SITUATION

Pour déterminer l'expression du terme général d'une suite $\left(u_n\right)$, l'énoncé invite parfois à utiliser une suite auxiliaire $\left(v_n\right)$ définie en fonction de la suite $\left(u_n\right)$.

ÉNONCÉ

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 8 \end{cases}$$

On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 4$$

En utilisant la suite auxiliaire $\left(v_n\right)$, déterminer l'expression du terme général de la suite $\left(u_n\right)$ en fonction de *n*.

Etape 1

Montrer que la suite auxiliaire est arithmétique ou géométrique

On exprime v_{n+1} en fonction de v_n pour déterminer si la suite auxiliaire $\left(v_n\right)$ est arithmétique ou géométrique. On précise alors sa raison et son premier terme.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$

On remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n :

$$v_{n+1} = 3u_n - 8 - 4$$

On remplace u_n par son expression en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = 3\left(v_n + 4\right) - 8 - 4$$

$$v_{n+1} = 3v_n + 12 - 8 - 4$$

Ainsi, pour tout entier naturel *n* :

$$v_{n+1} = 3v_n$$

La suite $\left(v_n\right)$ est donc une suite géométrique de raison 3. Son premier terme vaut :

$$v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$$

Etape 2

Donner le terme général de la suite auxiliaire

On donne l'expression de v_n en fonction de *n*. Deux cas se présentent :

- Si la suite auxiliaire (v_n) est arithmétique de raison *r*, alors, pour tout entier naturel *n*, $v_n = v_0 + nr$.
- Si la suite auxiliaire (v_n) est géométrique de raison *q*, alors, pour tout entier naturel *n*, $v_n = q^n v_0$.

APPLICATION

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -3$. Donc, pour tout entier naturel *n* :

$$v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1}$$

Etape 3

En déduire le terme général de la suite

On remplace v_n par l'expression trouvée dans l'étape précédente dans la définition de la suite auxiliaire pour en déduire l'expression du terme général de la suite (u_n) .

APPLICATION

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_n = v_n + 4$$

On a donc, pour tout entier naturel *n* :

$$u_n = 4 - 3^{n+1}$$