SITUATION

La courbe représentative d'une fonction *f* peut admettre une asymptote horizontale en $+\infty$ et/ou en $-\infty$.

Une même droite peut être asymptote horizontale à la fois en $+\infty$ et $-\infty$.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie sur $]4;+\infty[$ par :

$$f\left(x\right) = \dfrac{2x-3}{x-4}$$

Déterminer les éventuelles asymptotes horizontales de C_f.

Etape 1

Déterminer la limite de *f* en $+\infty$

On détermine tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$.

APPLICATION

Pour déterminer la limite de *f* en $+\infty$, on factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré. On a donc :

$$\forall x \in \left]4;+\infty\right[, f\left(x\right) = \dfrac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)} = \dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{4}{x}}$$

Or :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2-\dfrac{3}{x}\right) = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{4}{x}\right) = 1$

Donc :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 2$$

Etape 2

Conclure sur l'existence d'une asymptote horizontale

- Si la limite trouvée est un réel *a*, on en déduit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.
- Si la limite trouvée est $+\infty$ ou $-\infty$, alors C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

APPLICATION

On a :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 2$$

On en déduit que la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

Etape 3

Répliquer éventuellement le procédé en $-\infty$

Si le domaine de définition de la fonction le permet, on procède de la même manière pour déterminer l'existence d'une asymptote en $-\infty$.

APPLICATION

La fonction *f* étant définie sur $]4;+\infty[$, sa courbe représentative ne peut pas admettre d'asymptote horizontale en $-\infty$.