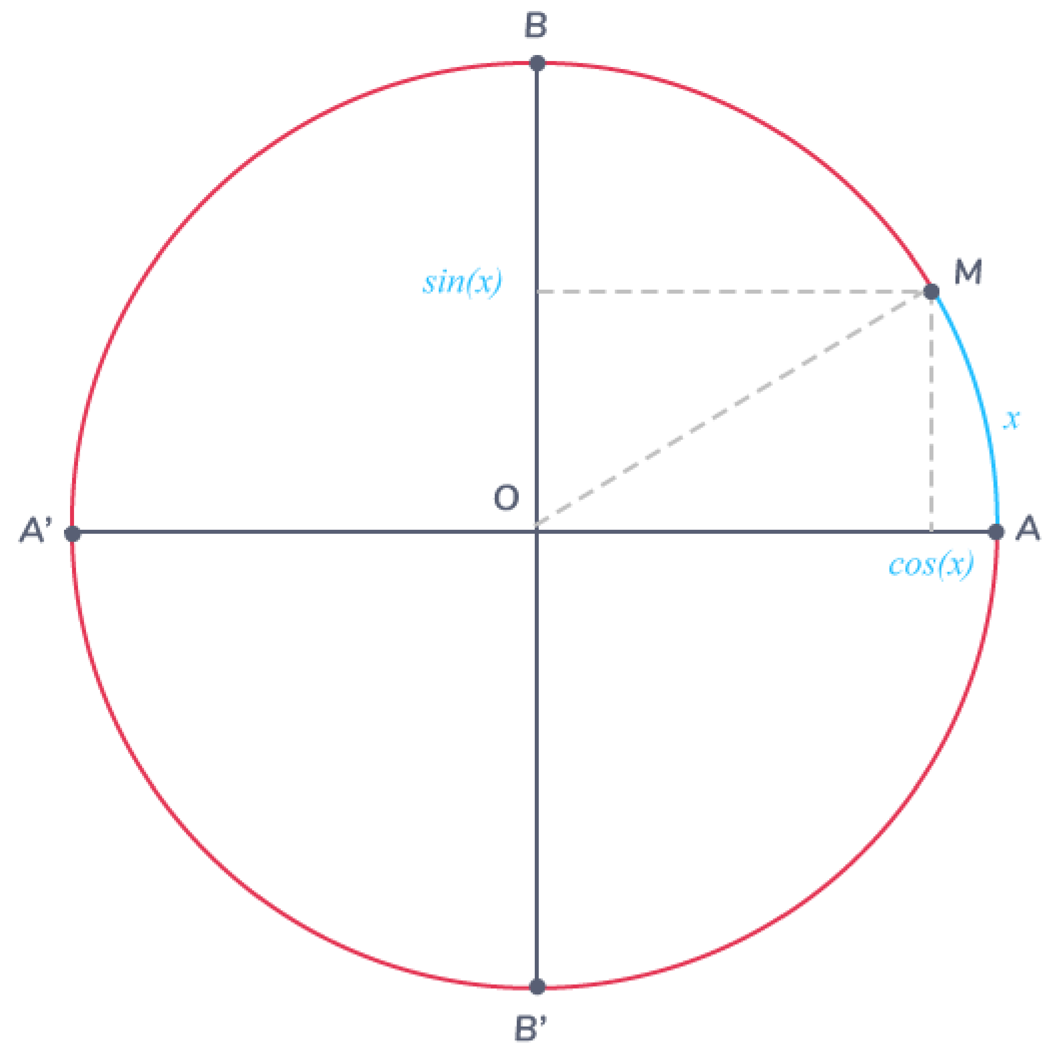
I Les fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus sont essentielles pour décrire de nombreux phénomènes physiques. Ces courbes sont très particulières et souvent connues du grand public.

DÉFINITION Sinus et cosinus d'un réel

Soient un réel x et M l'image de x sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus de** x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
- Le **sinus de** x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.



EXEMPLE

Le point du cercle trigonométrique image du réel $\dfrac{\pi}{2}$ est le point B.

