SITUATION

Pour démontrer des propriétés sur les suites, en particulier sur les suites définies par récurrence, on est parfois conduit à utiliser la démonstration par récurrence. Si une propriété est vraie à un premier rang noté n_0 et est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier *n* supérieur ou égal à n_0.

ÉNONCÉ

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n* par :

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}$$

Montrer que l'on a, pour tout entier *n*, $u_n \geqslant 1$.

Etape 1

Identifier la propriété à démontrer

On précise que l'on va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* (ou pour tout entier $n \geqslant n_0$), une propriété $P\left(n\right)$ est vraie.

APPLICATION

On montre par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \geqslant 1$.

Etape 2

Écrire l'initialisation

On démontre que la propriété est vérifiée au premier rang demandé (en général il s'agit du rang $n = 0$).

APPLICATION

Comme $u_0 = 1$, on a bien :

$u_0 \geqslant 1$

La propriété est initialisée.

Etape 3

Écrire l'hérédité

On fixe un entier naturel *n* quelconque. On suppose la propriété vraie à ce rang *n*. On montre alors que la propriété est vraie au rang $n+1$. Pour cela, on utilise :

- L'hypothèse de récurrence : on a supposé $P\left(n\right)$ vraie.
- Une relation de récurrence : lorsqu'une suite est définie par récurrence, il existe un lien entre l'expression du rang $n+1$ de la suite et celle du rang *n*.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel, on suppose que $u_n \geqslant 1$. On montre alors que $u_{n+1} \geqslant 1$.

La relation de récurrence est la suivante :

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}$$

Or, on a :

$$u_n \geqslant 1$$

Donc :

$$u_n^2 \geqslant 1$$

Et, comme $\frac{1}{2} \geqslant 0$:

$$u_n^2 + \frac{1}{2} \geqslant 1 + 0$$

Donc :

$$u_{n+1} \geqslant 1$$

La propriété est héréditaire.

Etape 4

Écrire la conclusion

La propriété est initialisée et héréditaire ; elle est donc vraie pour tout entier naturel *n* (éventuellement $n \geqslant n_0$ en fonction du rang de l'initialisation).

APPLICATION

La propriété est initialisée et héréditaire ; elle est donc vraie pour tout entier naturel *n*.

Ainsi, pour tout entier naturel *n* : $u_n \geqslant 1$.