I Les limites possibles d'une fonction

Une fonction peut avoir plusieurs limites dans différents cas, différents comportements sont possibles à chaque limite.

Ⓐ La limite d'une fonction en $+\infty$

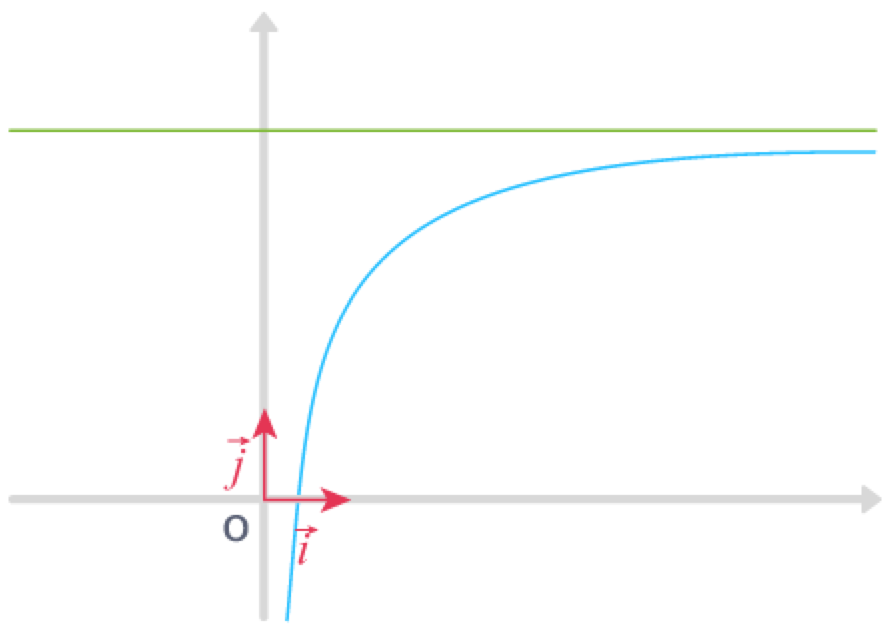
Lorsque la variable d'une fonction devient très grande, le comportement de la fonction peut être de plusieurs types.

DÉFINITION Limite finie en $+\infty$

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que la **fonction** f **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si, pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, il existe un réel x_0 tel que :

si $x \geq x_0$, alors $f(x) \in I$



PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

EXEMPLE

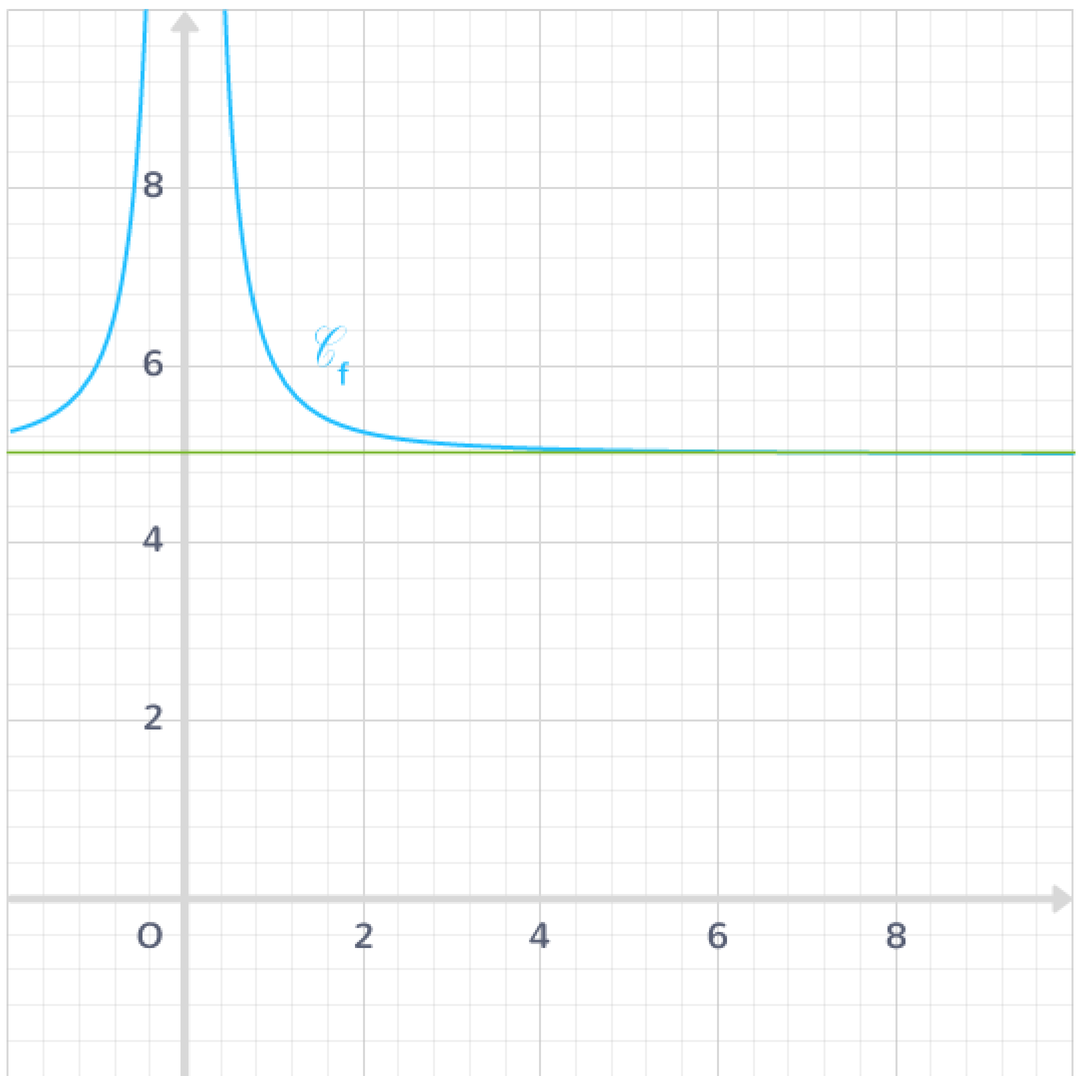
$\lim_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x^2}\right) = 5$

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

EXEMPLE

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x^2}\right) = 5$, donc la droite d'équation $y = 5$ est asymptote à la courbe de la fonction $f : x \mapsto 5 + \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

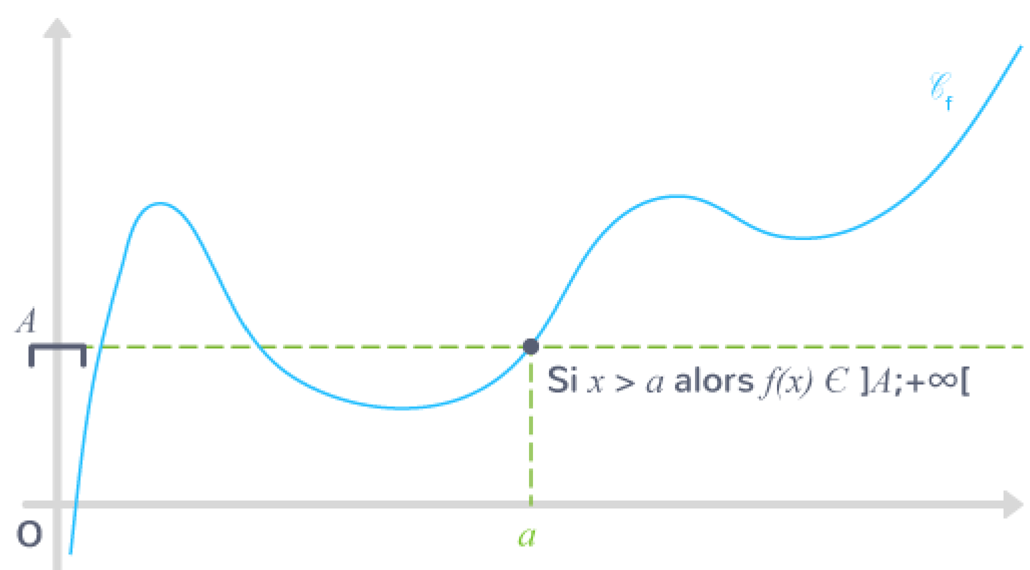


DÉFINITION **Limite $+\infty$ en $+\infty$**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que la **fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** si, pour tout réel A, il existe un réel a tel que :

$$\text{si } x \geq a\text{, alors } f(x) > A$$



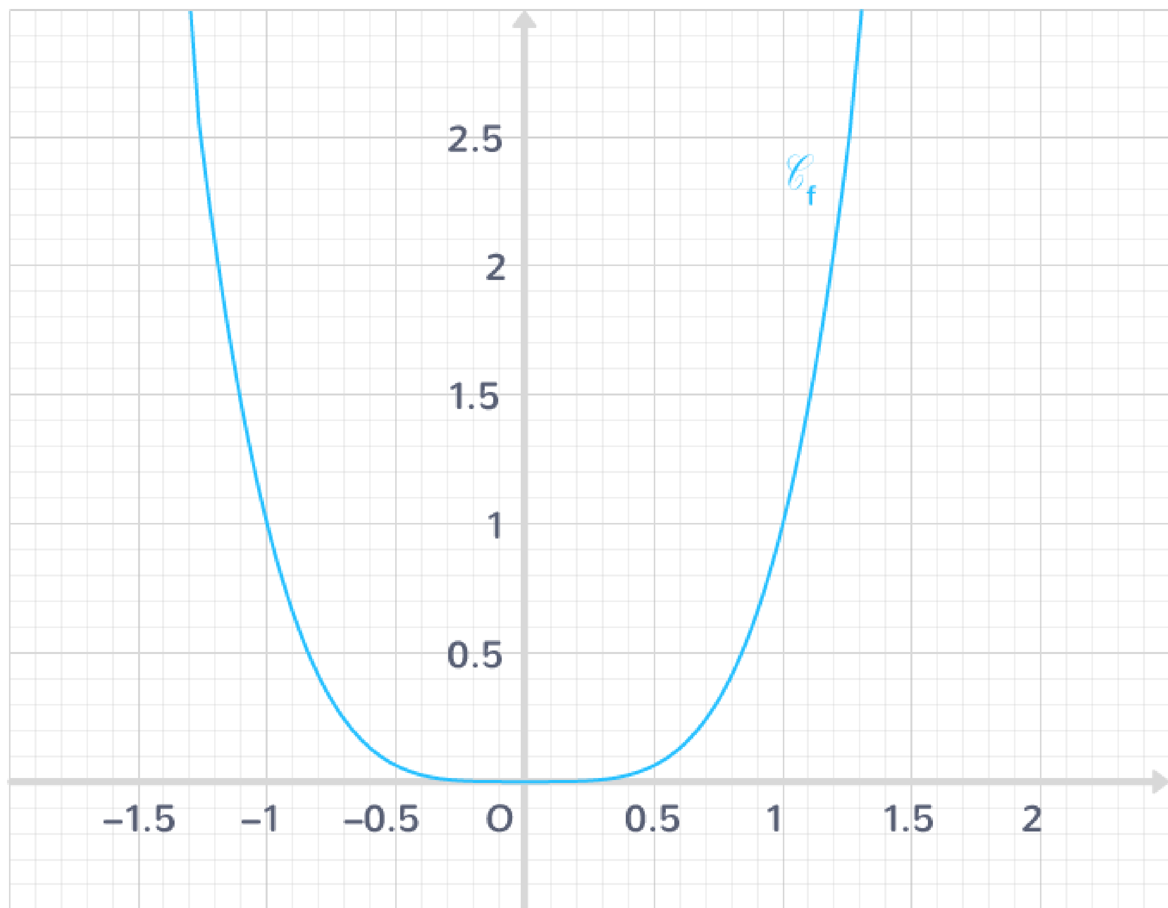
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^4\right) = +\infty$$

