MÉTHODE 1

En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$

SITUATION
On cherche à déterminer la monotonie d'une suite définie par récurrence ou explicitement en fonction de *n*.

ÉNONCÉ

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

ETAPE 1

Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$

On calcule et simplifie la différence $u_{n+1} - u_n$ de manière à pouvoir déterminer son signe.

APPLICATION
Pour tout entier naturel *n* :

$u_{n+1} - u_n = 3$

ETAPE 2

Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$

On détermine le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

APPLICATION

Pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n > 0$.

ETAPE 3

Conclure

- Si le signe de la différence est positif ou nul pour tout *n*, la suite est croissante.
- Si le signe de la différence est négatif ou nul pour tout *n*, la suite est décroissante.
- Si la différence change de signe en fonction de la valeur de *n*, la suite n'est pas monotone.

APPLICATION

Pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est donc croissante.

MÉTHODE 2

Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

SITUATION
On cherche à déterminer la monotonie d'une suite définie par récurrence ou explicitement en fonction de *n*. Attention, cette méthode n'est valable que si la suite est à termes strictement positifs.

ÉNONCÉ

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$u_n = \frac{2^{-n}}{n\left(n+1\right)}$$

ETAPE 1

Montrer que les termes de la suite sont strictement positifs

On vérifie tout d'abord, éventuellement par récurrence si la suite est définie comme telle, que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

APPLICATION
Pour tout entier naturel *n* non nul :

- $2^{-n} > 0$
- $n > 0$
- $n+1 > 0$

On a donc, pour tout entier naturel *n* non nul :

$u_n > 0$

ETAPE 2

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Pour tout entier naturel *n*, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on le simplifie de manière à pouvoir facilement le comparer à 1.

APPLICATION
Soit *n* un entier naturel non nul :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{-(n+1)}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}}{\frac{2^{-n}}{n\left(n+1\right)}} = \frac{2^{-(n+1)}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)} \times \frac{n\left(n+1\right)}{2^{-n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-1} \times n}{\left(n+2\right)}$$

ETAPE 3

Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

On compare, pour tout entier naturel *n*, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

APPLICATION

On a, pour tout entier naturel *n* non nul :

- $0 \leqslant 2^{-1} \leqslant 1$
- $0 \leqslant \dfrac{n}{n+2} \leqslant 1$

Donc, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$0 \leqslant 2^{-1} \times \dfrac{n}{n+2} \leqslant 1$$

Soit :

$$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

ETAPE 4

Conclure

- Si le quotient est supérieur ou égal à 1 pour tout *n*, la suite est croissante.
- Si le quotient est inférieur ou égal à 1 pour tout *n*, la suite est décroissante.
- Si la position du quotient par rapport à 1 varie en fonction de la valeur de *n*, la suite n'est pas monotone.

APPLICATION

Pour tout entier naturel *n* non nul, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Comme la suite est à termes strictement positifs, en multipliant l'inégalité précédente par u_n, pour tout entier naturel *n* non nul, on obtient :

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite est donc décroissante.

MÉTHODE 3

En étudiant les variations de *f*, lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(n\right)$

SITUATION

Si la suite est définie de manière explicite par $u_n = f\left(n\right)$, on peut étudier les variations de la fonction *f*.

ÉNONCÉ

Soit (u_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n :

$$u_n = -n^2$$

ETAPE 1

Identifier la fonction *f*

En remplaçant l'entier n par un réel x, on obtient la fonction f à étudier.

APPLICATION

Ici, on définit la fonction f suivante :

$$f : x \longmapsto -x^2$$

ETAPE 2

Étudier les variations de *f*

On étudie les variations de la fonction f sur $[n_0 ; +\infty[$ où n_0 est le rang du premier terme de la suite.

APPLICATION

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$f^{'} : x \longmapsto -2x$$

Or, pour tout réel x positif, $-2x \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x positif :

$$f'(x) \leqslant 0$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

ETAPE 3

Conclure

- Si f est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, la suite est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0 ; +\infty[$, la suite est décroissante.

APPLICATION

f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc la suite est décroissante.

MÉTHODE 4

En utilisant une démonstration par récurrence

SITUATION

> Si la suite est définie par récurrence et que les autres méthodes n'aboutissent pas, on peut utiliser une démonstration par récurrence pour prouver la monotonie de la suite.

ÉNONCÉ

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel *n* par :

$$u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}$$

ETAPE 1

Conjecturer la monotonie de la suite

On étudie les premiers termes de la suite pour conjecturer la monotonie éventuelle de la suite.

APPLICATION

On a :

- $u_0 = 0$
- $u_1 = \sqrt{0+4} = 2$

Comme $0 \leqslant 2$, on peut conjecturer que la suite est croissante.

ETAPE 2

Démontrer la conjecture par récurrence

- Si la suite semble croissante, on montre alors par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Si la suite semble décroissante, on montre alors par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

APPLICATION

On montre par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1$

Hérédité : Soit *n* un entier naturel. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$. On montre alors que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

On a supposé que :

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$

On a donc :

$4 \leqslant 4 + u_n \leqslant 4 + u_{n+1}$

Comme la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient

$2 \leqslant \sqrt{4+u_n} \leqslant \sqrt{4+u_{n+1}}$

Soit :

$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

On a donc bien :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

Conclusion : La proposition est initialisée et héréditaire. Donc, pour tout entier naturel *n*, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

ETAPE 3

Conclure

- Si on a montré que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \leqslant u_{n+1}$, on peut conclure que la suite est croissante.
- Si on a montré que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant u_{n+1}$, on peut conclure que la suite est décroissante.

APPLICATION

On peut donc conclure que la suite est croissante.