MÉTHODE 1

Si la fonction est de la forme $f = \ln(u)$

SITUATION

Si une fonction *u* est définie et dérivable sur un intervalle *I*, à valeurs dans $]0;+\infty[$, alors la fonction *f* définie par $f = \ln(u)$ est dérivable sur *I* et sa dérivée est de la forme $f' = \dfrac{u'}{u}$.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie par :

$$\forall x \in]3;+\infty[,\ f(x) = \ln\left(\frac{2}{x-3}\right)$$

Calculer *f'*, la fonction dérivée de *f*.

ETAPE 1

Justifier la dérivabilité

On justifie la dérivabilité de la fonction *f* sur son intervalle *I*.

APPLICATION

La fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{x-3}$ est dérivable sur $]3;+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle.

De plus, $\dfrac{2}{x-3} > 0$ sur cet intervalle.

Par conséquent, *f* est dérivable sur $]3;+\infty[$.

ETAPE 2

Poser $u(x)$ et calculer sa dérivée

On pose $u(x)$ puis on calcule sa dérivée $u'(x)$ sur *I*.

APPLICATION

On pose :

$$\forall x \in]3+\infty[,\ u(x) = \frac{2}{x-3}.$$

On remarque que *u* est de la forme $u = \dfrac{k}{v}$ avec $k = 2$ et $v(x) = x-3$

Par conséquent, *u'* est de la forme $u' = \dfrac{-kv'}{v^2}$ avec $\forall x \in]3+\infty[,\ v'(x) = 1$.

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in]-3+\infty[,\ u'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2}$$

ETAPE 3

Enoncer la formule

On rappelle que, la fonction *f* étant de la forme $f = \ln(u)$, on a $f' = \dfrac{u'}{u}$.

APPLICATION

$f = \ln(u)$, donc $f' = \dfrac{u'}{u}$.

ETAPE 4

Appliquer la formule

On applique la formule et on conclut en donnant *f'*.

APPLICATION

On en déduit que :

$$\forall x \in \left]3;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{\dfrac{-2}{(x-3)^2}}{\dfrac{2}{x-3}}$$

Finalement :

$$\forall x \in \left]3;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{-1}{x-3} = \dfrac{1}{3-x}$$

MÉTHODE 2

Si le logarithme apparaît au sein des formules usuelles

SITUATION

Afin de déterminer une fonction dans laquelle apparaît un logarithme, on utilise les formules de dérivation usuelles du cours.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie par :

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f(x) = x^2\ln(x)$$

Calculer *f'*, la fonction dérivée de *f*.

ETAPE 1

Justifier la dérivabilité

On justifie la dérivabilité de la fonction *f* sur son intervalle *I*.

APPLICATION

La fonction *f* est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$.

ETAPE 2

Identifier la formule utilisée

Selon la forme de *f*, on détermine si l'on va utiliser la formule de dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions.

APPLICATION

On remarque que $f = u \times v$.

ETAPE 3

Poser les fonctions intermédiaires et calculer leurs dérivées

On introduit les fonctions intermédiaires nécessaires pour exprimer *f*. On introduit autant de fonctions intermédiaires que nécessaire.

On dérive ensuite chacune des fonctions intermédiaires.

APPLICATION

On pose, $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$:

- $u\left(x\right) = x^2$
- $v\left(x\right) = \ln\left(x\right)$

On en déduit que, $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$:

- $u'\left(x\right) = 2x$
- $v'\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$

ETAPE 4

Enoncer la formule

On énonce la formule de *f'* correspondant à la forme de *f*.

APPLICATION

On a $f' = u'v + uv'$.

ETAPE 5

Appliquer la formule

On applique la formule et on simplifie le résultat de manière à aboutir à une forme dont on peut facilement déterminer le signe, puisqu'il s'agit généralement de la tâche à effectuer ensuite.

APPLICATION

En appliquant la formule, on obtient :

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'\left(x\right) = 2x\ln\left(x\right) + x^2 \times \frac{1}{x}$$

On en conclut que :

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'\left(x\right) = 2xlnx + x$$