I Les successions d'épreuves indépendantes

De nombreuses expériences aléatoires sont constituées d'une succession de plusieurs épreuves indépendantes. Dans ce type de cas, la visualisation des issues à l'aide d'un arbre est pratique et le calcul de la probabilité d'un événement élémentaire est un produit.

DÉFINITION Univers d'une succession d'épreuves indépendantes

Soit $E_1, E_2, ..., E_n$ une **succession d'épreuves indépendantes** d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$.

L'univers des issues de cette succession d'épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets $(i_1, i_2, ..., i_n)$ où chaque issue i_p est une issue de l'univers Ω_p.

EXEMPLE

Dans un restaurant scolaire, les élèves doivent choisir une entrée, un plat et un dessert.

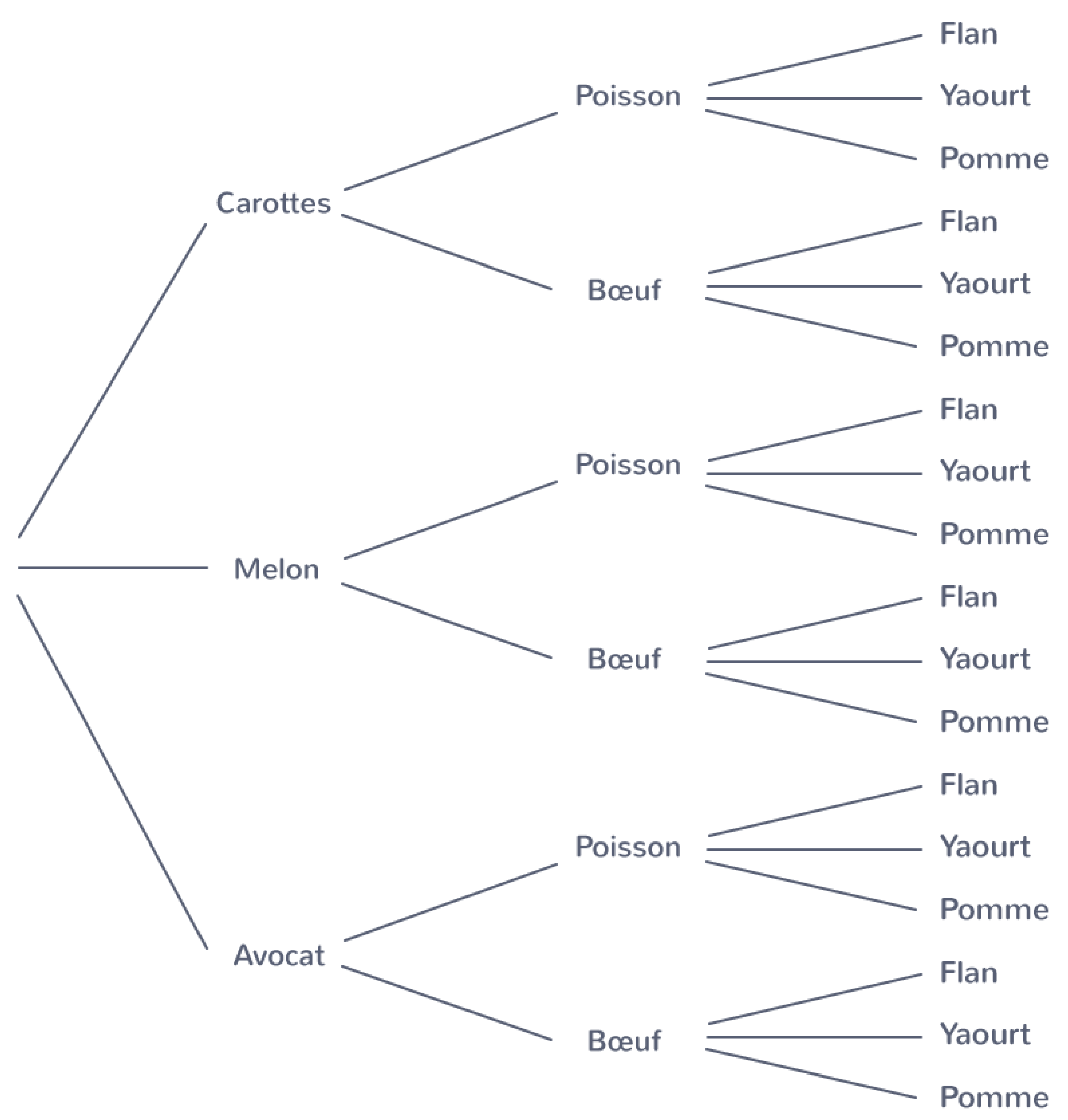
Ils ont le choix suivant un jour donné :

