SITUATION

Afin de déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f\left(x\right)=k$ sur *I*, on utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour chaque intervalle de *I* sur lequel la fonction est strictement monotone.

ÉNONCÉ

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3+x^2-x+1=0$ sur $\mathbb{R}$.

Etape 1

Se ramener à une équation du type $f\left(x\right)=k$

On détermine une fonction *f* telle que l'équation soit équivalente à une équation du type $f\left(x\right)=k$.

APPLICATION

On pose :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^3+x^2-x+1$

On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation $f\left(x\right)=0$ sur $\mathbb{R}$.

Etape 2

Dresser le tableau de variations de *f*

On étudie les variations de *f* au préalable, si cela n'a pas été fait dans les questions précédentes. On dresse ensuite le tableau de variations de *f* sur *I* (limites et extremums locaux inclus).

APPLICATION

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'\left(x\right)=3x^2+2x-1$

On étudie le signe de $f'\left(x\right)$. On reconnaît un trinôme du second degré. Son discriminant est :

$\Delta=2^2-4\times3\times\left(-1\right)$

Donc :

$\Delta=16$

$\Delta>0$ donc le trinôme est du signe de *a* (>0) sauf entre les racines que l'on détermine :

- $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times3}=\dfrac{-6}{6}=-1$
- $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

Ainsi, on obtient le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De plus, on a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + x^2 - x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + x^2 - x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$

Enfin :

- $f\left(-1\right) = \left(-1\right)^3 + \left(-1\right)^2 - \left(-1\right) + 1 = 2$
- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right) + 1 = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{1}{27} + \dfrac{3}{27} - \dfrac{9}{27} + \dfrac{27}{27} = \dfrac{22}{27}$

On dresse le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Etape 3

Déterminer le nombre de solutions de l'équation pour chaque intervalle

On identifie les intervalles $I_i \in I$ sur lesquels la fonction *f* est strictement monotone. Pour chaque intervalle I_i, on procède de la manière suivante :

- On justifie que *f* est continue.
- On justifie que *f* est strictement monotone.
- On donne les limites ou les valeurs aux bornes de I_i. Soit J_i l'intervalle image de I_i par *f*, on détermine si $k \in J_i$.

On en conclut :

- Si $k \notin J_i$ alors l'équation $f\left(x\right) = k$ n'admet pas de solution sur I_i.
- Si $k \in J_i$ alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f\left(x\right) = k$ admet une unique solution sur I_i.

On répète cette démarche pour chacun des intervalles I_i.

APPLICATION

On identifie trois intervalles sur lesquels la fonction *f* est strictement monotone : $\left]-\infty ; -1\right]$, $\left[-1 ; \dfrac{1}{3}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$. On applique donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires trois fois.

Sur $\left]-\infty ; -1\right]$:

- *f* est continue.
- *f* est strictement croissante.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 2$. Or $0 \in]-\infty; 2]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -1]$.

Sur $\left[-1; \dfrac{1}{3}\right]$:

- f est continue.
- f est strictement décroissante.
- $f(-1) = 2$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{22}{27}$. Or $0 \notin \left[\dfrac{22}{27}; 2\right]$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[-1; \dfrac{1}{3}\right]$.

Sur $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$:

- f est continue.
- f est strictement croissante.
- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{22}{27}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \notin \left[\dfrac{22}{27}; +\infty\right[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$.

Etape 4

Conclure

On conclut en donnant le nombre total de solutions sur *I*.

APPLICATION

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

ASTUCE

Dans le tableau de variations, en suivant les flèches, on peut dès le début déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. Il ne reste ensuite qu'à rédiger la réponse de manière organisée.