Eigenschaften der Fouriertransformation

Vorlesung 10, Signale, Systeme und Sensoren

Prof. Dr. M. O. Franz

HTWG Konstanz, Fakultät für Informatik

Übersicht

1. Grundlegende Transformationspaare

2. Symmetrien und Rechenregeln

Übersicht

Fouriertransformation und ihre Inverse

In Vorlesung 6 haben wir gesehen, dass sich die Fouriertransformierte $F(\omega)$ aus dem Signal $f(t)$ mit der Analysegleichung

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

berechnen lässt. Kurzschreibweise für die Fouriertransformation:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Die (verlustfreie) Berechnung des Originalsignals aus dem Spektrum geschieht über die Synthesegleichung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Dieser Vorgang wird auch **inverse Fouriertransformation** genannt. Kurzschreibweise:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}.$$

Beispiel: Fouriertransformierte des Rechteckimpulses

$$\text{Rechteckimpuls:} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin a\omega, & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a, & \text{für } \omega = 0 \end{cases} = 2a \cdot \operatorname{sinc} a\omega \quad \text{(rein reell)} \end{aligned}$$

mit der **Sinc-Funktion** (*sinus cardinalis*, auch Spaltfunktion)

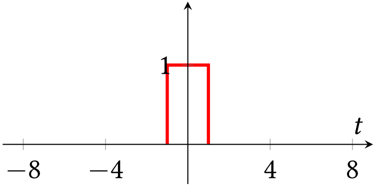
$$\operatorname{sinc} z = \begin{cases} \frac{1}{z} \sin z, & \text{für } z \neq 0 \\ 1, & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

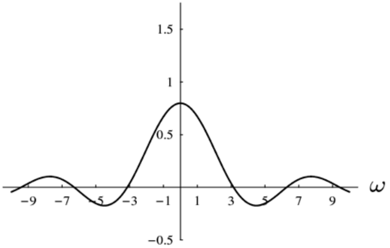
Beispiel: Rechteckimpulse

Zeitbereich

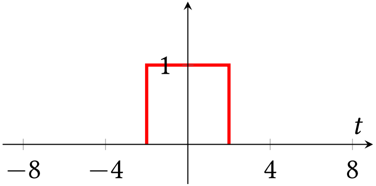
Frequenzbereich (Realteil)

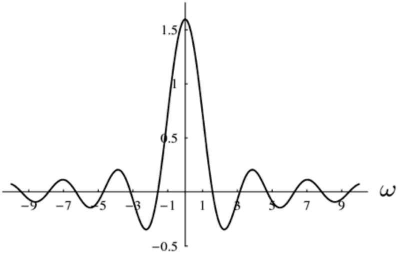
Rechteckimpuls ($a = 1$)





Rechteckimpuls ($a = 2$)

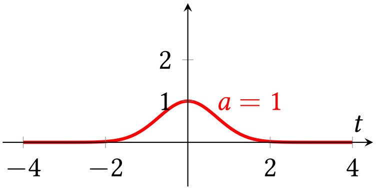


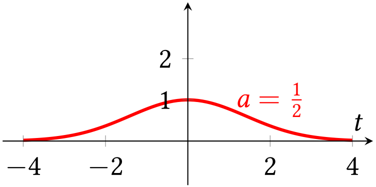


Beispiel: Gaußimpuls

Zeitbereich

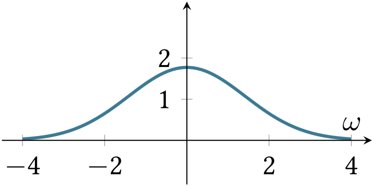
$$f(t) = e^{-a^2 t^2}$$

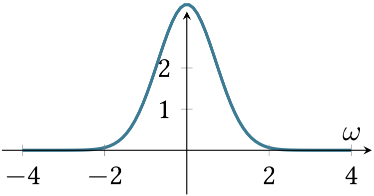




Frequenzbereich (Realteil)

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

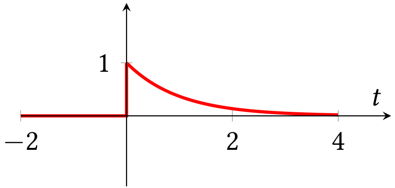




Beispiel: einseitige Exponentialfunktion

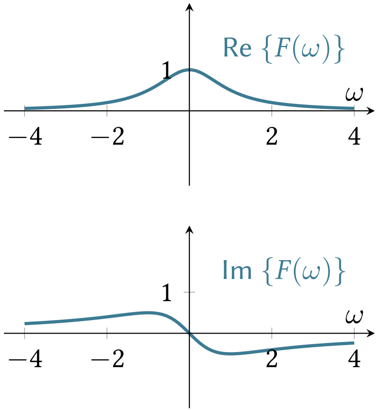
Zeitbereich

$$f(t) = \sigma(t)e^{-at} = \begin{cases} e^{-at}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$



