Лабораторна робота №7

Тема: Дослідження задачі розтину графа на шматки.
Мета: набути навичок розв'язку задачі розтину графа на шматки і реалізувати його програмно.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1 . Постановка задачі розрізу графа схеми.

Сформулюємо задачу розрізу графа *G= (X,U)*на шматки $G_i = (X_i, П_i)$ і $\in I = \{1,2,...,1\}$, де 1 - кількість шматків, на які розрізається граф. Розріз графа визначимо по аналогії з розбиттям множин.

Сукупність шматків $B(G_i)$ називається розрізом графа *G=(X, V),* якщо

$$(\forall G_i \in B(G_i))\lceil G_i \neq 0 \rceil, i \in I$$

$$(\forall G_i, G_i \in B(G_i))|G_i \neq G_i \ \& \ X_i \cap X_i = 0 \ \& \ U_i \cap U_i = U_{ii}|(1)$$

де U_{ii} - множина ребер, що попадають в розріз між шматками G_i та G_i. Позначимо $\{U_{ii}\}=k_{ii}$ та назвемо його числом реберного об'єднання шматків, причому

$$k = \frac{1}{2} * \sum^{1} \sum^{1} k_{ii}, i \neq j.$$

Якщо k_{ii} =1, то шматок G_i , називається напівостовом.

Задачею розрізу графа *G=(X,U)* є знаходження такої сукупності шматків., щоб сумарне число реберного з'єднання задовольняло заданому критерію оптимальності.

Під оптимальним розрізом графа G=(X,U) будемо розуміти такий розріз $B(G_t)$, який задовольняє умові

$$(\forall G_i \in B(G_i))\lceil |UU| = k_{\min} \rceil, (2)$$

тобто критерієм оптимальності є мінімальна кількість ребер між шматками графа *G.*Сформульована задача е задачею комбінаторно-логічного типу, і роз'вязок її пов'язаний з великим перебором різних варіантів розбиття графа на шматки.Щоб запобігти цьому, розроблені алгоритми, не пов'язані з повним перебором, хоч і такі, які приводять до знаходження не загального, а локального мінімума, достатнього для практичних цілей.

На практиці використовуються ітераційні, послідовні та змінні алгоритми. При використанні послідовних алгоритмів спочатку вибираються по визначеному критерію вершина графа, далі до неї приєднуються інші вершини з метою створення першого шматка, другого шматка і тощо до отримання бажаного розбиття. Ітераційні алгоритми полягають в слідуючому : граф розбивається на визначену кількість шматків довільним чином. Потім відбувається перестановка вершин з одного шматка в інший по деяким критеріям з метою мінімізації числа ребер між шматками.

2. ПОСЛІДОВНІ АЛГОРИТМИ РОЗРІЗУ.

Опишемо один з можливих алгоритмів послідовного типу, який приводить до отримання локального максимума у відповідності з критерієм для випадку, коли існують деякі обмеження. Часто при компоновці модулів в комірці, яка є прототипом задачі розрізу графа схеми, ставиться у вимогу отримання рівних по кількості вершин шматків. Крім того, як правило, деякі вершини графа жорстко закріплюються за визначеними шматками, тобто є забороненими для перестановок.

Нехай задано граф $G=(X, UF)$ та множина заборонених елементів Q с X, |Q|=q . Вимагається знайти такий розріз $B(G_ш)$ на I однакових шматків, щоб

$$(\forall x, y \in Q)[x \in X_i \Rightarrow y \in X_i V_y \in X_i \Rightarrow x \in X_i],$$

де X_i - вершини і-го шматка.

Інакше передбачається, що будь-які дві заборонені вершини розміщуються в різних шматках. Ця вимога не порушує загальності міркувань.

Побудова першого шматка починається з вершини $x_\varepsilon \subset Q$, яку апріорно вважаємо належного множиш вершин X_i першого шматка $G_l = (X_l,U_l)$ та створюючої перший рівень. На першому рівні множина $X, = \{x_\sigma\}$.

