# I La limite d'une suite

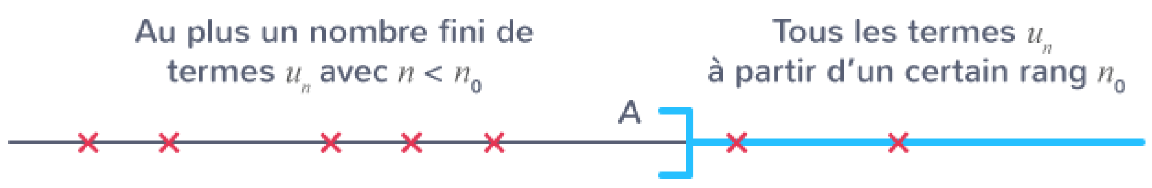
**Lorsque l'on modélise un phénomène discret à l'aide d'une suite, la question du comportement de cette suite lorsque l'indice est grand se pose naturellement. On parle alors de la limite de la suite.**

## Ⓐ Les cas de limites infinies

**Lorsque l'indice des termes d'une suite devient grand, il existe des suites dont les termes sont aussi grands que possible (ou aussi petits que possible). On parle alors de limite infinie pour la suite.**

DÉFINITION **Limite infinie positive d'une suite**

On dit qu'**une suite** $(u_n)$ **tend vers** $+\infty$ lorsque pour tout réel $A$, il existe un rang $n_0$ tel que, dès que $n \geq n_0$, $u_n > A$.




PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$, on note :

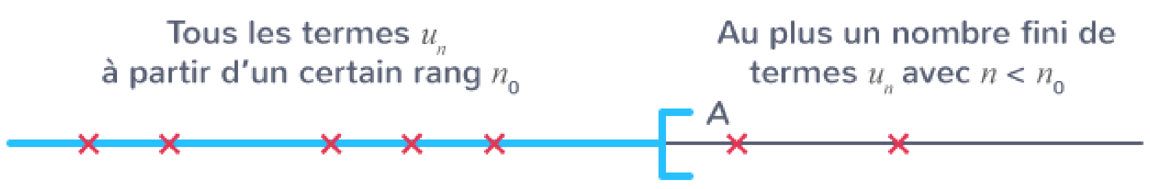
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

DÉFINITION **Limite infinie négative d'une suite**

On dit qu'**une suite** $(u_n)$ **tend vers** $-\infty$ lorsque pour tout réel $A$, il existe un rang $n_0$ tel que, dès que $n \geq n_0$, $u_n < A$.




PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une suite $(u_n)$ tend vers $-\infty$, on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} (-n+3) = -\infty$$

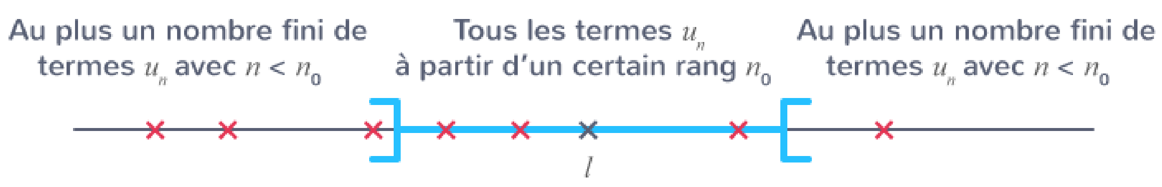
## Ⓑ Les suites convergentes et les suites divergentes

**Lorsque l'indice des termes d'une suite devient grand, les suites dont les termes se rapprochent d'un réel sont les suites convergentes. Les autres suites sont divergentes.**

**DÉFINITION** **Suite convergente**

On dit qu'**une suite** $\left(u_n\right)$ **converge** vers un réel $\ell$ si pour tout intervalle ouvert $I$ contenant $\ell$, il existe un rang $n_0$ tel que, dès que $n \geq n_0$, $u_n \in I$.

On dit également que la suite $\left(u_n\right)$ admet pour limite $\ell$.




**PROPRIÉTÉ**

Lorsqu'une suite $\left(u_n\right)$ converge vers un réel $\ell$, on note :

$$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

EXEMPLE

$$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) = 5$$

**DÉFINITION** **Suite divergente**

On dit qu'**une suite diverge** (ou est divergente) lorsqu'elle ne converge pas.

Elle peut donc :

- admettre une limite infinie ;
- ne pas admettre de limite.

EXEMPLE

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sin(n)$.

La suite $\left(u_n\right)$ est divergente car elle n'admet pas de limite.

EXEMPLE

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

La suite $\left(u_n\right)$ est divergente car elle admet pour limite $+\infty$.

# II Les opérations sur les limites de suites

**Pour simplifier l'étude de la limite d'une suite, on peut décomposer la suite en plusieurs suites en suivant les opérations qui la composent.**

## A La limite d'une somme de suites

**Si une suite est constituée de la somme de deux suites, on peut, dans certains cas, déterminer la limite de la suite à partir des limites des suites qui la composent.**

**PROPRIÉTÉ**

On appelle « forme indéterminée » une forme qui ne donne pas toujours la même réponse.

