МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №5
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Алгоритм Ремеза

Студент гр. 0303	____________	Болкунов В.О.
Преподаватель	____________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Освоение и реализация алгоритма Ремеза для построения полиномов наилучшего равномерного приближения средствами GNU Octave.

Основные теоретические положения.

Алгоритм Ремеза (алгоритм замены Ремеза) – это итеративный алгоритм равномерного аппроксимирования функций $f \in C[a,b]$, основанный на теореме П. Л. Чебышёва об альтернансе. Предложен Е. Я. Ремезом в 1934 году. Теоретической основой алгоритма Ремеза является следующая теорема:

Теорема.

Для того, чтобы некоторый многочлен $P^*(x)$ степени не выше n был многочленом, наименее уклоняющимся от $f \in C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы на $[a,b]$ нашлась по крайней мере одна система из $n+2$ точек $x_i, a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $f(x) - P^*(x)$:

1. поочерёдно принимает значения разных знаков,

2. достигает по модулю наибольшего на $[a,b]$ значения.

Такая система точек называется чебышёвским альтернансом.

Пусть E_n – величина наилучшего приближения функции $f(x)$ многочленами степени n. Оценку E_n снизу даёт следующая теорема:

Теорема Валле-Пуссена.

Если для функции $f \in C[a,b]$ некоторый многочлен $P(x)$ степени n обладает тем свойством, что разность $f(x) - P(x)$ на некоторой системе из $n+2$ упорядоченных точек x_i принимает значения с чередующимися знаками, то $E_n(f) \geq min|f(x_i) - P(x_i)|$.

Постановка задачи.

С помощью алгоритма Ремеза найти многочлены наилучшего равномерного приближения 5-й и 10-й степени для функции $f(x)=\frac{A}{x^2+px+q}$ на отрезке $[a,b]$

Выполнение работы.

Вариант 5

Значения параметров:

- *A = 2000*
- *p = -3*
- *q = 92*
- *a = 1*
- *b = 10*

Исходная функция: $f(x)=\frac{2000}{x^2-3x+92}$

Многочлен 5-ой степени

В качестве заданной точности было выбрано число *0.0001* , так как это максимальное число точности при котором количество итераций алгоритма превышает 6 шагов. Результаты вычислений алгоритма на каждом шаге представлены в таблице 1. Кривые вычисленные на заданных итерациях представление на рисунках 1.

Так как точность вычисленных полиномов достаточно высокая при масштабе рисунка 1 не заметны различные кривые. На рисунке 2 представлены графики полиномов на масштабе достаточном для различения отдельных кривых.

Таблица 1: Результаты работы алгоритма ремеза для многочлена 5-ой степени

Номер шага	*Значение σ*	*Значение R_{max}*	*Значение ε*	*Значение i_{after}*
1	0.002351	0.0050716	0.0027206	7
2	0.0024625	0.0048979	0.0024354	0
3	0.002566	-0.003596	0.00103	6
4	0.0027111	-0.003403	0.00069193	1
5	0.0028075	0.0031097	0.00030223	5
6	0.0028616	0.0029688	0.00010723	2
7	0.0028801	-0.0028915	1.1394e-05	4

Полученные многочлены на итерациях {1, 2, 3, 4, 6, 7}

$$Q_1(x)=21.68008967220809+0.8020838099674233\,x-0.2594219307160029\,x^2$$
$$-0.007911849884836368\,x^3+0.002809945437416513\,x^4-0.0001160573178455585\,x^5$$

$$Q_2(x)=21.67760343681881+0.8061005504604813\,x-0.2616470794734579\,x^2$$
$$-0.007369172189302466\,x^3+0.002750221065246705\,x^4-0.0001136372292583081\,x^5$$

$$Q_3(x)=21.686569199604+0.7961502459348\,x-0.2576541656425071\,x^2$$
$$-0.008107398343538305\,x^3+0.002814070293579801\,x^4-0.0001157284667345793\,x^5$$

$$Q_4(x)=21.68408536211756+0.8003018586068317\,x-0.2599655289839433\,x^2$$
$$-0.007551945036755214\,x^3+0.002754801435097825\,x^4-0.0001134365246227696\,x^5$$

$$Q_6(x)=21.68606381416542+0.7968113876987822\,x-0.2582962265364896\,x^2$$
$$-0.007889792525224062\,x^3+0.002785961532223873\,x^4-0.0001145156041566493\,x^5$$

$$Q_7(x)=21.68606941211416+0.7966957940538933\,x-0.2581720354160604\,x^2$$
$$-0.007926552418191775\,x^3+0.00279015275849776\,x^4-0.0001146800009661809\,x^5$$

