SITUATION
L'étude d'une fonction f est une composante incontournable d'un problème. Selon l'énoncé, le nombre de questions intermédiaires peut varier, c'est pourquoi il faut être capable de dérouler par soi-même toutes les étapes de l'étude. L'objectif est de dresser le tableau de variations complet d'une fonction.

ÉNONCÉ
Etudier les variations de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = \frac{x-1}{e^x}$$

Etape 1
Rappeler le domaine de définition de f

L'étude d'une fonction est restreinte à son domaine de définition, il est donc important de déterminer celui-ci.

APPLICATION
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Etape 2
Calculer les limites aux bornes

On calcule les limites de f aux bornes ouvertes de son ensemble de définition.

APPLICATION
On doit déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x-1 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

On en déduit, par quotient :

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty$$

En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée. On transforme l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$$

On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$ (croissances comparées)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$

On en déduit, par somme :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 0$$

Etape 3

Dériver *f*

On calcule la dérivée de *f* et on simplifie l'expression.

APPLICATION

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On remarque que $f=\dfrac{u}{v}$ avec,

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $u\left(x\right)=x-1$
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $v\left(x\right)=e^x$

On en déduit que :

$$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$$

Avec :

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $u'\left(x\right)=1$
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $v'\left(x\right)=e^x$

On obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'\left(x\right)=\dfrac{e^x-\left(x-1\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'\left(x\right)=\dfrac{e^x\left(1-x+1\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

Finalement :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'\left(x\right)=\dfrac{2-x}{e^x}$$

Etape 4

Etudier le signe de *f'*

On étudie le signe de $f'\left(x\right)$, en utilisant éventuellement un tableau de signes.

APPLICATION

On étudie le signe de la dérivée, en étudiant séparément le signe du numérateur et le signe du dénominateur :

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$
- Soit $x\in\mathbb{R}$, $2-x>0\Leftrightarrow x<2$

On en déduit le signe de $f'\left(x\right)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Etape 5

Enoncer le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction

On rappelle que :

- Si $f'\left(x\right)>0$ sur un intervalle *I*, alors *f* est strictement croissante sur *I*.
- Si $f'\left(x\right)<0$ sur un intervalle *I*, alors *f* est strictement décroissante sur *I*.

APPLICATION

D'après le cours, on sait que :

- Si $f'\left(x\right)>0$ sur un intervalle *I*, alors *f* est strictement croissante sur *I*.
- Si $f'\left(x\right)<0$ sur un intervalle *I*, alors *f* est strictement décroissante sur *I*.

On en déduit que :

- *f* est strictement croissante sur $\left]-\infty;2\right[$.
- *f* est strictement décroissante sur $\left]2;+\infty\right[$.

Etape 6

Calculer les extremums locaux éventuels

On calcule la valeur de *f* aux points où sa dérivée s'annule et change de signe.

APPLICATION

On calcule $f\left(2\right)$:

$$f\left(2\right)=\dfrac{2-1}{e^2}$$

$$f\left(2\right)=e^{-2}$$

Etape 7

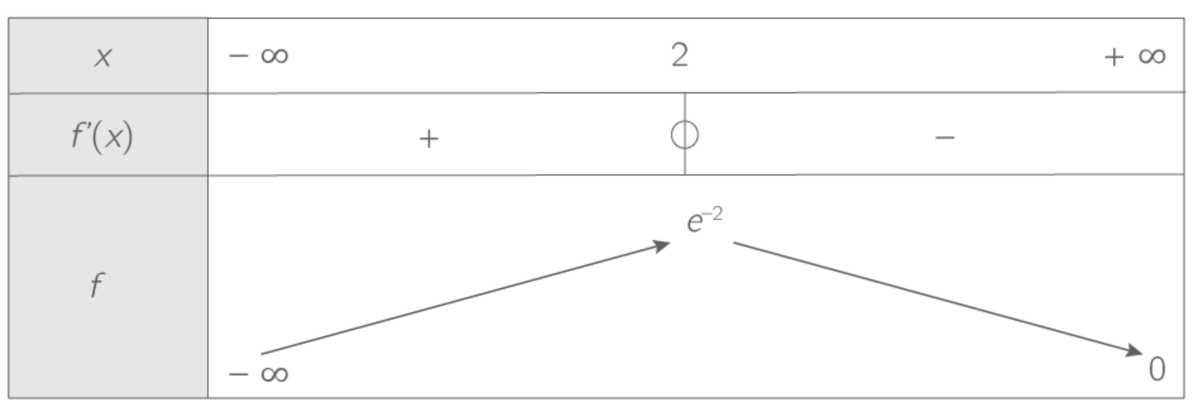
Dresser le tableau de variations

On synthétise ces informations dans le tableau de variations de *f* :

- Le domaine de définition de *f*, les valeurs où sa dérivée change de signe et les éventuelles valeurs interdites
- Le signe de $f'\left(x\right)$
- Les variations de *f*
- Les limites et les extremums locaux

APPLICATION

On dresse enfin le tableau de variations de *f* :



PIÈGE

Même si l'on connaît les étapes de l'étude de fonction par cœur, il est indispensable de lire soigneusement l'énoncé. Il faut répondre à chaque question rigoureusement, et ne pas se laisser entraîner à répondre à plusieurs questions en même temps par automatisme.

ASTUCE

Une étude de fonction peut s'avérer longue et très calculatoire. Il est donc fortement conseillé de hiérarchiser les étapes et les calculs.