I Les vecteurs dans l'espace

On définit des vecteurs dans l'espace de la même façon que dans le plan. On retrouve ainsi toutes les notions vues en géométrie plane sur les vecteurs (opérations, colinéarité, etc.).

DÉFINITION **Translation**

La translation qui transforme un point A en un point B est le glissement rectiligne défini par :

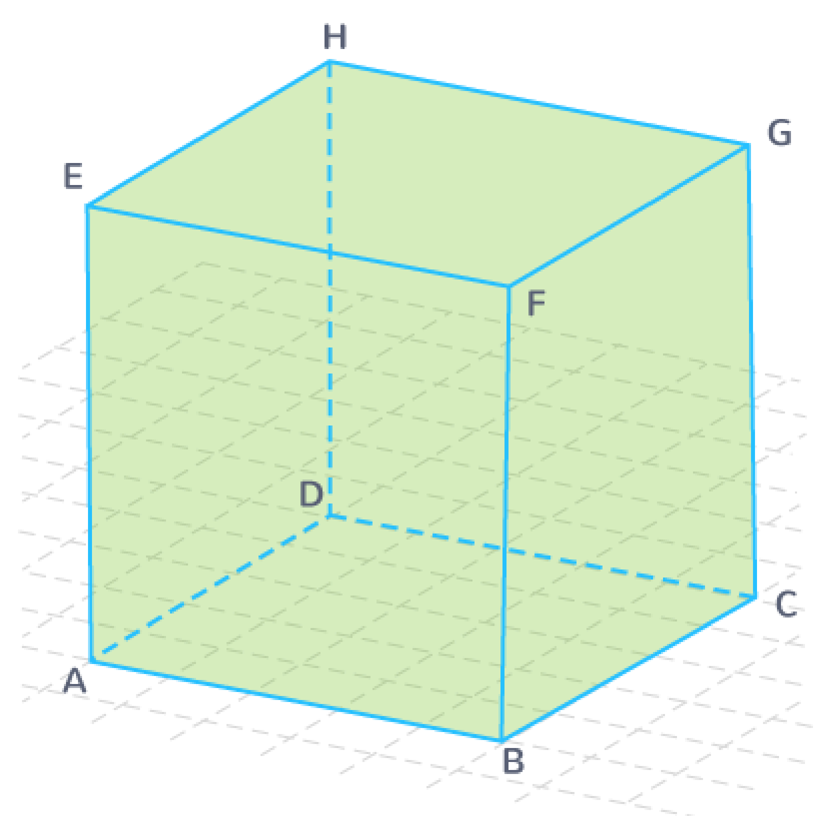
- sa direction, la droite (AB) ;
- son sens, « de A vers B » ;
- sa longueur, AB.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

La translation qui transforme A en D, transforme également E en H, F en G et B en C.

- sa direction est la droite (AD) ;
- son sens est « de A vers D » ;
- sa longueur est AD.



DÉFINITION **Vecteur de l'espace**

On appelle **vecteur de l'espace** toute famille de couples de points de l'espace se correspondant par une même translation.

REMARQUE

Un vecteur de l'espace est donc défini (comme dans le plan) par une direction, un sens et une longueur (ou norme).

PROPRIÉTÉ

Comme dans le plan, un vecteur est noté par une lettre sous une flèche comme par exemple $\overrightarrow{u}$.

PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.

PROPRIÉTÉ

Soient A, B et C trois points de l'espace. On a :

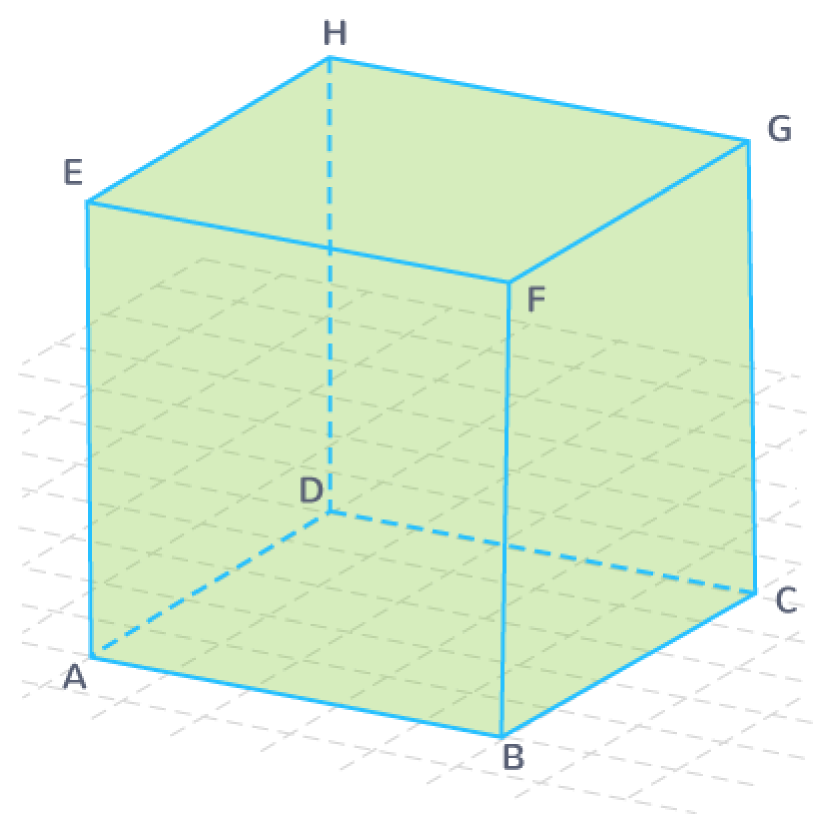
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

On a :

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}$



PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace et k un réel quelconque.

$k\overrightarrow{u}$ est le vecteur de l'espace ayant :

- la même direction que $\overrightarrow{u}$;
- le même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k>0$ et le sens opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ si $k<0$;
- la longueur $|k|\times\|\overrightarrow{u}\|$.

Si $k=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, alors $k\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

EXEMPLE

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

Le vecteur $-2\overrightarrow{u}$ est le vecteur de l'espace défini par :

- la direction de $\overrightarrow{u}$;
- le sens opposé à celui de $\overrightarrow{u}$;
- la longueur $2\times\|\overrightarrow{u}\|$.

DÉFINITION **Vecteurs colinéaires**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux **vecteurs colinéaires** s'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v} \text{ ou } \overrightarrow{v} = k \times \overrightarrow{u}$$

