SITUATION

Déterminer la position relative de deux courbes C_f et C_g revient à savoir sur quel(s) intervalle(s) la première est au-dessus de la seconde (et inversement). Cette question se résout par une étude de signe.

ÉNONCÉ

Soient les fonctions f et g définies par :

$$\forall x\in\left[-\pi;\pi\right],\ f\left(x\right)=2\cos\left(x\right)$$

$$\forall x\in\left[-\pi;\pi\right],\ g\left(x\right)=\cos\left(x\right)+\dfrac{1}{2}$$

On appelle C_f et C_g les courbes représentatives de f et de g. Déterminer la position relative de C_f et C_g .

Etape 1

Énoncer la démarche

On explique la démarche : "Pour étudier la position relative de C_f et de C_g , on étudie le signe de $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ ".

APPLICATION

Pour étudier la position relative de C_f et de C_g , on étudie le signe de $f\left(x\right)-g\left(x\right)$.

Etape 2

Calculer $f\left(x\right)-g\left(x\right)$

On calcule ensuite $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ en simplifiant le résultat au maximum, afin d'obtenir une expression dont il est facile d'étudier le signe.

APPLICATION

On a :

$$\forall x\in\left[-\pi;\pi\right],\ f\left(x\right)-g\left(x\right)=2\cos\left(x\right)-\left(\cos\left(x\right)+\dfrac{1}{2}\right)$$

$$\forall x\in\left[-\pi;\pi\right],\ f\left(x\right)-g\left(x\right)=2\cos\left(x\right)-\cos\left(x\right)-\dfrac{1}{2}$$

Donc :

$$\forall x\in\left[-\pi;\pi\right],\ f\left(x\right)-g\left(x\right)=\cos\left(x\right)-\dfrac{1}{2}$$

Etape 3

Étudier le signe de $f\left(x\right)-g\left(x\right)$

On étudie alors le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de *x*. On dresse un tableau de signes si l'expression est compliquée.

APPLICATION

Afin d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[-\pi; \pi]$, on résout l'équation $f(x) - g(x) > 0$. Pour tout réel $x \in [-\pi; \pi]$:

$$f(x) - g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2}$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Donc, pour tout réel $x \in [-\pi; \pi]$:

$$\cos(x) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

En s'aidant du cercle trigonométrique, on en déduit que pour tous réels *a* et *b* de $[-\pi; \pi]$

$$\cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$$

On dresse le tableau de signes sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Etape 4

Conclure

Finalement, on conclut en trois étapes :

- Sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, C_f est au-dessus de C_g.
- Sur les intervalles où $f(x) - g(x) < 0$, C_f est en dessous de C_g.
- Lorsque $f(x) - g(x) = 0$, C_f et C_g ont un point d'intersection.

APPLICATION

On conclut que :

- Sur $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$, $f(x) - g(x) > 0$, C_f est au-dessus de C_g.
- Sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, $f(x) - g(x) < 0$, C_f est en dessous de C_g.

- $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ aux points d'abscisses $x=-\dfrac{\pi}{3}$ et $x=\dfrac{\pi}{3}$, donc C_f et C_g ont deux points d'intersection.