On notera en abrégé « FI ».

PROPRIÉTÉ

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels et soit $(w_n)$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout entier $n$ pour lequel $u_n$ et $v_n$ sont définis.

Le tableau suivant récapitule les différents cas possibles de la limite de la suite $(w_n)$ en fonction des limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $L \in \mathbb{R}$ | $L \in \mathbb{R}$ | $L \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $L' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n =$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $FI$ |

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Par somme, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$$

Par somme, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 - n\right)$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 - n\right) = +\infty$.

En revanche :

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$$

Par somme, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - n^2\right)$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - n^2\right) = -\infty$.

## Ⓑ La limite d'un produit de suites

**Si une suite est constituée du produit de deux suites, on peut, dans certains cas, déterminer la limite de la suite à partir des limites des suites qui la composent.**

PROPRIÉTÉ

Soient $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites de réels et soit $\left(w_n\right)$ la suite définie par $w_n = u_n \times v_n$ pour tout entier $n$ pour lequel $u_n$ et $v_n$ sont définis.

Le tableau suivant récapitule les différents cas possibles de la limite de la suite $\left(w_n\right)$ en fonction des limites des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $L \in \mathbb{R}$ | $L > 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $L < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $L' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n =$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $FI$ |

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-n+1) = -\infty$$

Par produit, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^2(-n+1)\right) = -\infty$$

EXEMPLE

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Par produit, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 \times \frac{1}{n}\right)$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 \times \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

En revanche :

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Par produit, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \times \frac{1}{n^2}\right)$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \times \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

## © La limite d'un quotient de suite

**Si une suite est constituée du quotient de deux suites, on peut, dans certains cas, déterminer la limite de la suite à partir des limites des suites qui la composent.**

PROPRIÉTÉ

Soient $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites de réels et soit $\left(w_n\right)$ la suite définie par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ pour tout entier $n$ pour lequel $u_n$ et $v_n$ sont définis et $v_n \neq 0$.

Le tableau suivant récapitule les différents cas possibles de la limite de la suite $\left(w_n\right)$, en fonction des limites des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ | $L \in \mathbb{R}$ | $L > 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $L < 0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $L' \in \mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $L' \in \mathbb{R}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n =$ | $\dfrac{L}{L'}$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^-$ | $0^+$ | $FI$ | $0$ | $\pm\infty$ | $FI$ |

EXEMPLE

$$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-5 + \frac{1}{n}\right) = -5$$

Par quotient, on en déduit :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{-5+\frac{1}{n}} = -\infty$$

EXEMPLE

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right) = +\infty$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Par quotient, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

En revanche :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Par quotient, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n}$ est une forme indéterminée.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

# III Les théorèmes sur les limites de suites

**On peut, dans certains cas, déterminer la limite d'une suite par comparaison avec d'autres suites.**

PROPRIÉTÉ

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang $n_0$.

- Si la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(v_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(v_n)$ diverge vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

DÉMONSTRATION

On démontre le premier point.

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang $n_0$.

On suppose que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

Soit un réel $A$.

Comme la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$, il existe un rang $n_1$ tel que dès que $n \geq n_1$ on a $u_n > A$.

Soit $m = \max(n_0 ; n_1)$.

Soit un entier $n \geq m$.

Alors $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$.

Comme $n \geq n_1$, on en déduit que $u_n > A$.

Comme $n \geq n_0$, on en déduit que $v_n > u_n$.

Par conséquent :

$v_n > A$

Ainsi pour tout réel $A$, il existe un rang $m$ tel que dès que $n \geq m$ on a $v_n > A$.

Par définition, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

EXEMPLE

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies pour tout entier naturel $n$ par :

$u_n = n^2 - 1$ et $v_n = n^2 + \sin(n)$

On a :

- $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel $n$ ;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

## THÉORÈME Théorème dit « des gendarmes »

Soient trois suites réelles $\left(u_n\right)$, $\left(v_n\right)$ et $\left(w_n\right)$ et soit un réel $\ell$ tels que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un rang $n_0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$

Alors la suite $\left(v_n\right)$ converge :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$$

**EXEMPLE**

Soient les trois suites réelles $\left(u_n\right)$, $\left(v_n\right)$ et $\left(w_n\right)$ définies pour tout entier naturel non nul $n$ par :

- $u_n = \dfrac{-1}{n}$
- $v_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$
- $w_n = \dfrac{1}{n}$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

De plus :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = 0$$

D'après le théorème « des gendarmes », la suite $\left(v_n\right)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

🤓 **REMARQUE**

Le nom du théorème correspond à l'image suivante : si un voleur est menotté à deux gendarmes qui vont au même endroit, le voleur y va également.

## THÉORÈME Théorème dit « de convergence monotone »

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

**EXEMPLE**

Soit la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On peut montrer que :

- la suite $\left(u_n\right)$ est croissante ;
- la suite $\left(u_n\right)$ est majorée par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $\left(u_n\right)$ converge.

**REMARQUE**

Le théorème de convergence monotone donne seulement l'existence d'une limite réelle mais ne donne pas la valeur de la limite.