Ses coordonnées sont $(0;1)$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

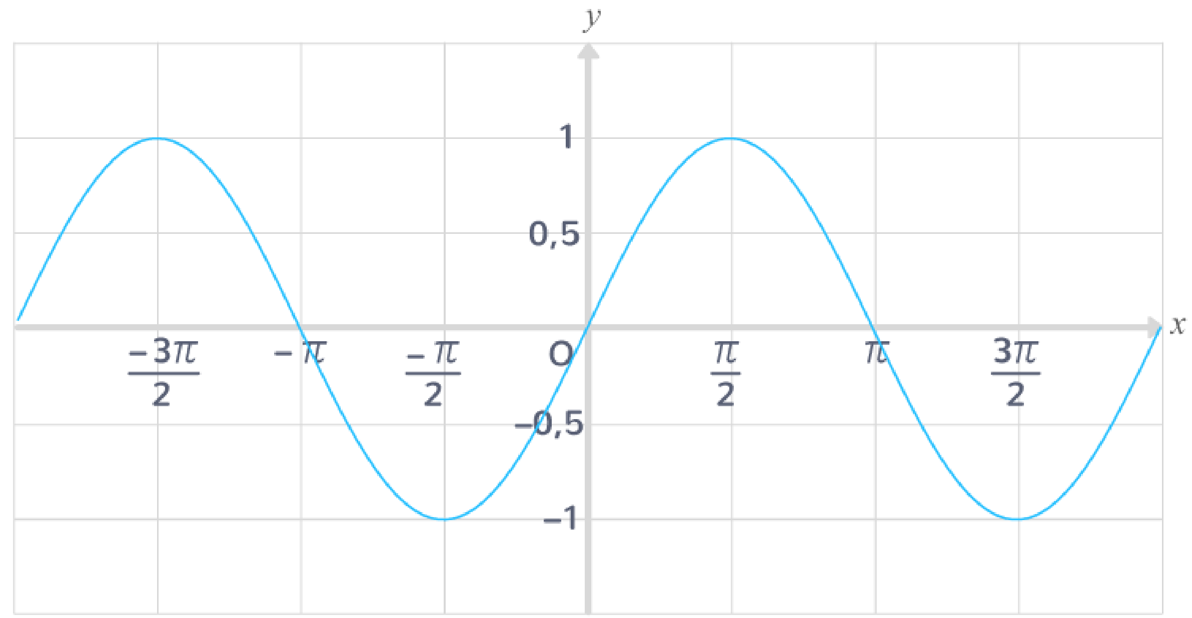
DÉFINITION Fonction sinus

On appelle **fonction sinus**, notée $\sin$, la fonction qui à chaque réel x associe le réel $\sin(x)$.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Ainsi la fonction sinus est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.



PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x :

- $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

La fonction sinus est périodique de période 2π.