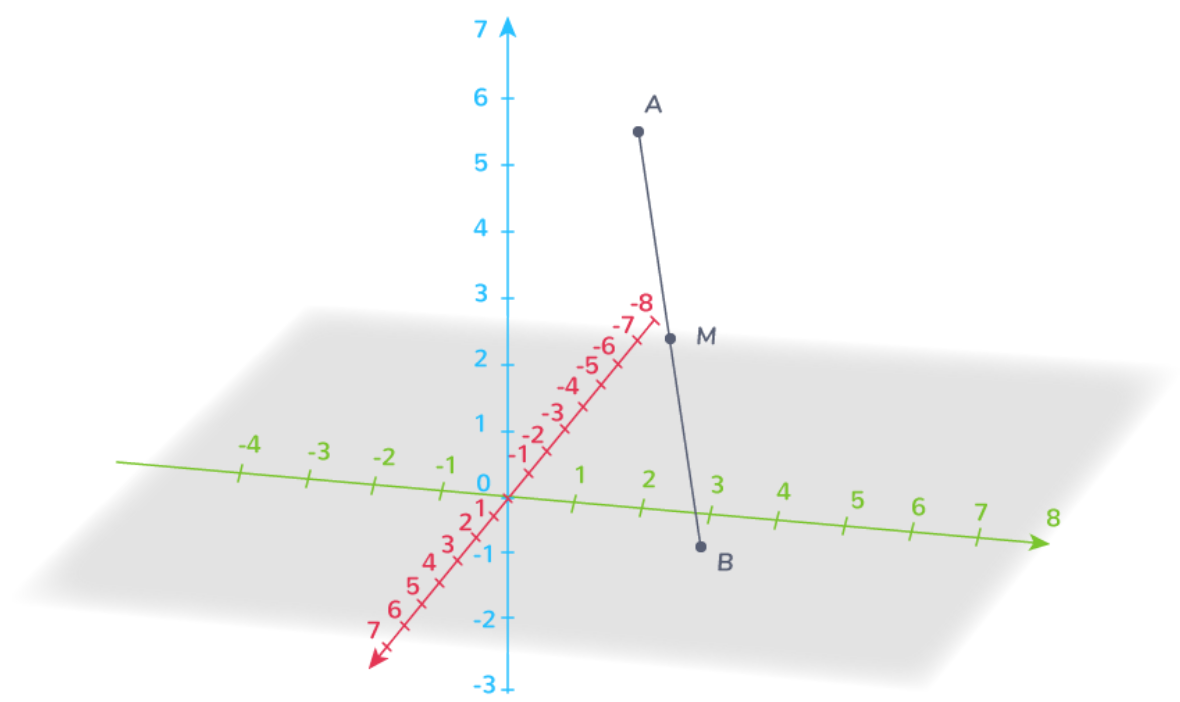
EXEMPLE

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Soit M le milieu du segment $[AB]$.

Alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.



DÉFINITION **Combinaison linéaire de vecteurs**

Soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de l'espace.

On appelle **combinaison linéaire des vecteurs** $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ toute écriture du type :

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des réels quelconques.

EXEMPLE

Soient A, B et C trois points de l'espace.

$-5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

II Les droites et les plans dans l'espace

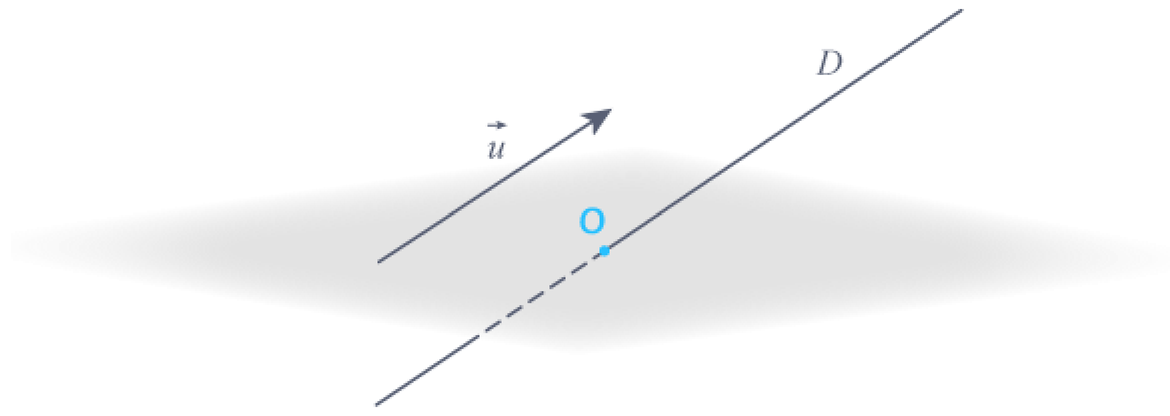
On peut définir des droites dans l'espace avec des vecteurs comme dans le plan, cela permet de définir des repères sur les droites. On peut également définir des plans dans l'espace et les caractériser à l'aide de points, de droites et de vecteurs et ainsi définir des bases et des repères sur ces plans.

A Les droites dans l'espace

Comme dans le plan, on peut parler de vecteur directeur d'une droite et ainsi définir des repères sur une droite de l'espace.

PROPRIÉTÉ

On considère un point O et un vecteur de l'espace non nul $\overrightarrow{u}$. Il existe une unique droite $\mathcal{D}$ contenant le point O et ayant pour direction la direction de $\overrightarrow{u}$.

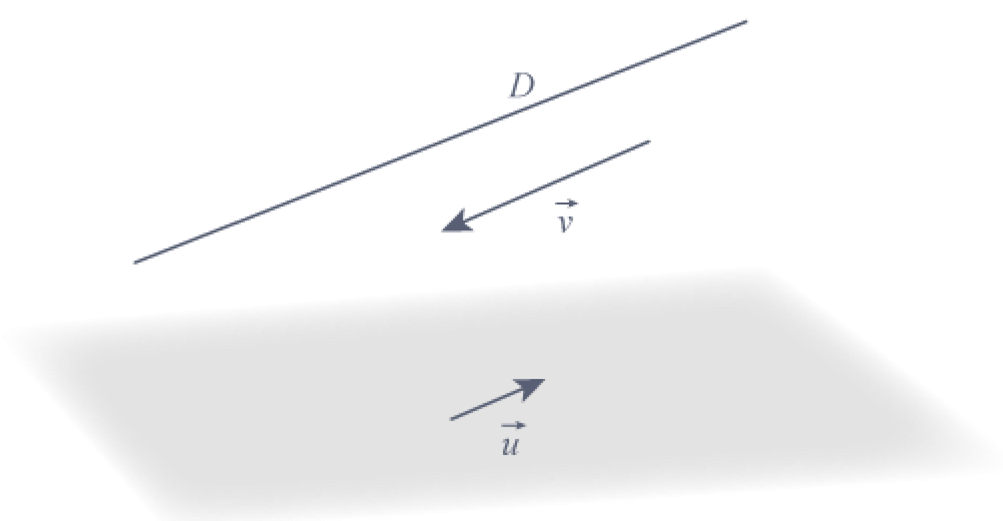


DÉFINITION **Vecteur directeur**

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ ayant la direction de la droite $\mathcal{D}$ est appelé **vecteur directeur** de cette droite.

EXEMPLE

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction que la droite $\mathcal{D}$. Ce sont donc des vecteurs directeurs de cette droite.



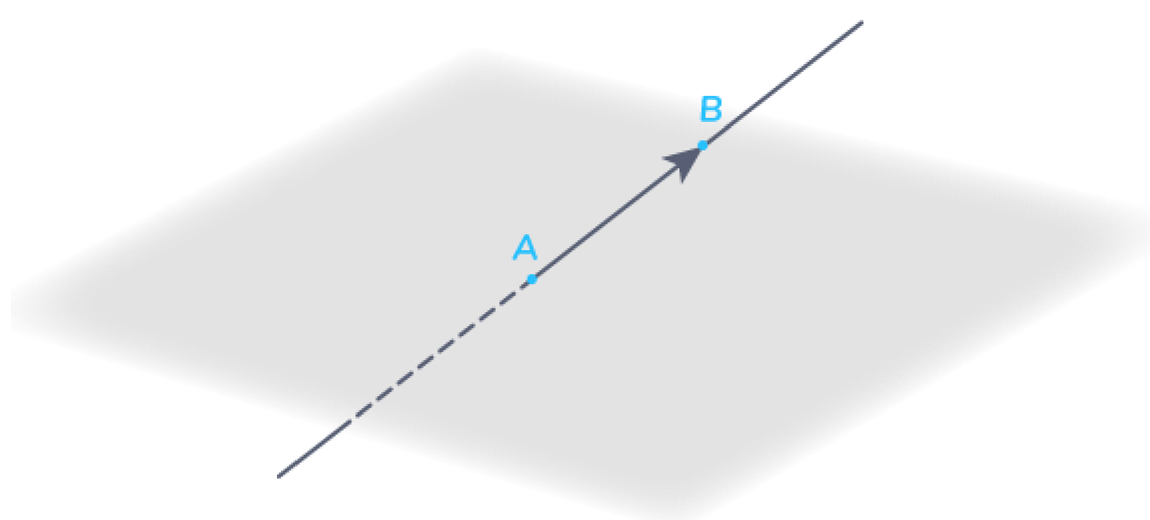
DÉFINITION **Repère d'une droite**

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Tout couple $\left(O;\overrightarrow{u}\right)$ où O est un point de la droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite est appelé **repère de la droite** $\mathcal{D}$.

