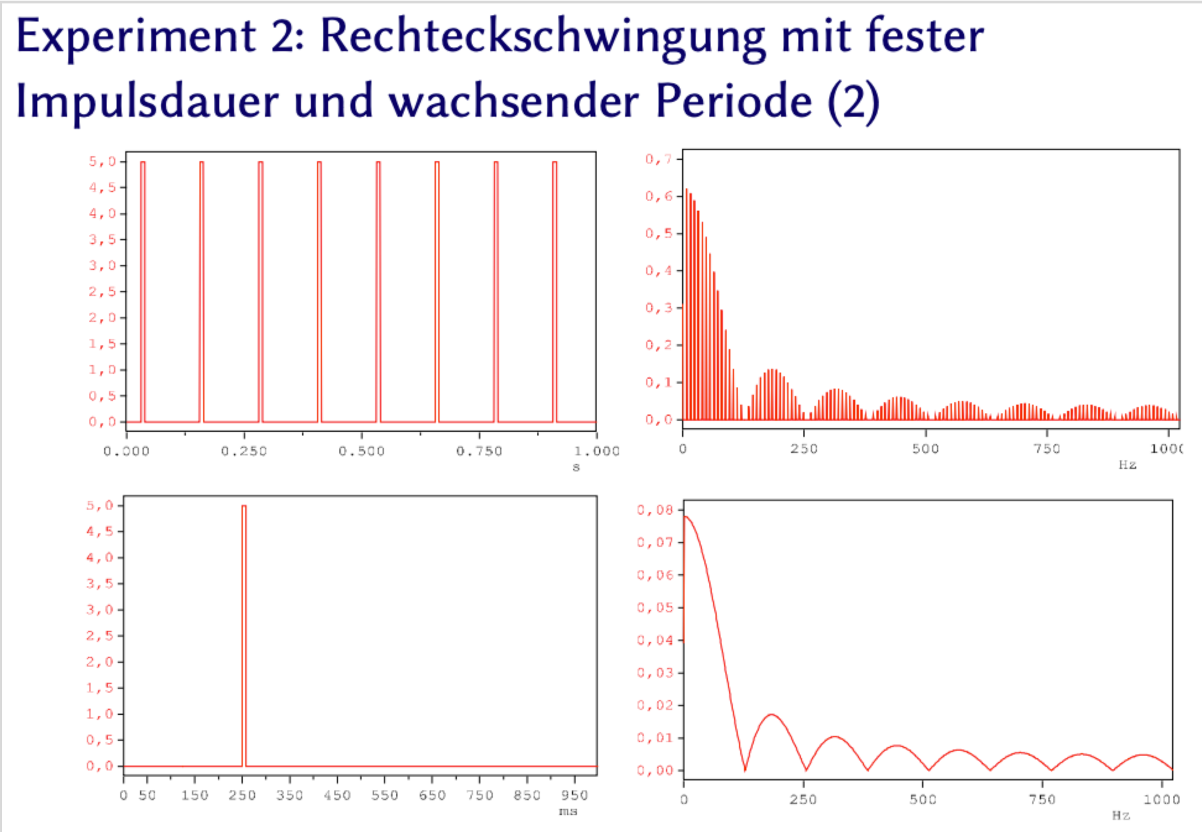
#uni/semester3/SSS/fragenkatalog3

1. Wie verändert sich das Spektrums einer Rechteckschwingung mit fester Impulsdauer, bei der die Periode immer weiter erhöht wird?
   ➡ Wird die Periodendauer T (bei gleichbleibender Impulsdauer) größer, so wird der Abstand der Linien 1/T notwendigerweise immer enger. Geht die Periodendauer gegen unendlich (d.h. das Signal wird nichtperiodisch), verschmelzen die einzelnen Linien zu einem durchgehenden, d.h. kontinuierlichen Spektrum.



   ➡ Die einzelnen Linien verschmelzen zu einem kontinuierlichem Spektrum, während die Nullstellen ihre Positionen nicht verändern.

