SITUATION
En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (c'est-à-dire le théorème appliqué au cas des fonctions strictement monotones), on peut montrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle.

ÉNONCÉ

Montrer que l'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty; -1\right]$.

Etape 1

Se ramener à une équation du type $f\left(x\right) = k$

On détermine une fonction *f* telle que l'équation soit équivalente à l'équation $f\left(x\right) = k$.

APPLICATION

On pose :

$\forall x \in \left]-\infty; -1\right]$, $f\left(x\right) = x^3 - 2x + 1$

On cherche à montrer que l'équation $f\left(x\right) = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty; -1\right]$.

Etape 2

Dresser le tableau de variations de *f*

Si l'on cherche à démontrer que l'équation $f\left(x\right) = k$ admet une solution unique sur *I*, on dresse le tableau de variations de *f* sur *I*.

On étudie les variations de *f* au préalable, si cela n'a pas été fait dans les questions précédentes.

APPLICATION

On étudie la fonction *f* sur $\left]-\infty; -1\right]$:

f est dérivable sur $\left]-\infty; -1\right]$ en tant que restriction d'une fonction polynôme et :

$\forall x \in \left]-\infty; -1\right]$, $f'\left(x\right) = 3x^2 - 2$

On étudie le signe de $f'\left(x\right)$. Pour cela, on résout l'inéquation $f'\left(x\right) > 0$. Pour tout réel *x* :

$3x^2 - 2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 > \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x > \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

On en déduit, comme $-1 < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, que $f'\left(x\right) > 0$ sur $\left]-\infty; -1\right]$. Ainsi, *f* est strictement croissante sur $\left]-\infty; -1\right]$.

De plus, on a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 2x + 1\right) = \left(-1\right)^3 - 2 \times \left(-1\right) + 1 = 2$

On dresse alors le tableau de variations de *f* :

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2

Etape 3

Utiliser corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

On récite les hypothèses :

- *f* est continue sur *I*.
- *f* est strictement monotone sur *I*.
- Soit *J* l'intervalle image de *I* par *f*, on vérifie que $k \in J$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f\left(x\right) = k$ admet une solution unique sur *I*.

APPLICATION

Sur $\left]-\infty; -1\right]$:

- *f* est continue.
- *f* est strictement monotone
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1} f\left(x\right) = 2$. On a bien $0 \in \left]-\infty; 2\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f\left(x\right) = 0$ admet une solution unique sur $\left]-\infty; -1\right]$.