EXEMPLE

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Alors $\left(A;\overrightarrow{AB}\right)$ est un repère de la droite (AB).



REMARQUE

Cette propriété et ces définitions sont les mêmes qu'en géométrie plane.

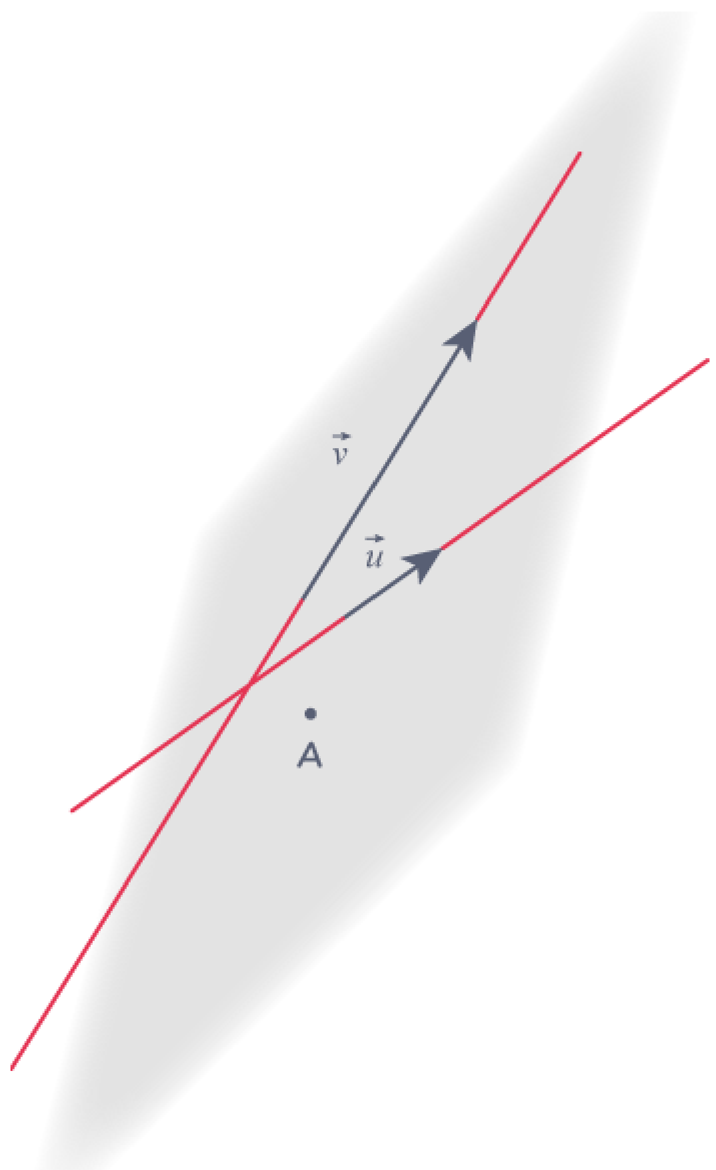
Ⓑ Les plans dans l'espace

Le nouvel objet mathématique que constitue le plan peut être décrit à partir de points, mais également de vecteurs et de droites.

PROPRIÉTÉ

Soient un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires de l'espace.

Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant le point A, une droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et une droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.



DÉFINITION **Base d'un plan**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Soient (d_1) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et (d_2) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

Si un plan $\mathcal{P}$ contient les deux droites (d_1) et (d_2), alors on dit que :

- les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$;
- le couple $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ est **une base du plan** $\mathcal{P}$.

DÉFINITION **Repère d'un plan**

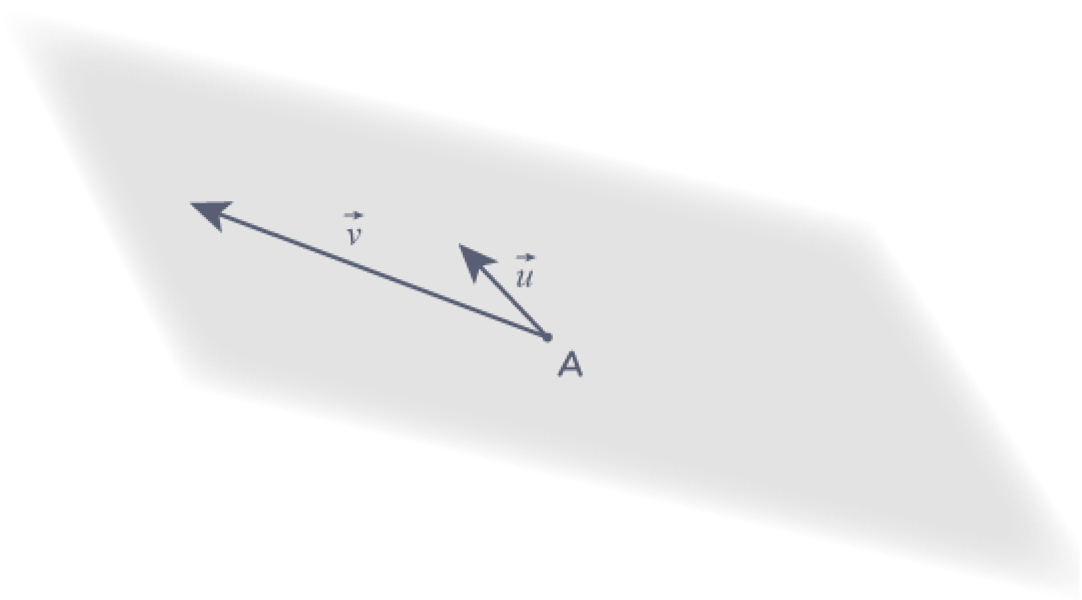
Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, A un point du plan et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ une base du plan.

Le triplet $\left(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est appelé **repère du plan** $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.
- Le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.

Le triplet $\left(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.



REMARQUE

On caractérise un plan à l'aide d'un point et deux vecteurs non colinéaires, ce qui revient au même que de le caractériser à l'aide de deux droites sécantes, ou trois points non alignés.

PROPRIÉTÉ

Comme trois points non alignés définissent un plan, on peut nommer un plan en citant trois points A, B et C par exemple. On note alors (ABC) pour signifier le plan qui passe par les trois points A, B et C.

PIÈGE

Il ne faut pas oublier les parenthèses, sinon il s'agit du nom d'un triangle.