2. Was ist ein fastperiodisches Signal?
   ➡ Viele Signale (Musik, Sprache) sind fastperiodisch. D.h. sie bestehen aus Abschnitten unterschiedlicher Zeitdauer, innerhalb derer das Signal periodisch ist.
   ➡ Fastperiodische Signale wiederholen sich nur über einen begrenzten Zeitraum. Sie besitzen linienähnliche Spektren.
   ➡ Ein endliches Signal, das für eine bestimmte Zeit periodisch ist. Linienähnliches Spektrum; nur ganzzahlige vielfachen der Grundfrequenz

3. Sie beobachten ein Spektrum aus mehreren Linien bei 100 Hz, 200 Hz, 270 Hz, 400 Hz und

800 Hz. Um was für einen Signaltyp handelt es sich?
➜ Quasiperiodisches Signal

4. Welche Signale lassen sich als Fourierreihe darstellen?
➜ Erstaunlicherweise können wir mit Fourrierreihen trotzdem unstetige periodische Funktionen (z.B. Rechteckschwingungen) annähern. Nicht alle periodischen Funktionen können durch Fourierreihen beschrieben werden. Man kann nicht mit endlichen Fourrierreihen beliebig nahe an jede periodische Funktion herankommen. Siehe Dirichlet-Bedingungen
➜ Alle praktisch vorkommenden und technisch erzeugbaren periodischen Signale

5. Wie sieht das Spektrum eines einzelnen Rechteckimpulses aus?
➜ Gaußsche-Kurve mit auslaufenden Schwingungen (Rauschen)

6. Wie sieht die Fouriertransformierte des mit 2 skalierten Einheitsimpulses aus?
➜ F(w) = 2a * sinc(aw); F(w) = 4 sinc(2w)

7. Wie kann man am Besten die wechselnde Tonhöhe in der Aufnahme eines Solo-Musikstückes bestimmen?
➜ Eine Note, die nur eine begrenzte Zeit dauert, muss als Band einfacher harmonischer Bewegungen aufgefasst werden, von denen keine als die einzig gegenwärtige einfache harmonische Bewegung betrachtet werden darf. Zeitlich Präzision bedeutet eine gewisse Unbestimmtheit der Tonhöhe, genau wie die Präzision der Tonhöhe eine zeitliche Indifferenz bedingt".

> *Töne bzw. Klänge müssen also länger andauern, um als solche erkannt zu werden bzw. um die Tonhöhe überhaupt bestimmen zu können. Ohne dass das Signal eine bestimmte Anzahl von Perioden aufweist, werden wir also keinen Ton hören. Töne bzw. Klänge sind aus diesem Grunde fastperiodisch bzw. quasiperiodisch.*

➜ Die Tonhöhe ist eindeutig bestimmbar. Die Tonhöhe wird durch die Freq. des Grundtoins bestimmt, die anderen Harmonischen sind die Obertöne.
➜ Durch Zerlegung des Signals in überlappende Abschnitte, in denen man eine lokale Fourieranalyse durchführt, nachdem man die Abschnitte mit einer möglichst glatten Fensterfunktion multipliziert hat

8. Sie zerlegen ein relativ glattes, periodisches Signal in mehrere Abschnitte und bestimmen

in jedem Abschnitt die lokale Fouriertransformation. Wie unterscheiden sich die lokalen Spektra vom Gesamtspektrum und warum?

➡ Die lokalen Spektra enthalten deutlich höhere Frequenzen, da durch das Ausschneiden plötzliche Übergänge entstehen, die wiederum hohe Frequenzanteile haben

➡ Durch die den senkrechten Ausschnitt entstehen steile Übergänge. Im Spektrum sind diese als hohe Frequenzen sichtbar. Diese sind natürlich im Original Signal nicht vorhanden.

➡ sog. Windowing.; die Fenster enthalten deutlich höhere Freq. als das Gesamtspektrum; Durch die Ausschnitte werden steile Übergänge erzeugt; Verbesserung: Abschnitte überlappen und mit einer Fensterfunktion multiplizieren (z.b. Gaußfkt.)