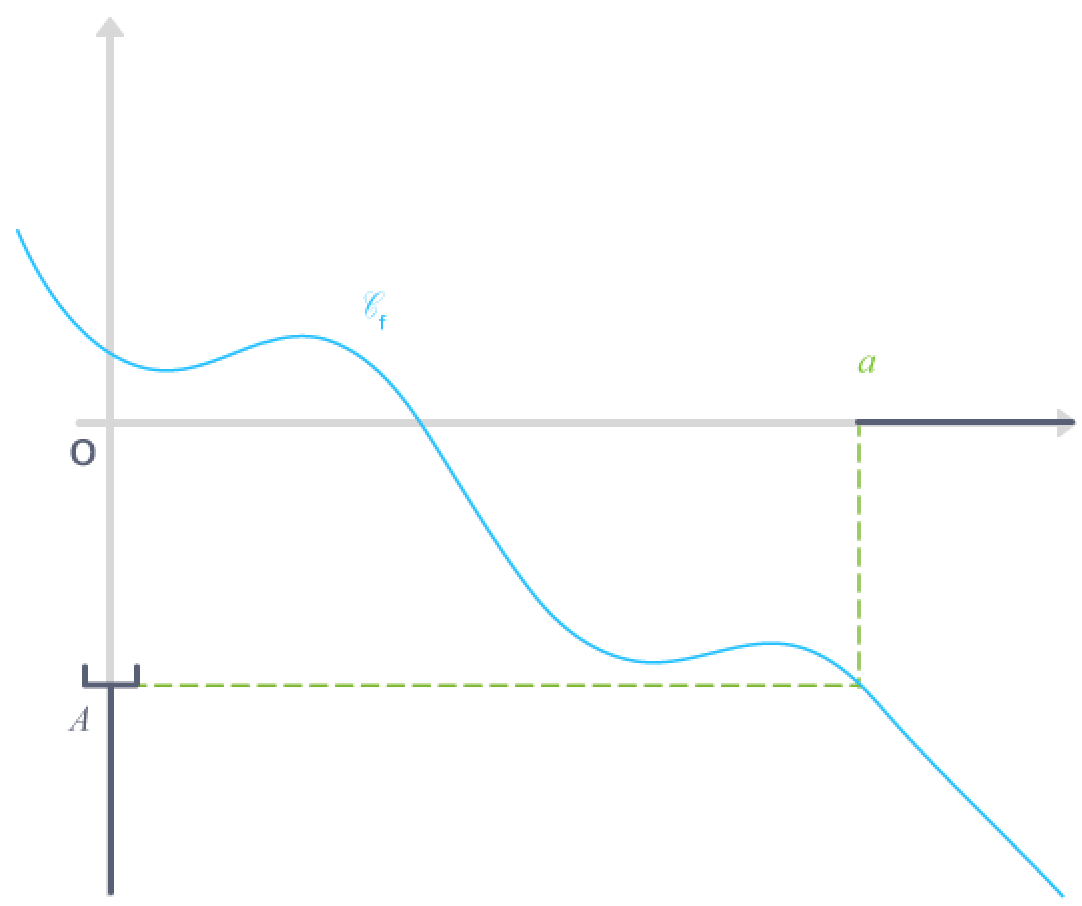


DÉFINITION **Limite $-\infty$ en $+\infty$**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** si, pour tout réel A, il existe un réel a tel que :

si $x \geq a$, alors $f(x) < A$



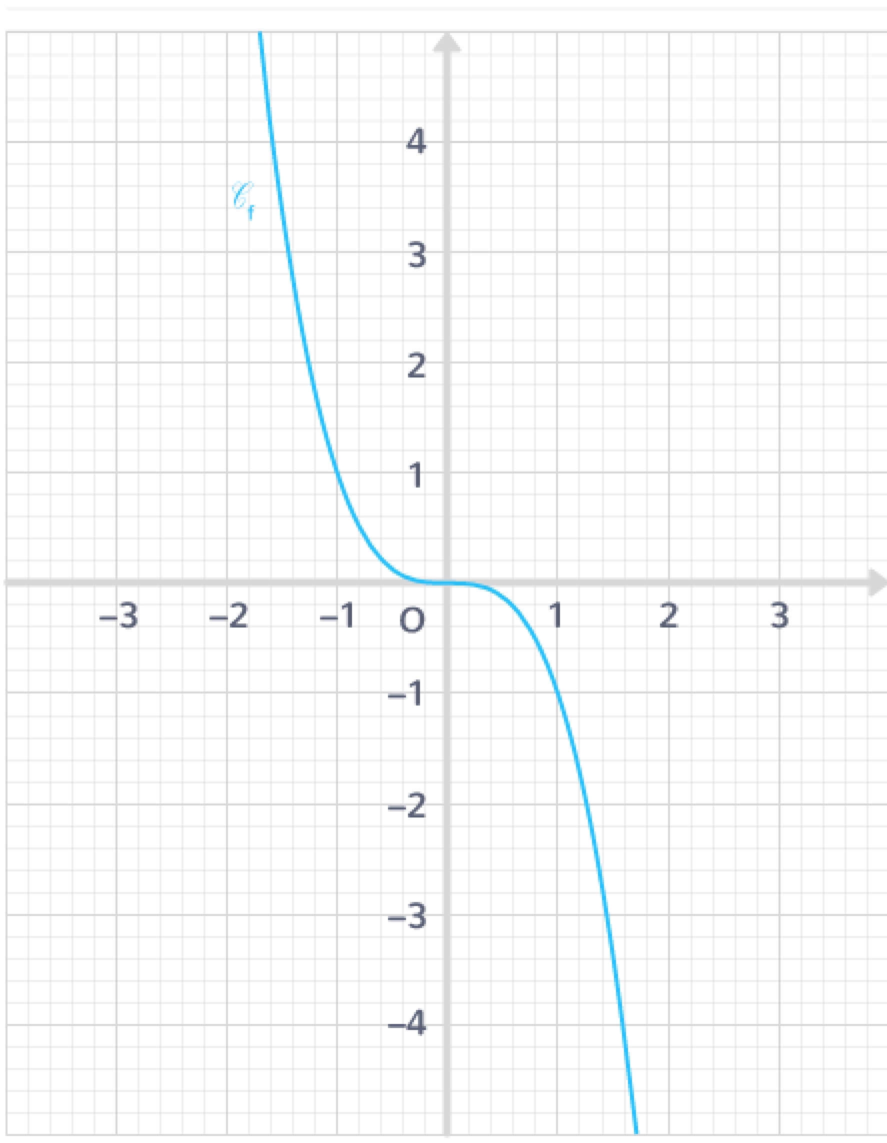
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$$

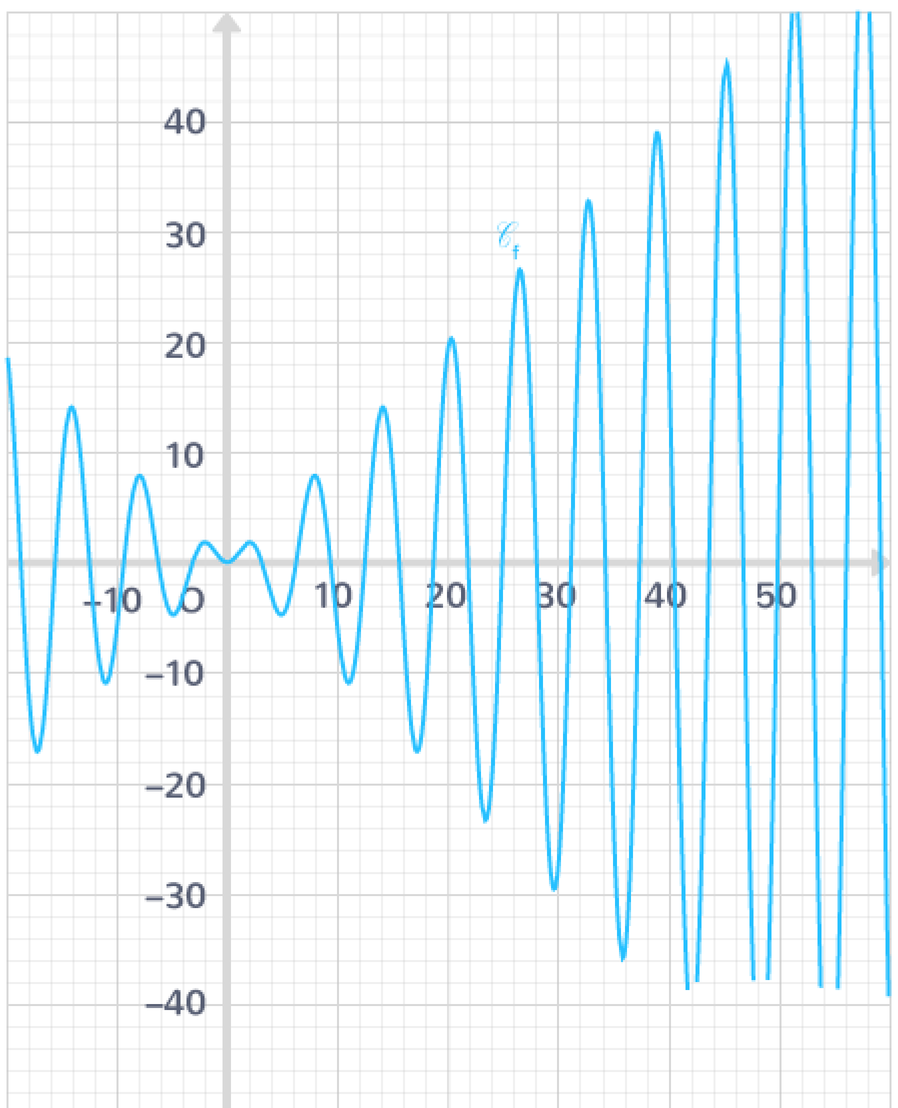


REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$.

EXEMPLE

La fonction $f : x \mapsto x \times \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.



B La limite d'une fonction en $-\infty$

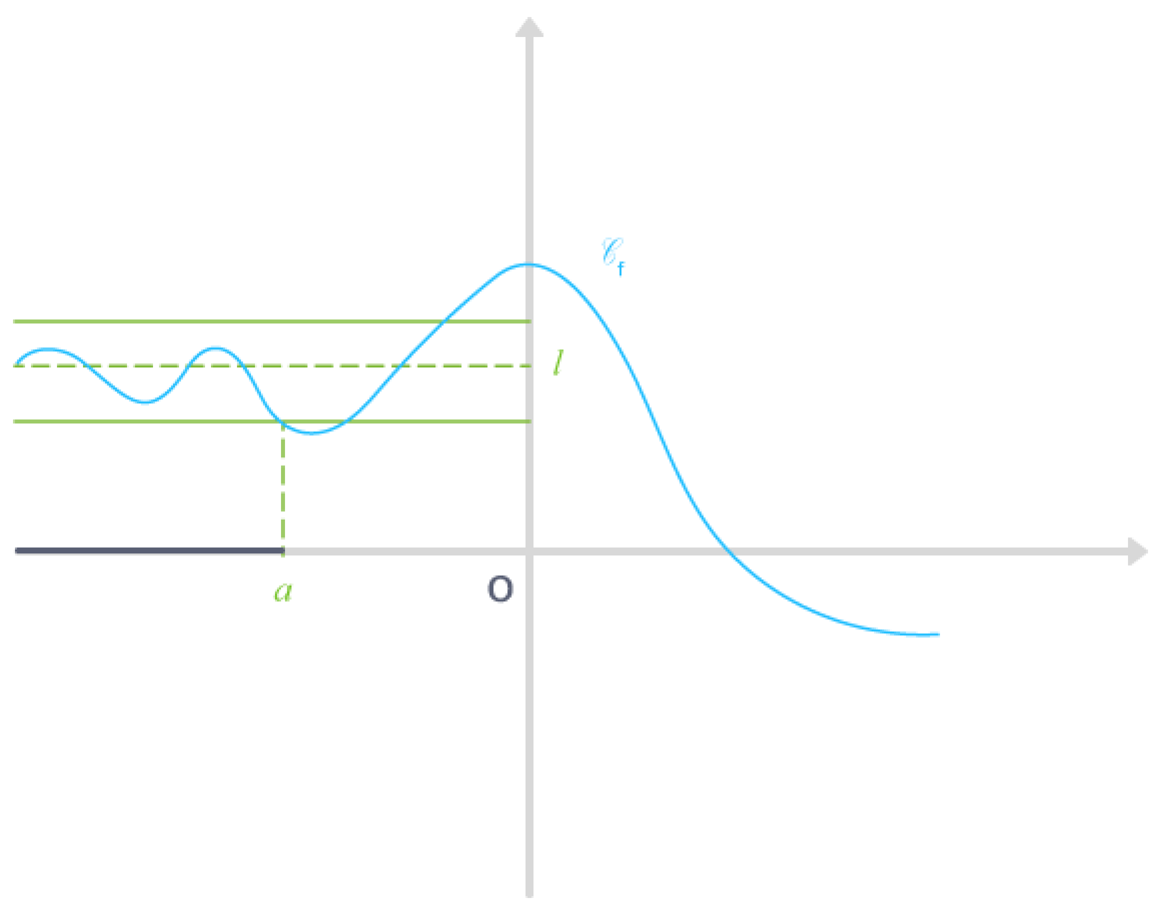
Lorsque la variable d'une fonction devient proche de $-\infty$ (négative et très grande en valeur absolue), le comportement de la fonction peut être de plusieurs types.