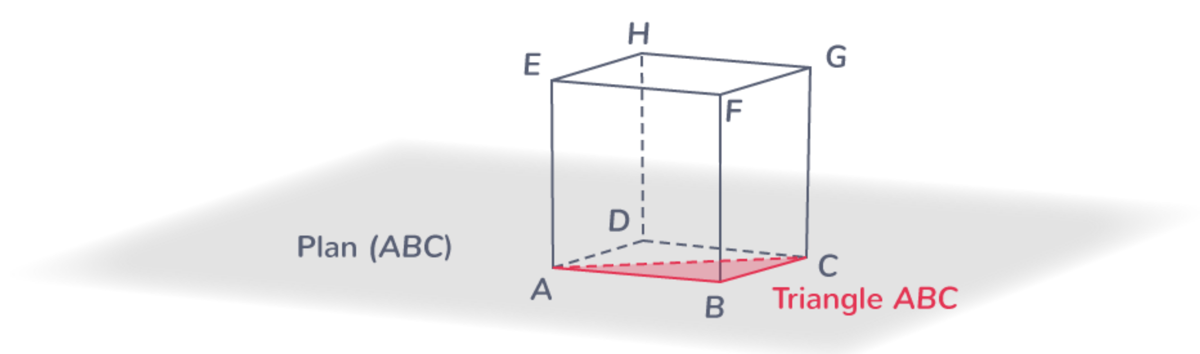
EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

La notation (ABC) désigne le plan passant par les trois points A, B et C.

C'est le plan prolongeant la face $ABCD$.

La notation ABC désigne le triangle ABC.



III Le repérage dans l'espace

Repérer les points et les vecteurs en géométrie plane permet d'introduire le calcul pour justifier des propriétés géométriques. C'est également possible dans l'espace où l'on peut créer des repères pour y repérer les points et vecteurs.

PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Soient α et β deux réels quelconques.

On pose $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

On peut choisir des représentants des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ appartenant à un même plan.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

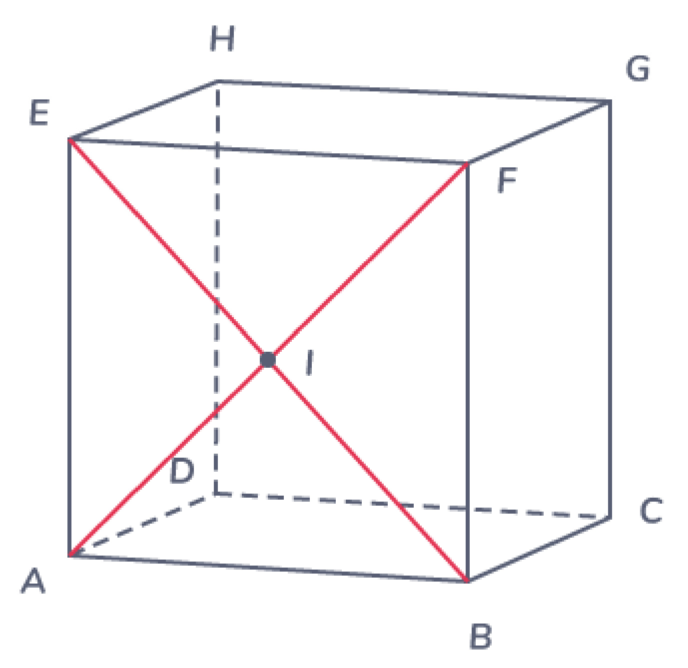
On pose :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DH}$;
- $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

Alors :

- $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$;
- $\overrightarrow{AE}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$;
- $\overrightarrow{IF}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.

Ces trois représentants appartiennent au plan (ABF).



DÉFINITION **Vecteurs coplanaires**

Lorsque des vecteurs admettent des représentants qui appartiennent à un plan, on dit que ces **vecteurs** sont **coplanaires**.

REMARQUE

Deux vecteurs quelconques de l'espace sont nécessairement coplanaires.

PROPRIÉTÉ

Tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas coplanaires.

On peut donc décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ suivant ces trois vecteurs.

En effet, d'après le relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}$$

Comme $ABCDEFGH$ est un cube, on a :

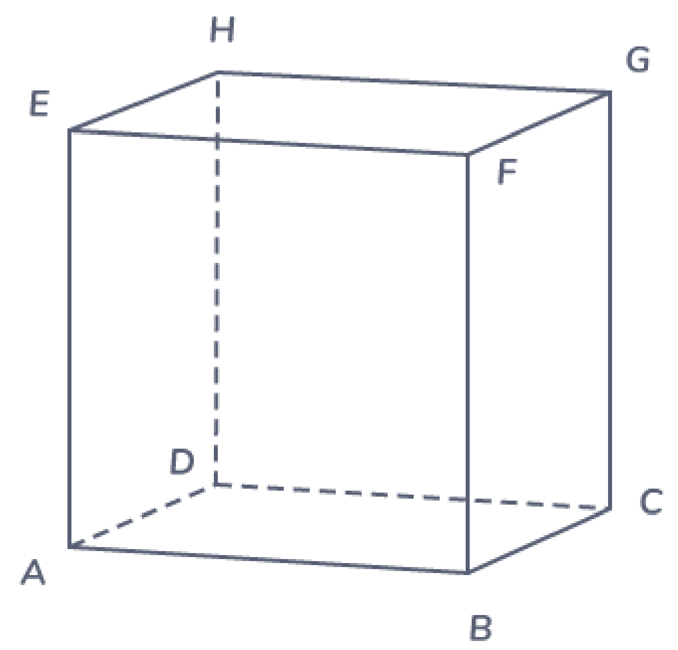
$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}$$

Soit :

$$\overrightarrow{AG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AH}$$



DÉFINITION **Repère de l'espace**

Le quadruplet $\left(A; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est appelé **repère de l'espace** si :

- A est un point de l'espace ;
- $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

PROPRIÉTÉ

Soit $\left(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et soit M un point de l'espace.

Il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tels que :

$$\overrightarrow{AM}=x\times\overrightarrow{i}+y\times\overrightarrow{j}+z\times\overrightarrow{k}$$

On appelle ce triplet les coordonnées du point M dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

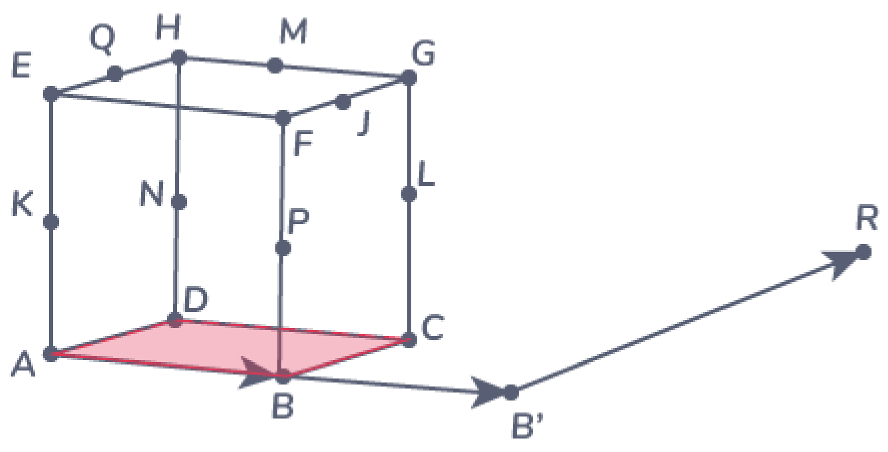
L est le milieu de l'arête $[CG]$.

R est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}$.

Le quadruplet $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ est un repère de l'espace.