9. Was bedeutet die Komplementarität von Frequenz und Zeit?

   ➡ Frequenz und Zeit können nicht unabhängig voneinander gemessen werden. Sie werden komplementär oder auch konjugiert genannt.

   ➡ Eine zeitliche Eingrenzung der Signaldauer Δt bedeutet eine Ausweitung des Frequenzbandes Δf . Umgekehrt gilt: Je eingeschränkter das Frequenzband eines Signals ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer des Signals sein.

   ➡ Je eingeschränkter das Frequenzband eines Signals ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer des Signals sein.

10. Wie berechnet man die Frequenzunschärfe eines Signals?

    ➡ Durch die Multiplikation der Halbwertsbreite oder Standardabweichung im Zeit- und Frequenzbereich

    ➡ $\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq 1$ bzw. $\Delta t \cdot \Delta f \geq 0.88$

11. Was besagt die Frequenz-Zeit-Unschärferelation?

    ➡ Das Unschärfeprizinp UP besagt: (Buch Seite 65)

    > *Je mehr die Zeitdauer Δt eines Signals eingeschränkt wird, desto breiter wird zwangsläufig sein Frequenzband Δf. Je eingeschränkter das Frequenzband Δf eines Signals (oder eines Systems) ist, desto größer muss zwangsläufig die Zeitdauer Δt des Signals sein.*

    > Unschärfe–Prinzip für Zeit und Frequenz: $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1$

    ➡ Man kann niemals gleichzeitig Zeitdauer und Frequenz genauer als $\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq 1$ angeben. Dies ist eine fundamentale Grenze der Fourieranalysis und damit auch der Physik.

→ Man kann niemals die Zeitdauer und Frequenz eines Signals genauer als G_t * G_w = 1 angeben (G steht für Standardabweichung?)

12. Bei welchem Signal ist das Produkt aus Zeit- und Frequenzunschärfe genau gleich 1?
    → Ein Sinus-Schwingungsimpuls der sanft beginnt und endet (aufweist keine abrupte Änderung!). Zeitdauer Δt und die Bandbreite Δf des Spektrums beginnet bzw. enden dort, wo jeweils die Hälfte des Maximalwertes erreicht wird. In diesem Fall gibt die Beziehung Δf Δt = 1. (Siehe GAUSS-Schwingungsimpuls Buch Seite 69)
    → Gabor-Wavelet

13. Was ist der Unterschied zwischen der Fourierreihe und dem Spektrum eines periodischen Signals?
    → Fourierreihe ist die Annäherung an Zielsignal. Das ist kontinuierlich. Das Spektrum aber bei einem periodischen Signal ist diskret. (Meine ersten Überlegungen)
    → Fourierreihe und Spektrum sind bei periodischen Signalen dasselbe

14. Was ist die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses?
    → Auch Siebeigenschaft genannt
    → Integral von -unendlich bis unendlich (δ(t) · f (t) dt) = f (0)
    → Ein Dirac-Impuls blendet alle Werte eines Signals f(t) aus. D.h. er setzt alle auf 0 mit Ausnahme des Wertes f(t) an tIntegral[-Uneendlich bis Unendlich] Delta(t) * f(t) dt = f(0)

    $$- \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) * f(t)\, dt = f(0)$$

15. Bei dem Spektrum eines Signals ist der Realteil gerade und der Imaginärteil ungerade. Um was für einen Signaltyp handelt es sich?
    → reelles Signal → die Fouriertransformierte ist symmetrisch zum Ursprung (hermetisch)
    → Reelles Signal (Vorlesung 10, Folie 13)

16. Die Fouriertransformierte von f_1(t) sei F_1(ω), die Fouriertransformierte von f_2(t) sei F_2(ω). Wie sieht die Fouriertransformierte von f(t) = 3 f_1(t) - 0.7 f_2(t) aus, und welche Eigenschaft macht man sich dabei zunutze?
    ->Linearitätseigenschaft: F(w) = 3 * F_1(w) - 0.7 * F_2(w)

17. Was passiert mit dem Spektrum eines Signals, wenn man es in zeitlicher Richtung verschiebt?
    → Eine Verschiebung in der Zeitdomäne führt zu einer Multiplikation mit einem

Phasenfaktor in der Frequenzdomäne.

