'écrit pas sur la copie mais fait partie de cheminement de la réflexion à avoir.

APPLICATION

f est ici de la forme $\dfrac{u^{'}}{\sqrt{u}}$ à un coefficient près à déterminer.

Etape 3
Exprimer *f* à l'aide de fonctions intermédiaires et de leurs dérivées

On introduit les fonctions intermédiaires *u*, *v* et autres dont *f* est la somme, le quotient, la composée, le produit, ainsi que leurs dérivées.

On peut ainsi exprimer f à l'aide de ces fonctions, en ajoutant éventuellement un coefficient compensateur pour que la formule soit vérifiée.

APPLICATION

On remarque que :

$$f = a \times \dfrac{u^{'}}{\sqrt{u}}$$

Avec :

- $u : x \longmapsto x^2 + x + 1$
- $u^{'} : x \longmapsto 2x + 1$

Le coefficient a vérifie donc :

$$a\left(2x+1\right) = 6x + 3$$

Soit :

$$a = 3$$

Finalement :

$$f = 3 \times \dfrac{u^{'}}{\sqrt{u}}$$

Etape 4

Exprimer F à l'aide de ces fonctions intermédiaires

On en déduit alors l'expression d'une primitive F de f d'après la formule identifiée dans l'étape 2.

APPLICATION

Une primitive de $\dfrac{u^{'}}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

La fonction suivante est donc une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$$F = 3 \times 2\sqrt{u} = 6\sqrt{u}$$

Etape 5

Calculer $F\left(x\right)$

On remplace les fonctions intermédiaires par leurs valeurs dans l'expression de F et on simplifie le résultat.

APPLICATION

On peut donc conclure que la fonction F suivante est une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$$F : x \longmapsto 6\sqrt{x^2 + x + 1}$$