Frequenzbereich

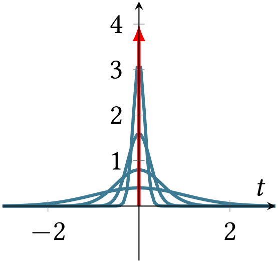
$$F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$$



Dirac-Impuls und seine Fouriertransformierte

Der **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ spielt eine wichtige Rolle in der Signalverarbeitung. Mathematisch ist er definiert als Grenzübergang einer Serie von immer schmaleren (z.B. Gauß-)Impulsen der Fläche 1. Dadurch wird er gleichzeitig unendlich hoch und schmal, behält aber trotzdem die Fläche 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$



Seine definierende Eigenschaft ist die **Sieb-** oder **Ausblendeigenschaft**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\, dt = f(0).$$

Die Fouriertransformierte ergibt sich somit als

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1.$$

Fouriertransformierte von Sinus-Schwingungen

Interessanterweise lässt sich zeigen, dass umgekehrt das Integral über ein komplexes Sinus-Signal gerade wieder den Dirac-Impuls ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Die Fouriertransformierte eines komplexen Sinus-Signales ist also:

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Obwohl periodische Signale nicht absolut integrierbar sind, kann man so eine Fouriertransformierte für Sinus-Schwingungen berechnen:

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t})\} = \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

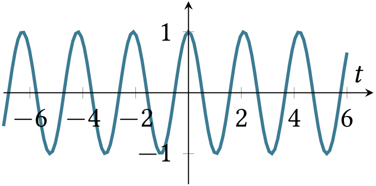
$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{i}{2}(e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t})\} = i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

Zusammenhang mit der Fourierreihe

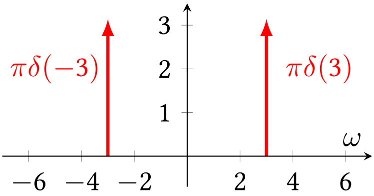
Das mit der Fouriertransformation berechnete Spektrum einer Sinusschwingung sieht also genauso aus wie bei der Fourierreihe, allerdings stehen statt der Koeffizienten an derselben Stelle Delta-Impulse skaliert mit 2π. Damit lassen sich zeitkontinuierliche periodische und aperiodische Signale mit dem gleichen Formalismus behandeln.

Zeitbereich

$f(t) = \cos 3t$



Frequenzbereich (Realteil)



Übersicht

Grundlegende Symmetrien

- Die Fouriertransformierte eines *reellen* Signals ist symmetrisch zum Ursprung (**hermitesch**):

$$F(\omega) = F^*(-\omega),$$

  d.h. der Realteil des Spektrums ist immer spiegelsymmetrisch zur y-Achse bzw. gerade, der Imaginärteil immer punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.
- Ein reelles und gerades Signal hat eine rein reelle, gerade Fouriertransformierte.
- Ein reelles und ungerades Signal hat eine rein imaginäre, ungerade Fouriertransformierte.

Linearitätseigenschaft

- In der Praxis muss man selten direkt Fourierintegrale ausrechnen, da diese für beinahe alle vorkommenden grundlegenden Funktionstypen bereits berechnet und tabelliert sind (s. Zusatzmaterial).
- Fast immer lässt sich ein beliebiges Signal als gewichtete Summe von elementaren Signalen schreiben:

$$f(t) = w_1 \cdot f_1(t) \pm w_2 \cdot f_2(t) \pm \cdots \pm w_k \cdot f_k(t) \pm \cdots .$$

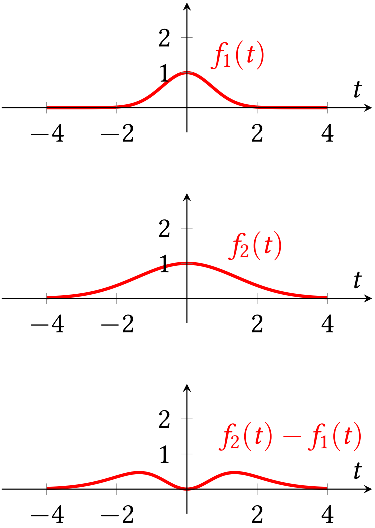
- Hierfür benutzt man die **Linearitätseigenschaft**. Aus der Linearität des Integrals folgt für die Fouriertransformierte:

$$F(\omega) = w_1 \cdot F_1(\omega) \pm w_2 \cdot F_2(\omega) \pm \cdots \pm w_k \cdot F_k(\omega) \pm \cdots .$$