Il existe donc un unique triplet $(x;y;z)$ tel que :

$\overrightarrow{DR}=x\times\overrightarrow{DA}+y\times\overrightarrow{DC}+z\times\overrightarrow{DH}$



En effet, d'après la relation de Chasles on a :

$\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AR}$

Or $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}$.

D'après la relation de Chasles, on a également :

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}$.

Comme L est le milieu de l'arête $[CG]$, on a :

$\overrightarrow{CL}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

Ainsi :

$\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

Comme $ABCDEFGH$ est un cube, on a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

On en déduit :

$\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DR} = 3\overrightarrow{DC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Donc le point R a pour coordonnées dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ le triplet $(0; 3; \dfrac{1}{2})$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\left(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.

Il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = x \times \overrightarrow{i} + y \times \overrightarrow{j} + z \times \overrightarrow{k}$$

On appelle ce triplet les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

EXEMPLE

$ABCDEFHG$ est un cube.

Le quadruplet $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ admet donc une uniquement décomposition suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

D'après le relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

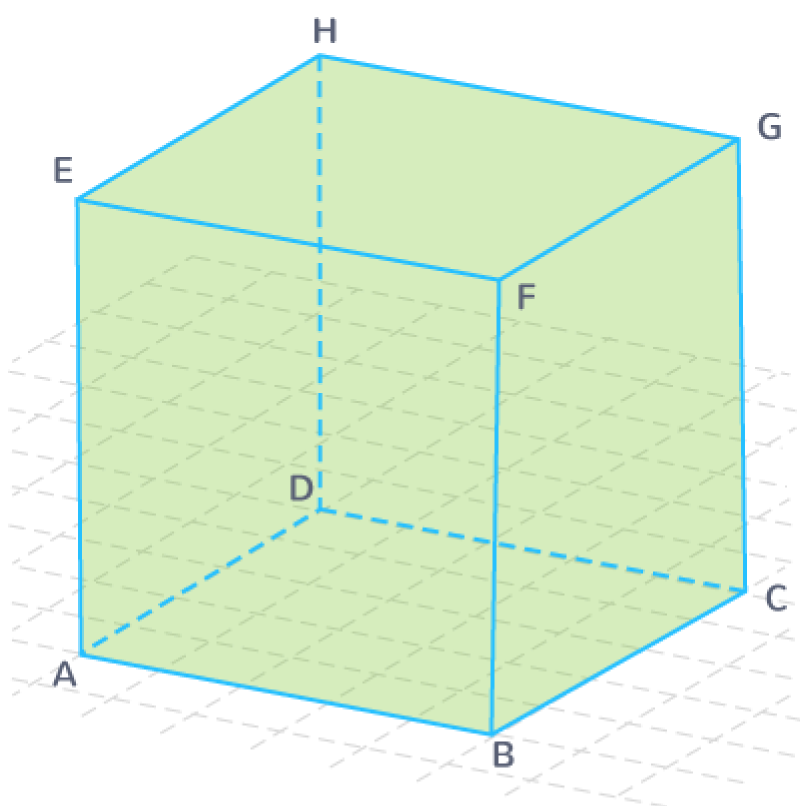
Comme $ABCDEFGH$ est un cube, on a :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$

On en déduit :
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Soit :
$\overrightarrow{AG} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$



REMARQUE

Les propriétés des vecteurs dans le plan sont encore valables dans l'espace.

PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base de l'espace.

Alors le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées dans la même base :

$$\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

EXEMPLE

On considère l'espace muni d'un repère.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace donnés par leurs coordonnées dans la base du repère.

Alors, dans cette base, le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1+(-5) \\ 2+7 \\ 3+2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

On considère l'espace muni d'un repère.

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et α un réel quelconque.

Alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées dans la base du repère :

$$\begin{pmatrix} \alpha \times x \\ \alpha \times y \\ \alpha \times z \end{pmatrix}$$

EXEMPLE

On considère l'espace muni d'un repère.

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace donné par ses coordonnées dans la base du repère.

Alors, dans cette base, le vecteur $10\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 10 \times 1 \\ 10 \times 2 \\ 10 \times 3 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Dans l'espace muni d'un repère, on considère deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ donnés par leurs coordonnées dans ce repère.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans la base du repère.

EXEMPLE

Dans l'espace muni d'un repère, on a les points $A(1; 5; 10)$ et $B(-2; 6; 4)$.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées, dans le base du repère :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 6 - 5 \\ 4 - 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Dans l'espace muni d'un repère, on considère deux points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ donnés par leurs coordonnées dans ce repère.

Alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

EXEMPLE

Dans l'espace muni d'un repère, on a les points $A(-1 ; 5 ; 10)$ et $B(-2 ; 6 ; 4)$.

Alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-1 + (-2)}{2} ; \frac{5 + 6}{2} ; \frac{10 + 4}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{2} ; \frac{11}{2} ; 7\right)$$

PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base de l'espace.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

EXEMPLE

On considère l'espace muni d'un repère.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace donnés par leurs coordonnées dans la base du repère.

On cherche un éventuel réel k tel que $\overrightarrow{v} = k \times \overrightarrow{u}$.

Or $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{v} = k \times \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ 2k = 7 \\ 3k = 2 \end{cases}$

On obtient :

$k = -5$, $k = \frac{7}{2}$ et $k = \frac{2}{3}$

C'est impossible.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

IV Les positions relatives de droites et plans dans l'espace

Les droites et les plans ont des positions relatives possibles qu'il convient de savoir décrire et justifier.

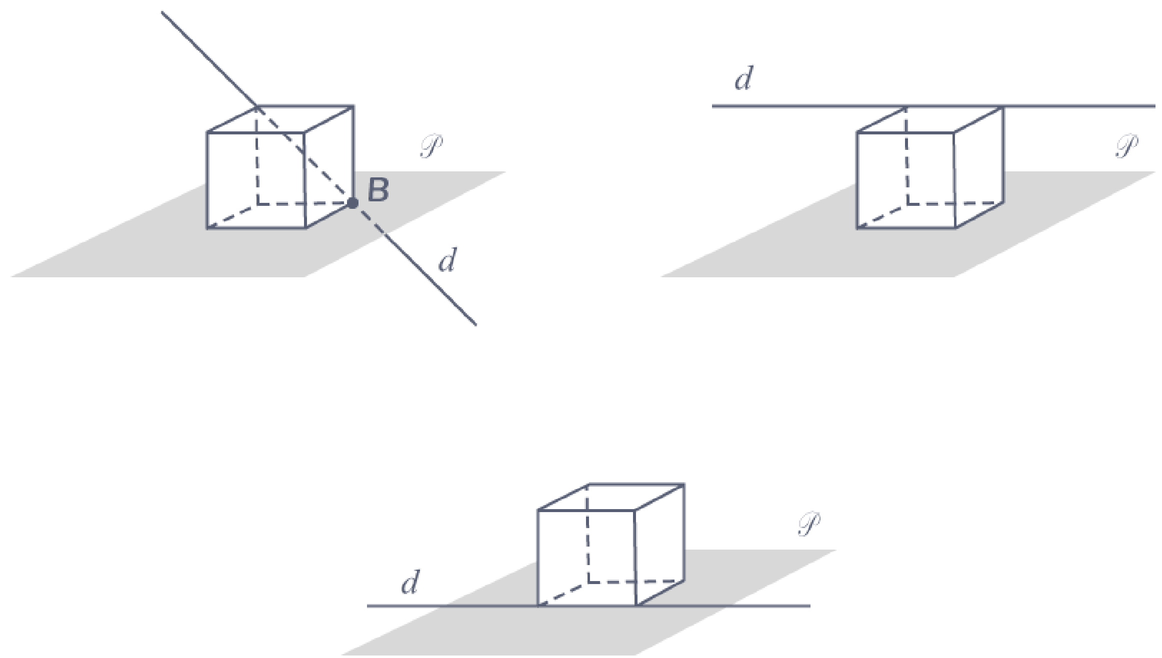
Ⓐ Les positions relatives d'une droite et d'un plan

Pour décrire la position relative d'une droite et d'un plan, on retrouve le vocabulaire de la géométrie plane.

