I La notion de primitive

La notion de primitive est liée à celle de dérivée. Cette notion possède de nombreuses applications. On la retrouve par exemple lors du calcul d'aires de surface ou la résolution d'équations (équations différentielles notamment) portant sur des fonctions décrivant des phénomènes physiques.

DÉFINITION Équation différentielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On appelle **équation différentielle du premier ordre** sur I une équation dont l'inconnue est une fonction y dérivable sur I du type :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I$$

où a, b et f sont des fonctions définies sur I.

EXEMPLE

On considère l'équation différentielle suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'(x) + 2xy(x) = 0$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Comme composée de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) + 2xf(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} + 2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$f'(x) + 2xf(x) = 0$$

La fonction f est bien solution de l'équation différentielle $y'(x) + 2xy(x) = 0$.

DÉFINITION Primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive de f sur I** toute fonction dérivable sur I et solution de l'équation différentielle :

$$y' = f$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos(3x) + 2x$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(3x) + x^2$$

Comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = 3\cos(3x) + 2x$$

La fonction g vérifie donc :

$$g' = f$$

C'est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

🤓 REMARQUE Par définition, la recherche d'une primitive sur un intervalle I est le procédé inverse de la dérivation.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Autrement dit, si F_1 et F_2 sont des primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que pour tout réel $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + k$.

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.

Soit $F = F_2 - F_1$.

Comme différence de deux fonctions dérivables sur I, F est dérivable sur I.

Pour tout réel x de I, on a :

$$F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x)$$
$$F'(x) = f(x) - f(x)$$
$$F'(x) = 0$$

La fonction F est donc une fonction de dérivée nulle sur un intervalle. Elle est donc constante.

Autrement dit, il existe un réel k tel que :

$$F(x) = k$$

Ainsi, il existe un réel k tel que :

$F_2(x) - F_1(x) = k$ pour tout réel x de I

Soit :
$$F_2(x) = F_1(x) + k$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En effet, comme fonction polynôme, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 3$$
$$F'(x) = x^2 - 5x + 3$$
$$F'(x) = f(x)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions du type $x \mapsto F(x) + k$ où k est un réel quelconque, c'est-à-dire les fonctions du type :

$x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + k$ où k est un réel quelconque.

REMARQUE

Une fonction continue sur un intervalle I admet donc une infinité de primitives sur I.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Pour tout réel y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de de f sur $\mathbb{R}$.

Comme fonction polynôme, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$G'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x$

$G'(x) = x^2 - x$

$G'(x) = f(x)$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions du type $x \mapsto G(x) + k$ où k est un réel quelconque.

On cherche la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 1$.

On cherche donc le réel k tel que $G(1) + k = 1$.

Or $G(1) + k = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + k$.

Donc $G(1) + k = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + k = 1$.

On en déduit :

$k = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 1$ est définie pour tout réel x par :

$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}$

II Les primitives des fonctions de référence

Pour déterminer des primitives d'une fonction, il est nécessaire d'en connaître déjà certaines, que l'on appelle fonctions de référence.

PROPRIÉTÉ

Soit un entier relatif n.

- Si $n \geq 0$, les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ sont les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ où k est un réel quelconque.
- Si $n < -1$, les primitives sur $]-\infty;0[$ (ou sur $]0;+\infty[$) de la fonction $x \mapsto x^n$ sont les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{10}$.

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions du type :

$$x \mapsto \dfrac{1}{11}x^{11} + k$$

où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

Alors pour tout réel $x > 0$, on a :

$f(x) = x^{-5}$

Les primitives sur $]0;+\infty[$ de f sont les fonctions du type :

$x \mapsto \dfrac{1}{-5+1}x^{-5+1} + k$ où k est un réel quelconque ;

soit $x \mapsto \dfrac{1}{-4}x^{-4} + k$ où k est un réel quelconque ;

ou encore $x \mapsto \dfrac{-1}{4x^4} + k$ où k est un réel quelconque.

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Les primitives sur $]0;+\infty[$ de f sont les fonctions du type :

$$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$$

où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = 2\sqrt{x} + 5$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

PROPRIÉTÉ

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle sont les fonctions du type :

$$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$$

où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^x + 10$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.

PROPRIÉTÉ

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction sinus sont les fonctions du type :

$$x \mapsto -\cos(x) + k$$

où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\cos(x) + \pi$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction sinus.

PROPRIÉTÉ

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus sont les fonctions du type :

$$x \mapsto \sin(x) + k$$

où k est un réel quelconque.

EXEMPLE

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sin(x) - 12$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus.

III Les primitives et les opérations

À partir des fonctions de référence, on peut déduire des primitives de nombreuses autres fonctions en utilisant les opérations algébriques de base.

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant des primitives F et G sur I.

Alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

EXEMPLE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $g(x)=\cos(x)$.

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

Donc la fonction $F+G$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f+g$.

Autrement dit, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{2x}+\cos(x)$
.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F sur I.

Soit k un réel.

Alors la fonction kF est une primitive sur $\mathbb{R}$ de kf.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=2\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent la fonction $10F$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $10f$.

Autrement dit, la fonction $x\mapsto 20\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction polynôme de degré n et d'expression :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x$$

EXEMPLE

Soit f la fonction polynôme d'expression $f(x)=5x^5+3x^2-10$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F d'expression :

$$F(x)=\frac{5}{6}x^6+x^3-10x$$

PROPRIÉTÉ

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J.

Soit une fonction v dérivable sur l'intervalle J.

Alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour primitive sur I la fonction $v \circ u$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$.

Pour tout réel x, $f(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos(x)$.

On a $u'(x) = 2x$ pour tout réel x.

De plus, la fonction v définie par $v(x) = \sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de v'.

Ainsi, la fonction $F = v \circ u$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x\cos\left(x^2\right)$.

PROPRIÉTÉ

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier relatif.

Lorsqu'une fonction est de la forme f, elle admet F comme primitive en suivant ce tableau :

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u \rvert)$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est strictement positive sur I
$u'e^u$	e^u	
$u'sin(u)$	$-cos(u)$	
$u'cos(u)$	$sin(u)$	
$x \mapsto u(ax+b)$, avec a et b constantes, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a} \times U(ax+b)$	U est une primitive de u sur I

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Alors $f = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

u est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie par $F(x) = \ln(u(x))$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.