DÉFINITION Limite finie en $-\infty$

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$** si, pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, il existe un réel a tel que :

si $x \leq a$, alors $f(x) \in I$



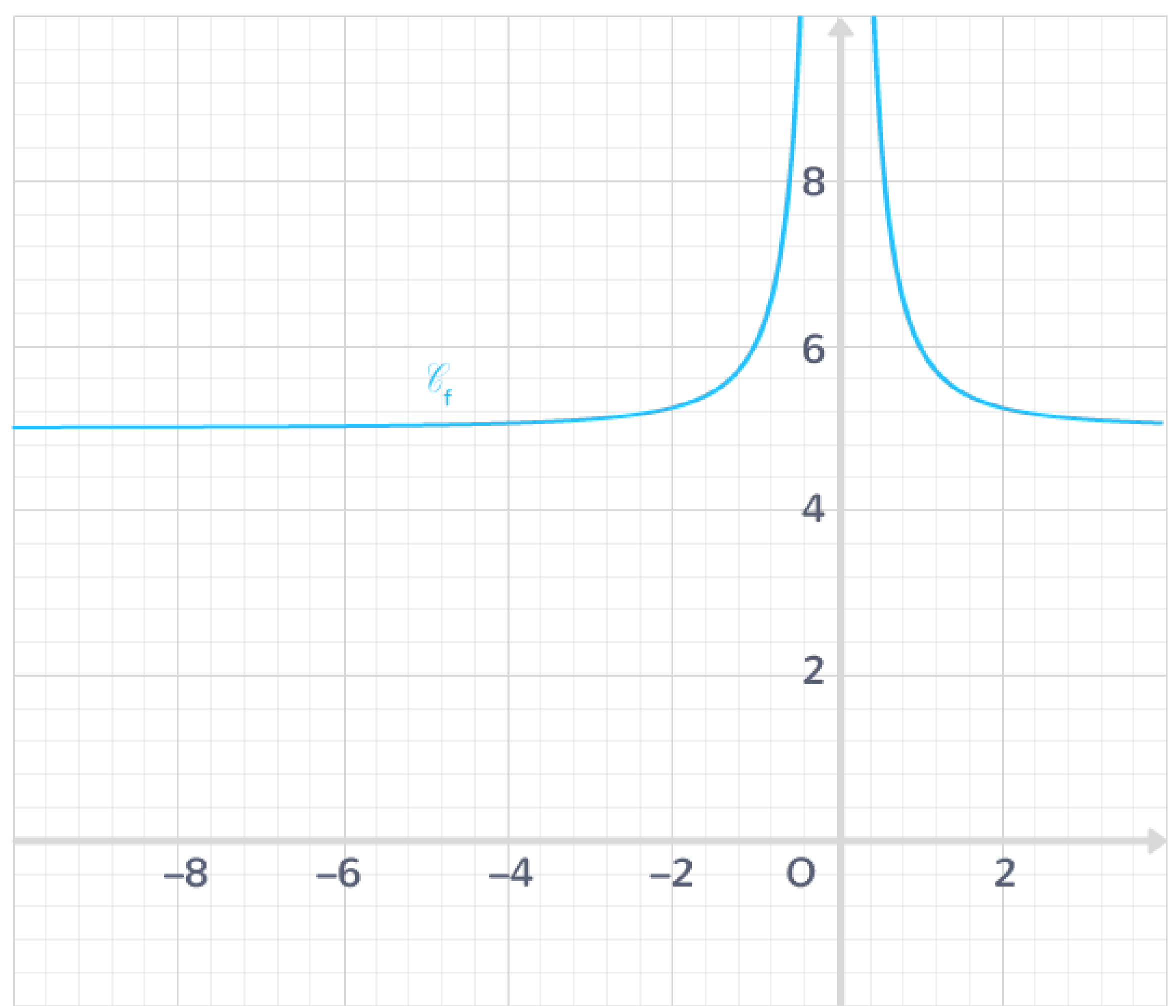
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to -\infty} \left(5 + \frac{1}{x^2}\right) = 5$$

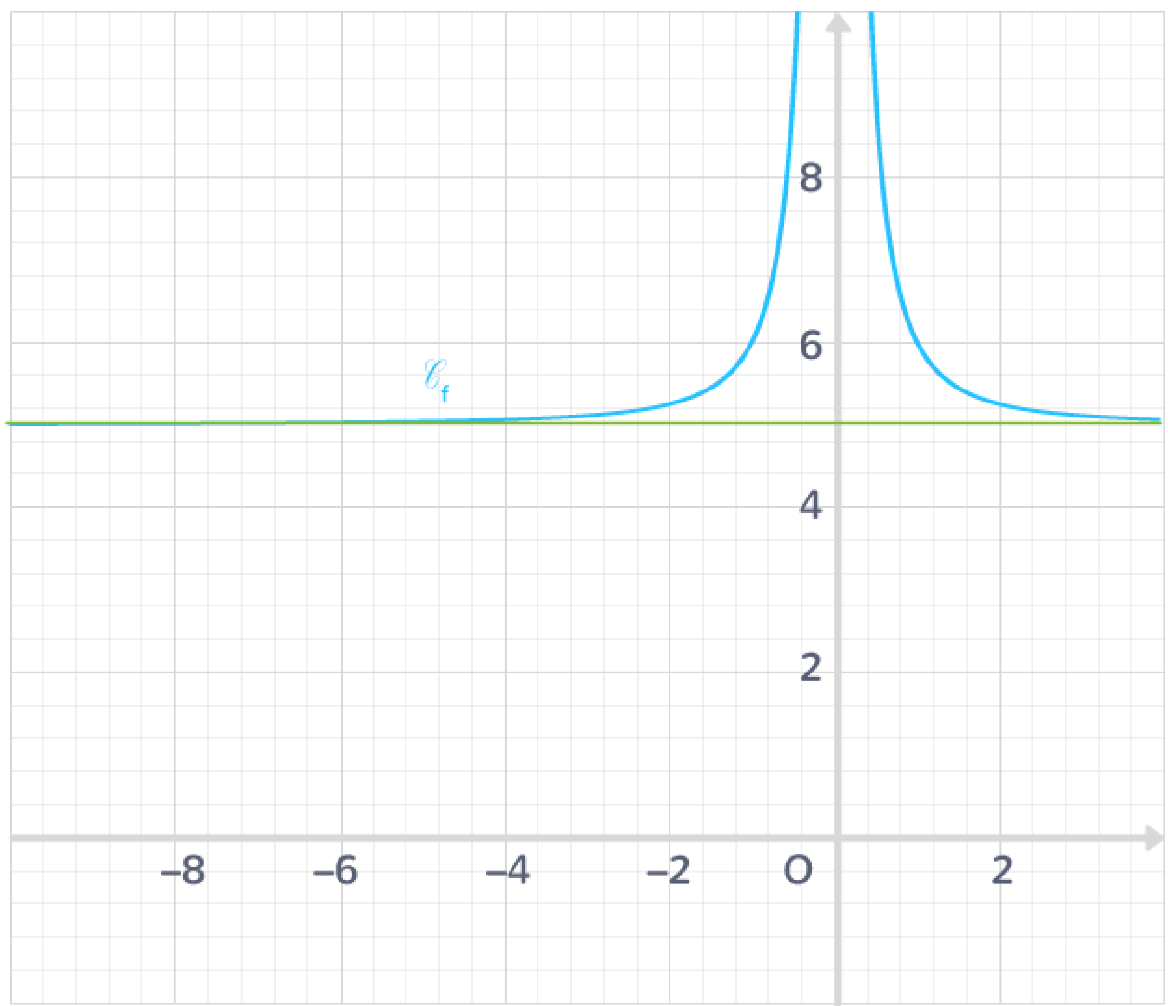


PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, alors la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

EXEMPLE

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5+\frac{1}{x^2}\right)=5$, donc la droite d'équation $y=5$ est asymptote à la courbe de la fonction $f:x\mapsto 5+\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $-\infty$.

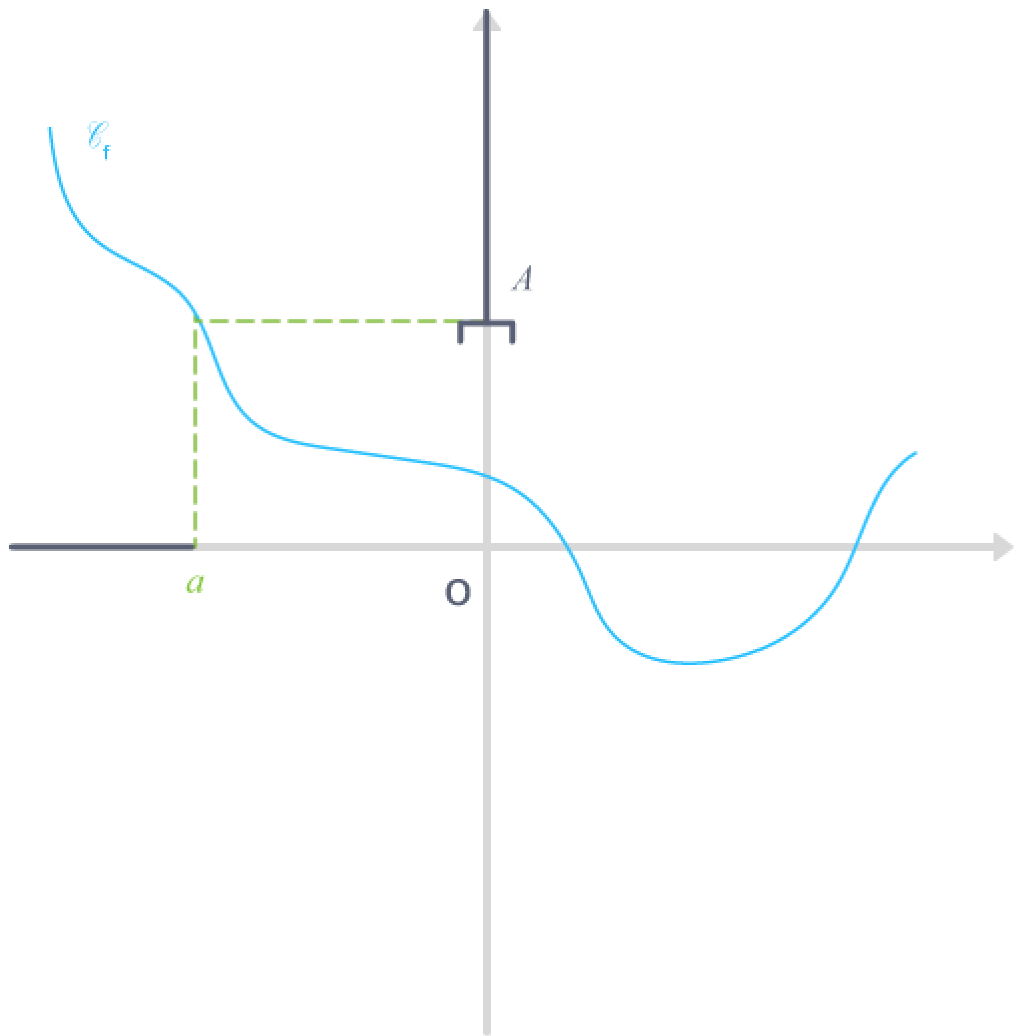


DÉFINITION **Limite $+\infty$ en $-\infty$**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$** si, pour tout réel A, il existe un réel a tel que :