PROPRIÉTÉ

Soient une droite (d) et un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. On a seulement trois positions possibles de (d) par rapport à $\mathcal{P}$:

- (d) et $\mathcal{P}$ se coupent en un seul point ;
- (d) et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun ;
- ou (d) est incluse dans $\mathcal{P}$.



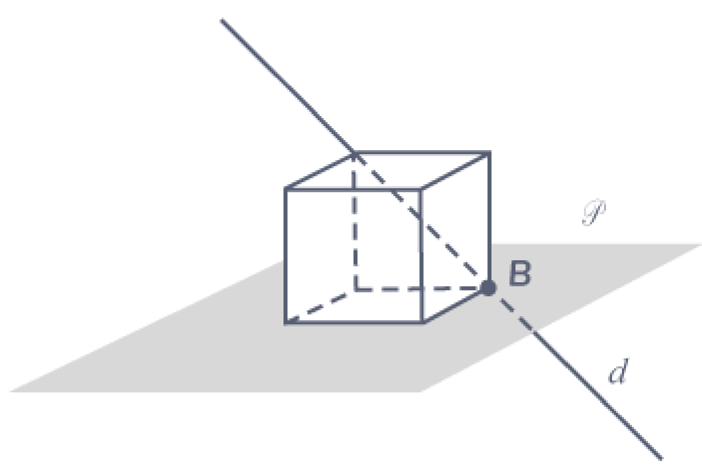
DÉFINITION **Droite parallèle à un plan**

Soit une **droite** (d) et un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. On dit que (d) est **parallèle au plan** $\mathcal{P}$ lorsque :

- (d) est contenue dans le plan $\mathcal{P}$;
- où (d) et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun.

DÉFINITION **Droite et plan sécants**

Soit **une droite** (d) et **un plan** $\mathcal{P}$ de l'espace. On dit que (d) et $\mathcal{P}$ sont **sécants** lorsque que la droite (d) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.



PROPRIÉTÉ

Soit d une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point B et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

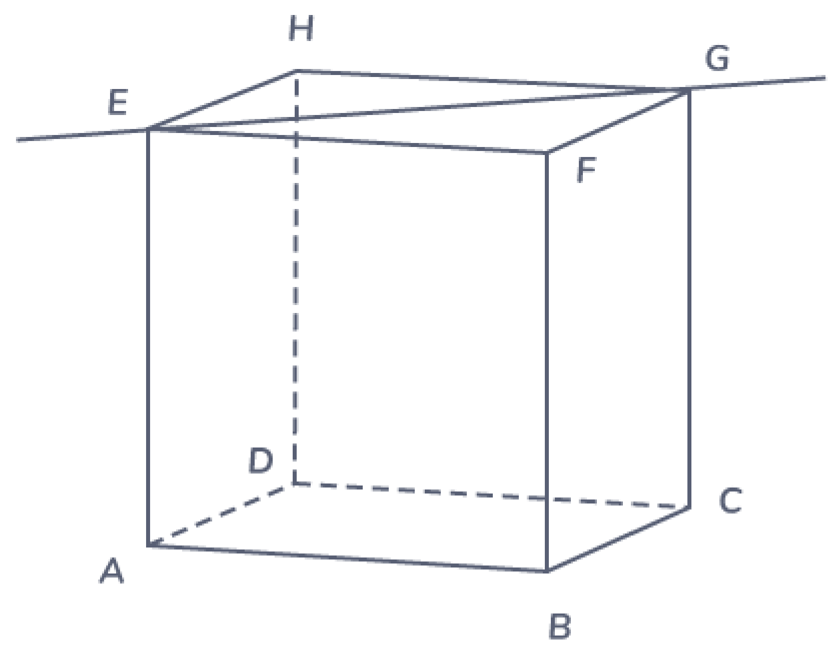
La droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Autrement dit, la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

La droite EG est parallèle au plan (ABC).



En effet, on a :
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$, d'après la règle du parallélogramme.

Comme $ABCDEFGH$ est un cube, on a :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$

On en déduit :
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), ils définissent, avec le point A, le plan (ABC).

On obtient bien :
La droite (EG) est parallèle au plan (ABC).

PROPRIÉTÉ

Soit d une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point B et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

La droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Autrement dit, la droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

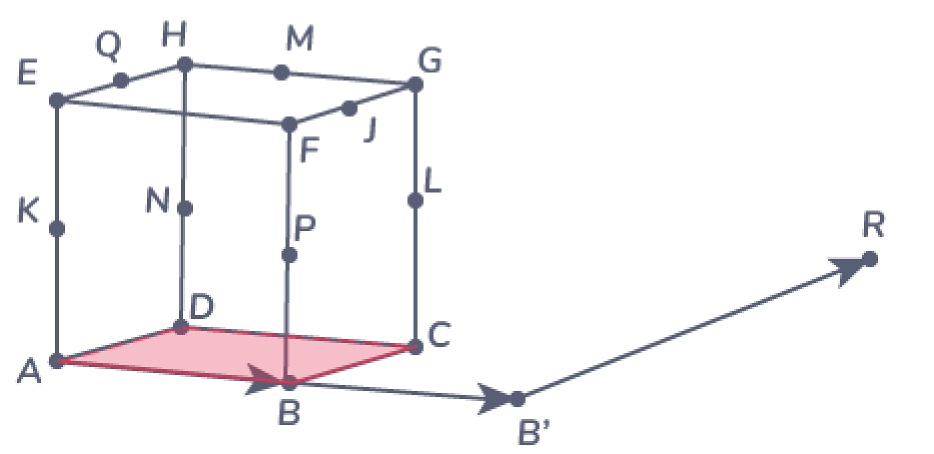
EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

L est le milieu de l'arête $[CG]$.

R est le point défini par $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$.

La droite (BR) est incluse dans le plan (ABL).



En effet :

- le plan (ABL) est défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}$;
- la droite (BR) est définie par le point B et le vecteur $\overrightarrow{BR}$.

Il reste à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR}$ peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}$.

- $\overrightarrow{AB} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AL}$
- D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AR}$

Or $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$.

Donc $\overrightarrow{BR} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$.

Puis $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$.

On a exprimé les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}$.

Le droite (BR) appartient bien au plan (ABL).

PROPRIÉTÉ

Soit d une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point B et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

La droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.

