SITUATION

Une fonction trigonométrique s'étudie de façon particulière. Elle est souvent paire (ou impaire) et périodique donc on peut réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction.

De plus, pour étudier le signe de sa dérivée, il faut savoir résoudre une inéquation trigonométrique.

ÉNONCÉ

Soit la fonction *f* définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = \cos\left(2x\right) + 1$$

Restreindre le domaine d'étude de *f*, puis dresser son tableau de variations sur $\left[-\pi;\pi\right]$.

Etape 1

Étudier la parité de *f*

On montre que D_f, l'ensemble de définition de *f*, est centré en 0.

On calcule ensuite $f\left(-x\right)$ et on l'exprime en fonction de $f\left(x\right)$.

- Si, $\forall x \in D_f$, $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$ alors *f* est paire.
- Si, $\forall x \in D_f$, $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ alors *f* est impaire.

APPLICATION

On a D_f = $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble de définition est centré en 0.

De plus :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(-x\right) = \cos\left(-2x\right) + 1$

Or, on sait que pour tout réel *X* :

$\cos\left(-X\right) = \cos\left(X\right)$

Donc :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(-x\right) = \cos\left(2x\right) + 1 = f\left(x\right)$

On en déduit que *f* est paire.

Etape 2

Étudier la périodicité de *f*

On conjecture la période de *f* et on démontre cette conjecture.

APPLICATION

On conjecture que *f* est périodique de période $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Pour tout réel *x*, on a $\left(x+\pi\right) \in \mathbb{R}$ et :

$f\left(x+\pi\right) = \cos\left(2\left(x+\pi\right)\right) + 1$

$f\left(x+\pi\right) = \cos\left(2x+2\pi\right) + 1$

Or, pour tout réel *x* :

$\cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$

Donc, pour tout réel x :

$f(x+\pi) = \cos(2x) + 1 = f(x)$

Par conséquent, f est périodique de période π.

Etape 3

Restreindre l'intervalle d'étude

On raisonne en deux étapes (dans cet ordre) :

- Si f est périodique de période T, on réduit l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude T. On choisit celui qui est centré en 0 : $\left[-\dfrac{T}{2};\dfrac{T}{2}\right]$.
- Si f est paire ou impaire, on peut aussi restreindre l'intervalle à $\left[0;\dfrac{T}{2}\right]$ ou $\left[-\dfrac{T}{2};0\right]$.

ASTUCE

Si f est paire ou impaire mais non périodique et définie sur $\mathbb{R}$, alors on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0;+\infty\right[$ ou à $\left]-\infty;0\right]$.

APPLICATION

- f est périodique de période π, on peut donc restreindre son domaine d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- f est paire, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude précédent à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Etape 4

Dériver *f*

On justifie que f est dérivable sur D_f. Pour dériver f, on utilise les formules de dérivées usuelles.

On utilise également le tableau ci-dessous :

$f(x)$	$f'(x)$	g	g'
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

APPLICATION

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x) + 1$

On remarque que :

$f = \cos(u) + 1$

Avec, pour tout réel x :

$u\left(x\right) = 2x$

On en déduit que :

$f' = -u' \sin\left(u\right)$

En sachant que pour tout réel *x*, $u'\left(x\right) = 2$, on en déduit que :

$f'\left(x\right) = -2\sin\left(2x\right)$

Etape 5

Étudier le signe de $f'\left(x\right)$

Pour étudier le signe de $f'\left(x\right)$, on peut être amené à résoudre des équations trigonométriques du type $\cos\left(u\left(x\right)\right) < a$ ou $\sin\left(u\left(x\right)\right) > b$.

On s'aide pour cela d'un cercle trigonométrique.

CONSEIL

Les formules de duplication et d'addition peuvent être utiles afin de simplifier l'expression de f' pour en déduire son signe.

CONSEIL

Les valeurs de *cos* et *sin* pour les angles remarquables sont à connaître par cœur. Elles permettent de résoudre notamment les inéquations trigonométriques.

APPLICATION

On étudie le signe de $f'\left(x\right)$.

