SITUATION

On cherche les points d'intersection de deux courbes représentatives C_f et C_g, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ dont l'abscisse *x* vérifie $f(x) = g(x)$.

ÉNONCÉ

Soient *f* et *g* les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g(x) = x^3 - x$$

Déterminer les points d'intersection des courbes représentatives C_f et C_g.

Etape 1

Énoncer la démarche

Avant de commencer la résolution, on énonce la démarche :

"Les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$."

APPLICATION

Les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. On résout donc cette équation.

Etape 2

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

On résout tout d'abord l'équation $f(x) = g(x)$. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

APPLICATION

On résout :

Pour tout réel *x*, $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = x^3 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

Or, on sait que pour tous réels *a* et *b* :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

On a donc, pour tout réel *x* :

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

a^2 étant nul si et seulement si $a = 0$, on a alors :

$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

L'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ admet donc $x=-1$ pour seule solution.

Etape 3

Calculer l'image de chaque solution

Pour chaque solution *x* de l'équation précédente, on détermine la valeur de $f\left(x\right)$ (ou celle de $g\left(x\right)$ car $g\left(x\right)=f\left(x\right)$). Cela donne l'ordonnée du point d'intersection de C_f et C_g d'abscisse *x*.

APPLICATION

−1 est la seule solution de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$. On a :

$$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)+1=-1+1-1+1$$

Finalement :

$$f\left(-1\right)=0$$

Etape 4

En déduire les coordonnées des points d'intersection

Les coordonnées trouvées grâce aux deux étapes précédentes sont donc les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

APPLICATION

On peut conclure que le seul point d'intersection des courbes C_f et C_g est le point de coordonnées $\left(-1{,}0\right)$.