**PROPRIÉTÉ**

- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

**DÉMONSTRATION**

On démontre le premier point.

Soit $(u_n)$ une suite croissante non majorée.

Soit un réel $A$.

Comme la suite $(u_n)$ n'est pas majorée, il existe un entier $n_0$ tel que $u_{n_0} > A$.

Comme la suite $(u_n)$ est croissante, on a pour tout entier naturel :

$n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$

On en déduit :

Dès que $n \geq n_0$, on a :

$u_n > A$

Ainsi, quel que soit le réel $A$, il existe un rang à partir duquel $u_n > A$.

Par définition, la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**EXEMPLE**

Soit la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = n^2$.

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)$ est croissante.

Croissante et de premier terme égal à 2, la suite $(u_n)$ est à termes strictement positifs.

Soit un réel $M$ et soit $n$ le plus petit entier naturel strictement supérieur à $M$.

Alors $u_{n+1} = u_n + n^2 > n^2 > M$.

La suite $(u_n)$ n'est donc pas majorée par $M$.

Elle n'est donc pas majorée.

Par conséquent, elle diverge vers $+\infty$.

# IV Le raisonnement par récurrence

**Le raisonnement par récurrence permet de démontrer de nombreuses propriétés pour les suites définies par récurrence.**

## A La définition

**Pour imager et comprendre le raisonnement par récurrence, on peut retenir le principe d'une « maladie » héréditaire qui se transmet à tous les membres d'une famille dès qu'un des membres développe cette maladie.**

## DÉFINITION Démontrer par récurrence

Soit un entier naturel $n_0$.

On dit que l'on **démontre par récurrence** qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ si :

- on montre que la propriété $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ;
- on montre que si la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un entier $k \geq n_0$, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est également vraie.

La première étape s'appelle l'initialisation.

La deuxième étape s'appelle l'hérédité.

**EXEMPLE**

Pour tout entier naturel $n$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « $5^n - 2^n$ est multiple de 3 ».

On va montrer, par récurrence, que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

- Initialisation

$\mathcal{P}_0$ est vraie car $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 3.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0.

- Hérédité

Soit un entier naturel quelconque $k$.

On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire « $5^k - 2^k$ est multiple de 3 ».

On va montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire « $5^{k+1} - 2^{k+1}$ est multiple de 3 ».

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $m$ tel que :

$$5^k - 2^k = 3 \times m$$

Alors, $5^k = 2^k + 3m$.

On en déduit :

$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \times 5^k - 2^{k+1}$$
$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \times \left(2^k + 3m\right) - 2^{k+1}$$
$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \times 2^k + 15m - 2 \times 2^k$$
$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 2^k(5 - 2) + 15m$$
$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 2^k \times 3 + 3 \times 5m$$
$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3 \times \left(2^k + 5m\right)$$

$5^{k+1} - 2^{k+1}$ est bien également un multiple de 3.

$\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La propriété est héréditaire.

- Conclusion

Initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**REMARQUE**

Un raisonnement par récurrence peut servir à justifier le sens de variation d'une suite.

**EXEMPLE**

Soit la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}u_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On peut montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est croissante, en montrant par récurrence que la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ » est vraie pour tout entier naturel $n$.

## Ⓑ L'application au cas particulier des suites géométriques

**Les suites géométriques sont un cas particulier très utilisé de suites définies par récurrence, on peut démontrer certaines de leur propriétés par récurrence.**

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $x > 0$ et un entier naturel $n$.

Alors :
$(1+x)^n \geq 1+nx$

DÉMONSTRATION

Soit un réel $x > 0$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathcal{P}_n$ la proposition $(1+x)^n \geq 1+nx$.

On montre, par récurrence sur $n$ que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

- Initialisation

$(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

La proposition est vraie pour $n=0$.

La propriété est intialisée.

- Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $(1+x)^n \geq 1+nx$.

On va montrer que sous cette hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)\times(1+x)^n$.

Par hypothèse de récurrence, on a :
$(1+x)^n \geq 1+nx$

On en déduit :
$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)\times(1+x)$, car $1+x>0$

Or $(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$.

Donc $(1+nx)(1+x) \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$.

Ainsi $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

- Conclusion

Initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$ :

$(1+x)^n \geq 1+nx$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $q$ et $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = q^n$.

- Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)$ diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)$ converge vers 0.
- Si $q = 1$, la suite $(u_n)$ converge vers 1.
- Si $q > 1$, la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION

On démontre le dernier point.

Soient un réel $q > 1$ et $u_n = q^n$ pour tout entier naturel $n$.

En posant $a = q-1$, on a :

- $q = 1+a$
- $a > 0$

D'après la propriété précédente, on en déduit :

$(1+a)^n \geq 1+na$

Soit :

$q^n \geq 1+na$

Comme $a > 0$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1+na) = +\infty$

Par comparaison, on en déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

EXEMPLE

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.

On a :

$u_n = q^n$ avec $q = \dfrac{-1}{2}$ pour tout entier naturel $n$

Comme $-1 < q < 1$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$