SITUATION

Soit *f* une fonction définie comme un quotient dont le dénominateur s'annule en *a*. On cherche à déterminer la limite à droite ou à gauche de *f* en *a*.

ÉNONCÉ

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{1\right\},\ f\left(x\right) = \dfrac{x^2+2}{\left(x-1\right)^3}$$

Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right)$.

Etape 1

Identifier si la limite est calculée à gauche ou à droite

On identifie si l'on recherche :

- La limite à droite en *a* (*x* tend alors vers *a* par valeurs supérieures). On note $\lim\limits_{x \to a^+} f\left(x\right)$.
- La limite à gauche en *a* (*x* tend alors vers *a* par valeurs inférieures). On note $\lim\limits_{x \to a^-} f\left(x\right)$.

Cela va avoir un impact sur le signe du dénominateur.

APPLICATION

On cherche ici à déterminer la limite à gauche en 1 (lorsque *x* tend vers 1 par valeurs inférieures) de *f*.

Etape 2

Donner le signe du dénominateur

Lorsque l'on fait tendre *x* vers *a*, le dénominateur tend vers 0. On détermine alors si le dénominateur approche 0 par valeurs négatives ou par valeurs positives quand *x* tend vers *a*.

ASTUCE

Afin d'effectuer une vérification, on peut s'aider d'un exemple pour déterminer le signe du dénominateur. On choisit une valeur proche de *a*, supérieure ou inférieure selon le cas considéré. On calcule le dénominateur pour cette valeur, et on détermine son signe.

EXEMPLE

Ici, on cherche :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x-1\right)$$

On choisit une valeur proche de 1 mais qui lui est inférieure : par exemple 0,9. On calcule alors :

$$0{,}9-1 = -0{,}1 < 0$$

On a bien :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x-1\right) = 0^-$$

APPLICATION

On sait que :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x-1\right) = 0^-$$

Comme $\left(x-1\right)$ et $\left(x-1\right)^3$ ont même signe, alors on a également :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x-1\right)^3 = 0^-$$

Etape 3

Calculer la limite du numérateur

On détermine la limite du numérateur grâce aux méthodes usuelles.

APPLICATION

On a :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

Donc, par somme :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2+2\right) = 3$$

Etape 4

Conclure

On conclut sur la limite de la fonction.

CAS 1 **Si le dénominateur tend vers 0 en restant positif**

- Si le numérateur tend vers $+\infty$ ou vers un réel strictement positif, le quotient tend vers $+\infty$.
- Si le numérateur tend vers $-\infty$ ou vers un réel strictement négatif, le quotient tend vers $-\infty$.
- Si le numérateur tend vers 0, la forme est indéterminée, il faut se rapporter aux méthodes pour lever une indétermination.

CAS 2 **Si le dénominateur tend vers 0 en restant négatif**

- Si le numérateur tend vers $+\infty$ ou vers un réel strictement positif, le quotient tend vers $-\infty$.
- Si le numérateur tend vers $-\infty$ ou vers un réel strictement négatif, le quotient tend vers $+\infty$.
- Si le numérateur tend vers 0, la forme est indéterminée, il faut se rapporter aux méthodes pour lever une indétermination.

APPLICATION

Ici :

- Le numérateur tend vers un réel strictement positif.
- Le dénominateur vers 0 en restant négatif.

On peut en déduire que le quotient tend vers $-\infty$. On a donc :

$$\lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right) = -\infty$$