SITUATION

Pour déterminer l'écriture explicite d'une suite, on demande souvent de montrer qu'une suite est arithmétique, puis de déterminer son premier terme et sa raison.

ÉNONCÉ

On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_0=-1$, $v_1=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel *n*, par :

$$v_{n+2}=v_{n+1}-\frac{1}{4}v_n$$

On considère alors $\left(u_n\right)$ la suite définie pour tout entier naturel *n* :

$$u_n=\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

On admet que, pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1}-\dfrac{1}{2}v_n\neq 0$. On veut montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est arithmétique et déterminer sa raison.

Etape 1

Calculer $u_{n+1}-u_n$

Pour tout entier naturel *n*, on calcule et réduit la différence $u_{n+1}-u_n$.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel. Comme, pour tout entier naturel, $v_{n+1}-\dfrac{1}{2}v_n\neq 0$, on obtient :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_{n+1}}{v_{n+2}-\frac{1}{2}v_{n+1}}-\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_{n+1}}{v_{n+1}-\frac{1}{4}v_n-\frac{1}{2}v_{n+1}}-\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_{n+1}}{\frac{1}{2}v_{n+1}-\frac{1}{4}v_n}-\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_{n+1}}{\frac{1}{2}\left(v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n\right)}-\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2v_{n+1}}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}-\frac{v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2v_{n+1}-v_n}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2\left(v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n\right)}{v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n}=2$$

Etape 2

Identifier l'éventuelle raison de la suite

On regarde, si, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}-u_n$ est égal à une constante *r* (un réel fixe, c'est-à-dire indépendant de la variable *n*).

APPLICATION

En posant $r=2$, on a bien, pour tout entier naturel *n* :

$$u_{n+1}-u_n=r$$

Etape 3

Conclure sur la nature de la suite

Si, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}-u_n$ est égal à une constante *r*, on peut conclure que la suite est arithmétique de raison *r*. On précise alors son premier terme.

APPLICATION

On peut donc conclure que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique de raison 2. Son premier terme vaut :

$$u_0=\frac{v_0}{v_1-\frac{1}{2}v_0}=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-1$$