➜ Bei einer Verschiebung bleibt der Betrag der Fouriertransformierten unverändert, nur die Phase ändert sich.

$$f(t-a) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-i\omega a} \cdot F(\omega)$$

➜ Der Betrag der Fouriertransformierten bleibt bei einer Verschiebung unverändert, nur die Phase ändert sich ➜ Verschiebungssätze

18. Wie sieht das Spektrum eines Signals aus, das um den Faktor 2 im Zeitbereich gestreckt wird?

    ➜ Eine Streckung (Stauchung) der Zeitachse bewirkt eine Stauchung (Streckung) der Frequenzachse

    ➜ Das Spektrum wird enger und höher.

19. Was passiert mit dem Spektrum eines Signals, wenn man es mit einem konstanten Phasenfaktor mit dem Phasenwinkel a multipliziert?

    ➜ Das Spektrum wird verschoben

    ➜ Das Spektrum verschiebt sich um den Betrag a

20. Was ist das Gibbs-Phänomen?

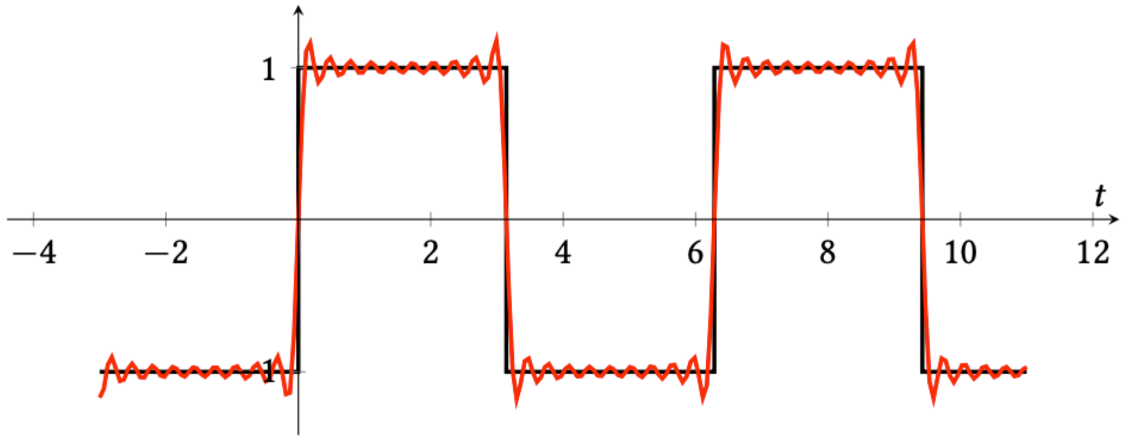
    ➜ Nahe der Unstetigkeitsstellen entstehen sogenannte Gibbsche Über- und Unterschwinger, deren Amplitude (bei Rechteckwelle 9%) nicht kleiner wird, egal wie viele Terme man zur Fourierreihe hinzunimmt.

    ➜ Die Gibbschen Über- und Unterschwinger verschwinden erst, wenn unendlich viele Terme in der Fourierreihe sind.

    ➜ An den Unstetigkeitsstellen selbst konvergiert die Reihe zum Halbwert der Unstetigkeit.

    ➜ Gibbs-Phänomen: der maximale Abstand zwischen endlichen Fourierreihen und Zielsignal konvergiert bei unstetigen Signalen nicht.

