SITUATION
On peut calculer l'aire du domaine compris entre deux courbes en utilisant un calcul d'intégrales.

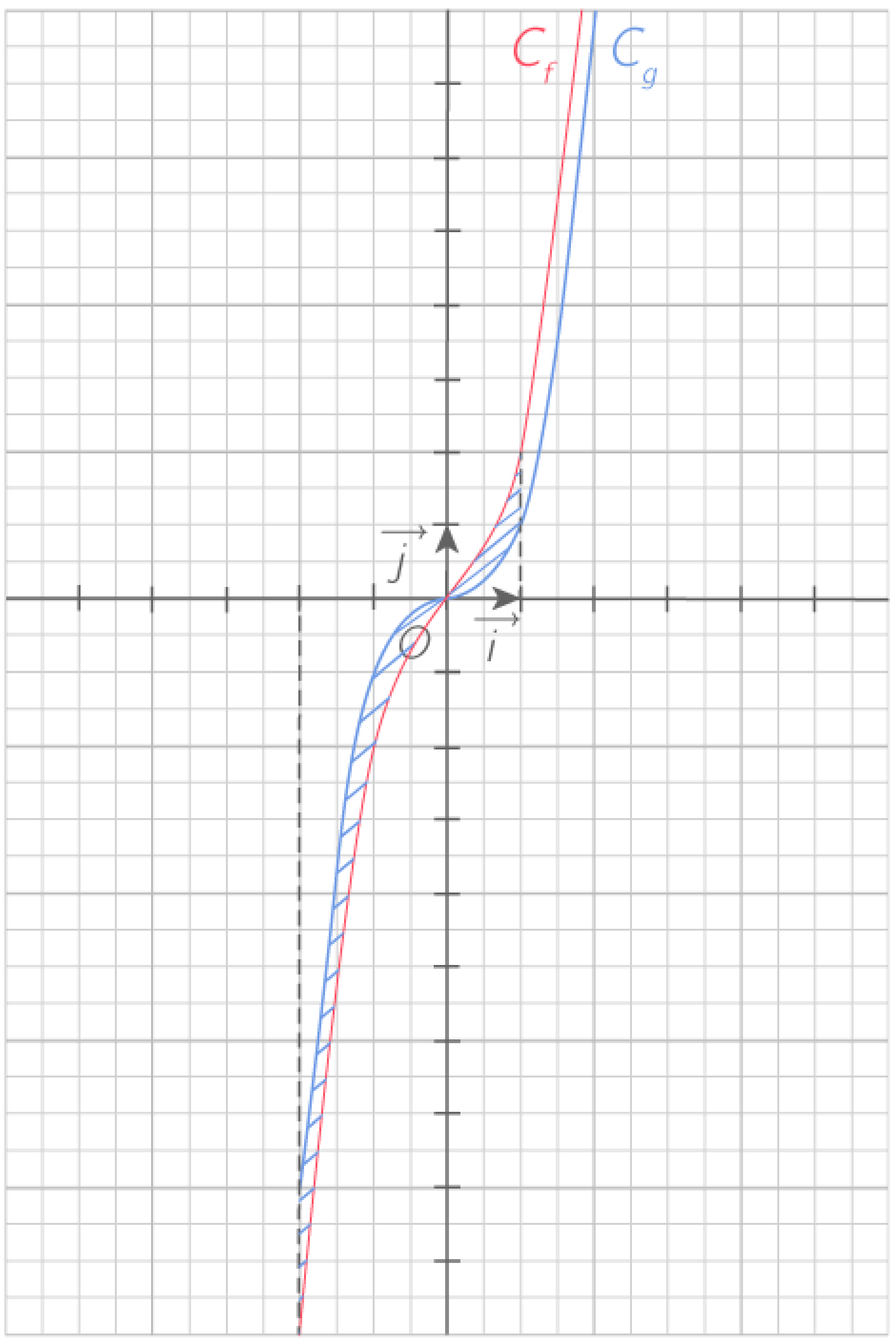
ÉNONCÉ

Soient f et g les fonctions définies sur $[-2;1]$ par :

$$f(x) = x^3 + x$$

$$g(x) = x^3$$

Dans un repère orthonormal où une unité d'aire représente 4 cm², on trace les courbes représentatives de f et g. Calculer l'aire du domaine hachuré en cm².



Etape 1

Exprimer l'aire à calculer

On détermine les fonctions f et g et les réels a et b tels que l'aire à calculer soit celle du domaine compris entre les courbe C_f et C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

APPLICATION

On cherche à calculer l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

Etape 2

Déterminer la position relative de C_f et C_g

On détermine la position relative de C_f et C_g sur $[a;b]$.

APPLICATION

On peut lire graphiquement que :

- C_f est en dessous de C_g sur $[-2;0]$.
- C_f est au-dessus de C_g sur $[0;1]$.

Etape 3

Exprimer l'aire en fonction d'une intégrale

Trois cas se présentent :

- Si C_f est au-dessus de C_g sur $[a;b]$, alors $A=\int_a^b (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x$.
- Si C_f est en dessous de C_g sur $[a;b]$, alors $A=-\int_a^b (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x=\int_a^b (g(x)-f(x))\ \mathrm{d}x$.
- Si la position des deux courbes change sur $[a;b]$, on utilise la relation de Chasles pour obtenir plusieurs intégrales vérifiant l'un des deux premiers cas.

APPLICATION

C_f est en dessous de C_g sur $[-2;0]$, et au-dessus sur $[0{,}1]$. On a donc :

$$A=-\int_{-2}^0 (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x+\int_0^1 (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x$$

Soit :

$$A=-\int_{-2}^0 \left(x^3+x-x^3\right)\ \mathrm{d}x+\int_0^1 \left(x^3+x-x^3\right)\ \mathrm{d}x$$

$$A=-\int_{-2}^0 x\ \mathrm{d}x+\int_0^1 x\ \mathrm{d}x$$

Etape 4

Calculer les intégrales

On calcule la ou les intégrale(s) nécessaire(s). On peut alors conclure quant à la valeur de *A*. Cette valeur est exprimée en unités d'aire (u.a.).

APPLICATION

Une primitive de $x\longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x\longmapsto \dfrac{x^2}{2}$.

On a alors :

$$A=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$A=-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)+\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)$$

Donc :

$$A=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

A vaut donc $\dfrac{5}{2}$ u.a..

Etape 5

Donner l'aire dans l'unité demandée

Si l'énoncé le demande, on peut donner l'aire en centimètres carrés. Pour cela, grâce à l'échelle du graphique, on donne l'aire en centimètres carrés du carreau correspondant à une unité en abscisse et une unité en ordonnée. Si cette aire vaut n cm^2, alors 1 u.a. vaut n cm^2.

Ainsi, si $A = k$ u.a., on a alors $A = k \times n$ cm^2.

APPLICATION

Comme 1 u.a. vaut 4cm^2, on a finalement :

$$A = \frac{5}{2} \times 4 = 10 \text{ cm}^2$$