Для визначення вершини слідуючого рівня, тобто другої вершини, яку необхідно розмістити в шматок G_l , будується множина вершин, суміжних з вершиною

$$x_\varepsilon(\varepsilon \in E = \{1,2...,q\}).$$

Позначимо цю множину Γx_ϵ .

Введемо поняття віносної ваги $\delta(x_i)$ для будь-якої вершини графа xi :

$$\delta(x_i) = \rho(x_i) - a_{ik} \quad (3)$$

де a_{ik} - кількість ребер, з'єднаючих вершину x_i з вершинами X_l .

У відповідності з обраним критерієм для отримання необхідного шматка з множини Γx_e необхідно обрати вершину x_i з мінімальною величиною $\delta(x_i)$ тобто обрати x_i , для якої

$$\delta(x_i)=\min \delta(x_i)$$

де i ={1,2,…,t}, t=| Γx_e |

Вершина x_i є вершиною другого рівня. На другому рівні $X_i = \{x_e,x_i]$.

Далі розглянемо множину $\Gamma x_e \cup \Gamma x_i$ та для кожної вершини $X_k \subset (\Gamma x_\epsilon \cup \Gamma x_i)$ визначимо відносну вагу у відповідності з виразом (3). Обираючи вершину x_k з мінімальною вагою, отримає $X_l = \{x_e,x_i,x_k\}$.

Вказаний процес виконується до тих пір, поки множина X_l не буде утримувати n/1 елементів.

Отриманий шматок G_l видаляється з графа G. Обирається слідуюча заборонена вершина $x_\omega \subset Q$ та будується слідуючий шматок по описаній процедурі.

Сформулюємо описану процедуру у вигляді алторитма

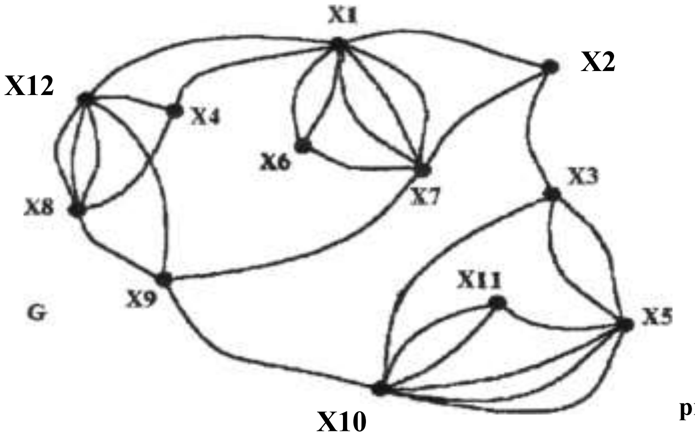
1. Видаляємо першу заборонену вершину x_ϵ та по матриці суміжності або її кодовій реалізації будуємо множину Γx_e . Переходимо до п.2.

2. Для вершин з множини $Гx_e$ визначаємо по формулі (3) відносні ваги та вибираємо з них мінімальну. Переходимо до п.4. Якщо таких вершин декілька, то перехопимо до п.3.
3. З підмножини вершин з рівною відносною вагою обираємо вершину з більшим локальним ступенем, розміщуємо її в шматок та переходимо до л.5.
4. Обрану вершину розміщуємо в шматок. Переходимо до п.5.
5. Підраховуємо кількість з вершин в шматку. При s<k пере ходимо до п. 7; якщо s=k, то шматок отримано. Видаляємо його з графа G та переходимо до п.6.
6. Перевіряємо існування заборонених вершин; якщо такі вершини існують, то переходимо до п. 1, інакше - до п.8.
7. Будуємо множину вершин, суміжних раніш обраним в даний шматок, та переходимо до п.2.
8. Кінець роботи алгоритму.

