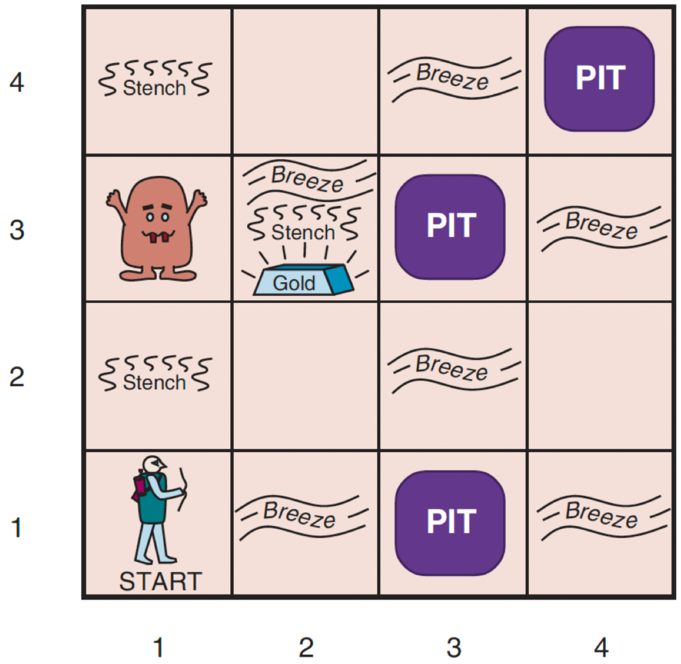
HTWG IN

Hochschule Konstanz
Fakultät Informatik

Logikbasierte KI-Systeme

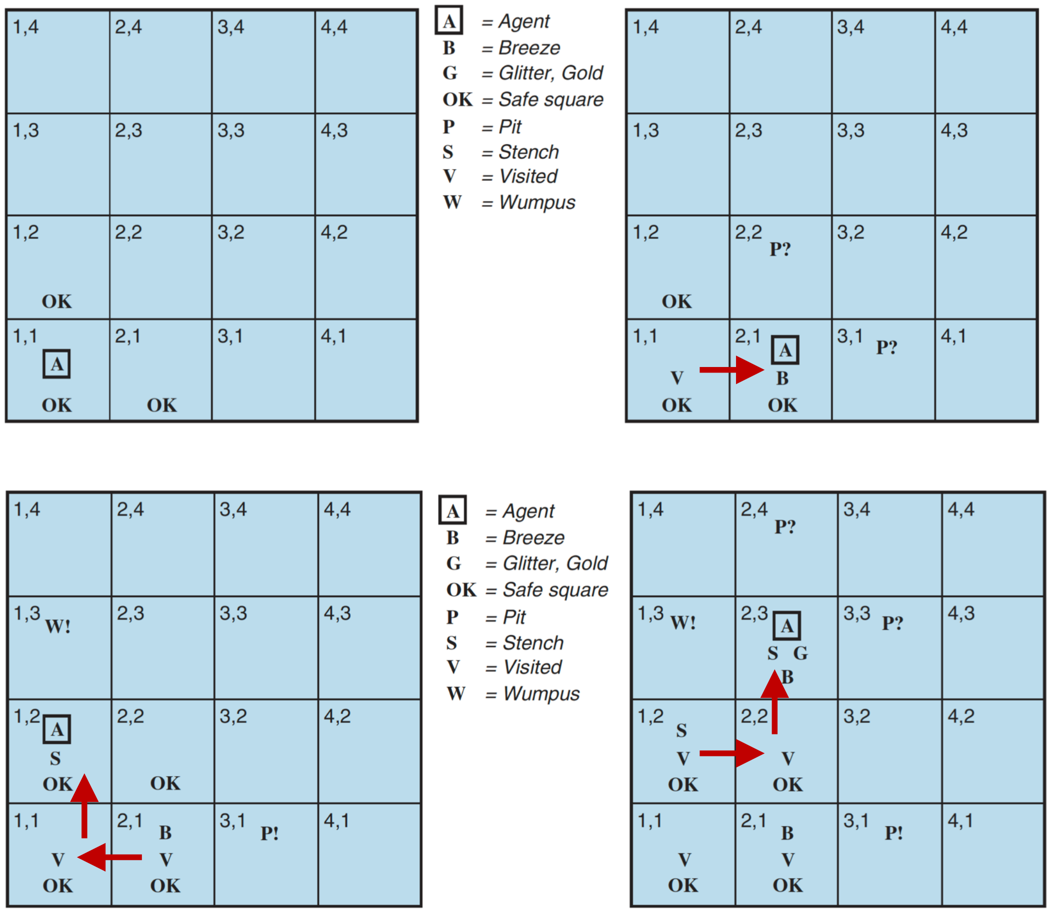
Beispiel Wumpus-Welt (1)



[Russel, Norvig; Künstliche Intelligenz]

- Agent A links unten sucht Gold G.
- Genau ein Wumpus W
- Mehrere Falltüren P.
- W und P sind tödlich.
- A kennt seine Startposition aber nicht seine Umgebung.
- A empfindet Geruch (Stench) S von W in der direkten Nachbarschaft.
- A spürt Lufthauch (Breeze) B bei direkt benachbarten Falltüren
- A kann sich 90° nach links bzw. rechts drehen oder sich um ein Feld geradeaus bewegen.

Beispiel Wumpus-Welt (1)



- Agent A startet auf Feld (1,1) und bewegt sich in der Umgebung,
- nimmt dabei seine Umgebung wahr,
- erweitert sein Wissen über die Umgebung
- und zieht neue logische Schlussfolgerungen.

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

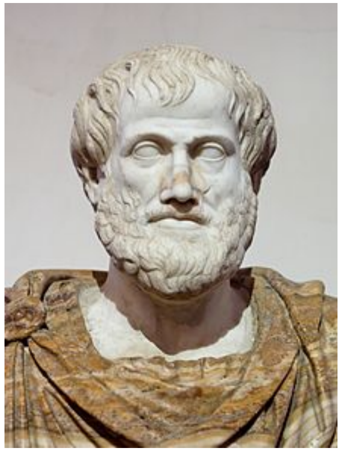
Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Wissen

- Wissen = Fakten und Regeln
- Beispiel:
  - Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands
  - Es regnet in Konstanz
  - Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
- Explizites Wissen:
  - Wissen, das sprachlich ausgedrückt werden kann.
  - Explizites Wissen wird in der KI in einer formalen Sprache ausgedrückt.
    Wissen soll einheitlich darstellbar und maschinell verarbeitbar sein.
  - Symbolische KI.
  - Sehr häufig kommt für explizites Wissen Aussagenlogik und Prädikatenlogik oder verwandte Formalismen zum Einsatz.
- Implizites Wissen:
  - Wissen, das sich nicht einfach explizit darstellen lässt.
    Z.B. Wissen wie eine Person aussieht, ohne es explizit eindeutig beschreiben zu können.
  - Implizites Wissen wird in der KI häufig durch Neuronale Netze dargestellt.

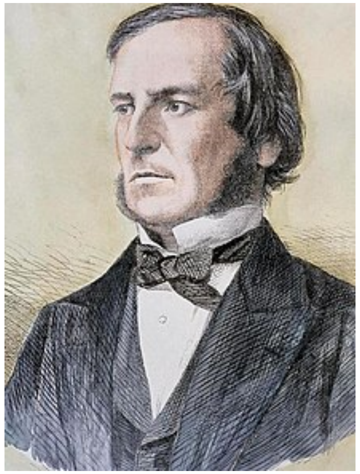
Kurzer geschichtlicher Abriss der expliziten Wissensdarstellung



- Aristoteles
- 384 v. Chr. – 322 v. Chr.
- Griechischer Universalgelehrter
- Schriften zu Sprache, Logik und Wissen

- Gottfried Wilhelm Leibniz
- 1646 – 1716.
- Deutscher Universalgelehrter
- Logik in Kalkülform
- Entwickler einer der ersten Rechenmaschinen:
  Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.

