

SITUATION

Afin de déterminer la valeur de $\int_a^b f(x) \, dx$, on doit déterminer une primitive de la fonction f . Il ne reste ensuite qu'un calcul simple à effectuer.

ÉNONCÉ

Déterminer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 e^{-3x} \, dx$$

Etape 1

Définir la fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle formé par les bornes de l'intégrale et égal au contenu de l'intégrale à calculer.

APPLICATION

On pose :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = e^{-3x}$$

Etape 2

Déterminer une primitive de f

On détermine une primitive de f sur l'intervalle formé par les bornes de l'intégrale en utilisant les méthodes classiques de recherche de primitives.

APPLICATION

On détermine une primitive F de f sur $[0; 1]$.

On pose :

- $u(x) = -3x$
- u est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $u'(x) = -3$

On a :

$$f = -\frac{1}{3} u' e^u$$

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est donc de la forme :

$$F = -\frac{1}{3} e^u$$

Finalement, la fonction suivante est une primitive de f sur $[0; 1]$.

$$F : x \longmapsto -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

Etape 3

Calculer l'intégrale

Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

On effectue le calcul.

APPLICATION

On a donc :

$$\int_0^1 e^{-3x} \, dx = F(1) - F(0)$$

$$\int_0^1 e^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3}e^{-3 \times 1} - \left(-\frac{1}{3}e^{-3 \times 0} \right)$$

$$\int_0^1 e^{-3x} \, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3}$$