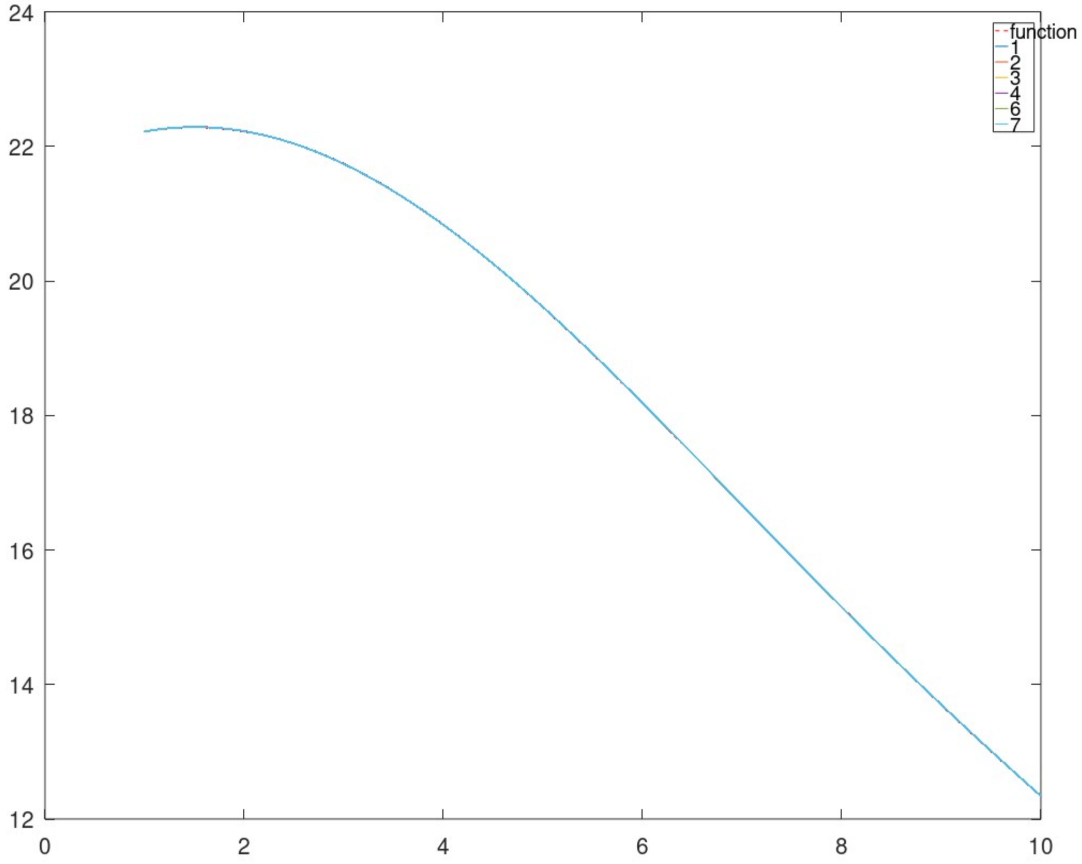

Рисунок 1: Кривые алгоритма ремеза (5 степень)