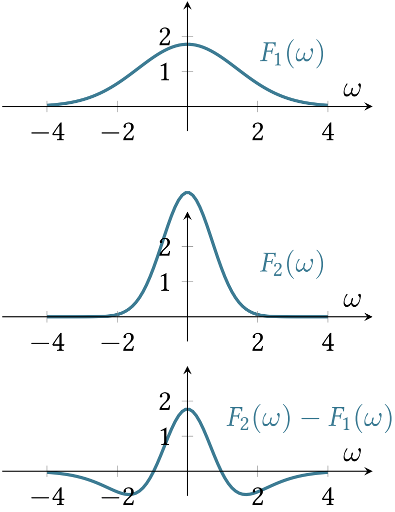
- Die Fouriertransformierten $F_k(\omega)$ der elementaren Funktionen werden dann den Tabellen entnommen.

Beispiel für Linearität: Differenz zweier Gaußimpulse

Zeitbereich



Frequenzbereich (Realteil)



Weitere Rechenregeln

- **Ähnlichkeitssatz:** Für eine Maßstabsänderung um den Faktor $a \in \mathbb{R}$ im Zeitbereich gilt:

$$f(a \cdot t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a} F(\tfrac{\omega}{a})$$

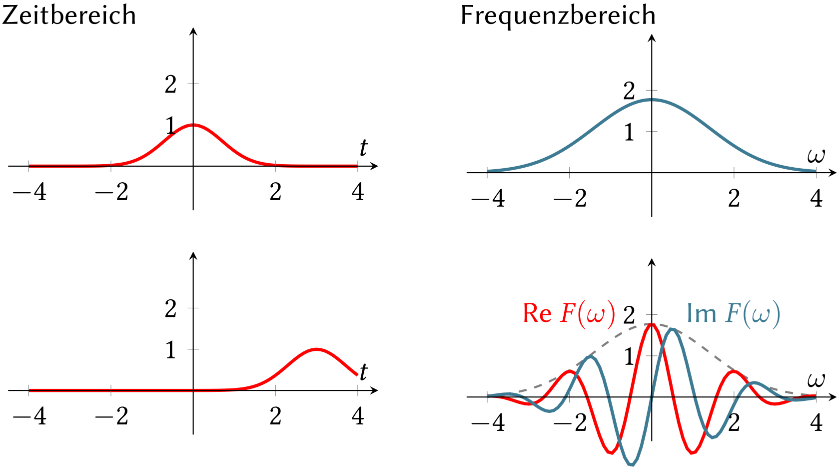
- **Verschiebungssätze:** Für eine Verschiebung $a \in \mathbb{R}$ im Zeitbereich gilt:

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

d.h. der Betrag der Fouriertransformierten bleibt bei einer Verschiebung unverändert, nur die Phase ändert sich. Für eine Verschiebung im Frequenzbereich gilt umgekehrt:

$$f(t) \cdot e^{iat} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega - a)$$

Beispiel zum Verschiebungssatz



Aufgaben (1)

1. Berechnen Sie mithilfe der Ausblendeigenschaft folgende Integrale der δ-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin t \, dt$$

2. Berechnen Sie mithilfe der Analysegleichung die Fouriertransformierte der zweiseitigen Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

   Zerlegen Sie dazu das Fourierintegral in zwei Abschnitte von $-\infty$ bis 0 und 0 bis ∞.

3. Benutzen Sie die ausgeteilte Tabelle und die Linearitätseigenschaft, um die Fouriertranformierte folgender Signale zu berechnen:

$$f_1(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + e^{i\omega_0 t}, \quad f_2(t) = 2 + 3|t|e^{-4|t|} - 5e^{i7t^2}$$

Aufgaben (2)

1. Benutzen Sie die Tabelle und die Linearitätseigenschaft, um aus den folgenden Fouriertransformierten die zugehörige Originalfunktion im Zeitbereich zu berechnen:

$$F_1(\omega) = \frac{32}{\omega^4 + 8\omega^2 + 16}, \quad F_2(\omega) = -\frac{7}{i\omega} + i\frac{2\omega}{1+\omega^2}$$

2. Bestimmen Sie mithilfe der Ähnlichkeitseigenschaft und dem angegebenen Transformationspaar die Fouriertransformierte.

$$f(t) = \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \cos^2 t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\pi}\cos\left(\tfrac{\omega^2}{4} - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

3. Bestimmen Sie unter Verwendung der Verschiebungssätze die Fouriertransformierte.

$$f_1(t) = \sin\left(\left(t + \tfrac{\pi}{2}\right)^2\right) \quad \text{und} \quad f_2(t) = e^{i3t}\cos 2t$$