MÉTHODE 1

En factorisant par le terme de plus haut degré

SITUATION

Pour déterminer la limite d'une suite dont le terme général s'exprime sous la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction polynôme ou une fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes), on peut rencontrer une des deux formes indéterminées suivantes : $\frac{\infty}{\infty}$ et $+\infty - \infty$. On utilise alors la factorisation par le terme de plus haut degré pour lever l'indétermination.

ÉNONCÉ

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n^3+n-1}{3n^3+n^2+2}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

ETAPE 1

Factoriser chaque polynôme par son terme de plus haut degré

On factorise chaque polynôme par son terme de plus haut degré.

APPLICATION

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{n^3+n-1}{3n^3+n^2+2}$$

Soit :

$$u_n = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}$$

ETAPE 2

Simplifier les termes factorisés dans le cas d'un quotient de polynômes

Si le terme général de la suite étudiée est un quotient de polynômes, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur en s'intéressant aux termes de plus haut degré par lesquels on vient de factoriser.

APPLICATION

En simplifiant numérateur et dénominateur on obtient, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}$$

ETAPE 3

Déterminer la limite

On détermine la limite de la suite en utilisant les limites usuelles et les opérations sur les limites.

APPLICATION

On a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

Donc, par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 1$$

De plus, on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n^3} = 0$

Donc par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}\right) = 3$$

Finalement, par quotient :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{3}$$

MÉTHODE 2

En utilisant la quantité conjuguée

SITUATION

Cette méthode s'emploie en particulier pour déterminer la limite d'une suite dont le terme général est défini comme somme ou différence de racines carrées.

ÉNONCÉ

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

ETAPE 1

Multiplier et diviser par la quantité conjuguée

- Si l'expression est de type $\left(a - b\right)$, on la multiplie et la divise par sa quantité conjuguée $\left(a + b\right)$.
- Si l'expression est de type $\left(a + b\right)$, on la multiplie et la divise par sa quantité conjuguée $\left(a - b\right)$.

APPLICATION

Cette expression présente une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

ETAPE 2

Développer et réduire le numérateur et le dénominateur

On sait que, pour tous réels a et b :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ainsi, pour tous réels a et b avec $a+b \neq 0$:

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

APPLICATION

On obtient, pour tout n entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{n^2+1-\left(n^2-1\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

Soit :

$$u_n = \frac{2}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

ETAPE 3

Déterminer la limite

Si l'indétermination est levée, on peut déterminer la limite à l'aide des limites usuelles et des règles d'opération. Sinon, il reste à factoriser par les termes de plus haut degré.

APPLICATION

Il n'y a plus d'indétermination. On a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2+1\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{N \to +\infty} \sqrt{N} = +\infty$

Par composition :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$$

De même, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2-1} = +\infty$$

Ainsi, par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right) = +\infty$$

Donc par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

MÉTHODE 3

En utilisant les théorèmes de comparaison

SITUATION
Pour montrer qu'une suite tend vers l'infini, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.

ÉNONCÉ

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - \sin\left(n^2\right)$$

Déterminer la limite de cette suite.

ETAPE 1

Majorer ou minorer l'expression par celle d'une autre suite

On essaie de minorer le terme général de la suite par celui d'une autre suite qui tend vers $+\infty$ ou de la majorer par le terme général d'une autre suite qui tend vers $-\infty$.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel, on a :

$$\sin\left(n^2\right) \leqslant 1$$

Soit :

$$-\sin\left(n^2\right) \geqslant -1$$

En ajoutant *n* à chaque membre de l'inégalité, on obtient :

$$n - \sin\left(n^2\right) \geqslant n - 1$$

On remarque que l'on a :

$$\lim_{n \to \infty} (n-1) = +\infty$$

ETAPE 2

Conclure sur la limite à l'aide des théorèmes de comparaison

On conclut sur la limite de la suite :

- Si le terme général est minoré par celui d'une suite qui tend vers $+\infty$, alors la suite tend aussi vers $+\infty$.
- Si le terme général est majoré par celui d'une suite qui tend vers $-\infty$, alors la suite tend aussi vers $-\infty$.

APPLICATION

On a :

- Pour tout entier naturel n : $n - \sin\left(n^2\right) \geqslant n - 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$

On peut conclure, d'après les théorèmes de comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[n - \sin\left(n^2\right)\right] = +\infty$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

MÉTHODE 4

En utilisant le théorème des gendarmes

SITUATION
Pour montrer qu'une suite admet une limite finie, on peut utiliser le théorème des gendarmes.

ÉNONCÉ
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

ETAPE 1

Déterminer un encadrement de l'expression par deux suites de même limite

On encadre l'expression dont on cherche la limite par celle de deux suites ayant la même limite.

APPLICATION
Soit n un entier naturel non nul :

$$-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$$

En multipliant par $\dfrac{1}{n}$, qui est strictement positif, on obtient :

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

On remarque que l'on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$

ETAPE 2

Conclure à l'aide du théorème des gendarmes

On peut conclure grâce au théorème des gendarmes que l'expression admet pour limite celle commune aux deux suites encadrantes.

APPLICATION

On sait que :

- Pour tout entier *n* strictement positif : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on peut donc conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$