Näherung der Rechteckwelle durch Fourierreihe mit 10 Harmonischen



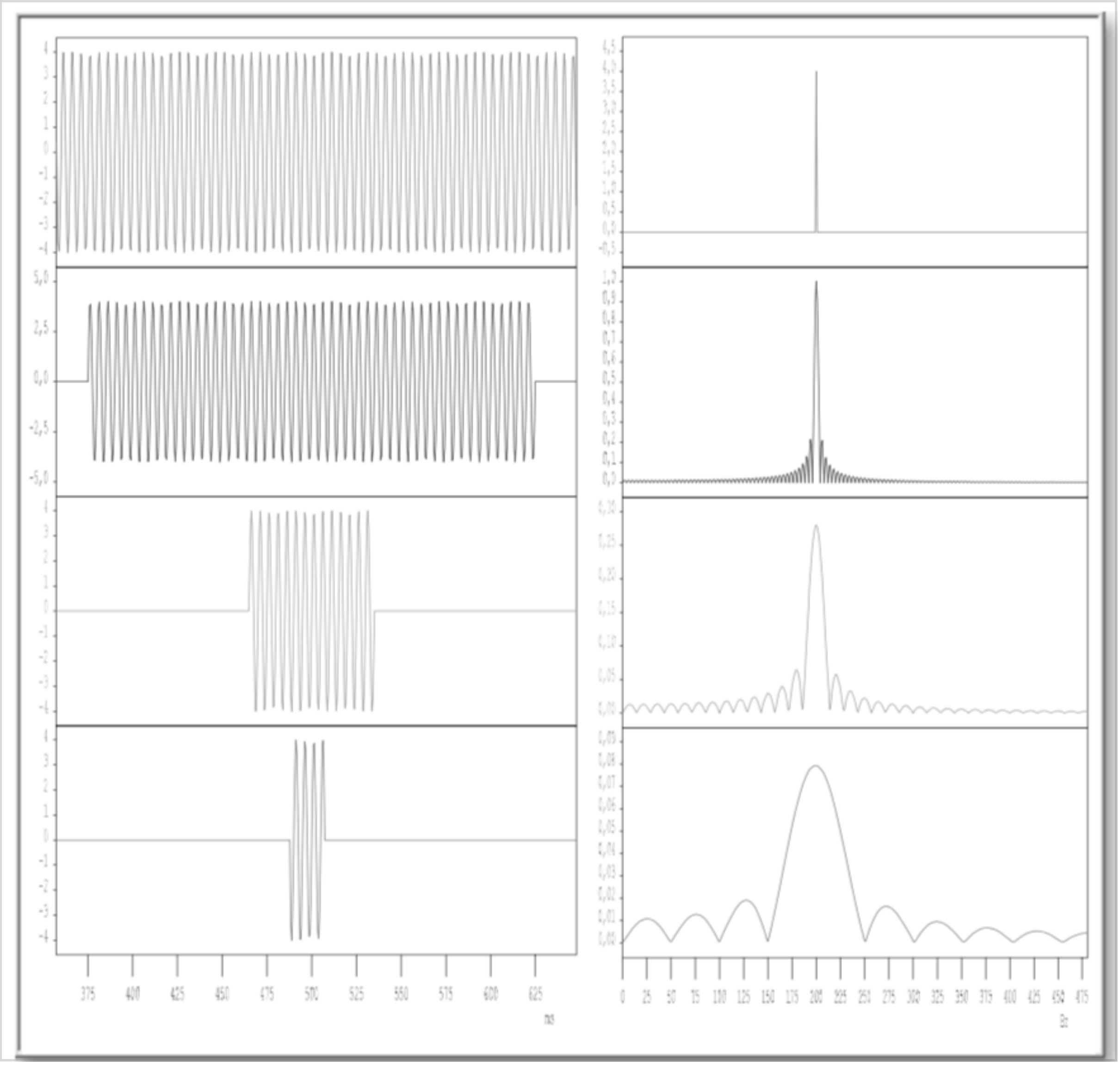
$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)t$$

➜ Obwohl endliche Fourierreihen gegen eine unstetige Funktion konvergieren, verringert sich der maximale Abstand zwischen endlicher Fourierreihe und der Zielfunktion nicht.

21. Was ist ein Burst-Signal?

➜ Ein Schwingungsimpuls aus einer ganz bestimmten Zahl von Sinusperioden wird Burst-Signal genannt. Ein Burst ist also ein zeitlicher Ausschnitt aus einer (periodischen) Sinus-Schwingung.

