#### **SITUATION**

En utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (c'est-à-dire le théorème appliqué au cas des fonctions strictement monotones), on peut montrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle.

### ÉNONCÉ

Montrer que l'équation  $x^3-2x+1=0$  admet une unique solution sur  $]-\infty;-1]$  .

## Etape 1

# Se ramener à une équation du type $f\left(x\right)=k$

On détermine une fonction f telle que l'équation soit équivalente à l'équation  $\,f\,(x)=k\,.\,$ 

### **APPLICATION**

On pose:

$$orall x \in \left] -\infty; -1 
ight]$$
 ,  $\left. f \left( x 
ight) = x^3 - 2x + 1 
ight.$ 

On cherche à montrer que l'équation  $f\left(x
ight)=0$  admet une unique solution sur  $\left]-\infty;-1
ight]$  .

### Etape 2

# Dresser le tableau de variations de f

Si l'on cherche à démontrer que l'équation f(x) = k admet une solution unique sur I, on dresse le tableau de variations de f sur I.

On étudie les variations de f au préalable, si cela n'a pas été fait dans les questions précédentes.

### **APPLICATION**

On étudie la fonction f sur  $]-\infty;-1]$  :

f est dérivable sur  $]-\infty;-1]$  en tant que restriction d'une fonction polynôme et :

$$orall x\in \left] -\infty; -1
ight]$$
 ,  $f^{\prime}\left( x
ight) =3x^{2}-2$ 

On étudie le signe de  $f'\left(x
ight)$  . Pour cela, on résout l'inéquation  $f'\left(x
ight)>0$  . Pour tout réel x :

$$3x^2 - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > rac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{rac{2}{3}} \,\, \mathsf{ou} \,\, x < -\sqrt{rac{2}{3}}$$

On en déduit, comme  $-1<-\sqrt{rac{2}{3}}$  , que  $f'\left(x
ight)>0$  sur  $\left]-\infty;-1
ight]$  . Ainsi, f est strictement croissante

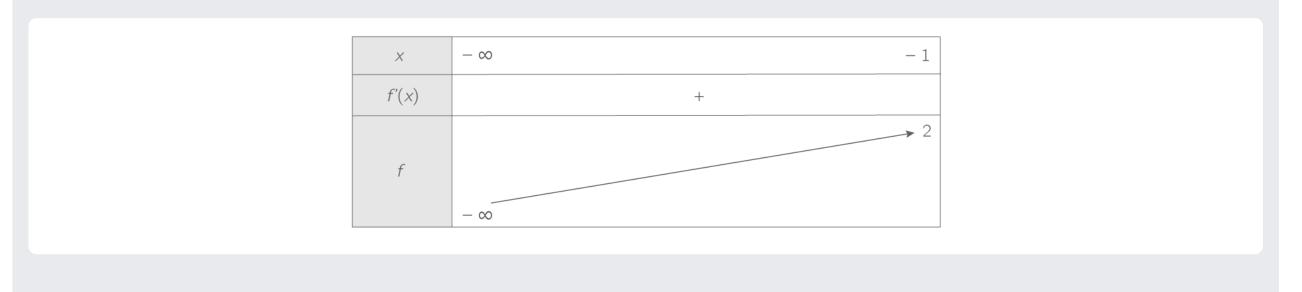
sur 
$$]-\infty;-1]$$
.

De plus, on a :

$$ullet \lim_{x o -\infty}\left(x^3-2x+1
ight)=\lim_{x o -\infty}x^3\left(1-rac{2}{x^2}+rac{1}{x^3}
ight)=-\infty$$

• 
$$\lim_{x o -1} \left( x^3 - 2x + 1 \right) = \left( -1 \right)^3 - 2 imes \left( -1 \right) + 1 = 2$$

On dresse alors le tableau de variations de f:



### Etape 3

# Utiliser corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

On récite les hypothèses :

- fest continue sur l.
- fest strictement monotone sur l.
- Soit J l'intervalle image de I par f, on vérifie que  $k \in J$  .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f\left(x\right)=k$  admet une solution unique sur I.

### **APPLICATION**

Sur 
$$]-\infty;-1]$$
:

- fest continue.
- fest strictement monotone
- $\lim_{x o -\infty}f\left(x
  ight)=-\infty$  et  $\lim_{x o -1}f\left(x
  ight)=2$  . On a bien  $0\in\left]-\infty;2
  ight]$  .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x)=0 admet une solution unique sur  $]-\infty;-1]$  .