Kurzer geschichtlicher Abriss der expliziten Wissensdarstellung

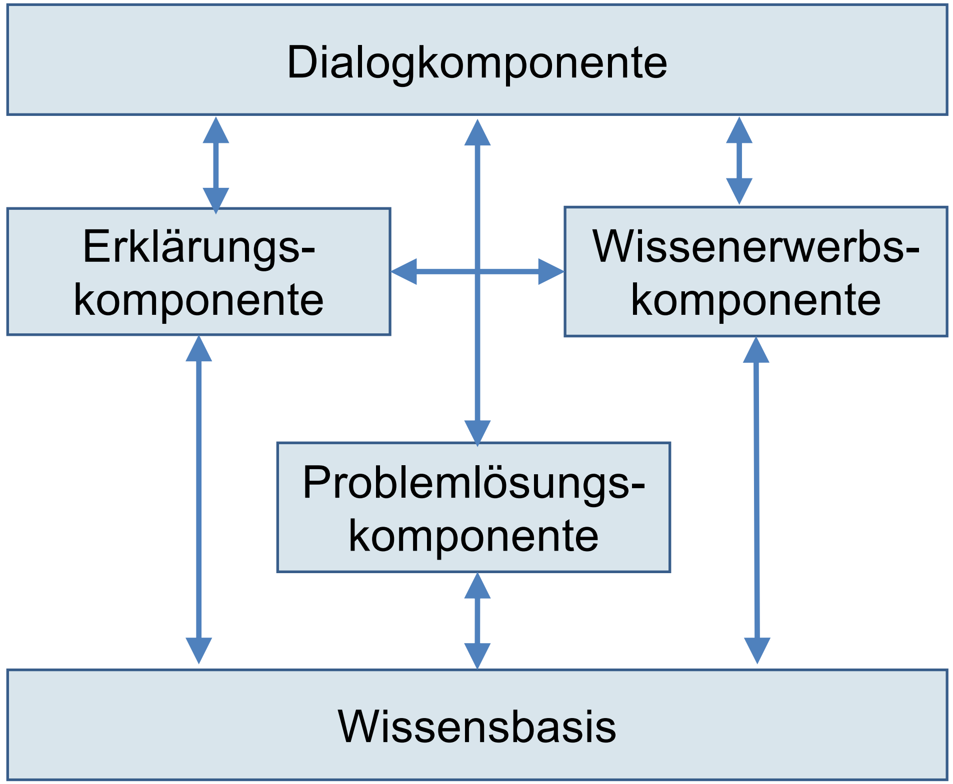


- George Boole
- 1815 - 1864
- Englischer Mathematiker, Logiker und Philosoph
- *The Mathematical Analysis of Logic*
- *An Investigation of the Laws of Thought*
- Aussagenlogik als Algebra

- Gottlob Frege
- 1848 – 1925.
- Deutscher Mathematiker und Philosoph
- *Begriffsschrift - Eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*
- Formalisierung der klassischen Prädikatenlogik
  Allquantor und Prädikate. Axiomatisierung und Schlussregeln.

Wissensbasierte Systeme

- Wichtiges Prinzip:
  Trennung von Wissen und Verarbeitung
- Wissensbasis besteht aus einer Menge von Fakten und Regeln.
- Wissensbasis ist unabhängig von der Problemlösungskomponente und kann beliebig erweitert werden.
- Problemlösungskomponente besteht aus:
  - Schlussregeln: wie lassen sich Regeln auf Fakten anwenden
  - Heuristiken: steuern die Anwendung der Regeln



Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Aussagenlogik

- Ausgangspunkt sind atomare Aussagen wie:
  - es regnet
  - Konstanz ist Hauptstadt Deutschlands
- Atomare Aussagen sind entweder wahr (T, true) oder falsch (F, false).
- Atomare Aussagen lassen sich aussagenlogisch zu komplexeren Aussagen verknüpfen:
  - es regnet $\rightarrow$ die Straße ist nass (Implikation)
  - linker Weg ist richtig $\vee$ rechter Weg ist richtig (Disjunktion)
- Wir benutzen Aussagenvariablen A, B, C,..., die für atomare Aussagen stehen.

Syntax

Definition aussagenlogische Formel

- Sei $\mathcal{A}$ = {A, B, C, ...} eine Menge von Aussagenvariablen.
  Eine Aussagenvariable steht für eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann.
- Jede Aussagenvariable ist eine (atomare) Formel.
- Falls α und β Formeln sind, dann sind auch folgende Ausdrücke Formeln:
  - $(\neg\alpha)$ (Negation)
  - $(\alpha \land \beta)$ (Konjunktion)
  - $(\alpha \lor \beta)$ (Disjunktion)
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$ (Implikation)
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (Äquivalenz)

- Wir lassen wie üblich die Klammern weg, indem eine Operatorpräzedenz entsprechend der oberen Reihenfolge angenommen wird.
- Also: $(A \lor B) \land \neg A \rightarrow \neg B$ statt $(((A \lor B) \land (\neg A)) \rightarrow (\neg B))$

Beispiel – Anschaffung eines Haustiers

Herr Meier will sich ein Haustier anschaffen und beschließt, zur Entscheidungsfindung die Mittel der Aussagenlogik einzusetzen. Dazu macht er folgende Überlegungen:

(1) Es sollte nur ein Hund (H), eine Katze (K) oder ein Hamster (M) sein.

(2) Für Besitzer wertvoller Möbel (W) ist es nicht sinnvoll, eine Katze anzuschaffen, da diese die Möbel zerkratzen könnte.

(3) Die Anschaffung eines Hundes verlangt nach einem freistehenden Haus (F), damit sich kein Nachbar durch das Bellen gestört fühlt.

Herr Meier vermutet nun:

(4) Für einen Besitzer wertvoller Möbel ohne freistehendes Haus kommt nur ein Hamster in Frage.

(1) $H \vee K \vee M$

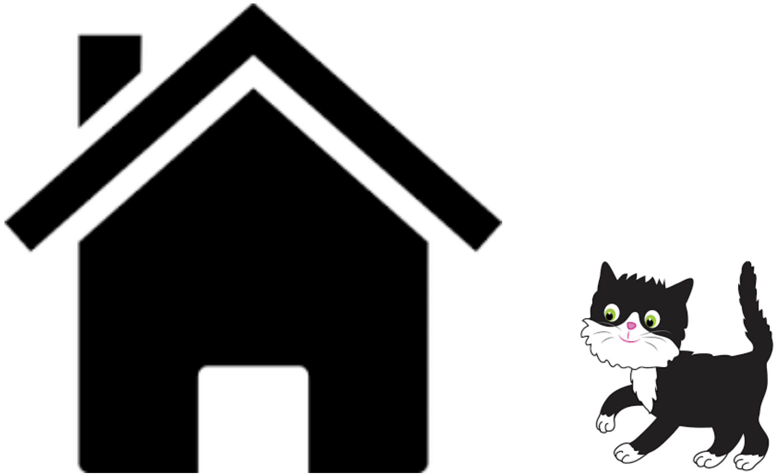
(2) $W \rightarrow \neg K$

(3) $H \rightarrow F$

(4) $W \wedge \neg F \rightarrow M$

Beispiel aus [Beierle und Isberner, Methoden wissensbasierter Systeme]

Semantik: Welt und Wahrheitswert



Welt $\mathcal{W}$

F	K	H	M
T	T	F	F

Aussagenvariablen

Wahrheitswerte

- Eine Welt (Interpretation, Belegung) $\mathcal{W}$ ist eine Funktion, die jeder Aussagenvariablen einen Wahrheitswert T (true, wahr) oder F (false, falsch) zuordnet.

Semantik: Wahrheitswert einer aussagenlogischen Formel

- Der Wahrheitswert einer nicht-atomaren Formel

  $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$

  wird rekursiv definiert:

α
T
F

⇒

$\neg\alpha$
F
T

α	β
T	T
T	F
F	T
F	F

⇒

$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	T	T
F	T	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Beispiele für Wahrheitswerte einer aussagenlogischen Formel

	A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$
$\mathcal{W}_1$	T	T	T	T	T
	T	F	F	T	F
$\mathcal{W}_2$	F	T	T	F	F
	F	F	T	T	T

- In der Welt $\mathcal{W}_1$ ist die Formel $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$ wahr.
- In der Welt $\mathcal{W}_2$ ist die Formel $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$ falsch.