$$\text{si } x\leq a\text{, alors } f(x)>A$$



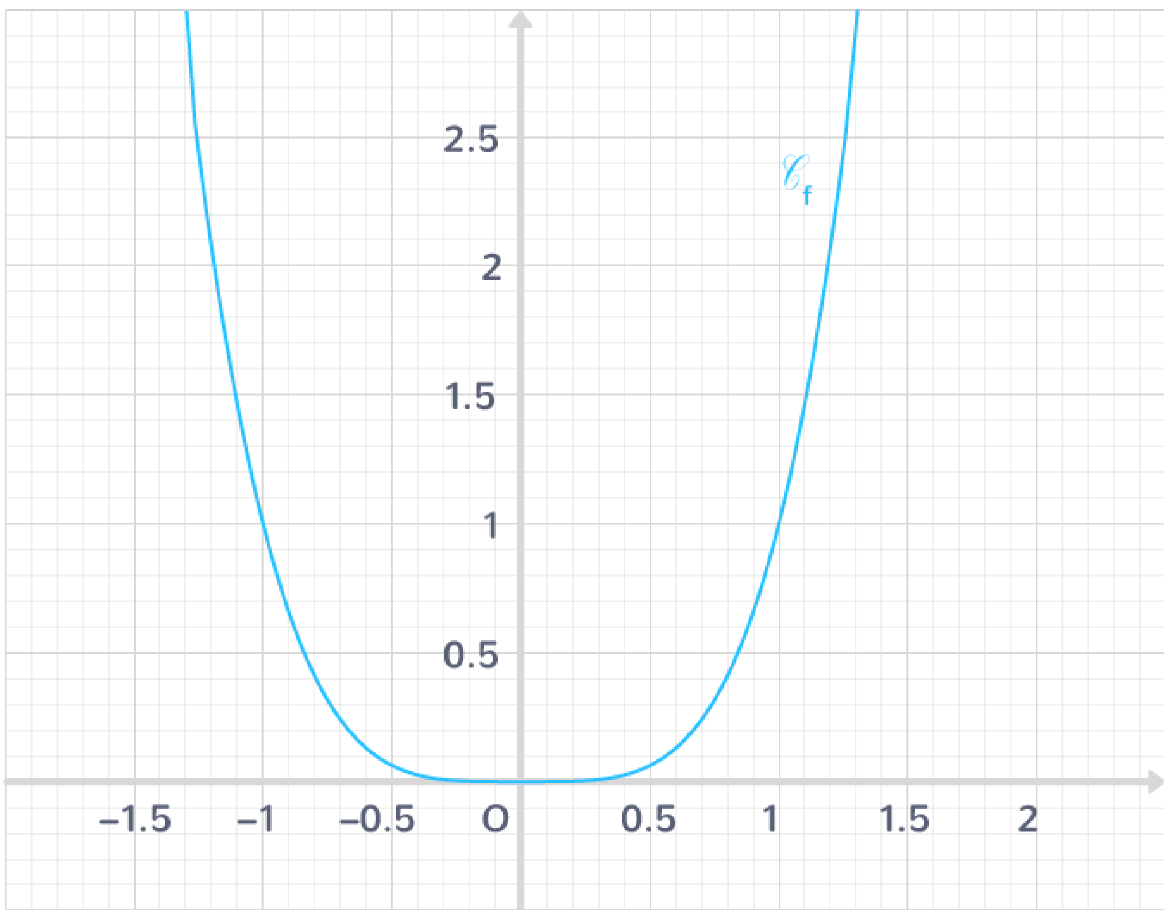
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^4\right) = +\infty$$

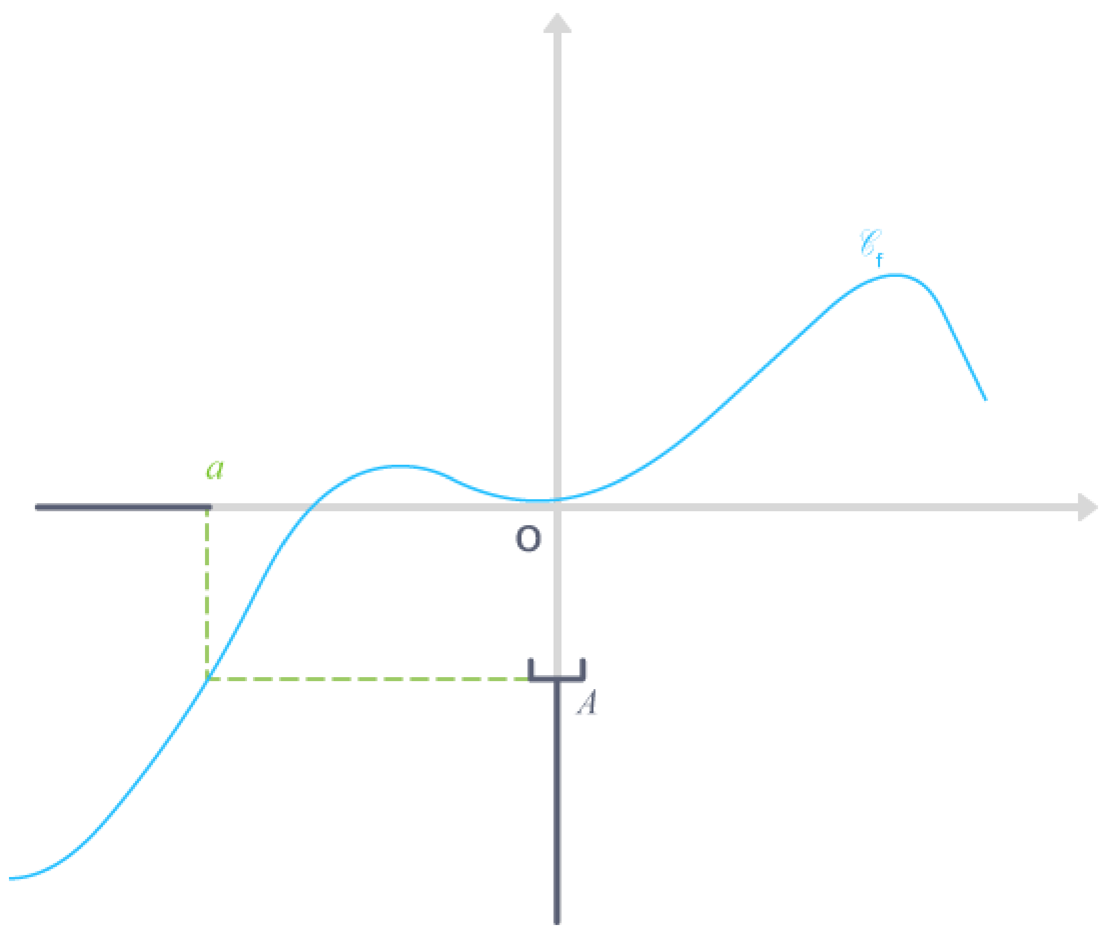


DÉFINITION **Limite $-\infty$ en $-\infty$**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$** si, pour tout réel A, il existe un réel a tel que :

$$\text{si } x \leq a, \text{ alors } f(x) < A$$



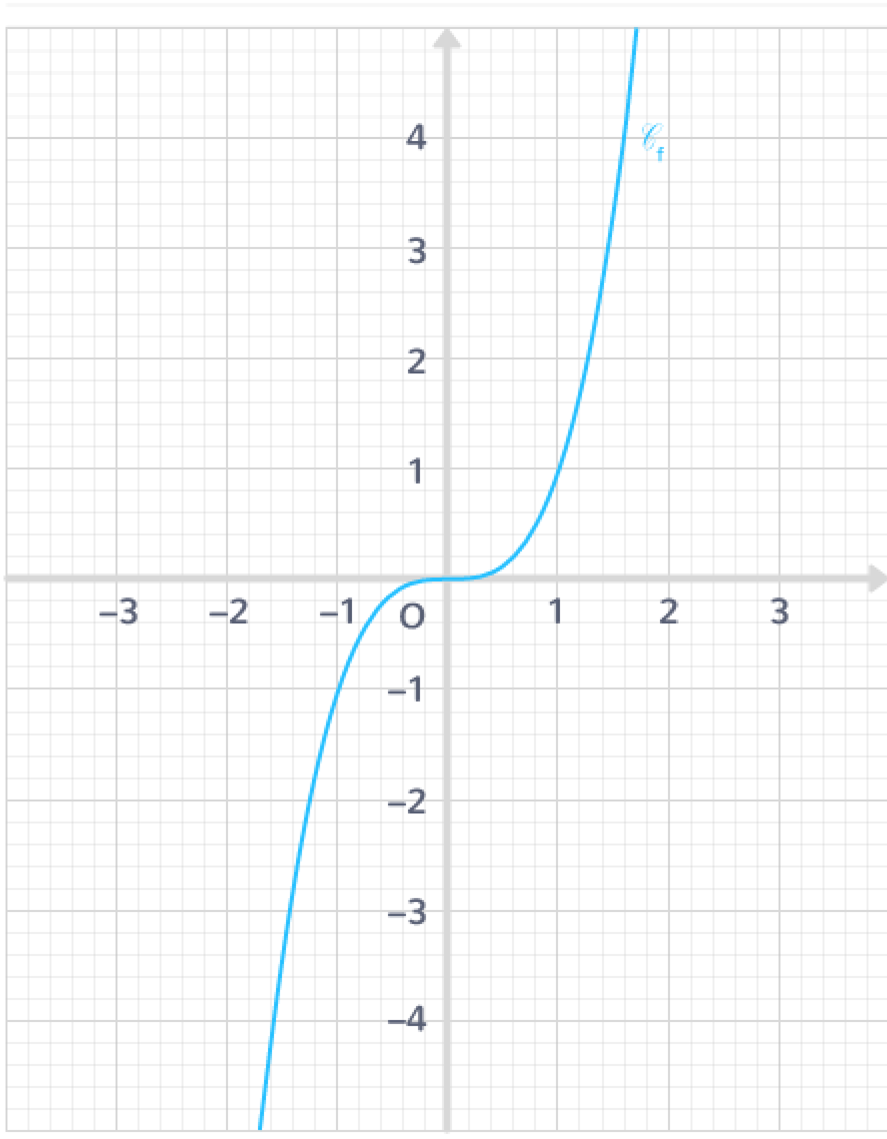
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^5\right) = -\infty$$

