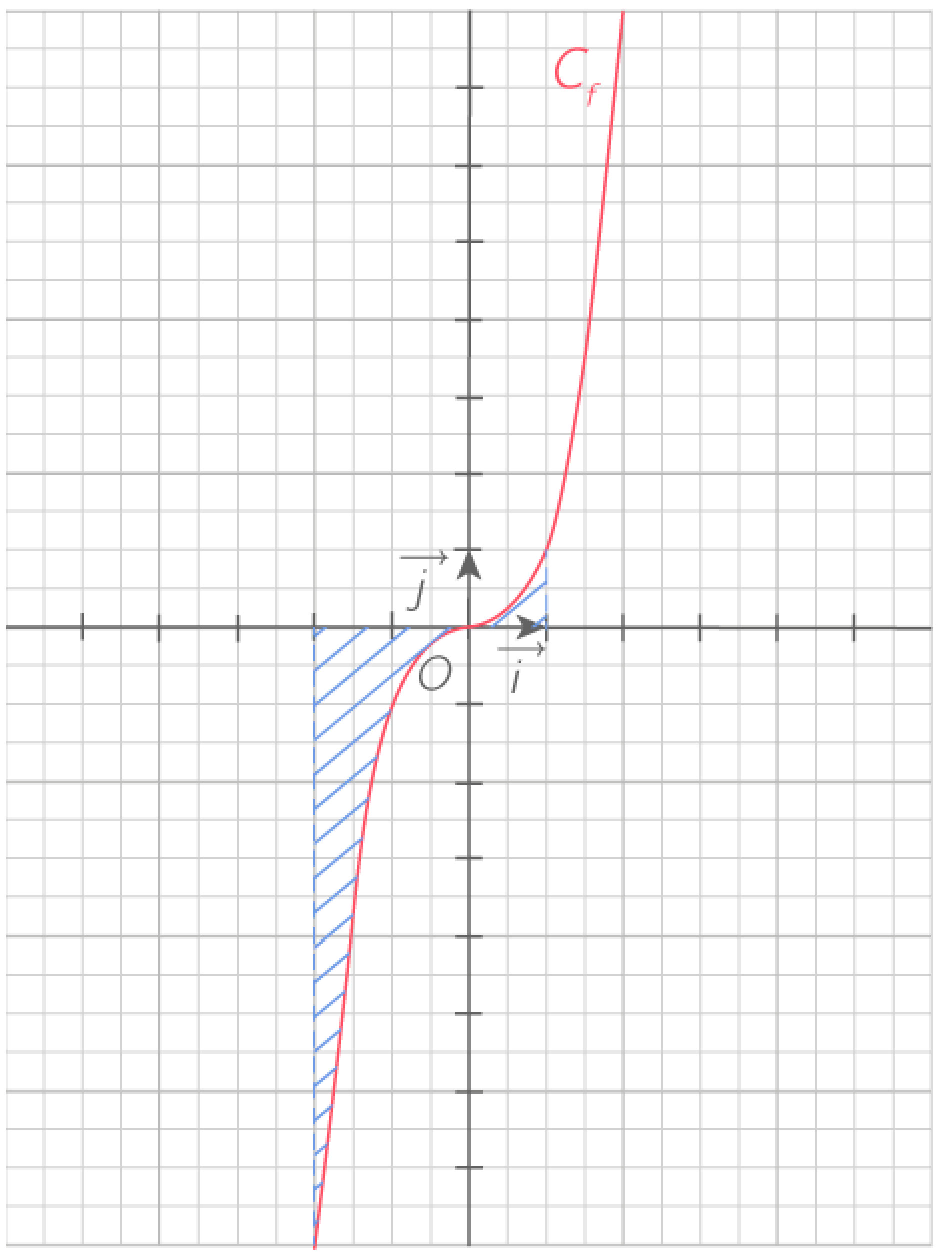
SITUATION
On peut calculer l'aire sous la courbe représentative d'une fonction *f* à l'aide d'un calcul d'intégrales.

ÉNONCÉ

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

Dans un repère orthonormal où une unité d'aire représente 4 cm², on trace la courbe représentative de la fonction *f*. Calculer l'aire de la zone hachurée.



Etape 1

Exprimer l'aire que l'on veut calculer

On détermine la fonction *f* et les réels *a* et *b* tels que l'aire à calculer soit celle de la surface comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

APPLICATION

On cherche à déterminer l'aire de la surface comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

Etape 2

Déterminer le signe de *f* sur $[a; b]$

On détermine le signe de *f* sur $[a; b]$. On peut l'obtenir grâce à la position de C_f par rapport à l'axe des abscisses si la représentation graphique est donnée par l'énoncé.

APPLICATION

La courbe est située :

- En dessous de l'axe des abscisses sur $[-2; 0]$

- Au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0; 1]$

Ainsi, *f* est négative sur $[-2; 0]$ et positive sur $[0; 1]$.

Etape 3

Exprimer l'aire en fonction d'une intégrale

Trois cas se présentent :

- Si *f* est positive sur $[a; b]$, alors $A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
- Si *f* est négative sur $[a; b]$, alors $A = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
- Si *f* change de signe sur $[a; b]$, on utilise la relation de Chasles pour obtenir plusieurs intégrales vérifiant l'un des deux premiers cas.

APPLICATION

f étant négative sur $[-2; 0]$ et positive sur $[0; 1]$, on a :

$$A = -\int_{-2}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$$

On remplace *f* par son expression :

$$A = -\int_{-2}^{0} x^3\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x^3\ \mathrm{d}x$$

Etape 4

Calculer les intégrales

On calcule la ou les intégrale(s) nécessaire(s). On peut alors conclure quant à la valeur de *A*. Cette valeur est exprimée en unités d'aire (u.a.).

APPLICATION

Une primitive de $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}$.

On a donc :

$$A = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$A = -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$A = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

A vaut donc $\dfrac{17}{4}$ u.a..

Etape 5

Donner l'aire dans l'unité demandée

Si l'énoncé le demande, on peut donner l'aire en centimètres carrés. Pour cela, grâce à l'échelle du graphique, on donne l'aire en centimètres carrés du carreau correspondant à une unité en abscisse et une unité en ordonnée. Si cette aire vaut n cm^2, alors 1 u.a. vaut n cm^2.

Ainsi, si $A = k$ u.a., on a alors $A = k \times n$ cm^2.

APPLICATION

Comme 1 u.a. vaut 4cm^2, on a finalement :

$$A = \frac{17}{4} \times 4 = 17 \text{ cm}^2$$