SITUATION
Pour déterminer l'écriture explicite d'une suite, on peut avant tout montrer que la suite est géométrique et déterminer sa raison.

ÉNONCÉ

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel *n*, par :

$$v_{n+1} = 4v_n + 1$$

On s'intéresse alors à la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par :

$$u_n = v_n + \frac{1}{3}$$

Montrer que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.

Etape 1

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Pour tout entier naturel *n*, on factorise l'expression donnant u_{n+1} de manière à faire apparaître u_n, en simplifiant au maximum le facteur que multiplie u_n.

APPLICATION

Soit *n* un entier naturel :

$$u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{3}.$$

On remplace v_{n+1} par son expression en fonction de v_n :

$$u_{n+1} = 4v_n + 1 + \frac{1}{3}$$

On remplace v_n par son expression en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = 4\left(u_n - \frac{1}{3}\right) + 1 + \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} = 4u_n - \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} = 4u_n$$

Etape 2

Identifier l'éventuelle raison de la suite

On vérifie qu'il existe un réel *q* indépendant de la variable *n* tel que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = q \times u_n$.

APPLICATION

En posant $q = 4$, on a bien, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = qu_n$.

Etape 3

Conclure sur la nature de la suite

S'il existe un réel *q* indépendant de la variable *n* tel que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = q \times u_n$, on peut conclure que la suite est géométrique de raison *q*. On précise alors son premier terme.

APPLICATION

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 4. Son premier terme vaut :

$$u_0 = v_0 + \dfrac{1}{3} = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$$