MÉTHODE 1

Si *n* est dans la fonction mais pas dans les bornes

SITUATION

L'énoncé peut définir une suite d'intégrale $\left(I_n\right)$ et demander la monotonie de cette suite. Dans ce cas, la méthode à adopter dépend de la place de *n* dans l'intégrale. S'il se trouve uniquement dans la fonction sous l'intégrale et non dans les bornes de l'intégrale, on peut adopter la méthode suivante.

ÉNONCÉ

Soit $\left(I_n\right)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 e^{nx^2}\ \mathrm{d}x$$

Déterminer la monotonie de cette suite.

ETAPE 1

Écrire $I_{n+1} - I_n$

On commence par écrire la différence $I_{n+1} - I_n$ sous la forme d'une différence de deux intégrales.

APPLICATION

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{(n+1)x^2}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 e^{nx^2}\ \mathrm{d}x$$

ETAPE 2

Utiliser la linéarité de l'intégrale

Les deux intégrales I_{n+1} et I_n ayant les mêmes bornes, on peut utiliser la linéarité de l'intégration pour exprimer la différence $I_{n+1} - I_n$ sous la forme d'une unique intégrale.

APPLICATION

Par linéarité de l'intégration, on a alors :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(e^{(n+1)x^2} - e^{nx^2}\right)\ \mathrm{d}x$$

ETAPE 3

Factoriser l'intérieur de l'intégrale

On factorise l'expression de la fonction située sous l'intégrale dans la différence $I_{n+1} - I_n$, de manière à pouvoir déterminer facilement le signe de cette fonction.

Il arrive que l'on puisse directement déterminer le signe de cette fonction sans avoir à factoriser.

APPLICATION

On a donc :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(e^{nx^2} \times e^{x^2} - e^{nx^2}\right) \text{ d}x$$

On factorise par e^{nx^2} :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{nx^2} \left(e^{x^2} - 1\right) \text{ d}x$$

ETAPE 4

Déterminer le signe de la fonction à l'intérieur de l'intégrale

On détermine le signe de la fonction sous l'intégrale définissant $I_{n+1} - I_n$. Ce signe doit être constant sur l'intervalle formé par les bornes de l'intégrale pour pouvoir conclure.

APPLICATION

Pour tout réel *x* compris entre 0 et 1 :

- $x^2 \geqslant 0$ donc $e^{x^2} \geqslant 1$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$). Ainsi, $e^{x^2} - 1 \geqslant 0$.
- $e^{nx^2} \geqslant 0$

Par produit, on peut donc en conclure :

$$\forall x \in [0;1], \ e^{nx^2} \left(e^{x^2} - 1\right) \geqslant 0$$

ETAPE 5

En conclure le signe de l'intégrale

En utilisant la positivité de l'intégration, on peut en déduire :

- Si la fonction est positive, l'intégrale est positive et donc $I_{n+1} - I_n$ est positif.
- Si la fonction est négative, l'intégrale est négative et donc $I_{n+1} - I_n$ est négatif.

APPLICATION

Par positivité de l'intégration, on a :

$$\int_0^1 e^{nx^2} \left(e^{x^2} - 1\right) \text{ d}x \geqslant 0$$

Donc, pour tout entier naturel *n* :

$$I_{n+1} - I_n \geqslant 0$$

ETAPE 6

Donner les variations de la suite

- Si, pour tout entier naturel *n*, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, on en déduit que la suite est croissante.
- Si, pour tout entier naturel *n*, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, on en déduit que la suite est décroissante.

APPLICATION

On en conclut que la suite $\left(I_n\right)$ est croissante.

MÉTHODE 2

Lorsque *n* est dans les bornes de l'intégrale

SITUATION

Si *n* se trouve uniquement dans une des deux bornes de l'intégrale et non dans la fonction sous l'intégrale, on peut adopter la méthode suivante.

ÉNONCÉ

Soit (I_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{n^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Déterminer la monotonie de cette suite.

ETAPE 1

Écrire $I_{n+1} - I_n$

On commence par écrire la différence $I_{n+1} - I_n$ sous la forme d'une différence de deux intégrales, et ce pour un entier *n* entier quelconque fixé.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x - \int_0^{n^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x$$

ETAPE 2

Utiliser la relation de Chasles

On utilise ensuite la relation de Chasles pour exprimer la différence $I_{n+1} - I_n$ sous la forme d'une unique intégrale.

APPLICATION

D'après la relation de Chasles et comme $n^2 \leqslant (n+1)^2$, on a :

$$\int_0^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{n^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_{n^2}^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Donc, pour tout entier naturel *n* :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_{n^2}^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x - \int_0^{n^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_{n^2}^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x$$

ETAPE 3

Déterminer le signe de la fonction à l'intérieur de l'intégrale

On détermine alors le signe de la fonction qui est sous l'intégrale grâce aux méthodes usuelles. Ce signe doit être constant sur l'intervalle formé par les bornes de l'intégrale pour pouvoir conclure.

APPLICATION

Pour tout réel *x* positif, on a :

- $x \geqslant 0$
- $e^{-x} \geqslant 0$

Par produit, on a donc, pour tout réel *x* positif :

$xe^{-x} \geqslant 0$

ETAPE 4

En déduire le signe de l'intégrale et donc celui de $I_{n+1} - I_n$

En utilisant la positivité de l'intégration, on peut en déduire :

- Si la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, l'intégrale est positive et donc $I_{n+1} - I_n$ est positif.
- Si la fonction est négative sur l'intervalle d'intégration, l'intégrale est négative et donc $I_{n+1} - I_n$ est négatif.

APPLICATION

Par positivité de l'intégration, comme la fonction sous l'intégrale est positive sur $\mathbb{R}^+$ et comme $n^2 \leqslant (n+1)^2$, on a :

$\int_{n^2}^{(n+1)^2} xe^{-x} \, \mathrm{d}x \geqslant 0$

Et donc, pour tout entier naturel *n* :

$I_{n+1} - I_n \geqslant 0$

ETAPE 5

Donner les variations de la suite

- Si, pour tout entier naturel *n*, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, on en déduit que la suite est croissante.
- Si, pour tout entier naturel *n*, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, on en déduit que la suite est décroissante.

APPLICATION

On en conclut que la suite (I_n) est croissante.