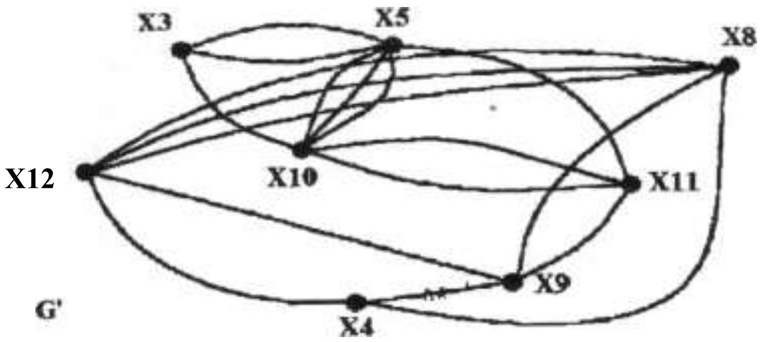
КОНТРОЛЬНИЙ ПРИКЛАД.

Нехай граф G, зображений на рис.1а., необхідно розрізати на три підграфа по чотири вершини в кожному. Множина заборонених вершин $Q = \{x_l, x_{ll}, x_{l2}\}$. З цих вершин почнемо формування шматків. Множина $Гx = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$

Побудуємо перший шматок G_1. Вершина $x_б$ не враховується, так як вона належить множині Q. По формулі (3) визначимо відносні ваги вершин з $Гx_l$. Обираємо вершину $x_б$ і розміщуємо її в шматок G_l. Отримаємо $X_l = \{x_l, x_6\}$. Будуємо $Гx_1 \cup uГx_6 = \{x_2, x_4, x_7\}$ та для всіх його елементів визначаємо відносні ваги: $\delta(x_2)=2$, $\delta(x_4) = 3$, $\delta(X_1\} = 5$. Тому в шматок G_l включається вершина X_2, тобто $X_{l=} \{x_1, x_6, x_2\}$. Визначення відносних ватів для вершин множини $Гx_5$ U $Гx_б$ U $Гx_2$ дозволяє виділити вершину x_7 яку необхідно розмістити в шматок G_l. На цьому формування шматка G закінчується. Після видалення його з графа G отримаємо G', показаний на рис. 1б . Аналогічно досліджуємо граф G', будуємо шматки G_2 G_3. В результаті розрізу графа G отримані шматки $G_1 = (X_1, U_1)$ $C_2 = (X_2, U_2)$ та
$C_3 = (X_3, U_3)$ причому $X_1 = \{x_1, x_2, x_6, x_7\}$ $X_2 = \{x_{II}, x_3, x_5, x_{I0}\}$ $X_3 = \{x_{12}, x_4, x_8, x_9\}$
Граф, розрізаний на шматки, зображено на рис.2.



рве. 1а.



рве. 1б.

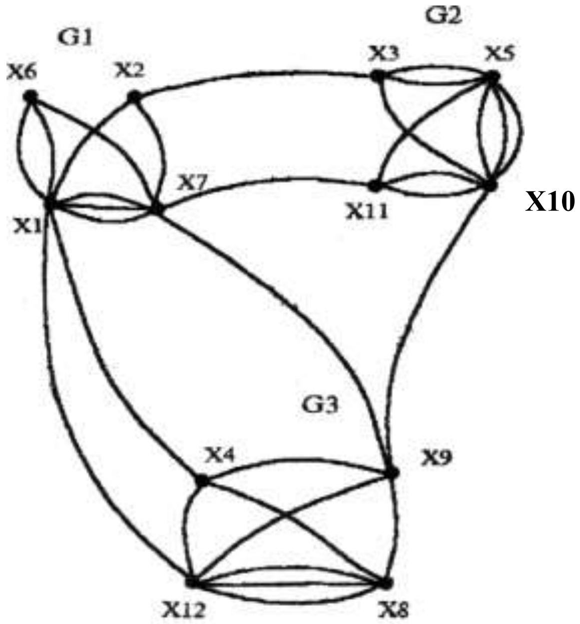


рис. 2.

