SITUATION

On peut dans certains cas déterminer le signe d'une intégrale de la forme $\int_a^b f\left(x\right)\ \mathrm{d}x$ sans avoir à la calculer explicitement. Pour cela, on doit déterminer le signe de la fonction *f*.

ÉNONCÉ

Déterminer le signe de l'intégrale suivante :

$$\int_2^5 x^2e^x\ \mathrm{d}x$$

Etape 1

Déterminer le signe de $f\left(x\right)$ sur $\left[a;b\right]$

On détermine le signe de la fonction *f* sur $\left[a;b\right]$.

APPLICATION

Pour tout réel *x* compris entre 2 et 5, on a :

- $x^2\geqslant0$
- $e^x\geqslant0$

Donc, par produit :

$\forall x\in\left[2;5\right], \ x^2e^x\geqslant0$

Etape 2

Vérifier le sens des bornes

On vérifie que les bornes sont dans le bon sens, c'est-à-dire que *a* est inférieur ou égal à *b*.

APPLICATION

On a bien $2\leqslant5$, donc les bornes sont dans le "bon sens".

Etape 3

Conclure sur le signe de l'intégrale

On applique la positivité de l'intégration :

- Si *f* est positive sur $\left[a;b\right]$, $\int_a^b f\left(x\right)\ \mathrm{d}x$ est positive.
- Si *f* est négative sur $\left[a;b\right]$, $\int_a^b f\left(x\right)\ \mathrm{d}x$ est négative.

PIÈGE

Si le signe de *f* n'est pas constant sur $\left[a;b\right]$, on ne poursuit pas cette méthode car elle ne permettra pas de conclure.

APPLICATION

Comme $x\longmapsto x^2e^x$ est positive sur l'intervalle $\left[2;5\right]$, par positivité de l'intégration, on a :

$\int_2^5 x^2e^x\ \mathrm{d}x\geqslant0$