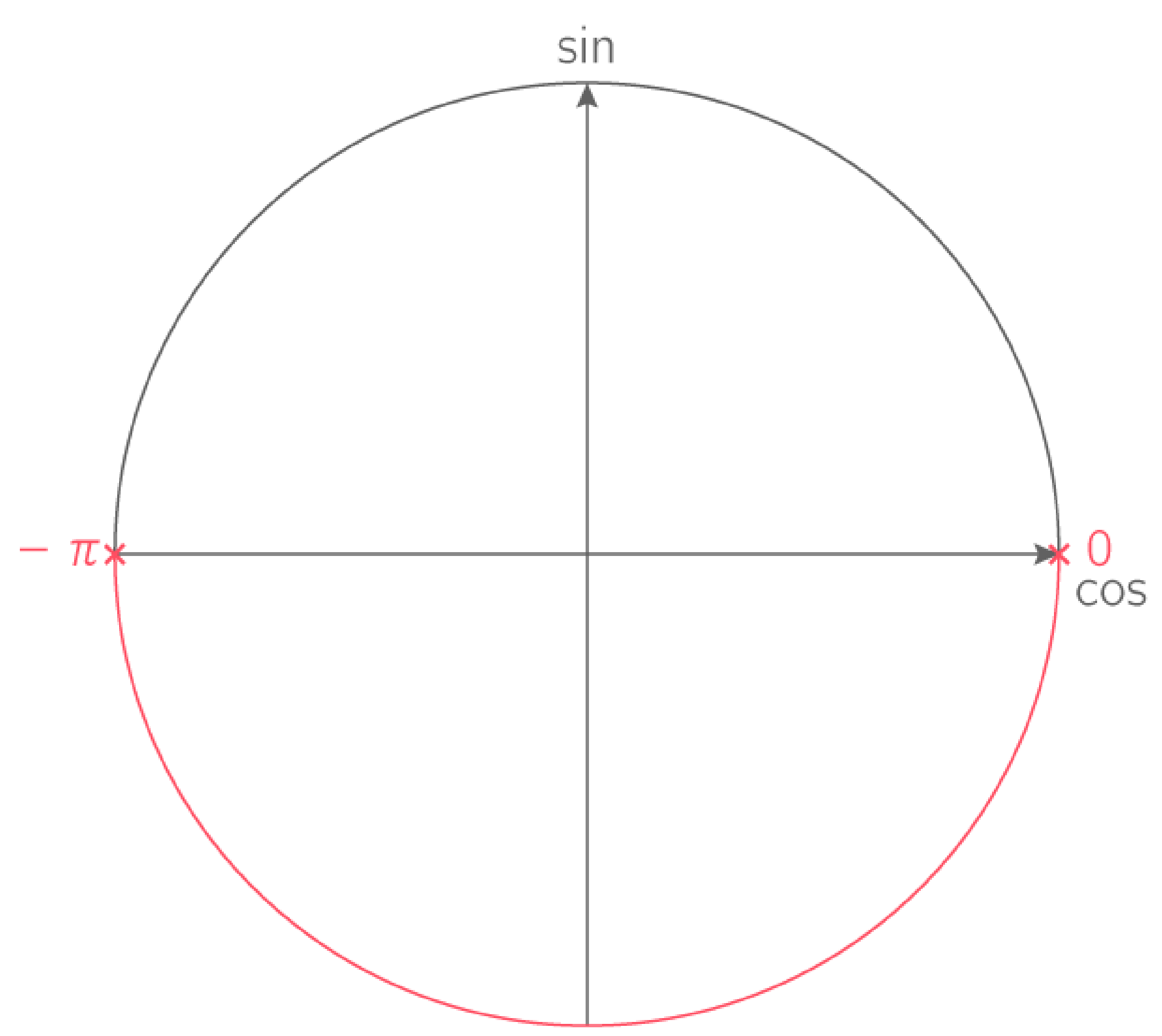
On cherche donc à résoudre $f'\left(x\right) > 0$. Pour tout réel *x* :

$f'\left(x\right) > 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\left(2x\right) > 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x\right) < 0$

On utilise le cercle trigonométrique suivant :



Ainsi :

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2x < \pi$$

Et dans ce cas :

$$\sin\left(2x\right) > 0$$

Donc, pour tout réel x appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'\left(x\right) < 0$.

Etape 6

Dresser le tableau de variations de *f*

On peut ensuite dresser le tableau de variations de f :

- D'abord sur l'intervalle réduit si f présente une parité et/ou une périodicité.
- Puis sur l'intervalle demandé s'il est différent.

APPLICATION

On calcule les valeurs aux bornes de l'intervalle réduit :

$$f\left(0\right) = \cos\left(2\times 0\right) + 1$$

$$f\left(0\right) = 2$$

Et :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

On dresse le tableau de variations sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
f	2	$\searrow$	0

Comme f est paire, on obtient son tableau de variations sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ par symétrie.

De plus, comme f est périodique de période π, on complète le tableau pour l'obtenir sur $\left[-\pi; \pi\right]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2