Порядок виконання:

1. Проаналізувати алгоритми розтину графа на шматки на конкретному прикладі згідно з завданням.
2. Розробити схеми алгоритмів розтину графа на шматки.
3. Розробити програму розтину графа на шматки.
4. Для заданого варіанту привести результати тестування програми.
5. Розробити інструкцію користувача.
6. Зробити висновки за результатами роботи.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Таблиця 1.

ВАРІАНТ	СПИСОК СУМІЖНОСТІ																			
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	1	1	5	4	1	3	2	6	4	7	8	12	12	14	15	5	10		
	3	3	2	6	6	4	6	7	8	5	8	13	14	13	16	17	10	13		
	6	8	7	10	10	5	8	9	10	6	9	14	13	15	17	18	14	14		
				17		7	11	11	11	9				17	18	15		15		
						9		12		17				18		16		15		
						10				18						18		17		
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	1	7	5	4	2	2	1	4	2	3	4	4	5	3	1				
	8	6	11	8	9	8	3	4	5	5	4	7	9	6	7	5				
	16	7	15	9	10	9	11	6	6	8	7	14	10	7	8	6				
		10		11	14	14	12	10	10	9	14			11	14	10				
				12	16	16	14	15	13	13				12	16	15				
				13		15				16				14						

ВАРІАНТ	СПИСОК										СУМІЖНОСТІ									
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	2	1	1	1	4	3	4	5	1	12	4	1	1	8	4					
	3	3	2	5	7		5	12	2	15	7	8	5	12	10					
	4	9	6	7	8		11	14	3		9	9	11	15	14					
	9		9	11	13				11		13	10								
	12			15					12		14									
	13																			
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	2	1	2	5	4	1	1	1	4	1	3	4	4	3	3	1				
	6	3	7	7	9	2	2	2	5	2	4	5	5	552						
	7	6	11	8	10	7	3	4	6	4	7	7	9	676						
	8	7	14	9	12	8	4	6	10	5	14	14	10	788						
	10	8	15	10	13	9	6	10	13	6	15	15	15	8	11	10				
	16	10		11	14	10	11	14	14	8				9	12	14				
	16			12	15	14	12	15	9					11	13	15				
				13		16	14	16	13					12	14					
							15	16						15	16					
														16						

ВАРІАНТ	СПИСОК										СУМІЖНОСТІ									
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	2	1	1	5	4	1	3	*2*	6	4	8	8	12	12	14	15	5	10		
	3	3	2	6	6	4	6	*1*	8	5	9	13	14	13	16	17	14	13		
	6	8	7	10	10	5	8	*9*	10	6	14		18	15	17	18	15	14		
					17	7	11	13	11	7				17	18		16	15		
						9		12	9					18			18	16		
						10			18					17						
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	2	1	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	3	4	5					
	3	3	2	2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
	4	4	4	3	3	7	3	4	6	6	12	11	11	11	11					
	5	5	5	5	4	8	6	6	7	7	13	13	12	12	12					
	6	6	7	8	10	9	8	7	8	8	14	14	14	13	13					
	7	7	8	9	15	10	9	9	10	9	15	15	15	15	14					
	11	8	9	10		11	10	10	14	15										
	12		13	14			12	13												

Таблиця 2.

ВАРІАНТ	ЗАБОРОНЕНІ ВЕРШИНИ		ЗАБОРОНЕНІ ВЕРШИНИ
1	8,9,17	7	3,4,11,18
2	1,9,13	8	2, 10, 14, 18
3	2,4,8,10	9	4,7,16
4	7, 14, 15	10	2,4,8,10
5	1,8,12,14	11	1,6,11
6	1,6,11		1,4,8,16