EXEMPLE

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

Donc $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

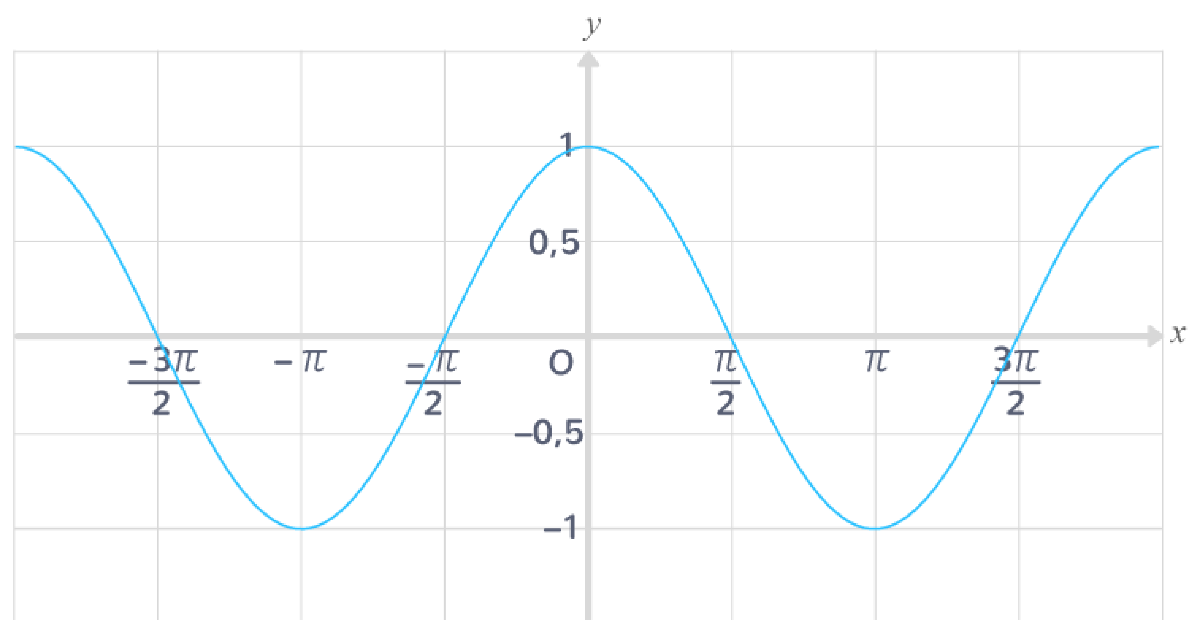
DÉFINITION **Fonction cosinus**

On appelle **fonction cosinus**, notée $\cos$, la fonction qui à chaque réel x associe le réel $\cos(x)$.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

Ainsi la fonction cosinus est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x :

- $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

La fonction cosinus est périodique de période 2π.

EXEMPLE

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

Donc $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

II La dérivabilité et les variations des fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Leurs variations permettent de retrouver les propriétés de leurs courbes représentatives.

PROPRIÉTÉ

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

EXEMPLE

$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

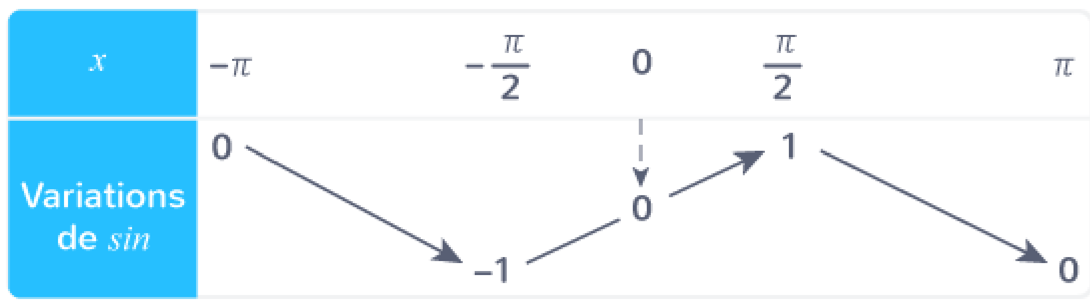
COROLLAIRE **Variations de la fonction sinus**

Le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$	1	+	0	−	−1
Variations de sin	0	↗	1	↘	0

REMARQUE

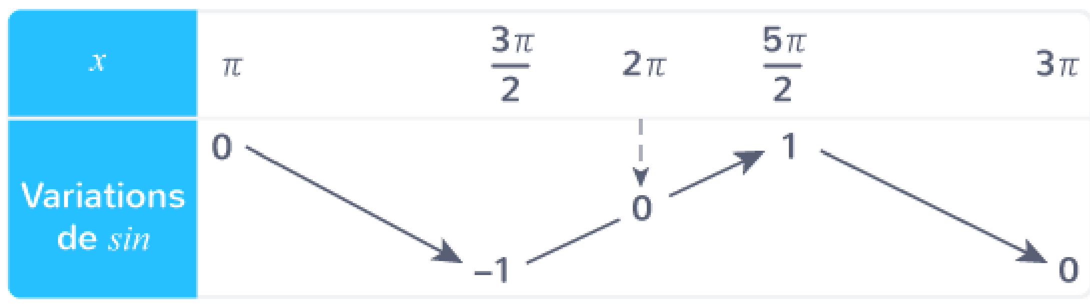
Comme la fonction sinus est impaire, on obtient le tableau de variations suivant sur l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$:



Comme la fonction sinus est 2π-périodique, le tableau de variations de cette fonction sur un intervalle du type $\left[-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi\right]$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est le même que le précédent.