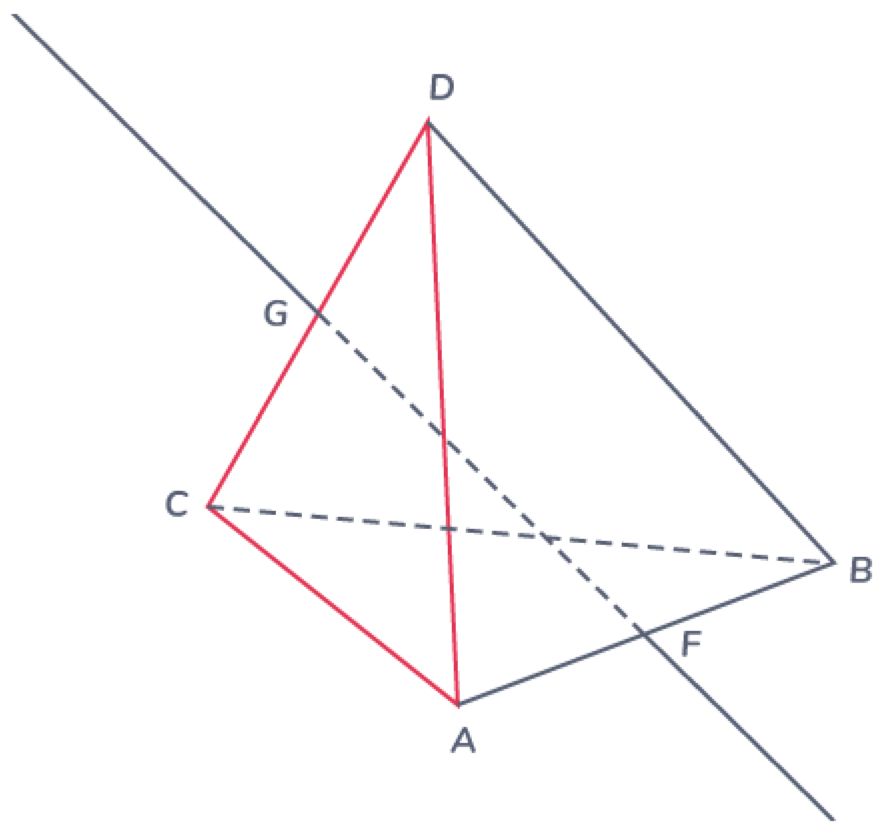
Autrement dit, la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

EXEMPLE

$ABCD$ est un tétraèdre.

Le point F est le milieu de l'arête $[AB]$ et le point G le milieu de l'arête $[CD]$.

Alors la droite (FG) et le plan (ABC) sont sécants.



En effet :

- le plan (ABC) est défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- la droite (FG) est définie par le point F et le vecteur $\overrightarrow{FG}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

Le point F appartient au plan (ABC) puisqu'il est le milieu de l'arête $[AB]$.

Si les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étaient coplanaires, alors le point G serait également dans le plan (ABC).

Or, ce n'est pas le cas.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

On en déduit :
La droite (FG) et le plan (ABC) sont sécants.

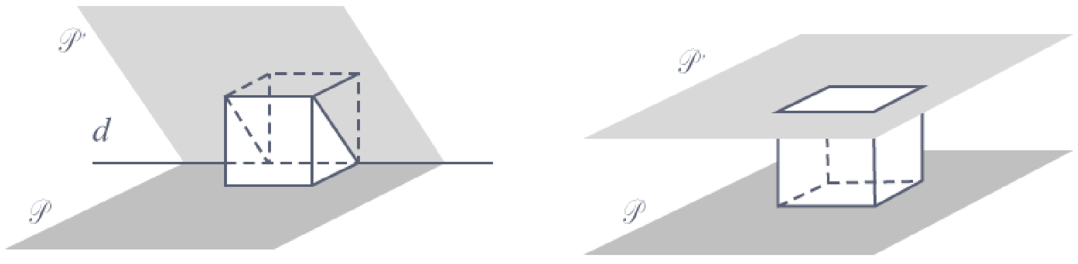
B Les positions relatives de deux plans

Pour décrire la position relative de deux plans, on retrouve, comme pour la position relative d'une droite et d'un plan, le vocabulaire de la géométrie plane.

PROPRIÉTÉ

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ distincts de l'espace. Il n'y a que deux positions possibles d'un des deux plans par rapport à l'autre :

- soit ils n'ont aucun point commun ;
- soit ils ont une intersection et, dans ce cas, l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ des deux plans est une droite.



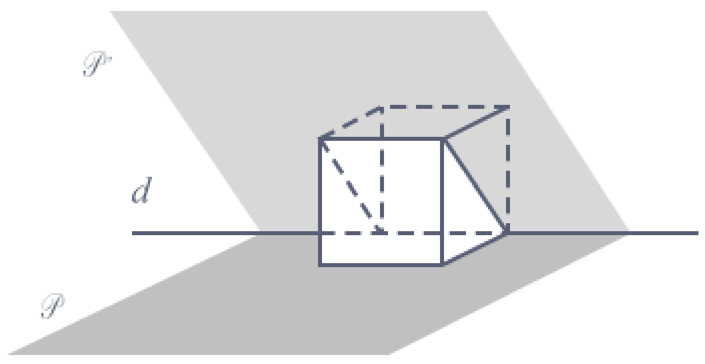
DÉFINITION Plans parallèles

Soient deux **plans** $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. On dira que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **parallèles** lorsque :

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ;
- ou lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont aucun point commun (ils sont alors disjoints).

DÉFINITION Plans sécants

Soient deux **plans** $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. On dira que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **sécants** lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles.



PROPRIÉTÉ

Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$. Soit $\mathcal{P}'$ un plan défini par un point B et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

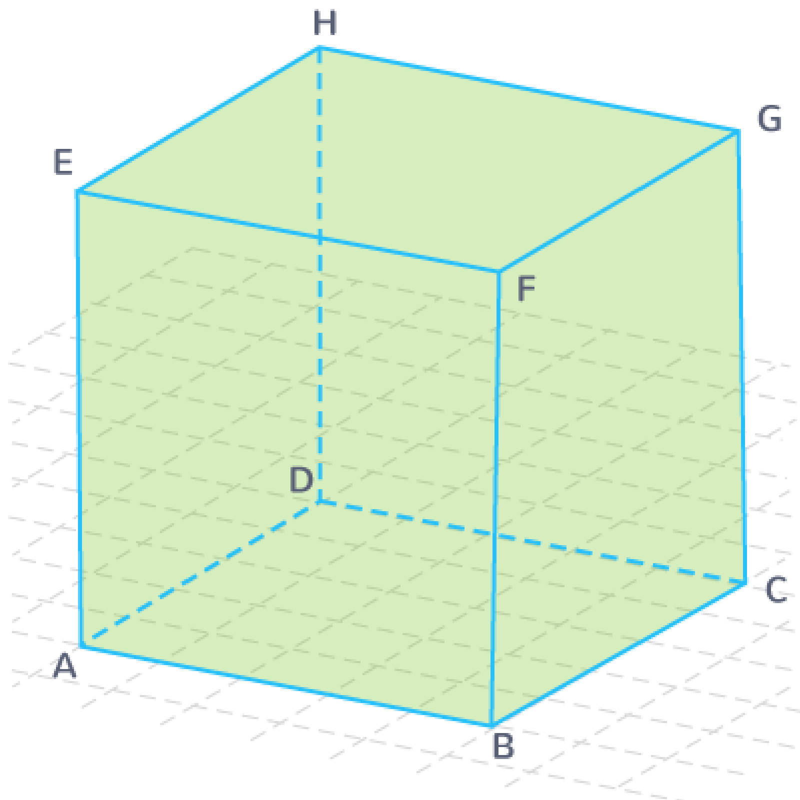
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont coplanaires.

Autrement dit, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}$ peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.



En effet :

- $ABFE$ est un carré, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$;
- $ADHE$ est un carré, donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$;
- le plan (ABC) est défini par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$;
- le plan (EFG) est défini par le point E et les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.

