SITUATION

Lorsqu'une fonction *f* est continue et strictement monotone sur un intervalle $\left[a;b\right]$, avec $f\left(a\right)$ et $f\left(b\right)$ de signes contraires, l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une unique solution α appartenant à $\left[a;b\right]$.

Il est possible de déterminer un encadrement de α à l'aide d'un algorithme. Ce dernier pourra éventuellement ensuite être traduit en programme dans une calculatrice par exemple.

ÉNONCÉ

On considère une fonction *f* définie, continue et strictement monotone sur $\left[a;b\right]$. Ecrire un algorithme permettant d'encadrer la solution de l'équation $f\left(x\right)=0$ sur un intervalle $\left[a;b\right]$.

Etape 1

Définir les variables à utiliser

Quatre variables réelles sont nécessaires pour faire fonctionner cet algorithme :

- La borne inférieure *a* de l'intervalle sur lequel on va chercher la solution de l'équation
- La borne supérieure *b* de ce même intervalle
- Le milieu *m* de *a* et *b* qui va tendre vers la solution α de l'équation
- La précision *p* de l'encadrement de la solution

APPLICATION

VARIABLES

p : réel
a : réel
b : réel
m : réel

Etape 2

Définir les informations à entrer par l'utilisateur

On indique à l'utilisateur qu'il doit entrer les valeurs des bornes inférieure *a* et supérieure *b* ainsi que de la précision *p* qu'il souhaite obtenir.

APPLICATION

VARIABLES

p : réel
a : réel
b : réel
m : réel

INITIALISATION

Saisir *a*
Saisir *b*
Saisir *p*

Etape 3

Ecrire les étapes de calcul

Afin de déterminer en encadrement de la solution $f\left(x\right)=0$, on procède par dichotomie. On détermine le centre *m* de l'intervalle $\left[a;b\right]$

- Si $f\left(a\right)$ et $f\left(m\right)$ sont de signes contraires, on pose $a=m$
- Sinon, on pose $b=m$

On répète autant de fois que nécessaire cette étape jusqu'à ce que $b-a<p$.

APPLICATION

VARIABLES

p : réel
a : réel
b : réel
m : réel

INITIALISATION

Saisir *a*
Saisir *b*
Saisir *p*

TRAITEMENT

BOUCLE TANT QUE

Tant que $\left(b-a>p\right)$

m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$

CONDITION SI

Si $f\left(m\right)\times f\left(a\right)>0$ alors *a* prend la valeur *m*.

Sinon *b* prend la valeur m.
Fin Si

Fin Tant que

Etape 4

Ecrire les étapes de calcul

On retourne à l'utilisateur l'encadrement recherché.

APPLICATION

VARIABLES

p : réel
a : réel
b : réel
m : réel

INITIALISATION

Saisir *a*
Saisir *b*
Saisir *p*

TRAITEMENT

BOUCLE TANT QUE

Tant que $\left(b-a>p\right)$

m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$

CONDITION SI

Si $f\left(m\right)\times f\left(a\right)>0$ alors *b* prend la valeur *m*.

Sinon *a* prend la valeur *m*.
Fin Si

Fin Tant que

SORTIE

Afficher *a*

Afficher $"\ <\alpha<\ "$

Afficher *b*

ASTUCE

Si l'on cherche à écrire un algorithme qui encadre, dans le cas d'une fonction strictement monotone sur son intervalle, la solution α de l'équation $f\left(x\right)=k$, il suffit de transformer l'équation en $f\left(x\right)-k=0$ et d'utiliser l'algorithme ci-dessus avec la fonction $x\longmapsto f\left(x\right)-k$.