Erfüllbarkeit und Gültigkeit

Definition	
Eine Formel α ist erfüllbar, falls es eine Welt $\mathcal{W}$ gibt, in der α wahr ist.	$\mathcal{W} \vDash \alpha$
Eine Formel α ist allgemeingültig, falls α in jeder Welt wahr ist. Allgemeingültige Formeln heißen auch Tautologien.	$\vDash \alpha$

- $A \wedge B$ ist erfüllbar
  aber nicht allgemeingültig.
- $A \wedge B \rightarrow A$ ist allgemeingültig:

  $$\vDash A \wedge B \rightarrow A$$

- $\neg(A \wedge B \rightarrow A)$ ist unerfüllbar.

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow A$	$\neg(A \wedge B \rightarrow A)$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

Semantische Äquivalenz

Definition	
Zwei Formeln α und β heißen semantisch äquivalent, falls α und β in jeder Welt die gleiche Wahrheitswerte annehmen.	$\alpha \equiv \beta$

Folgerungen
$\alpha \equiv \beta$ gdw. $\models \alpha \leftrightarrow \beta$

- $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sind semantisch äquivalent:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

- Es gilt auch:

$$\models A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Semantische Deduktion

Definition

Eine Formel β folgt aus einer Menge von Formeln (Wissensbasis) $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2,, ..., \alpha_n\}$, falls in jeder Welt, in der alle Formeln aus Σ wahr sind, auch β wahr ist.	$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \vDash \beta$ oder kurz: $\Sigma \vDash \beta$

Deduktionstheorem

$\{\alpha_1, \alpha_1,, ..., \alpha_n\} \vDash \beta$ gdw. $\vDash \alpha_1 \land \alpha_2 \land ... \land \alpha_n \rightarrow \beta$

Beispiel zur semantischen Deduktion

- Jede Belegung, die A und $A \rightarrow B$ erfüllt, erfüllt auch B
- Daher:

  $\{A, A \rightarrow B\} \models B$

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Es gilt auch:

  $\models A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Konjunktive Normalform

- Eine Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), genau dann wenn sie aus einer Konjunktion

  $$K_1 \land K_2 \land \ldots \land K_n$$

  von Klauseln K_i besteht.

- Eine Klausel K ist eine Disjunktion

  $$(L_1 \lor L_2 \lor \ldots \lor L_m)$$

  von Literalen.

- Ein Literal ist eine Aussagenvariable (positives Literal) oder eine negierte Aussagenvariable (negatives Literal).

Umformung in Konjunktive Nomalformen

Jede Formel kann in eine äquivalente KNF umgeformt durch Anwendung folgender Regeln:

1. Äquivalenz durch Implikation ersetzen:

   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

2. Implikation durch Disjunktion ersetzen:

   $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

3. Negation nach innen schieben:

   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$

4. Disjunktion „ausmultiplizieren":

   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Beispiel zu Umformung in Konjunktive Nomalform (KNF)

Beispiel 2.3 Transformation auf Klauselnormalform

Die Formel $\neg(A \vee B) \leftrightarrow C$ wird in die konjunktive Normalform überführt.

Formel	ausgeführte Transformation
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow C$	
$(\neg(A \vee B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg(A \vee B))$	Ersetzen der Äquivalenz $\leftrightarrow$
$(\neg\neg(A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg(A \vee B))$	Ersetzen der Implikation $\rightarrow$
$((\neg\neg A \vee \neg\neg B) \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B))$	Negation zu den Variablen
$((A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B))$	Doppelte Negation löschen
$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg B)$	Ausmultiplizieren gemäß Distributivgesetze

Beispiel aus [Lämmel und Cleve, Künstliche Intelligenz]

(1) $A \vee B \vee C$
(2) $\neg C \vee \neg A$
(3) $\neg C \vee \neg B$

Übersichtshalber werden die Klauseln einer KNF nummeriert und in mehrere Zeilen umgebrochen.

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Semantische Folgerung nochmals betrachtet

- Eine Formel β folgt aus einer Menge von Formeln (Wissensbasis) $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, falls in jeder Welt, in der alle Formeln aus Σ wahr sind, auch β wahr ist.

$$\Sigma \models \beta$$

- $\Sigma \models \beta$ lässt sich mit Wahrheitstabellen zeigen.
- Jedoch: bei n Aussagenvariablen sind bis zu 2^n mögliche Welten zu betrachten.
- Sehr aufwendig!

Beispiel – Anschaffung eines Haustiers (1)

Herr Meier will sich ein Haustier anschaffen und beschließt, zur Entscheidungsfindung die Mittel der Aussagenlogik einzusetzen. Dazu macht er folgende Überlegungen:

(1) Es sollte nur ein Hund (H), eine Katze (K) oder ein Hamster (M) sein.

(2) Für Besitzer wertvoller Möbel (W) ist es nicht sinnvoll, eine Katze anzuschaffen, da diese die Möbel zerkratzen könnte.

(3) Die Anschaffung eines Hundes verlangt nach einem freistehenden Haus (F), damit sich kein Nachbar durch das Bellen gestört fühlt.

Herr Meier vermutet nun:

(4) Für einen Besitzer wertvoller Möbel ohne freistehendes Haus kommt nur ein Hamster in Frage.

$\alpha_1 = H \vee K \vee M$

$\alpha_2 = W \rightarrow \neg K$

$\alpha_3 = H \rightarrow F$

Wissensbasis

$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$\beta = W \wedge \neg F \rightarrow M$

$\Sigma \vDash \beta$?

Beispiel Anschaffung eines Haustiers (2)

H	K	M	W	F	$H \vee K \vee M$	$W \rightarrow \neg K$	$H \rightarrow F$	$W \wedge \neg F \rightarrow M$
					Σ			β
T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	T

$\Sigma \models \beta$

da in jeder Welt,
in der alle Formeln aus Σ
wahr sind, auch β wahr ist.

Beispiel Anschaffung eines Haustiers (3)

H	K	M	W	F	H ∨ K ∨ M	W → ¬K	H → F	W ∧ ¬F → M
					Σ			β
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	T

$\Sigma \vDash \beta$

da in jeder Welt,
in der alle Formeln aus Σ
wahr sind, auch β wahr ist.

Deduktionskalkül

- Gesucht ist ein Deduktionskalkül (syntaktische Manipulation der Formeln mit Regeln), mit der sich Folgerungen i.a. effizienter herleiten lassen.

$$\underbrace{\Sigma \vdash \alpha}_{\text{Deduktionskalkül}} \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{\Sigma \vDash \alpha}_{\text{Semantische Folgerung}}$$

- Korrektheit: falls $\Sigma \vdash \alpha$ dann $\Sigma \vDash \alpha$
- Vollständigkeit: falls $\Sigma \vDash \alpha$ dann $\Sigma \vdash \alpha$

Beweis durch Widerspruch

- Viele Deduktionskalküle (Resolutionskalkül, Tableau-Kalkül) basieren auf dem Prinzip des Widerspruchsbeweises.

Annahme: $\Sigma \not\models \alpha$

$\Updownarrow$ gleichwertig

$\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist erfüllbar

$\Downarrow$ Wende logische Schlussregeln an

Widerspruch

Resolutionskalkül als Deduktionskalkül

Annahme: $\Sigma \not\models \alpha$

$\Updownarrow$ gleichwertig

$\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist erfüllbar

$\Downarrow$ Erfüllbarkeitserhaltende Umformung

Klauselform von $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist erfüllbar

$\Downarrow$ Wende Resolutionsregel an

Leere Klausel $\emptyset$ und
damit Widerspruch

Resolutionsregel (1)

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Modus Ponens
in Klauselform:

$$\frac{\begin{array}{l} \neg A \lor B \\ A \end{array}}{B}$$

Resolutionsregel
(verallgemeinerter
Modus ponens):

$$\frac{\begin{array}{l} \neg A \lor B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n \\ A \lor C_1 \lor C_2 \lor \ldots \lor C_m \end{array}}{B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n \lor C_1 \lor C_2 \lor \ldots \lor C_m}$$

Ausgangsklauseln enthalten ein komplementäres Literalpaar ¬A und A.

