MÉTHODE 1

En encadrant la fonction intégrée

SITUATION

Lorsque l'on ne peut pas calculer la valeur de $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ car on ne connaît pas de primitive de la fonction sous l'intégrale, l'énoncé peut demander d'encadrer cette intégrale. On peut obtenir cet encadrement à partir d'un encadrement de la fonction *f*.

ÉNONCÉ

Soit *n* un entier naturel. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{n+1}$$

ETAPE 1

Repérer les éléments à conserver dans l'expression de *f*

L'encadrement voulu est toujours donné par l'énoncé. On y repère donc les éléments qui doivent être conservés lors de l'encadrement de *f*.

APPLICATION

On constate que l'entier *n* est présent dans le terme de droite. Il faut donc penser à le conserver quand on majorera x^ne^{-x}.

ETAPE 2

Encadrer la fonction *f*

On encadre la fonction *f* sur $\left[a;b\right]$. On démontre donc un encadrement de la forme suivante :

$$\forall x \in \left[a;b\right], u\left(x\right) \leqslant f\left(x\right) \leqslant v\left(x\right)$$

APPLICATION

On encadre d'abord e^{-x} sur $\left[0;1\right]$.

Soit *x* un réel compris entre 0 et 1. On a :

$$-1 \leqslant -x \leqslant 0$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant e^{-0}$$

En gardant uniquement la majoration, on a :

$$e^{-x} \leqslant 1$$

On multiplie par x^n qui est positif. On obtient donc :

$$x^ne^{-x} \leqslant x^n$$

ETAPE 3

Utiliser les comparaisons d'intégrales

On s'assure que $a \leqslant b$.

Grâce à l'encadrement trouvé dans l'étape précédente, on a alors, par comparaison d'intégrales :

$$\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$$

On calcule $\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x$ et $\int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$ pour obtenir l'encadrement voulu.

APPLICATION

0 est bien inférieur à 1. Donc, d'après l'inégalité précédente, par comparaison d'intégrales, on a :

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut donc conclure :

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

MÉTHODE 2

En utilisant l'inégalité de la moyenne

SITUATION

On peut parfois obtenir directement un encadrement d'intégrale grâce à l'inégalité de la moyenne.

ÉNONCÉ

Démontrer l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x \leqslant e$$

ETAPE 1

Énoncer les propriétés de l'inégalité de la moyenne

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ $(a \leqslant b)$, minorée par m et majorée par M sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

APPLICATION

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ $(a \leqslant b)$, minorée par m et majorée par M sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

ETAPE 2

Déterminer un majorant et un minorant de *f*

On détermine tout d'abord un minorant et un majorant de la fonction *f* sur $\left[a;b\right]$, ce qui revient à démontrer une inégalité de la forme $m\leqslant f\left(x\right)\leqslant M$, où *m* et *M* ne dépendent pas de *x*.

APPLICATION

Soit *x* un réel compris entre 0 et 1. On a :

- $0\leqslant x\leqslant 1$
- $e^0\leqslant e^x\leqslant e^1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Les deux quantités étant positives, par produit, on a :

$$0\times e^0\leqslant xe^x\leqslant 1\times e$$

Soit :

$$0\leqslant xe^x\leqslant e$$

ETAPE 3

Écrire l'inégalité obtenue

On remplace *m* et *M* par les valeurs trouvées dans l'étape 1 pour obtenir l'encadrement souhaité.

APPLICATION

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $f:x\longmapsto xe^x$ entre 0 et 1, d'après le résultat de l'étape 2, on a :

$$0\times\left(1-0\right)\leqslant\int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x\leqslant e\times\left(1-0\right)$$

On peut donc conclure :

$$0\leqslant\int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x\leqslant e$$