Zeitliche Eingrenzung bedeutet Ausweitung des Frequenzbandes. (Buch Seite 67)



➡ Seltsamerweise wird das Spektrum mit zunehmender Bandbreite scheinbar immer unsymmetrischer (siehe unten). Ferner wandert das Maximum immer weiter nach links! Auf die Gründe kommen wir noch im Kapitel 5 zu sprechen. Fazit: Es besteht aller Grund, von einer Unschärfe zu sprechen.

22. Was ist einen Filter?

➡ Filter sind signaltechnische Bausteine, die Frequenzen – also bestimmte Sinus-Schwingungen – innerhalb eines Frequenzbereichs durchlassen (Durchlassbereich), sonst sperren (Sperrbereich). Sollen bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz nur die tiefen Frequenzen durchgelassen werden, so spricht man von einem Tiefpass. (Buch Seite 70)

➡ Aufgrund des UP kann es keinen idealen Filter mit „rechteckigem" Durchlassbereich geben!

23. Was ist die Impulsantwort?

➡ Reaktion des Tiefpasses auf einen δ-Impuls.

24. Was ist GAUSS-Windowing?

➜ Ein langes, nichtperiodische Signal wird in einzelne Zeitabschnitte zerlegt. Dieses sogenannte „Windowing" geschieht hier jedoch mithilfe eines entsprechend zeitversetzten GAUSS–Fensters. Dadurch beginnen und enden die Teilabschnitte sanft. Im Gegensatz zu Abb. 51 ist nunmehr der Frequenz- bereich der Zeitabschnitte nicht mehr größer als der Frequenzbereich des Gesamtsignals. (Buch Seite 77)

➜ Mathematisch entspricht das „Ausschneiden" des Teilbereiches der Multiplikation mit der jeweiligen Fensterfunktion.

➜ Windowing: das Signal wird in aufeinanderfolgende, o überlappende Fenster zerlegt. In diesen Fenstern wird eine lokale Fourieranalyse durchgeführt. Damit lässt sich der zeitliche Verlauf des Spektrums verfolgen bzw. durch Mielung das Gesamtspektrum ermieln.

25. Was ist ein fastperiodisches Signal?

Fastperiodische Signale wiederholen sich über einen bestimmten Zeitraum in gleicher oder in ähnlicher Weise.

Gesamtdauer, desto unschärfer die Linie. Nach der Unschärferelation gilt für die Linienbreite

$$\sigma_\omega \geq \frac{1}{\sigma_t}.$$

26. Was ist ein quasiperiodisches Signal?

➜ Nun gibt es jedoch in der Praxis Signale, die ein linienähnliches Spektrum besitzen, deren „unscharfe" Linien jedoch z.T. nicht als ganzzahliges Vielfaches einer Grundfrequenz interpretiert werden können. Sie werden hier als quasiperiodisch definiert.

27. Unterschied fastperiodisch vs. quasiperiodisch?

➜ Wie Sie leicht feststellen können, sind zunächst nicht alle Linien die ganzzahlig Vielfachen einer Grundfrequenz. Das Signal ist also nicht fastperiodisch. Wir bezeichnen diesen Fall deshalb als quasiperiodisch. (Buch Seite 84)

28. Was ist eine Fensterfunktion?

➜ Durch Fensterfunktionen werden die Nachteile des naiven Windowing vermieden. Allerdings wird dadurch das originale Spektrum gegläet und damit die Auflösung verringert.

➜ Hier kommt wieder die Unschärferelation ins Spiel: je breiter die Fensterfunktion, desto höher die Frequenzauflösung, aber desto geringer die zeitliche Auflösung.

29. Sie haben zwei fastperiodische Signale:1. Ein Klarinettenton mit einer Dauer von 500 ms2. Ein Klarinettenton gleicher Tonhöher und Lautstärke, aber mit einer Dauer von 1Wie unterscheiden sich die Spektren beider Signale?
➡ Die beiden Spektren der Signale unterscheiden sich nicht, da in beiden Signale Tonhöhe und Lautstärke gleich sind

30. Sie beobachten ein periodisches Signal mit einer Grundfrequenz von 500 Hz. Ist es prinzipiell möglich, dass im Spektrum dieses Signals eine Fourierkomponente von 750 Hz vorkommt?
➡ Nein, denn in einem periodischen Signal dürfen nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz vorkommen.