- Entrées = {Carottes, Melon, Avocat}
- Plats = {Poisson, Bœuf}
- Desserts = {Flan, Yaourt, Pomme}

Le choix d'une entrée, d'un plat et d'un dessert est une succession de trois épreuves indépendantes.

L'univers des issues possibles est le produit cartésien $\text{Entrées} \times \text{Plats} \times \text{Desserts}$, c'est-à-dire l'ensemble des triplets (Entrée, Plat, Dessert), avec $\text{Entrée} \in \text{Entrées}$, $\text{Plat} \in \text{Plats}$ et $\text{Dessert} \in \text{Desserts}$.

On peut représenter les différentes issues possibles à l'aide de l'arbre ci-dessous :



PROPRIÉTÉ

Soit $E_1, E_2, ..., E_n$ une succession d'épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ et soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$.

Soit un événement élémentaire (ne contenant qu'une issue) de l'univers Ω : $A = \{(i_1, i_2, ..., i_n)\}$.

Alors la probabilité de l'événement A est le produit des probabilités des événements $\{i_1\}$, $\{i_2\}$, ..., $\{i_n\}$ calculées dans leur univers respectif.

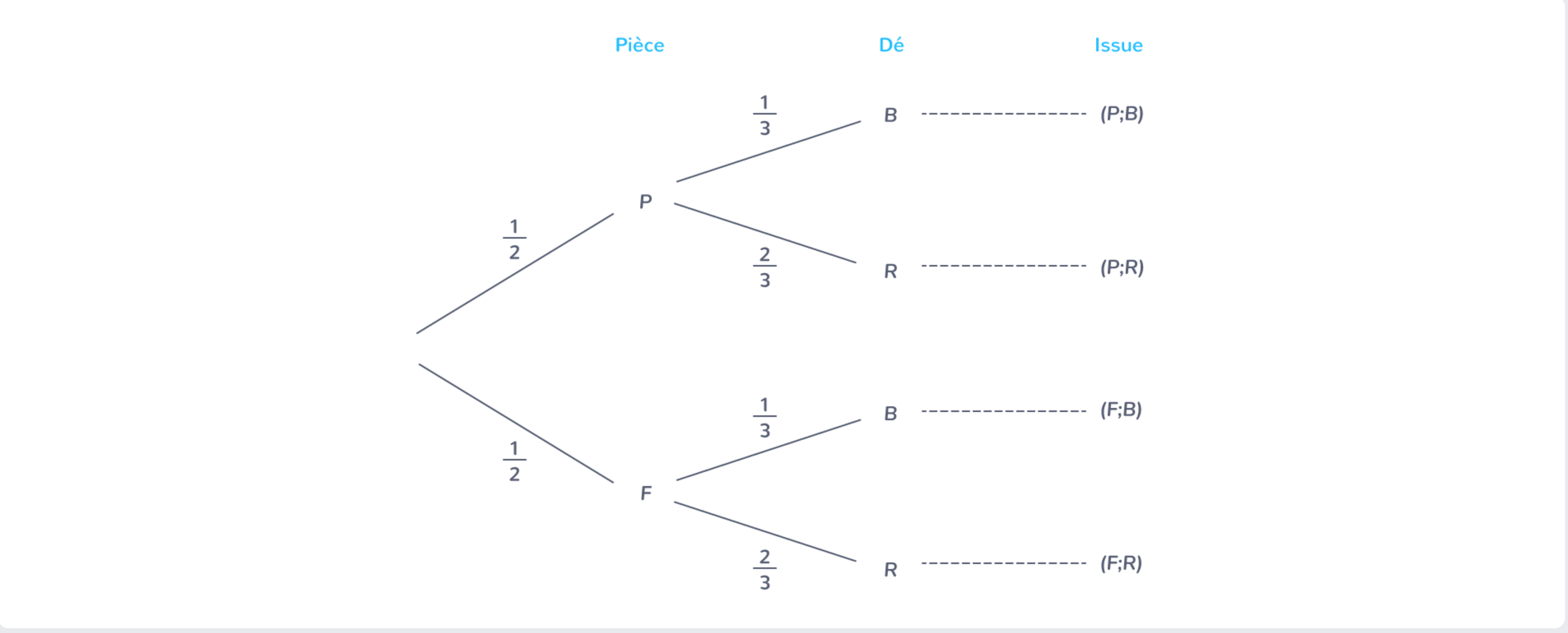
EXEMPLE

On considère les deux expériences suivantes :

E_1 : On lance une pièce de monnaie équilibrée. On note P (respectivement F) l'issue « Pile » (respectivement « Face »).

E_2 : On lance un dé cubique équilibré dont deux faces sont bleues et les autres sont rouges. On note B (respectivement R) l'issue « Bleu » (respectivement « Rouge »).

On peut visualiser la succession de ces deux expériences par l'arbre ci-dessous :



La probabilité de l'événement $\{P; B\}$ est égale à :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

II Les lois de Bernoulli

Lors d'une expérience aléatoire, on est souvent amené à considérer une issue comme étant le « succès », et donc les autres issues comme correspondant à un « échec ». Une épreuve est donc souvent ramenée à une épreuve n'ayant que deux issues : le succès et l'échec.

DÉFINITION **Épreuve de Bernoulli**

Soit p un réel compris entre 0 et 1.

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre** p toute expérience aléatoire ne comptant que deux issues (l'une nommée « succès », l'autre « échec ») dont la probabilité que le « succès » se réalise est p.

EXEMPLE

Lors d'un jeu de dés, on lance une fois un dé cubique et équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On gagne si on obtient un 6.

Comme le dé est équilibré, la probabilité de gagner est $\dfrac{1}{6}$.

Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

DÉFINITION **Loi de Bernoulli**

Soit un réel p compris entre 0 et 1.

On dit qu'une variable X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si :

- les valeurs prises par X sont 0 et 1 ;
- $P(X=1)=p$.

EXEMPLE

Lors d'un jeu de dés, on lance une fois un dé cubique et équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On gagne si on obtient un 6.

Comme le dé est équilibré, la probabilité de gagner est de $\dfrac{1}{6}$.

La variable aléatoire X prenant la valeur 1 lorsque l'on obtient un 6 et 0 sinon suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

PROPRIÉTÉ

Soit p un nombre réel compris entre 0 et 1.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, on note :

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

III Les lois binomiales

Lors d'une succession d'épreuves indépendantes et identiques, il est fréquent de compter des « succès » ou de chercher la probabilité d'obtenir un nombre de « succès » donné.

DÉFINITION Schéma de Bernoulli

Soit p un nombre réel compris entre 0 et 1.

On appelle **schéma de Bernoulli de paramètres** $(n ; p)$ une succession indépendante de n épreuves de Bernoulli identiques de paramètre p.

EXEMPLE

Soit l'épreuve de Bernoulli consistant à lancer un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et pour laquelle le succès correspond à l'obtention d'un 6.

En répétant 20 fois cette épreuve de façon indépendante, on obtient un schéma de Bernoulli de paramètres $\left(20 ; \dfrac{1}{6}\right)$.

DÉFINITION Loi binomiale

Soient n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès sur un schéma de Bernoulli de paramètres $(n ; p)$.

On dit que X suit **la loi binomiale de paramètres** n **et** p.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; p)$.

EXEMPLE

Soit l'épreuve de Bernoulli consistant à lancer un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et pour laquelle le succès correspond à l'obtention d'un 6.

En répétant 20 fois cette épreuve de façon indépendante, on obtient un schéma de Bernoulli de paramètres $\left(20 ; \dfrac{1}{6}\right)$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus lors de cette succession de 20 épreuves de Bernoulli suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{1}{6}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(20 ; \dfrac{1}{6}\right)$.