Resolvente

Resolutionsregel (2)

- Faktorisierung:
  Gleiche Literale werden weggelassen:

$$\frac{A \lor A \lor B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n}{A \lor B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n}$$

- Die leere Klausel wird erzeugt durch Resolution von ¬A mit A.
  Kurzschreibweise: ∅.
  Die leere Klausel ∅ hat immer den Wahrheitswert F (falsch) und stellt einen Widerspruch dar.

$$\frac{\begin{array}{l}\neg A \\ A\end{array}}{\emptyset}$$

Algorithmus für Resolutionskalkül

```
Function resolution(Σ, α)
    clauses = KNF von Σ ∪ {¬α};
    do
        for each Paar von Klauseln C1 und C2 do
            if C1 und C2 enthalten ein komplementäres Literalpaar then
                C = Resolvente(C1, C2);   // inkl. Faktorisierung
                if C == Ø then   // Widerspruch
                    return true;
                clauses = clauses ∪ {C};      // (*)
    while clauses wurde in (*) echt erweitert;
    return false;
```

Eigenschaften des Resolutionskalküls

Definition

- $\Sigma \vdash \alpha$ gdw. resolution(Σ, α) true zurückliefert.
- $\Sigma \vdash \alpha$ steht für „α lässt sich aus Σ herleiten“

Satz

- Der Resolutionskalkül ist korrekt: falls $\Sigma \vdash \alpha$ dann $\Sigma \vDash \alpha$.
- Der Resolutionskalkül ist vollständig: falls $\Sigma \vDash \alpha$ dann $\Sigma \vdash \alpha$.

Beispiel – Anschaffung eines Haustiers

Herr Meier will sich ein Haustier anschaffen und beschließt, zur Entscheidungsfindung die Mittel der Aussagenlogik einzusetzen. Dazu macht er folgende Überlegungen:

(1) Es sollte nur ein Hund (H), eine Katze (K) oder ein Hamster (M) sein.

(2) Für Besitzer wertvoller Möbel (W) ist es nicht sinnvoll, eine Katze anzuschaffen, da diese die Möbel zerkratzen könnte.

(3) Die Anschaffung eines Hundes verlangt nach einem freistehenden Haus (F), damit sich kein Nachbar durch das Bellen gestört fühlt.

(4) Für einen Besitzer wertvoller Möbel ohne freistehendes Haus kommt nur ein Hamster in Frage.

Zeige: $\{(1), (2), (3)\} \vdash (4)$

(1)	$H \lor K \lor M$	
(2)	$W \to \neg K$	
(3)	$H \to F$	
(4)	$\neg(W \land \neg F \to M)$	Negation von (4)

KNF:

(5)	$H \lor K \lor M$	aus (1)
(6)	$\neg W \lor \neg K$	aus (2)
(7)	$\neg H \lor F$	aus (3)
(8)	W	aus (4)
(9)	$\neg F$	aus (4)
(10)	$\neg M$	aus (4)

Resolution:

(11)	$\neg K$	(6) und (8)
(12)	$\neg H$	(7) und (9)
(13)	$H \lor K$	(5) und (10)
(14)	H	(11) und (13)
(15)	$\emptyset$	(12 und 14)

Hornklauseln

- Eine Hornklausel ist eine Klausel mit höchstens einem positiven Literal:

  (1) $\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \ldots \lor \neg A_m \lor B$ (Regel)

  (2) $\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \ldots \lor \neg A_m$ (Ziel)

  (3) B (Fakten)

  ($A_1, A_2, \ldots, A_m$ und B sind Aussagenvariablen)

- Äquivalente Schreibweise für (1) als Regel:

  $$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_m \rightarrow B$$

- Für Hornklauseln gibt es die effiziente SLD-Resolution (selection driven linear resolution for definite clauses)
  - linear resolution = es wird immer mit der gerade abgeleiteten Klausel weitergearbeitet
  - selection driven = die Literale in der aktuelle Klausel werden immer von links nach rechts abgearbeitet.

Beispiel zu Hornklauseln und SLD-Resolution

(1)	WetterSchön	(Fakt)
(2)	Schneefall	(Fakt)
(3)	Schneefall → Schnee	(Regel)
(4)	WetterSchön ∧ Schnee → Skifahren	(Regel)
(5)	¬Skifahren	(Ziel)

Zeige mit SLD-Resolution:

{(1), (2), (3), (4)} ⊢ Skifahren

Starte mit (5) als Ausgangsklausel.

(6)	¬WetterSchön ∨ ¬Schnee	(5) und (4)
(7)	¬Schnee	(6) und (1)
(8)	¬Schneefall	(7) und (3)
(9)	∅	(8) und (2)

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Eigenschaften (1)

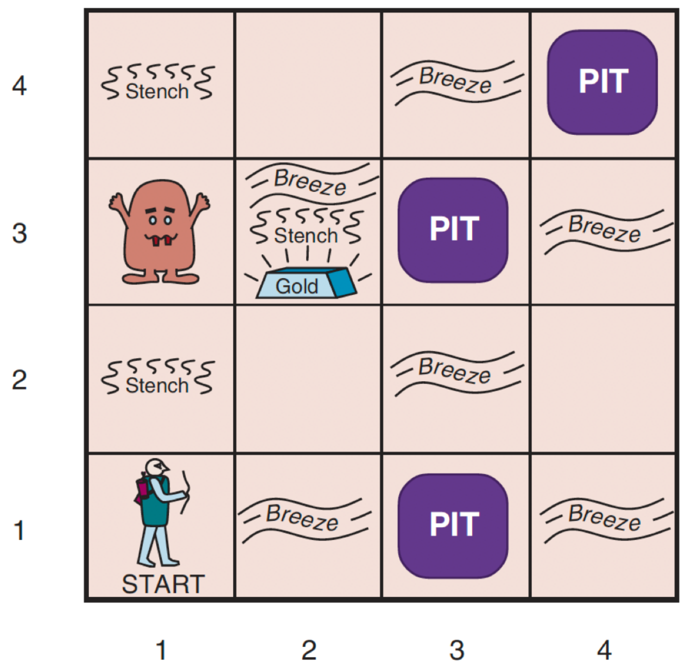
- In Resolutionskalkülen werden Heuristiken eingesetzt, die Klauseln für Anwendung der Resolutionsregel geschickt auswählen. Auch lernende Verfahren sind im Einsatz.
- Spezialfall Hornklauseln:
  Programmiersprache Prolog (Programming in Logic) =
  Hornklauseln für Prädikatenlogik + SLD-Resolution
  „Skifahren"-Beispiel wäre direkt als Prolog-Programm lauffähig.
- SAT (= Menge der erfüllbaren Formeln) ist NP-vollständig.
- TAUT (= Menge der Tautologien) ist co-NP-vollständig.
- TAUT scheint schwieriger zu sein als SAT.
  Bei SAT genügt es eine erfüllende Welt zu finden.
  Bei TAUT müssen alle möglichen Welten die Formel erfüllen.

Eigenschaften (2)

- Es gibt spezielle SAT-Solver, die das SAT-Problem lösen.
- SAT ist ein sehr aktives Forschungsfeld in der KI.
- Viele praxisrelevante Probleme lassen sich als SAT-Problem formulieren:
  - Hardwareverifikation
  - Softwareverifikation
  - CSP-Probleme
- Wettbewerb: http://www.satcompetition.org
- 10.000.000 Variablen sind handhabbar.

Grenzen der Aussagenlogik am Beispiel Wumpus-Welt (1)

- Aussagenlogische Beschreibungen werden schnell umfangreich bei komplexen oder großen Welten.