EXEMPLE

Le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[\pi;3\pi\right]$ est le suivant :



PROPRIÉTÉ

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$\cos'(x)=-\sin(x)$$

EXEMPLE

$$\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

COROLLAIRE **Variations de la fonction cosinus**

Le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ est le suivant :

REMARQUE

Comme la fonction cosinus est paire, on obtient le tableau de variations suivant sur l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$:

Comme la fonction cosinus est 2π-périodique, le tableau de variations de cette fonction sur un intervalle du type $\left[-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi\right]$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est le même que le précédent.

EXEMPLE

Le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\pi;3\pi\right]$ est le suivant :

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I de dérivée $u'\times\cos(u)$.
- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I de dérivée $-u'\times\sin(u)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos\left(x^2\right)$.

$f=\cos(u)$ avec $u(x)=x^2$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u' : x\mapsto 2x$.

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'=-u'\times\sin(u)$.

Pour tout réel x, on a donc :

$f'(x)=-2x\sin\left(x^2\right)$

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$

III Les équations et inéquations trigonométriques

Lors de la résolution d'équations et d'inéquations comportant les fonctions sinus et cosinus, il est important de connaître les définitions de ces fonctions ainsi que leurs propriétés liées au cercle trigonométrique.

PROPRIÉTÉ

Soient deux réels x et y.

Alors on a :

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sur $[-\pi; \pi]$.

Soit un réel x.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sur $[-\pi; \pi]$ est :

$$\left\{\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel a.

- Si $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, l'équation $\cos(x) = a$ n'admet aucune solution.
- Si $a \in [-1;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet pour ensemble de solutions :

$$\{y+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-y+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

où y est un réel tel que $\cos(y) = a$.

EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$.

$$\frac{1}{2} \in [-1;1]$$

L'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{R}$.

Soit un réel x.

Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ est :

$$\left\{\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$$

REMARQUE

Soit un réel a.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, l'équation $\cos(x) = a$ n'admet aucune solution.
- Si $a \in [-1; 1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet pour ensemble de solutions :

$$\{y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

où y est un réel tel que $\cos(y) = a$.

Si le réel a ne correspond pas à une des valeurs à connaître du cosinus, on utilise une valeur approchée d'un réel y tel que $\cos(y) = a$.

EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation $\cos(x) = 0{,}6$ dans $[\pi; \pi]$.

0,6 n'est pas une des valeurs connues du cosinus.
La calculatrice donne :

Avec $y \approx 0{,}927$, on a $\cos(y) \approx 0{,}6$.

On va donc chercher des valeurs approchées des solutions de l'équation $\cos(x) = 0{,}6$.

Soit un réel x.

$$\cos(x) = 0{,}6 \Leftrightarrow \cos(x) \approx \cos(0{,}927)$$

$$\cos(x) = 0{,}6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0{,}927 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x \approx -0{,}927 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans $[-\pi; \pi]$ de l'équation $\cos(x) = 0{,}6$ est :

$$\{-0{,}927; 0{,}927\}$$

les valeurs étant arrondies à 10^{-3}.

PROPRIÉTÉ

Soient deux réels x et y.

Alors on a :

$$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $[-\pi ; \pi]$.

Soit un réel x.

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $[-\pi ; \pi]$ est :

$$\left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel a.

- Si $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, l'équation $\sin(x) = a$ n'admet aucune solution.
- Si $a \in [-1;1]$, l'équation $\sin(x) = a$ admet pour ensemble de solutions :

$$\{y+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-y+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

où y est un réel tel que $\sin(y) = a$.

EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$.

$\dfrac{1}{2}\in[-1;1]$

L'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{R}$.

Soit un réel x.

Comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$$

REMARQUE

Si le réel a ne correspond pas à une des valeurs à connaître du sinus, on utilise une valeur approchée d'un réel y tel que $\sin(y) = a$.

PROPRIÉTÉ

Soit un réel a.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \leq a$.

- Si $a < -1$, $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \{-\pi;\pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$, $\mathcal{S} = [-\pi;-y] \cup [y;\pi]$ où $y \in]0;\pi[$ tel que $\cos(y) = a$.
- Si $a \geq 1$, $\mathcal{S} = [-\pi;\pi]$.

EXEMPLE

On cherche à résoudre, dans $[-\pi;\pi]$, l'inéquation $\cos(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in]-1;1[$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\dfrac{\pi}{6} \in]0;\pi[$.

Donc l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est :

$$\left[-\pi;\frac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$$