I La représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

On décrit l'appartenance d'un point à une droite de l'espace par un système de trois équations. On peut obtenir ce système grâce à un point et un vecteur directeur de la droite.

PROPRIÉTÉ

Soient x_0, y_0, z_0, a, b, c des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

La droite (d) passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

DÉFINITION **Représentation paramétrique d'une droite**

Le système d'équations précédent est appelé **représentation paramétrique de la droite** (d) dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

EXEMPLE

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est la droite (d) passant par le point $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

REMARQUE

On parle également de système d'équations paramétriques de la droite.

REMARQUE

On retrouve un système semblable à celui de la représentation paramétrique de la droite dans le plan avec une équation supplémentaire.

II Les équations cartésiennes du plan dans l'espace

On peut définir des équations cartésiennes d'un plan dans l'espace de la même manière qu'on peut définir des équations cartésiennes d'une droite dans le plan.

A Les équations cartésiennes d'un plan

Les équations cartésiennes d'un plan dans l'espace sont des équations permettant de caractériser l'appartenance d'un point à un plan à partir de ses coordonnées dans le repère.

THÉORÈME Équation cartésienne à partir d'un vecteur normal

Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère un plan $\mathcal{P}$.

Si le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors le plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne du type :

$$ax+by+cz+d=0$$

DÉMONSTRATION

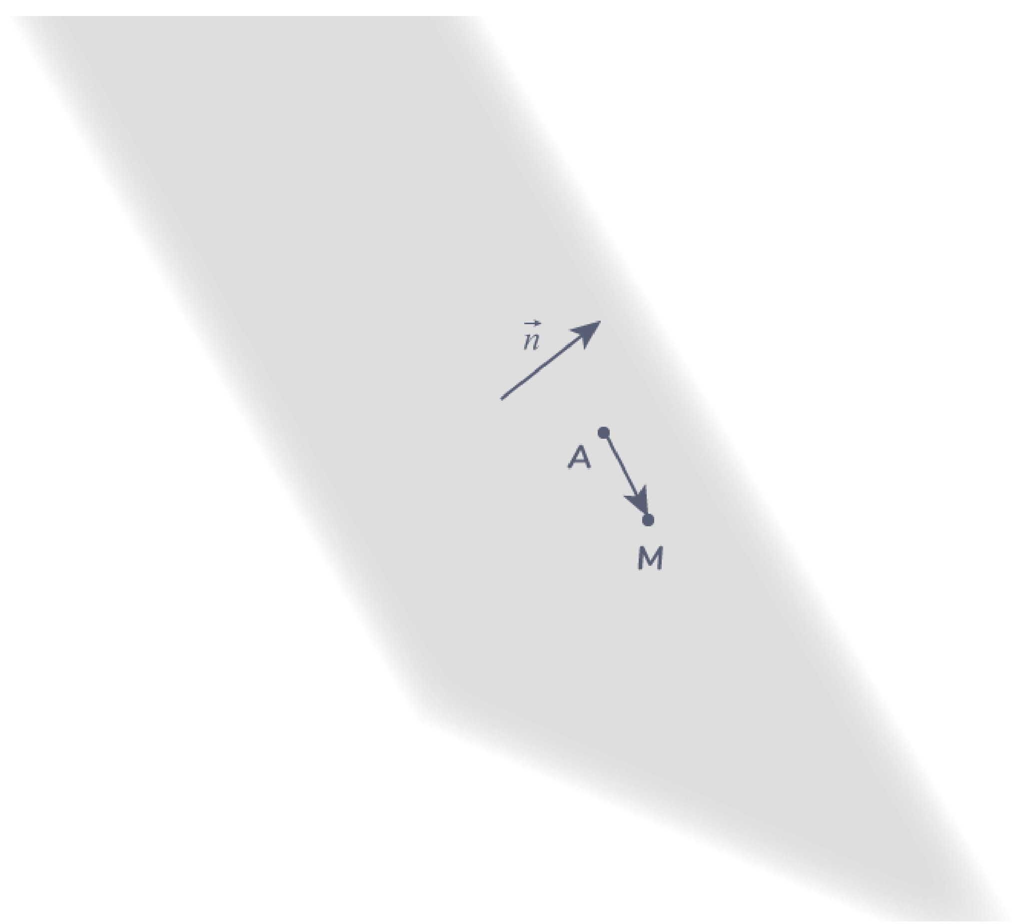
Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal.

On considère un point $A(x_0;y_0;z_0)$ du plan $\mathcal{P}$.

Alors un point $M(x;y;z)$ de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$$



Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\\z_M-z_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$

Donc :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

avec $d=-ax_0-by_0-cz_0$

EXEMPLE

Soient $A(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ admet une équation cartésienne du type $x+2y+3z+d=0$.

Comme $A\in\mathcal{P}$, on a :

$x_A+2y_A+3z_A+d=0$

On en déduit :
$1+2\times1+3\times1+d=0$

Donc :
$d=-6$

Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

$x+2y+3z-6=0$

THÉORÈME **Vecteur normal à partir d'une équation cartésienne**

Soient $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et d un réel.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

🤓 **REMARQUE**

Ce théorème est la réciproque du théorème précédent.

EXEMPLE

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $-3x+2y+7=0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$.

B Les systèmes de deux équations d'une droite

Dans l'espace, on ne peut pas caractériser l'appartenance d'un point à une droite avec une équation cartésienne. En revanche, on peut décrire une droite comme l'intersection de deux plans, donc on peut caractériser l'appartenance d'un point à une droite avec un système de deux équations cartésiennes.

PROPRIÉTÉ

Soient a, b, c, d, a', b', c' et d' des réels tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

est la droite (d) intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

EXEMPLE

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ est la droite (d) intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $x+y+z=0$ et $2x-z+5=0$.

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ représente bien l'ensemble des points appartenant aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire la droite intersection de ces deux plans.

REMARQUE

À partir d'un système de deux équations cartésiennes de plans, on peut retrouver une représentation paramétrique de la droite intersection des deux plans.

EXEMPLE

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $\begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+5=0 \end{cases}$ est la droite (d) intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $x+z+2=0$ et $y-z+5=0$.

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, le système précédent correspond bien à l'ensemble des points de l'espace formant la droite (d) intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

$$M \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z+2=0 \\ y-z+5=0 \end{cases}$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-2 \\ y=z-5 \end{cases}$$

En choisissant pour valeur de z un réel t quelconque, on obtient :

$$M \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t-2 \\ y=t-5 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On retrouve bien une représentation paramétrique de la droite (d).