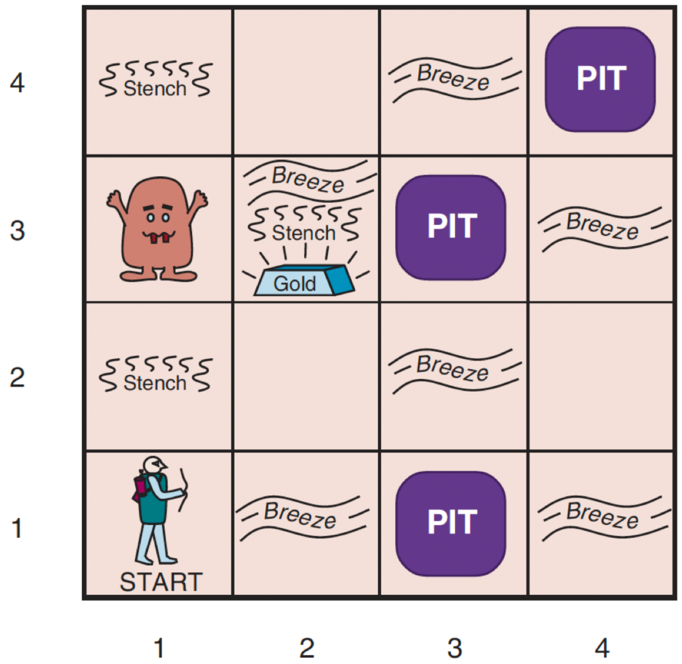


[Russel, Norvig; Künstliche Intelligenz]

Wumpus Welt:

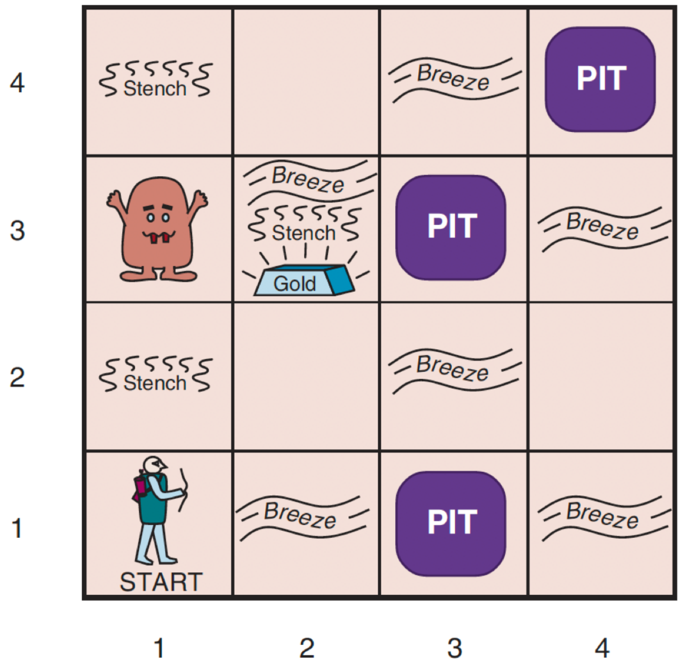
- Agent A links unten sucht Gold G.
- Genau ein Wumpus W und mehrere Falltüren F.
- W und F sind tödlich.
- A kennt seine Startposition aber nicht seine Umgebung.
- A empfindet Geruch G von W in der direkten Nachbarschaft.
- A spürt Lufthauch L bei direkt benachbarten Falltüren
- A kann sich 90° nach links bzw. rechts drehen oder sich um ein Feld geradeaus bewegen.

Grenzen der Aussagenlogik am Beispiel Wumpus-Welt (2)



- Allgemeinwissen des Agenten über die Umgebung:
  - Startfeld hat keinen Wumpus W und keine Falltüre P:
    $\neg W_{1,1} \wedge \neg P_{1,1}$
  - Luftzug B gdw. in einem benachbarten Feld ein P ist:
    $B_{1,1} \leftrightarrow P_{1,2} \vee P_{2,1}$
    ...
  - Geruch S gdw. sich in einem benachbarten Feld W befindet:
    $S_{1,1} \leftrightarrow W_{1,2} \vee W_{2,1}$
    ...
  - ...
- Situationsbedingtes Faktenwissen, nachdem der Agent (1,1), (1,2) und (2,1) besucht hat:
  - $\neg B_{1,1} \wedge \neg S_{1,1} \wedge \neg B_{1,2} \wedge S_{1,2} \wedge B_{2,1} \wedge \neg S_{2,1}$
- Agent kann z.B. aus Allgemein- und Faktenwissen Σ schließen:
  - $\Sigma \models \neg W_{2,2} \wedge \neg P_{2,2} \wedge W_{1,3} \wedge P_{3,1}$

Grenzen der Aussagenlogik am Beispiel Wumpus-Welt (3)

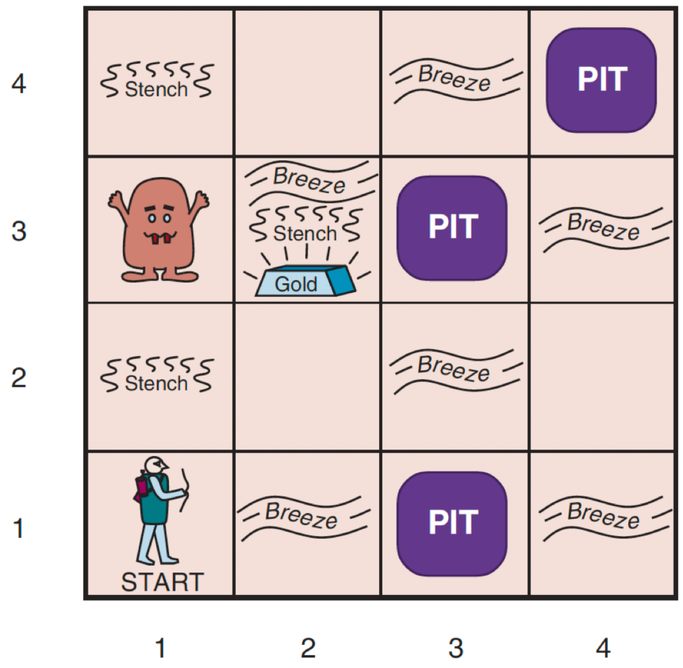


- Modellierung von Bewegungsaktionen erfordert Berücksichtigung der Zeit t:
  - $L_{1,1,t} \wedge StepToNorth_t \rightarrow L_{1,2,t+1}$
  - ...
- Da A weiss, dass er sich in jedem Zeitschritt t an genau einer Stelle aufhält, gilt auch für jedes t:
  - $L_{1,1,t} \oplus \ldots \oplus L_{4,4,t}$ ($\oplus$ = XOR)
- Problem: Formulierung der Regeln für
  - jede Position (i,j)
  - jeden Zeitschritt t
  - Jede Aktion
- Daher ausdrucksstärkere Logik verwenden, z.B. Prädikatenlogik

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Prädikatenlogische der Wumpus-Welt



- Prädikate:
  - *Breezy*(x,y): Luftzug an der Position (x,y)
  - *Loc*(x,y,t): Agent befindet sich zum Zeitpunkt t an der Position (x,y)
  - ...
- Statisches Allgemeinwissen:
  - $\forall x\ \forall y\ \mathit{Breezy}(x,y) \leftrightarrow \exists u\ \exists v\ \mathit{Adjacent}(u,v,x,y) \land \mathrm{Pit}(u,v)$
  - ...
- Zeitabhängiges Wissen:
  - $\forall x\ \forall y\ \forall t\ \ \mathit{Loc}(x,y,t) \land \mathit{StepToNorth}(t) \rightarrow \mathit{Loc}(x,y+1,t+1)$
  - ...

Syntax: Terme

- Menge von Variablen $\mathcal{V}$: x, y, z, ...
- Menge von Konstanten $\mathcal{K}$: a, b, c, ...
- Menge von Funktionssymbole $\mathcal{F}$ mit Stellenzahl: f, g, ...