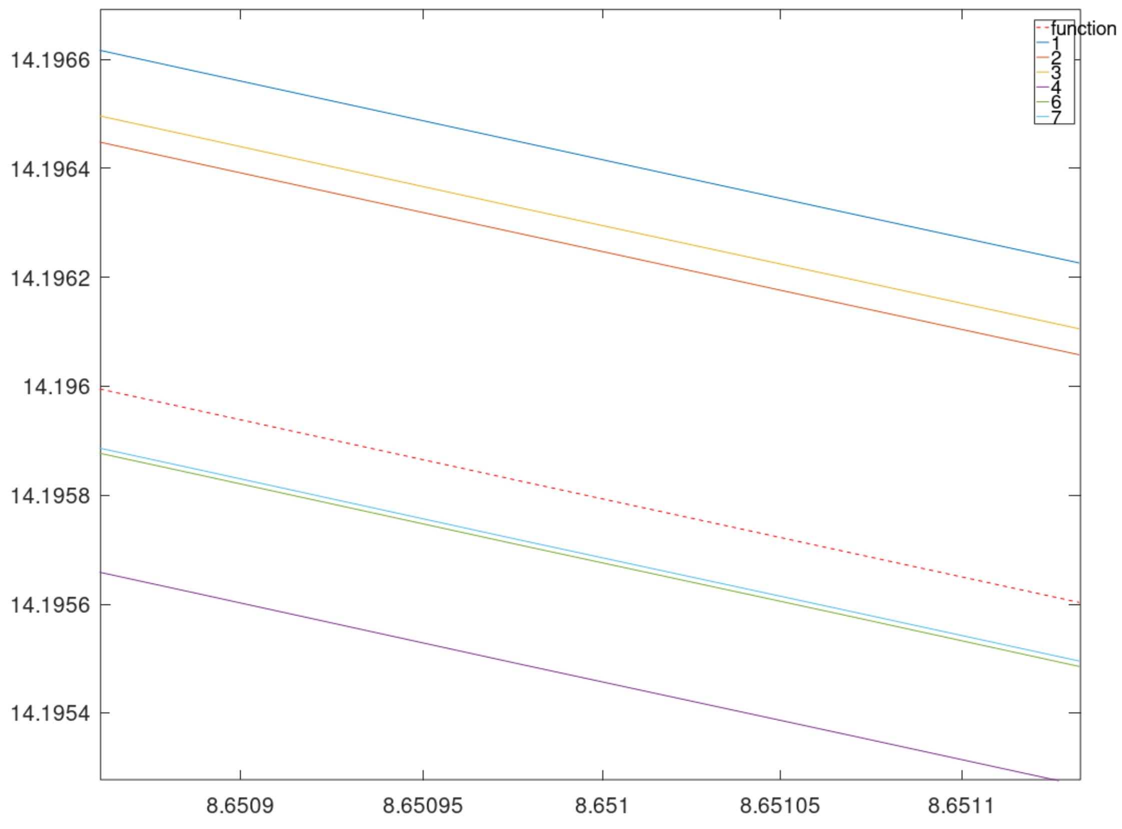

Рисунок 2: Кривые алгоритма ремеза (5 степень) приближено

Многочлен 10-ой степени

В качестве заданной точности было выбрано число 0.00000005 , так как это максимальное число точности при котором количество итераций алгоритма превышает 10 шагов. Результаты вычислений алгоритма на каждом шаге представлены в таблице 2. Кривые вычисленные на заданных итерациях представление на рисунках 3.

Так как точность вычисленных полиномов достаточно высокая при масштабе рисунка 1 не заметны различные кривые. На рисунке 4 представлены графики полиномов на максимально возможном масштабе, однако его всё ещё недостаточно для различения отдельных кривых, из-за крайне высокой точности приближения.

Таблица 2: Результаты работы алгоритма ремеза для полинома степени 10

Номер шага	*Значение σ*	*Значение R_{max}*	*Значение ε*	*Значение i_{after}*
1	1.1368e-06	-2.7789e-06	1.6421e-06	12
2	1.1593e-06	2.8215e-06	1.6623e-06	0
3	1.1824e-06	2.0396e-06	8.5717e-07	11
4	1.2242e-06	-2.0966e-06	8.7242e-07	1
5	1.2676e-06	1.7823e-06	5.147e-07	2
6	1.3026e-06	-1.8124e-06	5.0979e-07	10
7	1.3374e-06	-1.5902e-06	2.5284e-07	3
8	1.3586e-06	1.587e-06	2.2842e-07	9
9	1.3774e-06	1.4691e-06	9.1669e-08	4
10	1.3861e-06	-1.4528e-06	6.6719e-08	8
11	1.3923e-06	-1.4065e-06	1.4181e-08	5

