SITUATION
La courbe représentative d'une fonction *f* peut admettre une asymptote verticale en un réel *a*.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-2;3\right\}$ par :

$$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x+4}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)}$$

Déterminer les éventuelles asymptotes verticales de C_f .

Etape 1

Repérer les bornes ouvertes finies du domaine de définition

Si C_f admet une asymptote verticale, c'est nécessairement en un réel *a* correspondant à une borne finie (c'est-à-dire réelle) et ouverte (c'est-à-dire exclue) du domaine de définition de *f*.

On liste donc tous les réels *a* vérifiant cette condition.

ASTUCE

Si la fonction est sous la forme de quotient, il pourra y avoir des asymptotes verticales aux valeurs interdites.

APPLICATION

On écrit le domaine de définition de *f* sous la forme d'une réunion d'intervalles :

$$D_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$$

Les bornes finies ouvertes sont donc −2 et 3.

Etape 2

Déterminer la limite de *f* en chacune de ces bornes

- Si *f* n'est pas définie à gauche de a_k , on détermine la limite à droite de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^+}f\left(x\right)$.
- Si *f* n'est pas définie à droite de a_k , on détermine la limite à gauche de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^-}f\left(x\right)$.
- Si *f* est définie à gauche et à droite de a_k , on détermine les limites à droite et à gauche de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^+}f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to a_k^-}f\left(x\right)$.

APPLICATION

On a :

- $\lim\limits_{x \to -2^-}\left(x+2\right)=0^-$
- $\lim\limits_{x \to -2^+}\left(x+2\right)=0^+$
- $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}=-\dfrac{2}{5}$

Par quotient, on peut donc en conclure :

- $\lim\limits_{x \to -2^-}f\left(x\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

De même, on a :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} (x-3) = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+3x+4}{x+2} = \dfrac{22}{5}$

Par quotient, on peut donc en conclure :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

Etape 3

Conclure sur l'existence d'asymptotes verticales

On peut conclure que la droite d'équation $x = a_k$ est asymptote verticale à C_f dans les trois cas suivants :

- Si f n'est pas définie à gauche de a_k et $\lim\limits_{x \to a_k^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a_k^+} f(x) = -\infty$
- Si f n'est pas définie à droite de a_k et $\lim\limits_{x \to a_k^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a_k^-} f(x) = -\infty$
- Si f est définie à gauche et à droite de a_k et les limites de f à droite et à gauche de a_k sont infinies (mais pas forcément égales).

APPLICATION

f est définie à droite et à gauche de −2 et les limites à droite et à gauche de f en −2 sont infinies.

De même, f est définie à droite et à gauche de 3 et les limites à droite et à gauche de f en 3 sont infinies.

On peut donc conclure que les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$ sont asymptotes verticales à C_f .