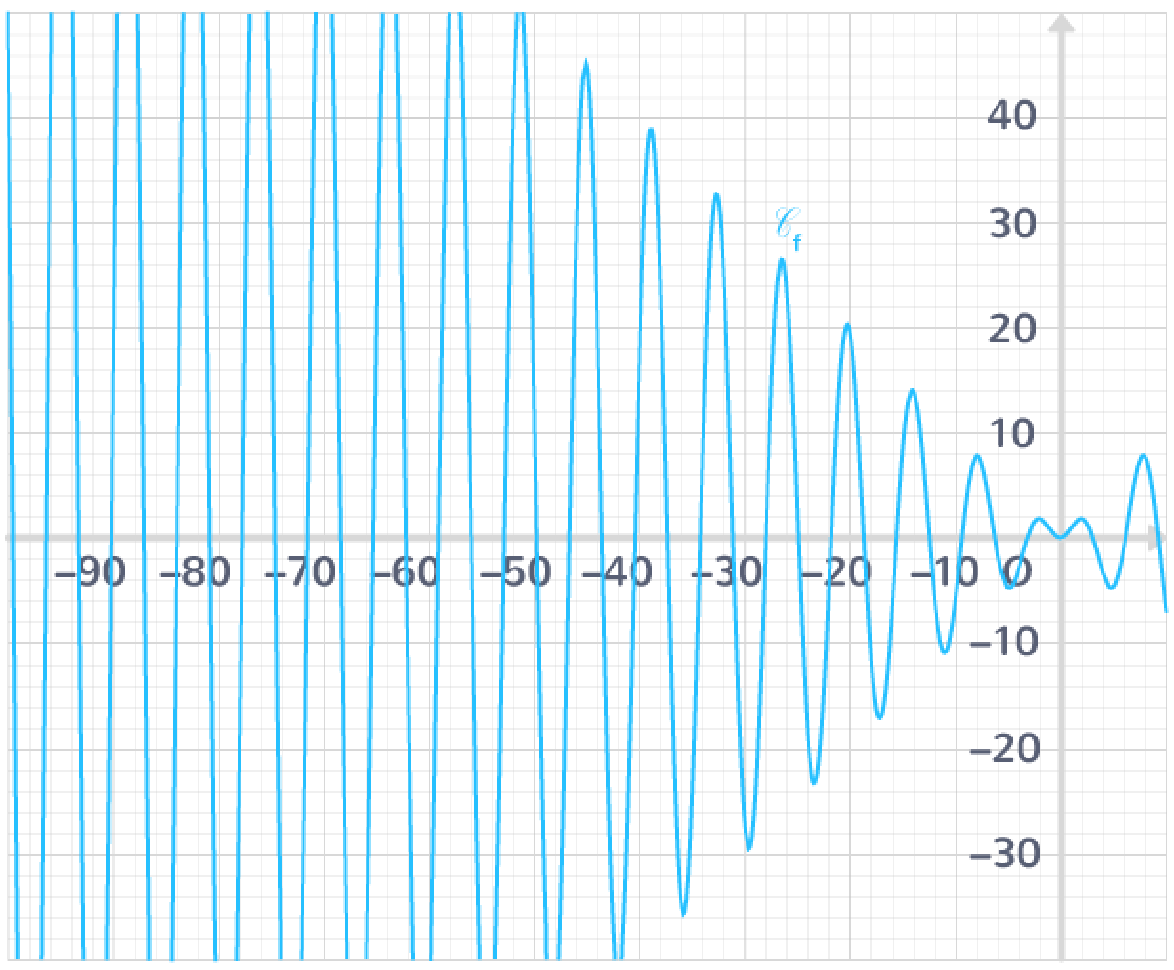


REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $-\infty$.

EXEMPLE

La fonction $f : x \mapsto x \times \sin(x)$ n'admet pas de limite en $-\infty$.



C La limite d'une fonction en un point

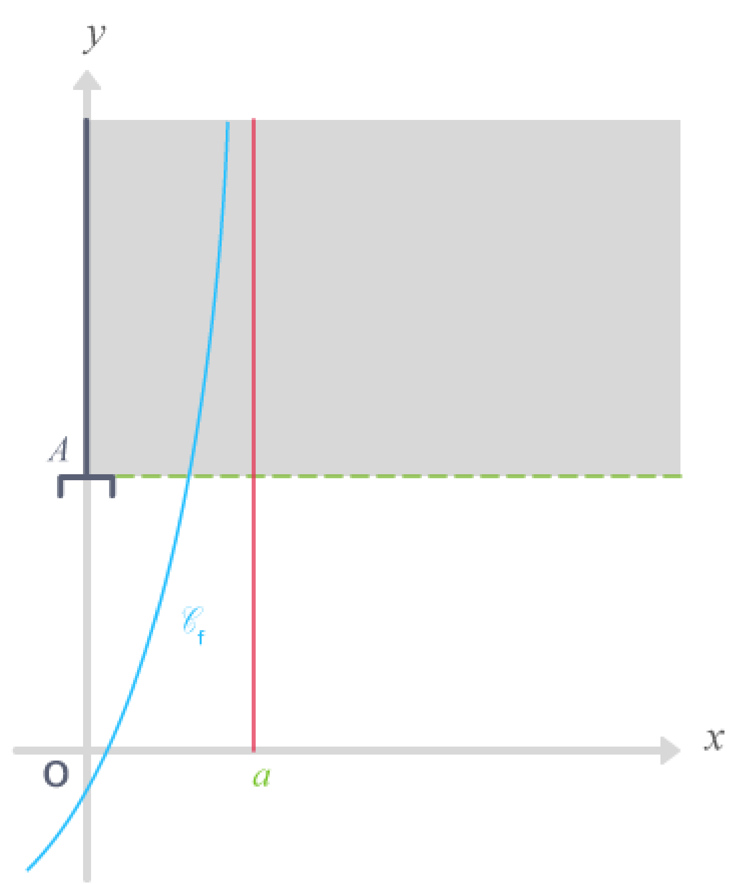
Lorsque la variable d'une fonction devient proche d'un réel, le comportement de la fonction peut être de plusieurs types, notamment lorsque le réel constitue une valeur interdite de la fonction.

DÉFINITION **Limite $+\infty$ en a**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a** si, pour tout réel A, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$\text{si } x \in I, \text{ alors } f(x) > A$$



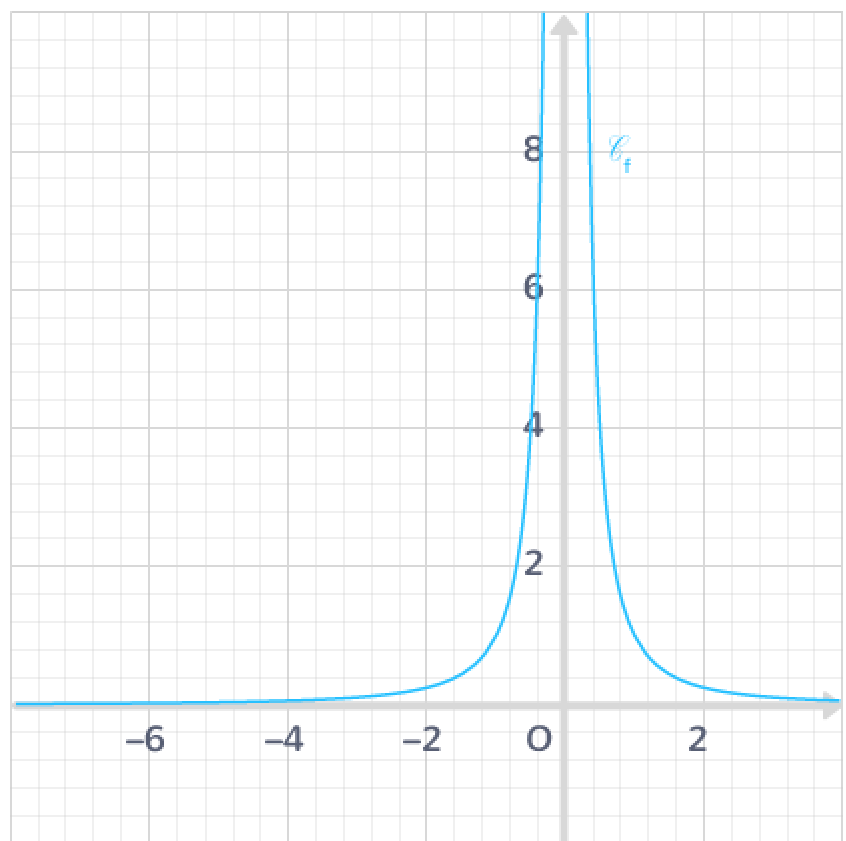
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

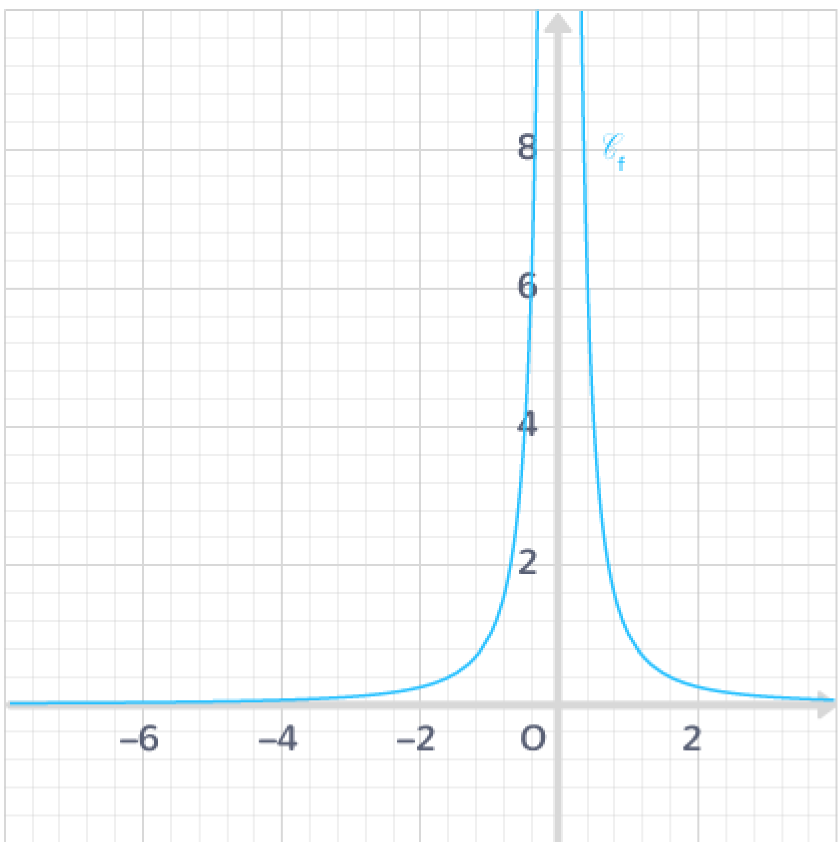


PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f.

EXEMPLE

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

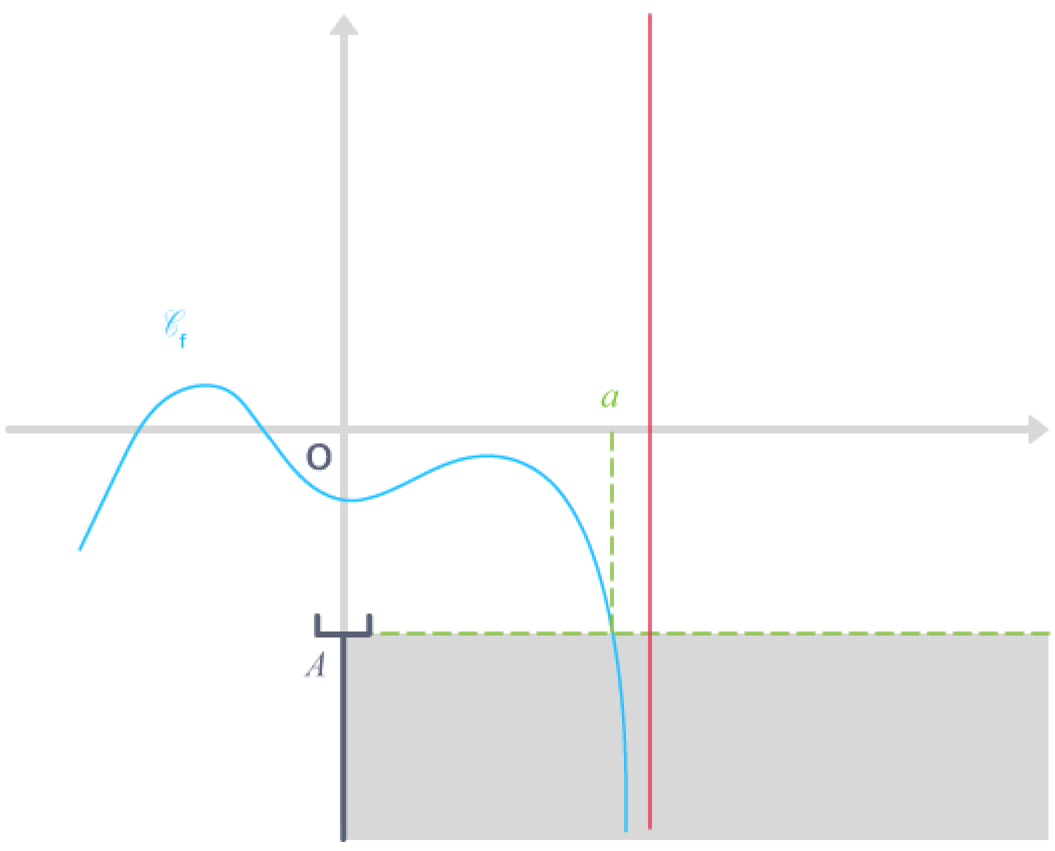


DÉFINITION **Limite $-\infty$ en a**

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a** si, pour tout réel A, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$\text{si } x \in I \text{, alors } f(x) < A$$