Полученные многочлены на итерациях {1, 2, 3, 5, 7, 10, 11}

$$Q_1(x)=21.73824485325268+0.7117778353022733\,x-0.2170994036419225\,x^2$$
$$-0.01176809799011374\,x^3+0.0005711120437584753\,x^4+0.0005556590110059534\,x^5$$
$$-6.243118740363094\text{e-}05\,x^6-5.219888897217534\text{e-}07\,x^7+4.761071588314561\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.090782290775131\text{e-}08\,x^9+6.638858726516546\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_2(x)=21.73823179204447+0.7118197824137813\,x-0.2171555398413522\,x^2$$
$$-0.0117267338889256\,x^3+0.0005524326357617809\,x^4+0.0005610922841546509\,x^5$$
$$-6.346817013961229\text{e-}05\,x^6-3.930375629239512\text{e-}07\,x^7+4.660570615492415\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.046249445530566\text{e-}08\,x^9+6.553317724647163\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_3(x)=21.73829131255289+0.7116636639170171\,x-0.2169830906916288\,x^2$$
$$-0.01183291540531278\,x^3+0.0005930112224663225\,x^4+0.0005509812197969363\,x^5$$
$$-6.179628293931983\text{e-}05\,x^6+-5.750063501289714\text{e-}07\,x^7+4.78584051805754\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.095680049728684\text{e-}08\,x^9+6.638484270467586\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_5(x)=21.73834118102709+0.7115266814505833\,x-0.2168332411293256\,x^2$$
$$-0.01192043017686096\,x^3+0.0006235140790748644\,x^4+0.0005443319032216766\,x^5$$
$$-6.088253453210859\text{e-}05\,x^6-6.517696305151362\text{e-}07\,x^7+4.821694172101423\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.102686617460238\text{e-}08\,x^9+6.637650752104375\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_7(x)=21.73835137097876+0.7114918585199581\,x-0.2167875345102118\,x^2$$
$$-0.01195085677023672\,x^3+0.0006351513392523218\,x^4+0.0005416174872096376\,x^5$$
$$-6.048923180207609\text{e-}05\,x^6-6.864802450420899\text{e-}07\,x^7+4.83900759422729\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.106660544716318\text{e-}08\,x^9+6.639322258716966\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_{10}(x)=21.73834680681383+0.7115018547247919\,x-0.2167947540333522\,x^2$$
$$-0.01194946357767631\,x^3+0.0006358676007801481\,x^4+0.0005411387294808169\,x^5$$
$$-6.036461055959515\text{e-}05\,x^6-7.044833457850349\text{e-}07\,x^7+4.854149719121995\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.113627604986667\text{e-}08\,x^9+6.652927945618789\text{e-}10\,x^{10}$$
$$Q_{11}(x)=21.73834446599909+0.7115092663177222\,x-0.2168044157896648\,x^2$$
$$-0.01194261959485499\,x^3+0.0006329359215919108\,x^4+0.0005419372704346172\,x^5$$
$$-6.05056346625261\text{e-}05\,x^6-6.884315375227042\text{e-}07\,x^7+4.842808252441502\text{e-}07\,x^8$$
$$-3.10910974305345\text{e-}08\,x^9+6.645183133792469\text{e-}10\,x^{10}$$

