SITUATION

Il est souvent demandé de déterminer la position relative d'une courbe et d'une droite (le plus souvent une tangente ou une asymptote), c'est-à-dire de déterminer laquelle est graphiquement située au-dessus de l'autre. Ce problème revient à étudier le signe d'une différence.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$ par :

$$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$$

Déterminer la position relative de C_f et de la droite *D* d'équation $y=x-1$.

Etape 1

Énoncer la démarche

Avant de commencer les calculs, on explique la démarche :

"Pour étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite *D* d'équation $y=ax+b$, on étudie le signe de $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)$."

APPLICATION

Pour étudier la position relative de C_f et de *D*, on étudie le signe de $f\left(x\right)-\left(x-1\right)$ pour tout réel *x* différent de −1.

Etape 2

Calculer et simplifier $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)$

On calcule et simplifie autant que possible la différence $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)$, de manière à obtenir une expression dont on puisse facilement déterminer le signe.

APPLICATION

Pour tout réel *x* différent de −1, on a :

$$f\left(x\right)-\left(x-1\right)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\left(x-1\right)$$

$$f\left(x\right)-\left(x-1\right)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x+1}$$

On réduit au même dénominateur et on reconnaît une identité remarquable du type $\left(a-b\right)\left(a+b\right)=a^2-b^2$, pour tous réels *a* et *b*.

$$f\left(x\right)-\left(x-1\right)=\dfrac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{x+1}$$

Soit :

$$f\left(x\right)-\left(x-1\right)=\dfrac{2}{x+1}$$

Etape 3

Étudier le signe de $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)$

On étudie alors le signe de la différence $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)$ en distinguant les cas selon les valeurs de *x* si nécessaire. Un tableau de signes peut s'avérer utile dans les cas les plus compliqués.

APPLICATION

On a :

- $2>0$
- $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

On en déduit donc le signe de la différence :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
2	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-(x-1)$	$-$	||	$+$

Etape 4

Conclure sur la position relative

Finalement, on conclut :

- Sur les intervalles où $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)>0$, C_f est au-dessus de *D*.
- Sur les intervalles où $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)<0$, C_f est en dessous de *D*.
- Lorsque $f\left(x\right)-\left(ax+b\right)=0$, C_f et *D* ont un point d'intersection.

APPLICATION

Finalement, on peut conclure :

- C_f est au-dessus de *D* sur $\left]-1;+\infty\right[$.
- C_f est en dessous de *D* sur $\left]-\infty;-1\right[$.