(1) Jede Variable und jede Konstante ist ein (atomarer) Term.

(2) Falls t_1, t_2, ... und t_n Terme sind und f ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist auch

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

ein Term.

Beispiel:

sqrt(sum(square(x),square(y)))

Syntax: Prädikatenlogische Formeln

Menge von Pädikate P mit Stellenzahl: P, Q, R, ...

(1) Falls t_1, t_2, ... und t_n Terme sind und R ein n-stelliges Prädikat, dann ist folgender Ausdruck eine atomare Formel:

- $R(t_1, t_2, ..., t_n)$

Atomare Formel und negierte atomare Formeln werden auch Literale genannt.

(2) Falls α und β Formeln sind, dann sind auch folgende Ausdrücke Formeln:

- $\neg\alpha$ (Negation)
- $\alpha \land \beta$ (Konjunktion)
- $(\alpha \lor \beta$ (Disjunktion)
- $\alpha \rightarrow \beta$ (Implikation)
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ (Äquivalenz)
- $\forall x\ \alpha$ (Allquantifizierte Formel; „für alle x gilt α“)
- $\exists x\ \alpha$ (Existenzquantifizierte Formel; „für ein x gilt α“)

Wir lassen wie üblich Klammern weg, indem eine Operatorpräzedenz entsprechend der oberen Reihenfolge angenommen wird.

Prädikatenlogische Formeln, in denen alle Variablen durch Quantoren gebunden sind (keine freie Variablen) werden auch Aussagen genannt.

Beispiele für prädikatenlogische Aussagen

Formel	Beschreibung
$\forall x\ frosch(x) \Rightarrow grün(x)$	Alle Frösche sind grün
$\forall x\ frosch(x) \wedge braun(x) \Rightarrow groß(x)$	Alle braunen Frösche sind groß
$\forall x\ mag(x, kuchen)$	Jeder mag Kuchen
$\neg\forall x\ mag(x, kuchen)$	Nicht jeder mag Kuchen
$\neg\exists x\ mag(x, kuchen)$	Keiner mag Kuchen
$\exists x\ \forall y\ mag(y, x)$	Es gibt etwas, das jeder mag
$\exists x\ \forall y\ mag(x, y)$	Es gibt jemanden, der alles mag
$\forall x\ \exists y\ mag(y, x)$	Jedes Ding wird von jemandem geliebt
$\forall x\ \exists y\ mag(x, y)$	Jeder mag etwas
$\forall x\ kunde(x) \Rightarrow mag(bob, x)$	Bob mag jeden Kunden
$\exists x\ kunde(x) \wedge mag(x, bob)$	Es gibt einen Kunden der Bob mag

Beispiele aus
[Ertel, Grundkurs Künstliche Intelligenz]

Erfüllbarkeit und Gültigkeit (wie in der Aussagenlogik)

Definition	
Eine Formel α ist erfüllbar, falls es eine Welt $\mathcal{W}$ gibt, in der α wahr ist.	$\mathcal{W} \models \alpha$
Eine Formel α ist allgemeingültig, falls α in jeder Welt wahr ist.	$\models \alpha$
Eine Formel α folgt aus einer Menge von Formeln (Wissensbasis) Σ, falls in jeder Welt, in der alle Formeln aus Σ wahr sind, auch α wahr ist.	$\Sigma \models \alpha$
Zwei Formeln α und β heißen semantisch äquivalent, falls α und β in jeder Welt die gleiche Wahrheitswerte annehmen.	$\alpha \equiv \beta$

Anmerkung:

Eine Welt $\mathcal{W}$ sieht für prädikatenlogische Formeln etwas komplizierter aus:

- Interpretation der Konstanten
- Interpretation der Funktionssymbole
- Interpretation der Relationssymbole

Beispiel: Verwandtschaftsbeziehungen

- Geschwister haben eine gemeinsame Mutter oder einen gemeinsamen Vater:

$$\alpha \;=\; \forall k_1\, \forall k_2\, Geschw(k_1,k_2) \leftrightarrow (\exists m\, Mutter(m,k_1) \land Mutter(m,k_2)) \lor (\exists v\, Vater(v,k_1) \land Vater(v,k_2))$$

- Geschwisterbeziehung ist symmetrisch:

$$\beta \;=\; \forall k_1\, \forall k_2\, Geschw(k_1,k_2) \rightarrow Geschw(k_2,k_1)$$

Es gilt: $\boxed{\models \alpha \rightarrow \beta}$

Pränexe Nomalform (1)

- Eine Formel ist in pränexer Normalform, wenn alle Quantoren ganz vorne (d.h. ganz außen) stehen.

- Beispiele für pränexe Normalformen:
  - $\forall k_1 \, \forall k_2 \, Geschw(k_1,k_2) \rightarrow Geschw(k_2,k_1)$
  - $\forall x \, \forall y \, \exists z \, Neffe(x,y) \rightarrow Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$

- Beispiel für nicht-pränexe Normalform:
  - $\forall x \, \forall y \; Neffe(x,y) \rightarrow \exists z \, Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$

Pränexe Nomalform (2)

- Jede Formel kann in eine äquivalente pränexe Normalform gebracht werden, indem
  - $\alpha \leftrightarrow \beta$ durch $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
  - $\alpha \rightarrow \beta$ durch $\neg\alpha \vee \beta$ ersetzt werden und
  - Negationen nach innen und
  - Quantoren nach außen verschoben werden.
- Dazu aussagenlogische Regel für Umformung in KNF und
- Prädikatenlogische Regeln

- $\neg\forall x\ \alpha \ \equiv\ \exists x\ \neg\alpha$
- $\neg\exists x\ \alpha \ \equiv\ \forall x\ \neg\alpha$

Gebundene Umbenennung:
- $\exists x\ \alpha \ \equiv\ \exists y\ \alpha[x/y]$
- $\forall x\ \alpha \ \equiv\ \forall y\ \alpha[x/y]$

Falls x nicht frei in β vorkommt:
- $(\forall x\ \alpha) \wedge \beta \ \equiv\ \forall x\ \alpha \wedge \beta$
- $(\forall x\ \alpha) \vee \beta \ \equiv\ \forall x\ \alpha \vee \beta$
- $(\exists x\ \alpha) \wedge \beta \ \equiv\ \exists x\ \alpha \wedge \beta$
- $(\exists x\ \alpha) \vee \beta \ \equiv\ \exists x\ \alpha \vee \beta$

- $(\forall x\ \alpha) \wedge (\forall x\ \beta) \ \equiv\ \forall x\ \alpha \wedge \beta$
- $(\exists x\ \alpha) \vee (\exists x\ \beta) \ \equiv\ \exists x\ \alpha \vee \beta$

Beispiel für Umformung in pränexe Normalform

$$\forall x\ \forall y\ \ Neffe(x,y) \ \rightarrow\ Mann(x)\ \land\ \exists z\ Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ \forall y\ \ \neg Neffe(x,y)\ \ \lor\ \ (Mann(x)\ \land\ \exists z\ Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ \forall y\ \ \neg Neffe(x,y)\ \ \lor\ \exists z\ (Mann(x) \land\ Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \ \neg Neffe(x,y)\ \ \lor\ \ (Mann(x) \land Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$$

Beseitigung des Existenzquantors durch Skolemisierung

$\forall p \; \exists m \; Mutter(m, p)$

Zu jedem p gibt es eine Mutter m.

$\forall p \; Mutter(f(p), p)$

Zu jedem p ist f(p) eine Mutter.

Skolemfunktion f

Beseitigung des Existenzquantors durch Skolemisierung

$\forall p \; \exists m \; \text{Mutter}(m, p)$ ist erfüllbar

$\Leftrightarrow$

$\forall p \; \text{Mutter}(f(p), p)$ ist erfüllbar

- Skolemisierung ist erfüllbarkeitserhaltend!
- Keine semantische Äquivalenz!