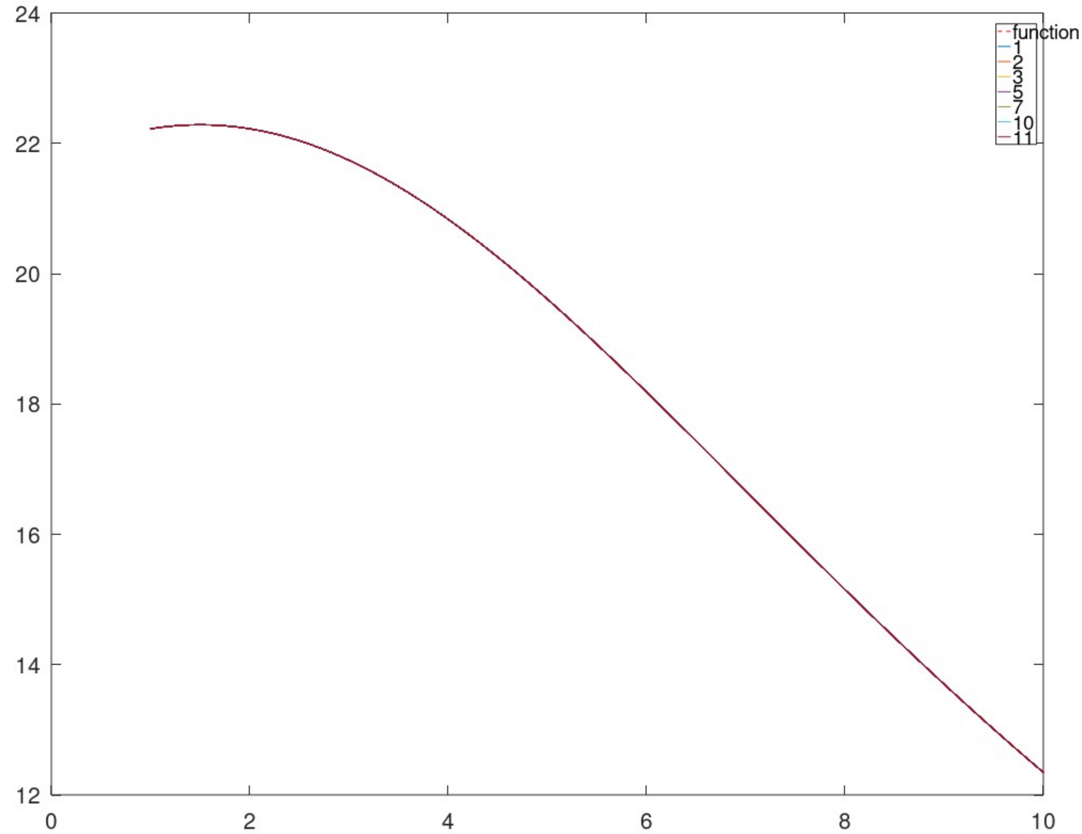

Рисунок 3: Кривые алгоритма ремеза (10 степень)

