SITUATION

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale lorsqu'elle compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (répétition un nombre fini de fois de façon indépendante d'une même épreuve de Bernoulli).

Afin de démontrer qu'une variable X suit une loi binomiale, il convient de respecter scrupuleusement les étapes suivantes.

ÉNONCÉ

Dans une usine, 2% des machines fabriquées sont défectueuses. On prélève un échantillon de 100 machines (la production est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise de 100 machines). On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de machines défectueuses de l'échantillon. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Etape 1

Identifier une épreuve de Bernoulli

On identifie une expérience à deux issues possibles :

- Le succès, obtenu avec une probabilité p que l'on détermine
- L'échec, obtenu avec la probabilité $q = 1 - p$

Il est important de définir ce que l'on appelle le succès.

APPLICATION

L'expérience consistant à prélever une machine et constater son état a deux issues possibles :

- Le succès (la machine est défectueuse), obtenu avec la probabilité $p = 0{,}02$
- L'échec (la machine n'est pas défectueuse), obtenu avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}98$

Cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli.

Etape 2

Expliquer la répétition de l'expérience

On justifie que l'expérience est répétée un nombre n de fois de manière indépendante.

APPLICATION

Comme on considère qu'il s'agit d'un tirage avec remise de 100 machines, cela revient à répéter 100 fois de manière indépendante l'épreuve de Bernoulli précédente.

Etape 3

Donner le rôle de *X*

On précise que X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans une suite de n expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p.

APPLICATION

X est donc la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans une suite de 100 expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $p = 0{,}02$.

Etape 4

Conclure que *X* suit une loi binomiale

On peut alors conclure que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

On a alors :

- $X\left(\Omega\right) = \{0; 1; ...; n\}$
- $\forall k \in X\left(\Omega\right), p\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

APPLICATION

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.