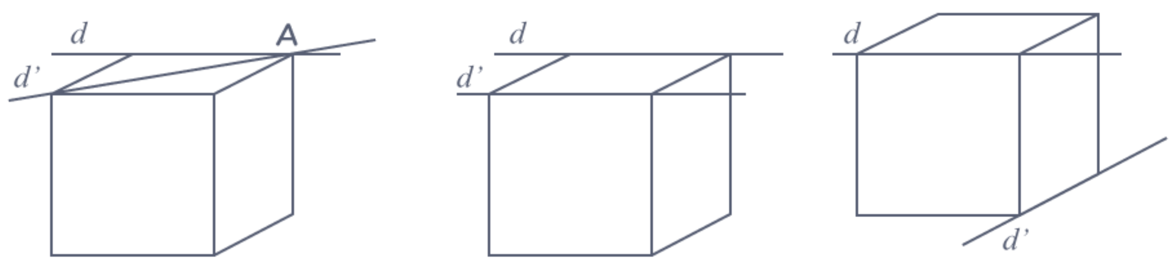
C Les positions relatives de deux droites

Pour décrire la position relative de deux droites de l'espace, les notions de géométrie plane ne suffisent. Il est en effet possible d'avoir deux droites ni parallèles ni sécantes.

PROPRIÉTÉ

Soient deux droites d et d' distinctes de l'espace. On a seulement trois positions possibles d'une des droites par rapport à l'autre :

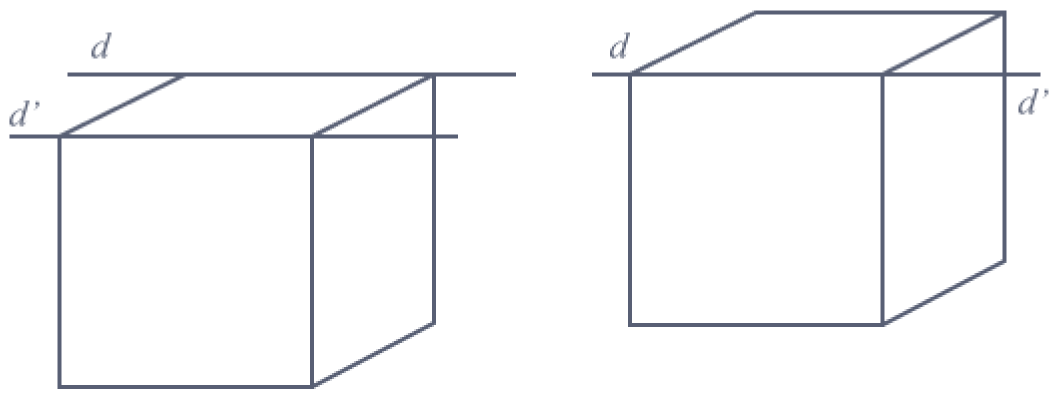
- d et d' ont un point seul commun ;
- d et d' n'ont pas de point commun, mais on peut trouver un plan qui les contient toutes les deux ;
- ou d et d' n'ont pas de point commun, et on ne peut pas trouver un plan qui les contient toutes les deux.



DÉFINITION Droites parallèles

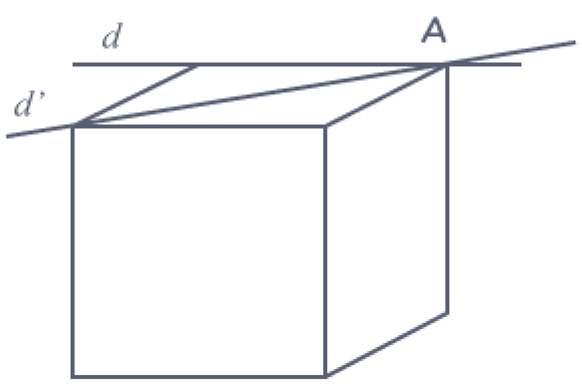
Soient deux **droites** d et d' de l'espace. On dit que d et d' sont **parallèles** lorsque :

- d et d' sont confondues ;
- ou d et d' sont coplanaires et n'ont aucun point commun.



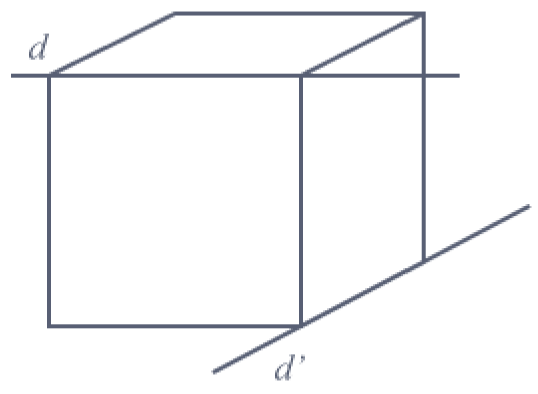
DÉFINITION Droites sécantes

Soient deux **droites** d et d' de l'espace. On dit que d et d' sont **sécantes** lorsqu'elles ont un unique point commun.



PIÈGE

Il faut faire attention à la différence entre la dimension 2 et la dimension 3 : dans l'espace, deux droites qui ne sont pas sécantes ne sont pas nécessairement parallèles.



PROPRIÉTÉ

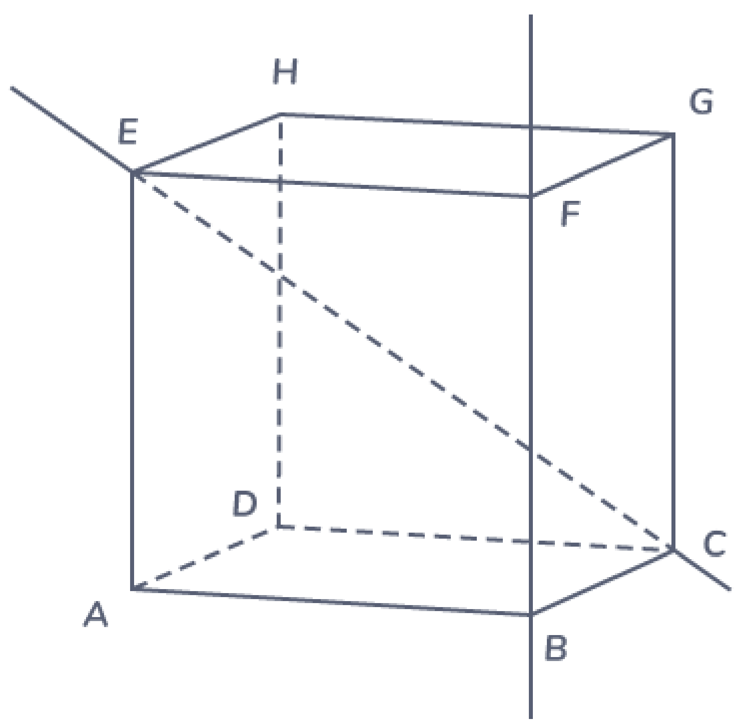
Soit $\mathcal{D}$ une droite définie par un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$. Soit $\mathcal{D}'$ une droite définie par un point B et un vecteur $\overrightarrow{v}$.

- Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.
- Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

Contrairement à ce que pourrait laisser croire la figure, les droites (EC) et (BF) ne sont pas coplanaires.



Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EB}$ ne sont pas coplanaires.

En effet, si ces trois vecteurs étaient coplanaires, les quatre points E, B, F et C seraient coplanaires.

Le point C serait donc dans le plan (EBF).

Or ce n'est pas le cas.

On en déduit :

Les droites (EC) et (BF) ne sont pas coplanaires.