PROPRIÉTÉ

Soient n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

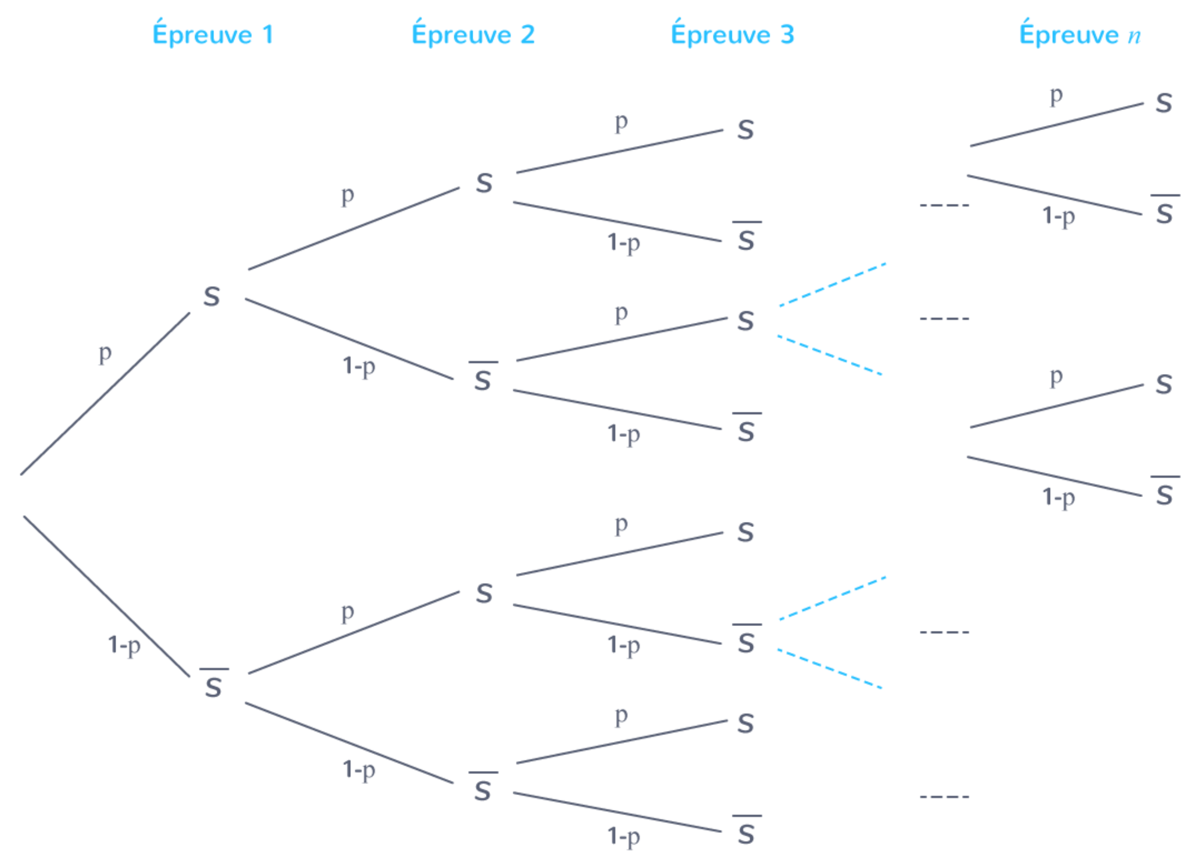
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

DÉMONSTRATION

Soient n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

On peut représenter le schéma de Bernoulli par l'arbre suivant dans lequel S représente un succès et $\overline{S}$ un échec :



Soit k un entier compris entre 0 et n.

Sur chaque chemin de l'arbre contenant exactement k succès, on compte k fois la probabilité p et $n-k$ fois la probabilité $1-p$.

La probabilité de l'événement correspondant à un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.

Or le nombre de chemins de l'arbre contenant exactement k succès correspond au nombre de parties à k éléments d'un ensemble en contenant n, soit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Comme chacun des chemins contenant exactement k succès correspond à un événement incompatible avec les autres, la probabilité d'obtenir k succès est la somme des probabilités des événements correspondant à ces chemins.

On a donc bien :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

REMARQUE

Soient n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Si l'on représente un diagramme en bâtons constitué en abscisses du nombre de succès possibles et en ordonnées de la probabilité correspondante, on obtient ce type de graphique :

EXEMPLE

Avec $n = 50$ et $p = 0{,}3$, on obtient :