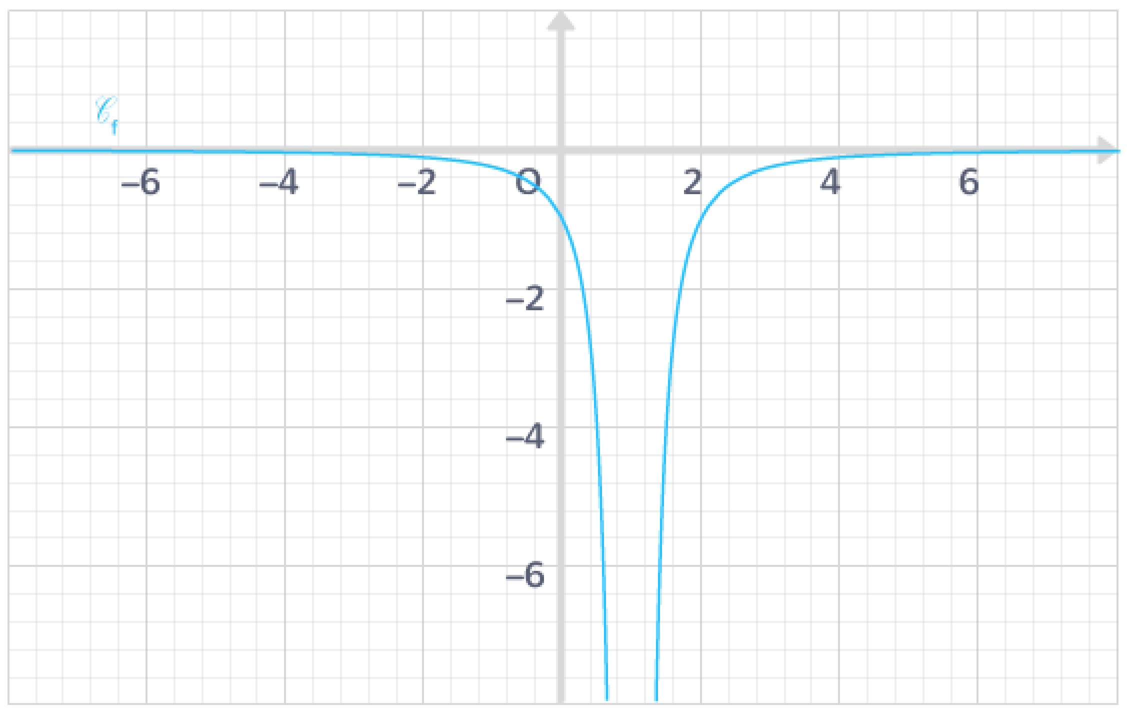
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, on note :

$$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$$

EXEMPLE

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$

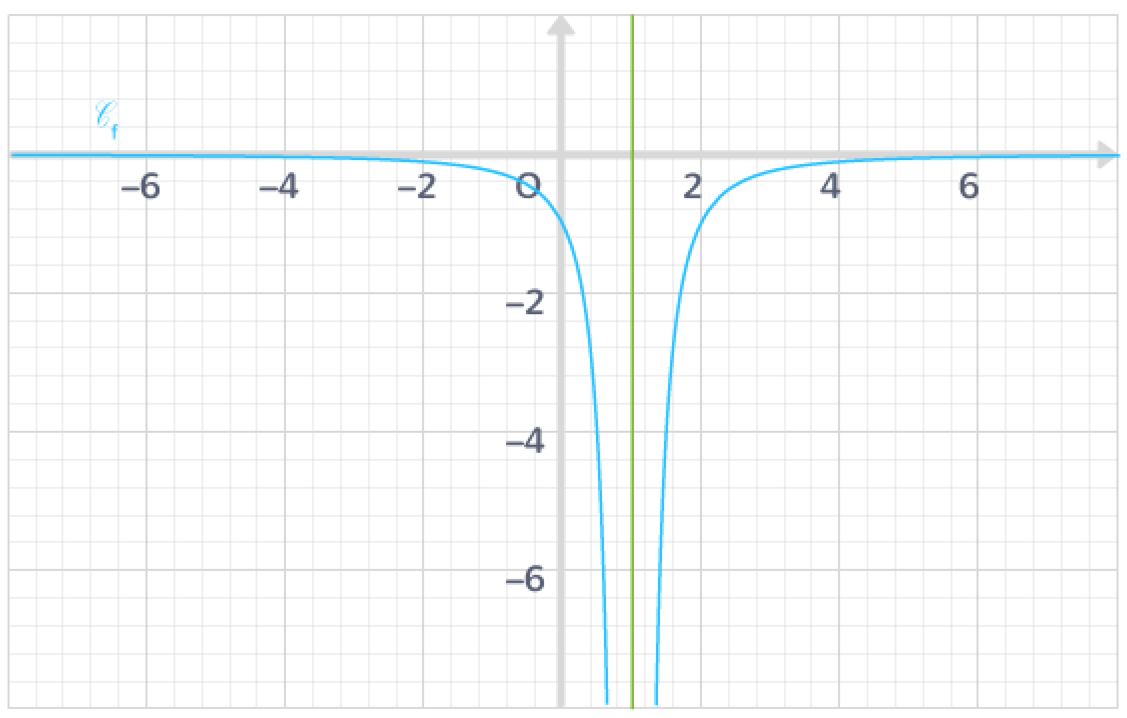


PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f.

EXEMPLE

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

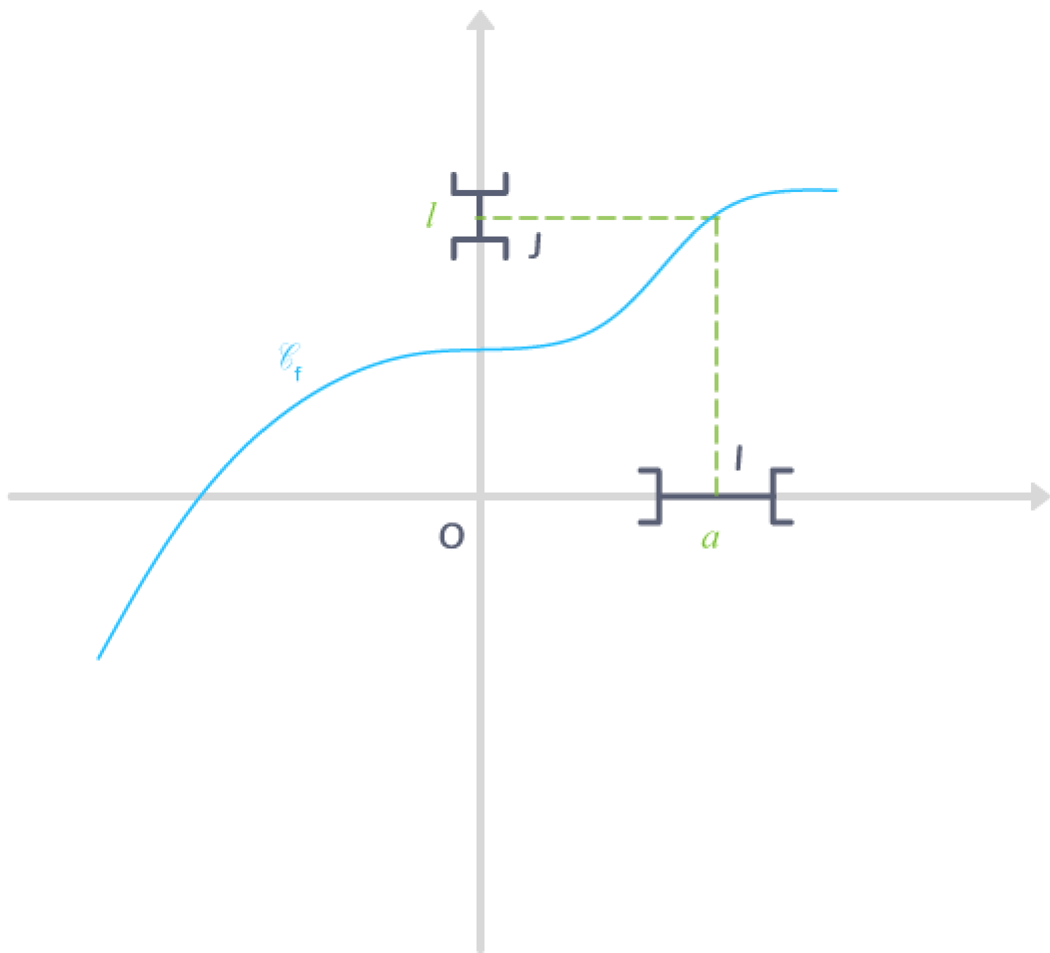


DÉFINITION Limite ℓ en a

Soit f une fonction de la variable réelle x.

On dit que **la fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers a** si, pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$\text{si } x \in I, \text{ alors } f(x) \in J$$



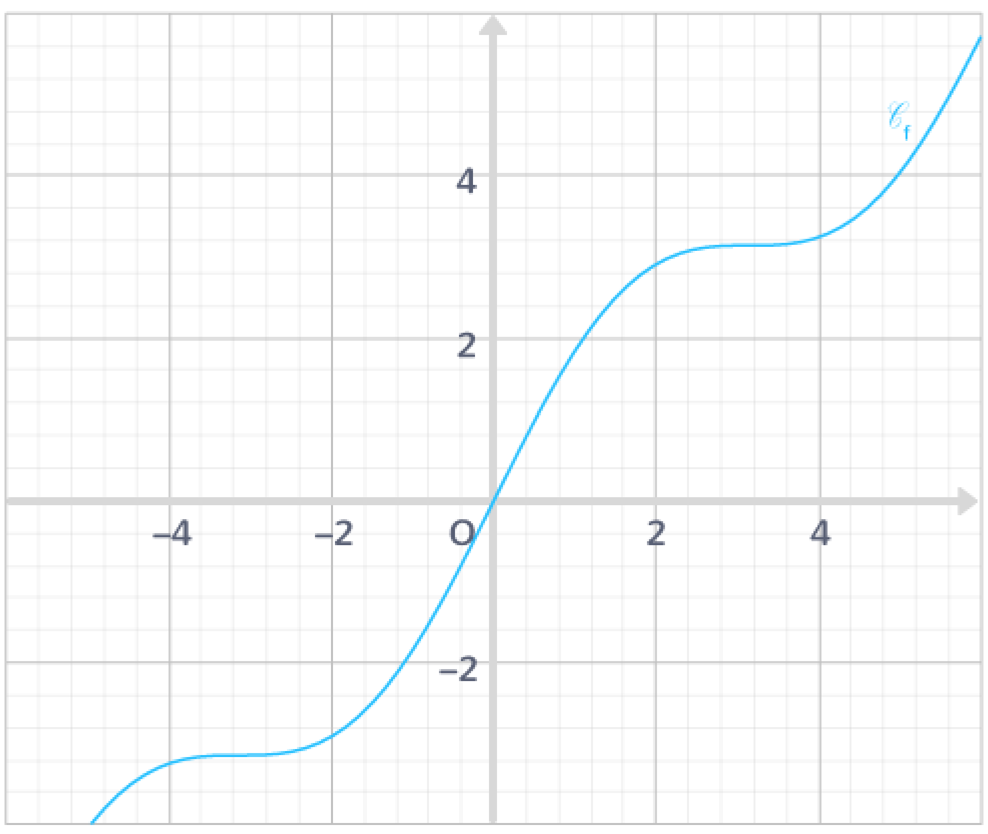
PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

EXEMPLE

$$\lim_{x \to 0} sin(x) + x = 0$$



REMARQUE

Il existe des cas importants de fonctions où les limites « à gauche » et « à droite » d'un réel a sont différentes.