Beseitigung des Existenzquantors durch Skolemisierung

Jede Formel der Bauart

- $\forall x_1 \, \forall x_2 \ldots \forall x_1 \, \exists y \, \alpha$

kann erfüllbarkeitserhaltend umgeformt werden in:

- $\forall x_1 \, \forall x_2 \ldots \forall x_1 \, \alpha[y/f(x_1, x_2 \ldots , x_n)]$

Dabei ist f eine neue noch nicht in α vorkommende n-stellige Funktion.
f heisst auch Skolem-Funktion.

Beispiele:

$\forall x \, \forall y \, \exists z \, P(x, y, z)$ $\longrightarrow$ $\forall x \, \forall y \, P(x, y, f(x,y))$

Skolemisierung

$\exists x \, \exists y \, \exists z \, P(x, y, z)$ $\longrightarrow$ $P(a, b, c)$

a, b, c sind Konstante
(0-stellige Funktionen)

Deduktionskalkül

- Gesucht ist wieder ein Deduktionskalkül (syntaktische Manipulation der Formeln mit Regeln), mit der sich Folgerungen i.a. effizienter herleiten lassen.

$$\boxed{\underbrace{\Sigma \vdash \alpha}_{\text{Deduktionskalkül}} \quad \text{gdw.} \quad \underbrace{\Sigma \models \alpha}_{\text{Semantische Folgerung}}}$$

Resolutionskalkül als Deduktionskalkül

Annahme: $\Sigma \not\models \alpha$

$\Updownarrow$ gleichwertig

$\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist erfüllbar

$\Downarrow$ Erfüllbarkeitserhaltende Umformung

Klauselform von $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ist erfüllbar

$\Downarrow$ Wende Resolutionsregel an

Leere Klausel $\emptyset$ und
damit Widerspruch

Klauselform (KNF)

1. Bringe jede Formel auf pränexe Normalform
2. Beseitige Existenzquantoren durch Skolemisierung
3. Allquantoren weglassen:
   Variablen sind damit impilizit allquantifiziert.
4. Bringe Formel (wie in der Ausssagenlogik) in eine konjunktive Normalform (Klauselform).

Resolutionsregel: einfaches Beispiel

Typischer Schluss in der Prädikatenlogik

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \;\; \text{Mensch}(x) \rightarrow \text{IstSterblich}(x) \\ \text{Mensch}(\text{sokrates})\end{array}}{\text{IstSterblich}(\text{sokrates})}$$

In Klauselform als Resolutionsregel:

$$\frac{\begin{array}{l}\neg \text{Mensch}(x) \vee \text{IstSterblich}(x) \\ \text{Mensch}(\text{sokrates})\end{array}}{\text{IstSterblich}(\text{sokrates})}$$

Literale werden unifiziert (gleichgemacht) durch die Substitution σ = [x/sokrates]

Unifikation

- Zwei Literale heißen unfizierbar, falls es eine Substitution σ gibt, die jede Variable so ersetzt, dass beide Literale gleich sind.
- Eine solche Substitution heisst auch Unifikator.
- Eine Unfikator heisst allgemeinster Unifikator (most general unifier), wenn alle anderen Unifikatoren „spezieller“ sind.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccc}
P(x, y) & \longrightarrow & P(f(z), g(f(z))) \\
 & [x/f(z), y/g(f(z))] & \\
P(f(z), g(x)) & \longrightarrow & P(f(z), g(f(z)))
\end{array}
$$

- σ_1 = [x/f(z), y/g(f(z))] ist allgemeinster Unfikator
- σ_2 = [x/f(a), y/g(f(a))] ist ebenfalls Unfikator, ist aber spezieller als σ_1

Allgemeine Resolutionsregel

- Resolutionsregel

$$\frac{\begin{array}{l}\neg A \lor B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n \\ A' \lor C_1 \lor C_2 \lor \ldots \lor C_m\end{array}}{B_1\sigma \lor B_2\sigma \lor \ldots \lor B_n\sigma \lor C_1\sigma \lor C_2\sigma \lor \ldots \lor C_m\sigma}$$

Dabei ist σ allgemeinster Unifikator von A und A'.
Also: $A\sigma = A'\sigma$

- Faktorisierung

$$\frac{A \lor A' \lor B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_n}{A\sigma \lor B_1\sigma \lor B_2\sigma \lor \ldots \lor B_n\sigma}$$

Dabei ist σ allgemeinster Unifikator von A und A'.
Also: $A\sigma = A'\sigma$

Beispiel – Verwandtschaftsbeziehungen

$\alpha_1 = \forall x\ \forall y\ \ Neffe(x,y) \leftrightarrow Mann(x) \land \exists z\ Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$

$\alpha_2 = \forall x\ \forall y\ \forall z\ \ Geschw(x,y) \land Kind(x,z) \rightarrow Kind(y,z)$

Wissenbasis

$\beta = \forall x\ \forall y\ \forall z\ \ Neffe(x,y) \land Geschw(x,z) \land Mann(z) \rightarrow Neffe(z,y)$

Behauptung

Beweise mit dem Resolutionskalkül:

$\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash \beta$

Verwandtschaftsbeziehungen in Klauselform bringen (1)

$\alpha_1 = \forall x\, \forall y\; Neffe(x,y) \leftrightarrow Mann(x) \land \exists z\, Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$

$\forall x\, \forall y\; Neffe(x,y) \rightarrow Mann(x) \land \exists z\, Kind(x,z) \land Geschw(z,y)$

$\forall x\, \forall y\, \exists z\; \neg Neffe(x,y) \lor (Mann(x) \land Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$

Pränexe Normalform

$\neg Neffe(x,y) \lor (Mann(x) \land Kind(x,f(x,y)) \land Geschw(f(x,y),y))$

z durch durch Skolem-Funktion f(x,y) ersetzen.
Allquantoren weglassen.

(1) $\neg Neffe(x,y) \lor Mann(x)$
(2) $\neg Neffe(x,y) \lor Kind(x,f(x,y))$
(3) $\neg Neffe(x,y) \lor Geschw(f(x,y),y)$

$\forall x\, \forall y\; Neffe(x,y) \leftarrow Mann(x) \land \exists z\, (Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$

$\forall x\, \forall y\, \forall z\; Neffe(x,y) \lor \neg(Mann(x) \land Kind(x,z) \land Geschw(z,y))$

Pränexe Normalform

(4) $Neffe(x,y) \lor \neg Mann(x) \lor \neg Kind(x,z) \lor \neg Geschw(z,y)$

Verwandtschaftsbeziehungen in Klauselform bringen (2)

$\alpha_2 = \forall x \, \forall y \, \forall z \;\; Geschw(x,y) \land Kind(x,z) \;\rightarrow\; Kind(y,z)$

$Geschw(x,y) \land Kind(x,z) \;\rightarrow\; Kind(y,z)$

(5) $\neg Geschw(x,y) \;\lor\; \neg Kind(x,z) \,)\; \lor\; Kind(y,z)$

Verwandtschaftsbeziehungen in Klauselform bringen (3)

$\neg\beta \;=\; \neg\, \forall x\, \forall y\, \forall z\;\; Neffe(x,y) \wedge Geschw(x,z) \wedge Mann(z) \rightarrow Neffe(z,y)$

$\exists x\, \exists y\, \exists z\;\; \neg\, (Neffe(x,y) \wedge Geschw(x,z) \wedge Mann(z) \rightarrow Neffe(z,y))$

$\neg(Neffe(n_1, p) \wedge Geschw(n_1, n_2) \wedge Mann(n_2) \rightarrow Neffe(n_2, p))$

$Neffe(n_1, p) \wedge Geschw(n_1, n_2) \wedge Mann(n_2) \wedge \neg Neffe(n_2, p))$

(6) $Neffe(n_1, p)$
(7) $Geschw(n_1, n_2)$
(8) $Mann(n_2)$
(9) $\neg Neffe(n_2, p)$

x, y, z durch durch 0-stellige Skolem-Funktionen (d.h. Konstante) n_1, p, n_2 ersetzen.