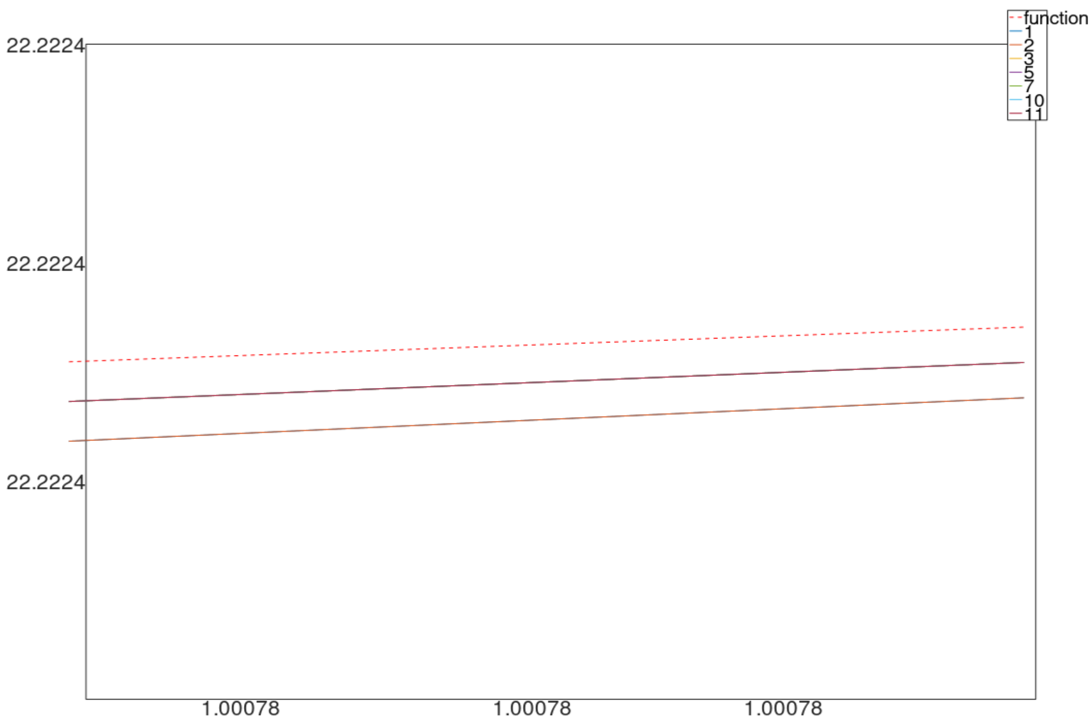

Рисунок 4: Кривые алгоритма ремеза (10 степень) приближено

Выводы.

В ходе работы

- была написана программа реализующая алгоритм ремеза — поиск многочлена наилучшего приближения на заданном отрезке (представлена в приложении *«Код программы»*)
- были исследованы результаты работы алгоритма ремеза для многочлена 5 и 10 степени
- для отображения результата были построены таблицы со значениями величин σ, R_{max}, ε, i_{after}, и графики полученных кривых на определённых шагах алгоритма.

При изучении таблиц с результатами и графиков, можно сделать вывод что алгоритм ремеза даёт очень точное приближение заданной функции многочленом заданной степени, при этом обеспечивая высокую скорость сходимости.

Приложение. Код программы

```
function y = f(x)
  y = 2000 ./ (x .^ 2 .- 3 .* x .+ 92);
endfunction

function x = chebishev(b, a, n)
  x = (a + b) / 2 + (b - a) * cos(pi * (2 * [1:n] - 1) / (2 * n)) / 2;
endfunction

function r = R(Q, t)
  r = f(t) .- polyval(flip(Q), t);
endfunction

function [newT, index] = insert(t, nt, R)
  m = t(t > nt);
  l = t(t < nt);
  r = R(nt);
  if length(m) == 0
    if sign(r) != sign(R(l(end)))
      l(1:end-1) = l(2:end);
    endif
    l(end) = nt;
  elseif length(l) == 0
    if sign(r) != sign(R(m(1)))
      m(2:end) = m(1:end-1);
    endif
    m(1) = nt;
  else
    if sign(r) == sign(R(l(end)))
      l(end) = nt;
    else
      m(1) = nt;
    endif
  endif

  index = length(l);
  newT = [l, m];
endfunction
```

```
function [
  polynoms, s_arr, R_arr, eps_arr, i_arr ...
  ] = remez(n, e, a = 1, b = 10, N = 100_000)

  t = chebishev(a, b, n + 2);
  T = linspace(a, b, N);

  polynoms = [];
  s_arr = [];
  R_arr = [];
  eps_arr = [];
  i_arr = [];

  do
    solve = [ (ones(n+2, n+1) .* t.') .^ [0:n], [(-ones(1, n+2)) .^ [0:n+1].'] ] \ f(t).';
    Q = solve(1:n+1);
    s = solve(end);
    [h, i] = max(abs(R(Q, T)));
    nt = T(i);
    d = h - abs(s);

    polynoms = [polynoms; Q.'];
    s_arr(end + 1) = s;
    R_arr(end + 1) = R(Q, T)(i);
    eps_arr(end + 1) = d;

    [t, i] = insert(t, nt, @(x) R(Q, x));

    i_arr(end + 1) = i;
  until d < e;

endfunction

function solve(n)
  a = 1;
  b = 10
  N = 100_000;
  T = linspace(a, b, N);
```

```
  switch (n)
    case 5
      e = 0.0001;
      steps = [1, 2, 3, 4, 6, 7];
    case 10
      e = 0.00000005;
      steps = [1, 2, 3, 5, 7, 10, 11];
  endswitch

  [Q, S, R, E, I] = remez(n, e, a, b, N);
  format long g
  Q
  format short g
  S
  R
  E
  I

  plot(T, f(T), "r--;function;"), hold on;

  for i = steps
    plot(T, polyval(flip(Q(i, :)), T), [";" num2str(i) ";"]);
  endfor
  hold off;

endfunction
```