SITUATION

Une fonction *f* définie sur *I* est périodique de période *T* si et seulement si $\forall x \in I$, $x+T \in I$ et $f\left(x+T\right) = f\left(x\right)$.

ÉNONCÉ

Soit la fonction *f* définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = 3\sin\left(4x-1\right)$$

Étudier la périodicité de *f*.

Etape 1

Conjecturer si possible la période

On conjecture la période *T* de la fonction à l'aide de son expression.

ASTUCE

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. On a donc, pour tout réel *X* :

$$f\left(X+2\pi\right) = f\left(X\right)$$

Sachant cela, on peut en déduire qu'une fonction *f* de type $f\left(x\right) = \cos\left(ax+b\right)$ (ou $f\left(x\right) = \sin\left(ax+b\right)$) est $\dfrac{2\pi}{a}$ -périodique.

En effet :

$$f\left(X+\dfrac{2\pi}{a}\right) = \cos\left(a\left(x+\dfrac{2\pi}{a}\right)+b\right) = \cos\left(ax+b+2\pi\right) = \cos\left(ax+b\right)$$

EXEMPLE

La fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = \cos\left(3x+2\right)$$

est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

ASTUCE

Si une fonction comporte deux expressions trigonométriques, on choisit le plus petit multiple commun aux deux périodes.

APPLICATION

On a, $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) = 3\sin\left(4x-1\right)$.

On conjecture donc que *f* est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

Etape 2

Vérifier les conditions de périodicité

On vérifie que pour tout $x \in D_f$, on a $x+T \in D_f$.

On calcule ensuite $f\left(x+T\right)$, et on l'exprime en fonction de $f\left(x\right)$.

APPLICATION

On a, pour tout réel *x*, $x+\dfrac{\pi}{2}\in\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel *x* :

$$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(4\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right)$$

D'où, pour tout réel *x* :

$$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(4x+4\times\dfrac{\pi}{2}-1\right)$$

$$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(4x-1+2\pi\right)$$

Donc, pour tout réel *x* :

$$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(4x-1\right)$$

Etape 3

Conclure

Si $f\left(x\right)=f\left(x+T\right)$ alors la fonction est périodique de période *T*.

APPLICATION

On a, pour tout réel *x* :

$$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(x\right)$$

Donc la fonction *f* est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.