Resolutionsbeweis für Verwandtschaftsbeziehungen

Ausgangsklauseln

α_1	(1)	$\neg Neffe(x,y) \vee Mann(x)$
	(2)	$\neg Neffe(x,y) \vee Kind(x,f(x,y))$
	(3)	$\neg Neffe(x,y) \vee Geschw(f(x,y),y)$
	(4)	$Neffe(x,y) \vee \neg Mann(x) \vee \neg Kind(x,z) \vee \neg Geschw(z,y)$
α_2	(5)	$\neg Geschw(x,y) \vee \neg Kind(x,z)\ ) \vee Kind(y,z)$
$\neg\beta$	(6)	$Neffe(n_1,p)$
	(7)	$Geschw(n_1, n_2)$
	(8)	$Mann(n_2)$
	(9)	$\neg Neffe(n_2, p)$

Anwendung der Resolutionsregel

(10)	$Kind(n_1,f(n_1,p))$	(6) und (2)
(11)	$\neg Geschw(n_1,y) \vee Kind(y, f(n_1,p)$	(10) und (5)
(12)	$Kind(n_2, f(n_1,p)$	(11) und (7)
(13)	$Neffe(n_2,y) \vee \neg Mann(n_2) \vee \neg Geschw(f(n_1,p),y)$	(12) und (4)
(14)	$\neg Mann(n_2) \vee \neg Geschw(f(n_1,p),p)$	(13) und (6)
(15)	$\neg Geschw(f(n_1,p),p)$	(14) und (8)
(16)	$\neg Neffe(n_1,p)$	(15) und (3)
(17)	$\emptyset$	(16) und (6)

Also: $\boxed{\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash \beta}$

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Eigenschaften und Grenzen der Prädikatenlogik

Eigenschaften

- Der Resolutionskalkül ist korrekt und vollständig.
- Bereits 1929 hat Kurt Gödel bewiesen, dass es für die Prädikatenlogik erster Stufe einen korrekten und vollständigen Kalkül gibt.
- Erfüllbarkeit und Tautologieeigenschaft ist unentscheidbar (Church 1936).
- Prädikatenlogik 2. Stufe: auch über Prädikate darf quantifiziert werden. Für die Prädikatenlogik 2. Stufe gibt es keinen vollständigen Beweiskalkül (ebenfalls von Gödel bewiesen).
- Gödelscher Unvollständigkeitssatz (sinngemäß):
  es gibt keinen vollständigen Kalkül für die Arithmetik der ganzen Zahlen.
  (eine der berühmtesten Sätze der Logik, ebenfalls von Gödel 1931 bewiesen).

Bemerkungen

- Wichtiger Ausgangspunkt für Wissensrepräsentation und wissensbasierte Systeme.
- Semantik für natürliche Sprachen.
- Software-Spezifikation und -Verifikation.
- Hornklausel-Logik: wichtige Teilmenge der Prädikatenlogik. Grundlage der Programmiersprache Prolog

IBM Watson und Jeopardy!

- Natürlichspachliches Dialogsystem IBM Watson.
- Logische Strukturen von natürlichsprachigen Sätzen werden in Prolog verarbeitet. Enthält auch eine Inferenzkomponente.
- Watson hat 2011 in der Quizsendung Jeopardy! gegen 2 menschliche Champions gewonnen.

Noch gleichauf: Der Supercomputer "Watson" und sein Kontrahent Ken Jennings
© Ben Hider/Getty Images

In der Quizshow wird die Antwort vorgegeben und die dazugehörige Frage gesucht:

Du brauchst nur ein Nickerchen. Du hast nicht diese Krankheit, die Menschen dazu bringt, im Stehen einzuschlafen.

→ Was ist Narkolepsie?

IBM Watson hat diese Aufgabe erfolgreich gemeistert!

Inhalt

- Wissensbasierte Systeme
- Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik
  - Wahrheitstabellen
  - Normalformen
- Deduktionskalküle
  - Resolutionskalkül
  - Hornklausellogik
- Eigenschaften und Grenzen der Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (Kurzform)
- Grenzen der Logik

Qualifizierungsproblem (qualification problem) (1)

- Viele Regeln in einer Wissensbasis haben Ausnahmen.
  Es ist praktisch unmöglich alle Ausnahmen aufzulisten.
- Praktikable Lösung mit „unsicherem Schließen“ (nächstes Kapitel)
- Beispiel:
  - Alle Vögel können fliegen.

    $\boxed{\forall x\ Vogel(x) \rightarrow Flugfaehig(x)}$

  - Alle Vögel bis auf ... können fliegen.

    $\boxed{\forall x\ Vogel(x) \land \neg Pinguin(x) \land \neg Strauss(x) \land \ldots \rightarrow Flugfaehig(x)}$

Qualifizierungsproblem (qualification problem) (2)

- Kommen nun weitere flugfähige Vogelarten dazu wird es aufwendig:

  $\forall x\ Adler(x) \rightarrow Vogel(x)$

  $\forall x\ Papagei(x) \rightarrow Vogel(x)$

  ...

- Um die Flugfähigkeit von Adlern und Papageien folgern zu können, muss spezifiziert werden, dass sie nicht zu den flugunfähigen Ausnahmen gehören:

  $\forall x\ Adler(x) \rightarrow \neg Pinguin(x)$

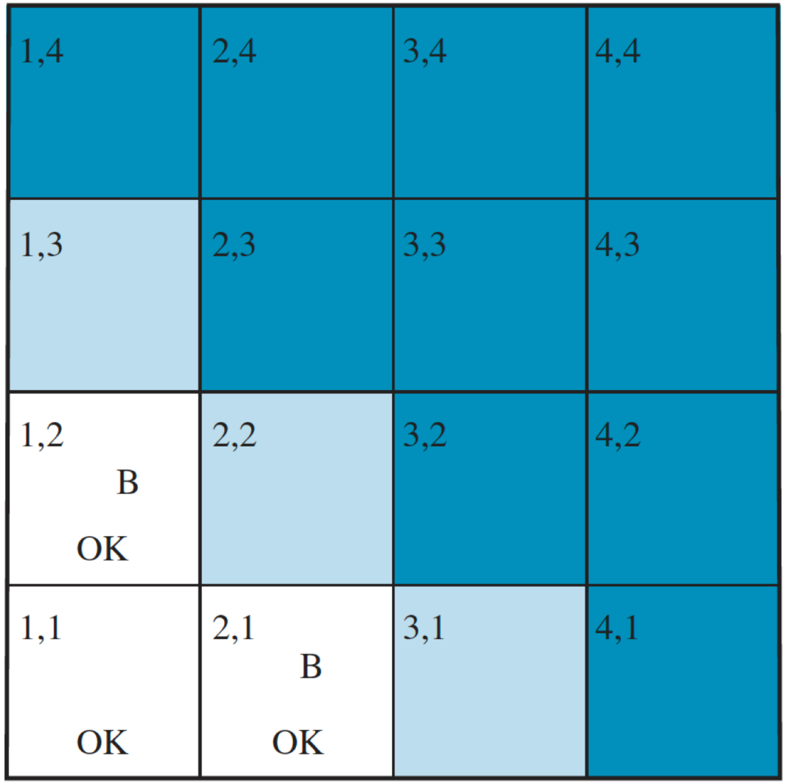
  $\forall x\ Adler(x) \rightarrow \neg Strauss(x)$

  $\forall x\ Papagei(x) \rightarrow \neg Pinguin(x)$

  $\forall x\ Papagei(x) \rightarrow \neg Strauss(x)$

  ...

In der Wumpus-Welt genügt Logik alleine nicht immer!



Russel, Norvig; *Artificial Intelligence – A Modern Approach;* Kap. 17.

- Felder (1,1), (1,2) und (2,1) sind sicher (kein Wumpus und keine Falltüre)
- Agent hat in den Felder (1,2) und (2,1) einen Luftzug (Breeze B) bemerkt.
- Es daher logisch, dass es in den Felder (1,3), (2,2) und (3,1) eine Falltür geben muss.
- Welches Feld sollte der Agent aber aus rationalen Überlegungen bevorzugt besuchen?
- Lösung: nächstes Kapitel