EXEMPLE

Avec $\lfloor x \rfloor$ pour la partie entière du réel x, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \lfloor x \rfloor = 4$$

mais $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \lfloor x \rfloor = 5$.

PROPRIÉTÉ

Soit une fonction f de la variable réel x.

- Pour la limite « à gauche » de la fonction f en un réel a, on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
- Pour la limite « à droite » de la fonction f en un réel a, on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

EXEMPLE

Avec $\lfloor x \rfloor$ pour la partie entière du réel x, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \lfloor x \rfloor = 4$$

On peut également écrire :

$$\lim_{x \to 5^-} \lfloor x \rfloor = 4$$

II La comparaison de limites

Afin d'étudier les limites de certaines fonctions compliquées, on peut comparer ces fonctions à des fonctions dont on connaît le comportement par un encadrement ou une inégalité.

THÉORÈME **Théorème de comparaison**

a désigne $-\infty$, $+\infty$ ou un réel.

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I pour lequel a est une borne de l'intervalle ou appartient à l'intervalle.

- Si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

EXEMPLE

En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x$, on en déduit le signe de $\mathrm{e}^x - x$.

On obtient que pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^x \geq x$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

THÉORÈME **Théorème des gendarmes**

a désigne $-\infty$, $+\infty$ ou un réel et ℓ désigne un réel.

Soient f, g et h trois fonctions réelles définies sur un intervalle I pour lequel a est une borne de l'intervalle ou appartient à l'intervalle.

Si pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

EXEMPLE

Soient f, g et h les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{x}, \ g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } h(x) = \frac{1}{x}$$

Comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout réel x, on obtient :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ pour tout réel } x > 0$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

III Les opérations de limites

La plupart des fonctions qui servent en modélisation mathématique ne sont pas des fonctions usuelles, mais elles peuvent être composées de plusieurs fonctions usuelles réunies par des opérations de base.

Ⓐ Les limites d'une somme

Une fonction peut être la somme de deux (ou plus) fonctions. Dans de nombreux cas, l'étude des limites des deux fonctions la composant permet d'obtenir la limite cherchée de la fonction de départ.

PROPRIÉTÉ

On note FI une forme « indéterminée », c'est-à-dire une forme pour laquelle la connaissance des limites et de l'opération ne suffit par pour conclure.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions réelles.

L et L' désignent deux réels.

α désigne un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

On a alors le tableau suivant :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f+g)(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to0} \sin(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \cos(x) = 1$

Donc, par somme, on obtient :

$\lim\limits_{x\to0} \left(\sin(x) + \cos(x)\right) = 1$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$

Donc, par somme, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \text{e}^x\right) = +\infty$

Ⓑ Les limites d'un produit

Une fonction peut être le produit de deux (ou plus) fonctions. Dans de nombreux cas, l'étude des limites des deux fonctions la composant permet d'obtenir la limite cherchée de la fonction de départ.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions réelles.

L et L' désignent deux réels.

α désigne un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

On a alors le tableau suivant :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L \in \mathbb{R}$	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f \times g)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$

Donc, par produit, on obtient :

$\lim\limits_{x \to 0} (\sin(x) \times \cos(x)) = 0$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Donc, par produit, on obtient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x\mathrm{e}^x) = +\infty$

C Les limites d'un quotient

Une fonction peut être le quotient de deux (ou plus) fonctions. Dans de nombreux cas, l'étude des limites des deux fonctions la composant permet d'obtenir la limite cherchée de la fonction de départ.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions réelles.

L et L' désignent deux réels.

α désigne un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

On a alors le tableau suivant :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L \in \mathbb{R}$	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$L' \in \mathbb{R}$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f}{g}(x) =$	$\frac{L}{L'}$	0^+	0^-	0^-	0^+	FI	0	$\pm\infty$	FI

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$

Donc, par quotient, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

EXEMPLE

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

Donc, par quotient, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

D Les limites d'une fonction composée

Une fonction peut être la composée de deux (ou plus) fonctions. Dans de nombreux cas, l'étude des limites des deux fonctions la composant permet d'obtenir la limite cherchée de la fonction de départ.

PROPRIÉTÉ

a, b et c désignent des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.

Soient f et g deux fonctions réelles.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors :

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$$

EXEMPLE

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On a $h(x) = g(f(x))$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \sin(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

Par composition, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

Soit :

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

IV Les limites des fonctions usuelles

Pour être capable de déterminer des limites de fonctions, il faut connaître les limites des fonctions usuelles.

A Les fonctions affines

Parmi les fonctions usuelles les plus « simples », on trouve les fonctions affines dont les limites ne comportent pas beaucoup de cas différents.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $a = 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

EXEMPLE

Soit f la fonction affine $x \mapsto 3x - 7$.

$f(x)$ est du type $ax + b$ avec $a = 3$.

Comme $a = 3 > 0$, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

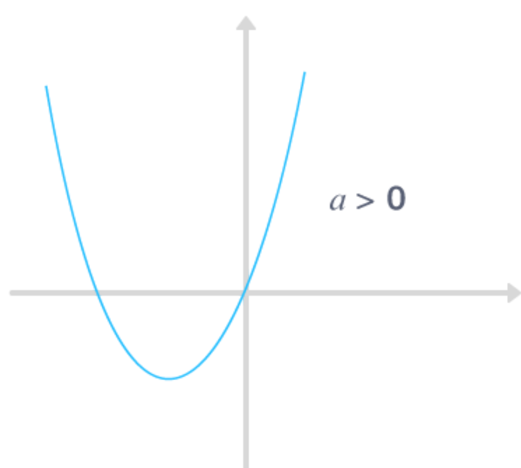
B Les fonctions polynômes du second degré

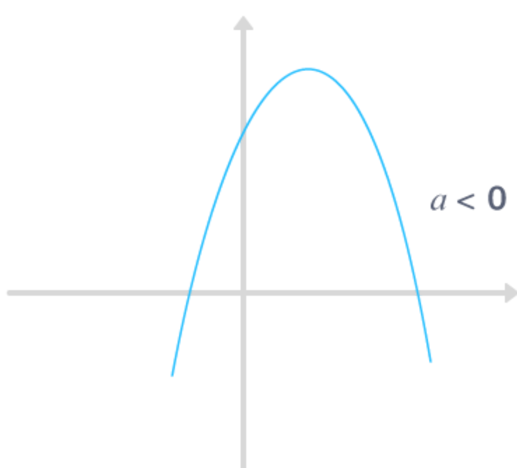
Les fonctions polynômes du second degré sont des fonctions usuelles fréquemment utilisées. Il est donc essentiel de connaître leurs limites.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$).

- Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.





EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto -5x^2 + 3x$.

$f(x)$ est du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 3$ et $c = 0$.

Comme $a < 0$, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

C La fonction racine carrée

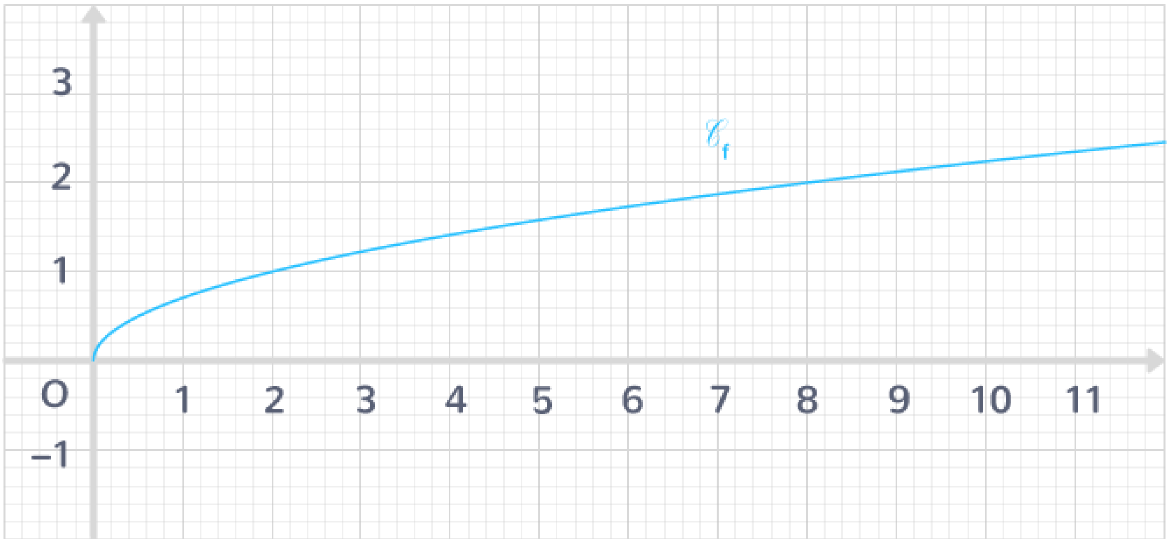
La fonction racine carrée a un comportement aux bornes de son ensemble de définition qui découle du comportement de la fonction carré.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction racine carrée.

On a :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



D La fonction cube

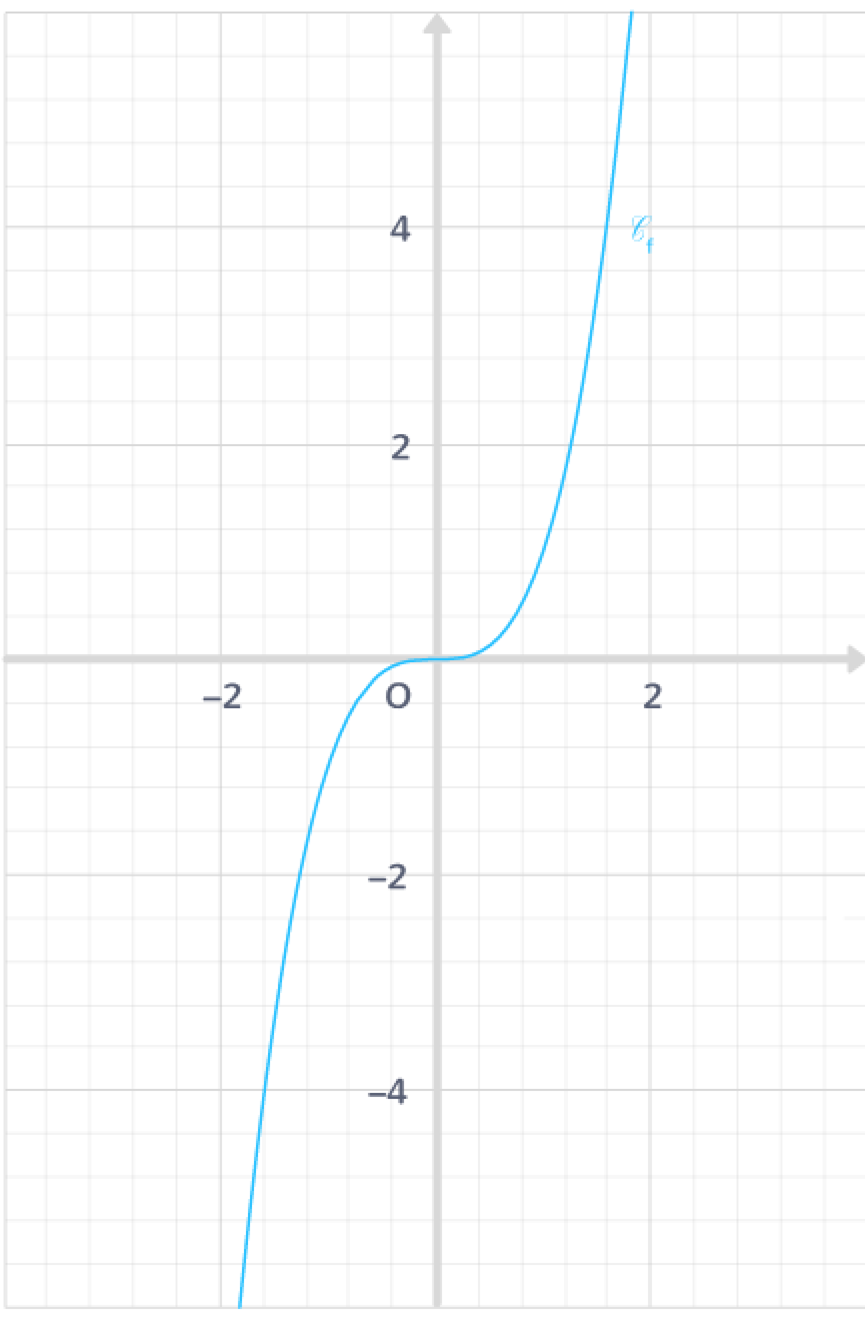
La fonction cube est également une fonction dont le comportement aux bornes de son ensemble de définition est à connaître.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction cube.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



E La fonction inverse

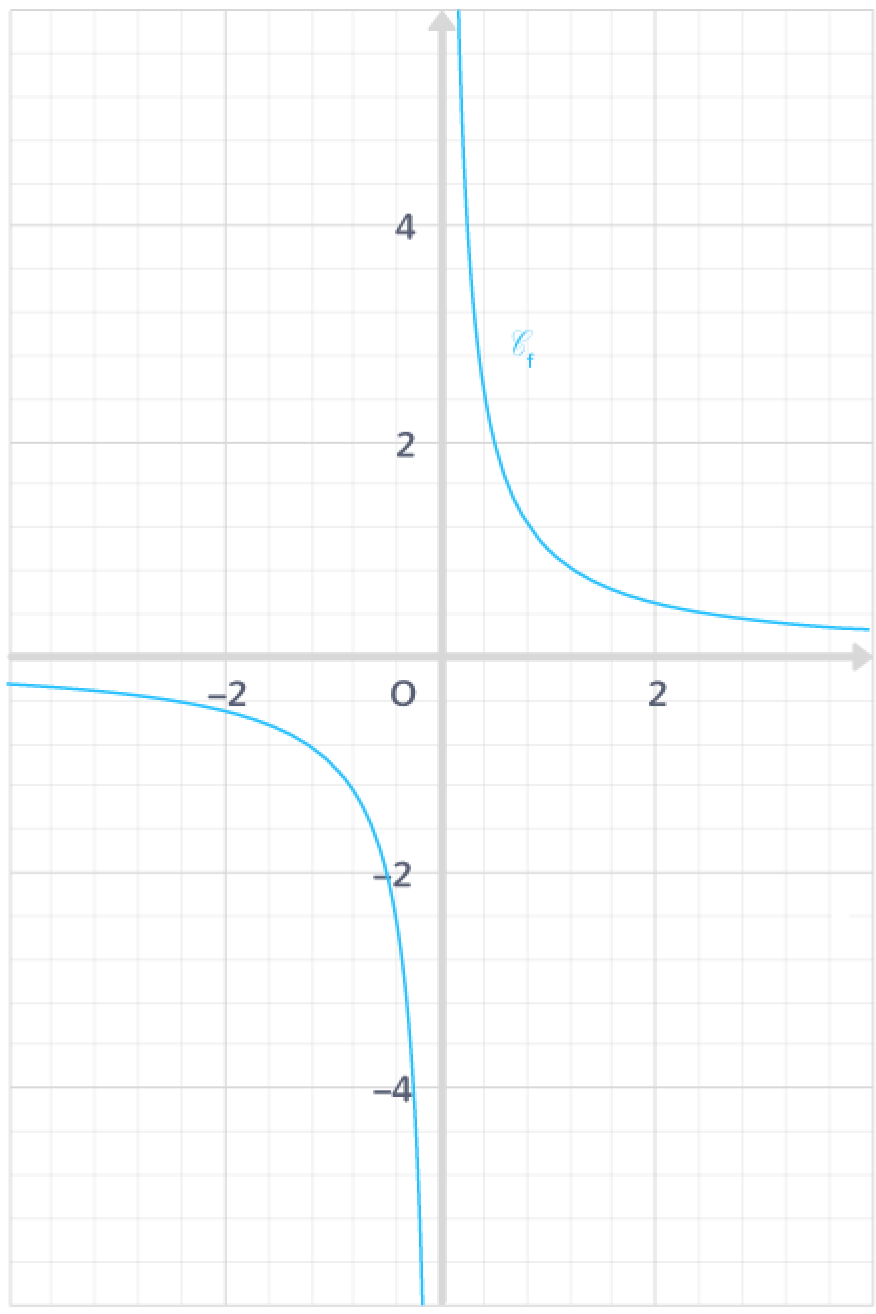
La fonction inverse est également une fonction dont le comportement aux bornes de son ensemble de définition est à connaître.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction inverse.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



Ⓕ La fonction valeur absolue

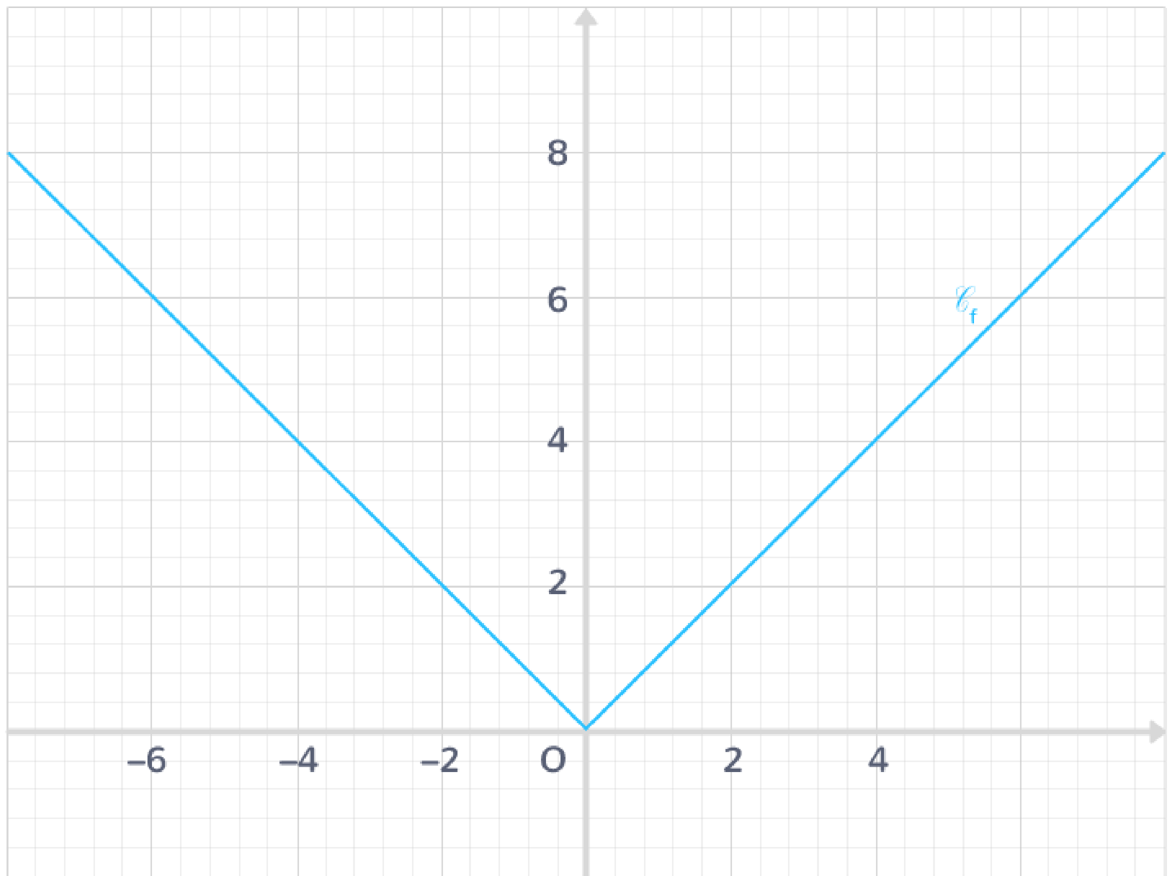
La fonction valeur absolue, réunissant les restrictions de deux fonctions affines, est également une fonction dont le comportement aux bornes de son ensemble de définition est à connaître.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction valeur absolue.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ⓖ La fonction exponentielle

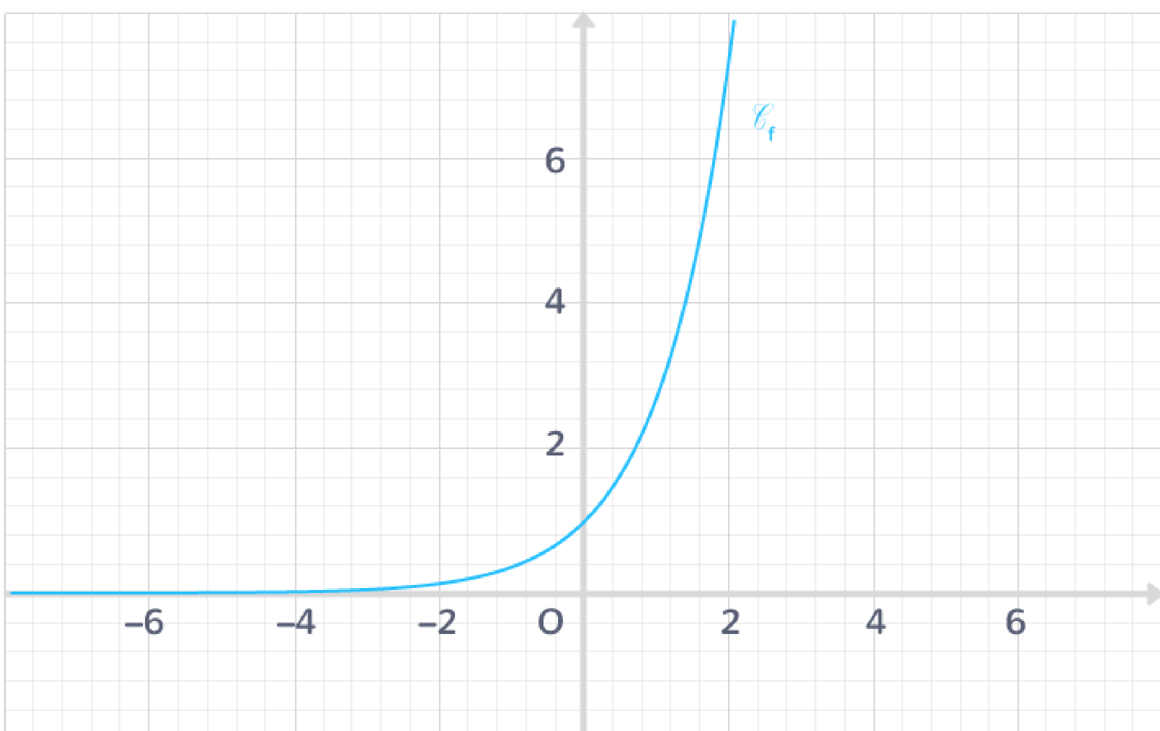
La fonction exponentielle est également une fonction dont il faut connaître le comportement aux bornes de son ensemble de définition.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction exponentielle.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



PROPRIÉTÉ

Croissances comparées

Soit n un entier naturel.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$

DÉMONSTRATION

Démonstration du deuxième point.

Soit n un entier naturel.

- 1er cas : $n = 1$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$f'(x) = \mathrm{e}^x - x$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$

Or $\mathrm{e}^x < 1$ sur $]-\infty; 0[$ et $\mathrm{e}^x > 1$ sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, $f''(x) < 0$ sur sur $]-\infty; 0[$ et $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

La fonction f' est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

La minimum de $f'(x)$ est donc atteint en 0.

Or $f'(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0) = \mathrm{e}^0 - \dfrac{0^2}{2} = 1$.

Donc $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Ainsi $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ sur $]0; +\infty[$.

En divisant par $x > 0$, on obtient :

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ sur $]0; +\infty[$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on obtient, par comparaison :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

- 2e cas : $n > 1$

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$.

Soit $x > 0$.

On a :

$$f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$$

$$f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ d'après le premier cas.

Par composition, on obtient :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$$

En multipliant par $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$, on a bien :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

EXEMPLE

D'après la propriété précédente, on a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$