31. Sie möchten die Frequenz eines Signals der Dauer von 10s messen. Welche Aussage zur Messgenauigkeit ist richtig?
➡ Grundsätzlich gilt: Je länger gemessen wird, desto höher ist die Frequenzauflösung. Deshalb bringt eine Messdauer größer als 10s eine weitere Erhöhung der Messgenauigkeit.

32. Welche Fläche hat ein Dirac Impuls?
➡ Fläche = 1

33. Was ist Filterung?
➡ Bei vielen Anwendungen möchte man die relativen Amplituden der Frequenzkomponenten in einem Signal verändern oder einige ganz ausschalten.

34. Sie beobachten ein Spektrum, das aus mehreren, unscharfen Linien an den Frequenzen 440 Hz, 880 Hz und 4400 Hz besteht. Um was für einen Signaltyp handelt es sich?
➡ Fastperiodisches Signal, da die zwischenschritte von 880 Hz bis 4400 Hz fehlen.

35. Was passiert mit dem Spektrum eines Signals, wenn man das Signal mit einem konstanten Faktor multipliziert?
➡ Das Spektrum wird ebenfalls mit dem gleichen Faktor multipliziert.

36. Betrachten Sie die periodische Funktion $x(t) = 2/t$ mit $0 < t <= 1$ und der Grundperiode 1 (d.h. Intervall [0, 1] wird unendlich oft wiederholt).Gibt es für diese Funktion eine Darstellung als Fourierreihe?Warum?
➡ Es gibt keine Fourierreihe, da das Signal nicht absolut integrierbar ist

Wichtige Sachen:

Je steiler der Kurvenverlauf im Zeitbereich Δt bzw. innerhalb des Frequenzbandes Δf, desto ausgedehnter und ausgeprägter ist das Frequenzspektrum Δf bzw. die Zeitdauer Δt .

Zeitliche bzw. frequenzmäßige sprunghafte Übergänge erzeugen immer weit ausgedehnte „Einschwingvorgänge" im komplementären Frequenz- bzw. Zeitbereich.

➡ Die höchste Frequenz im Spektrum vorkommende Frequenz bestimmt ja auch, wie schnell sich das Summensignal überhaupt ändern kann.

Periodische Signale besitzen ein *Linienspektrum*. Der Abstand dieser Linien ist immer ein ganzzahlig Vielfaches der Grundfrequenz $f = 1/T$.

*Nicht*periodische, z. B. einmalige Signale besitzen ein *kontinuierliches* Spektrum, d. h. zu jeder Frequenz gibt es auch in der winzigsten, unmittelbaren Nachbarschaft weitere Frequenzen. Sie liegen „dicht bei dicht"!

Ist bei einem einmaligen Signal die Messdauer größer als die Signaldauer, so bestimmt ausschließlich die ***Signaldauer*** *die frequenzmäßige Auflösung.*

Bei der frequenzmäßigen Analyse lang andauernder nichtperiodischer Signale – z. B. Sprache – werden diese in mehrere Abschnitte unterteilt. Die frequenzmäßige Analyse wird dann von jedem einzelnen Abschnitt gemacht.

Diese Abschnitte müssen sanft beginnen und enden sowie sich gegenseitig überlappen, um möglichst wenig von der im Signal enthaltenen Information zu verlieren.

Je größer die Zeitdauer Δt des Zeitfensters (Window) gewählt wird, desto präziser lassen sich die Frequenzen ermitteln bzw. desto größer ist die frequenzmäßige Auflösung!

Alle Signale, die „linienähnliche“ (kontinuierliche) Spektren besitzen und in denen diese „unscharfen“ Linien auch als ganzzahliges Vielfaches einer Grundfrequenz interpretiert werden können, werden hier als ***fastperiodisch*** *definiert.*

Jeder gleichmäßige Ton/Klang, der mindestens 1 s dauert, liefert bereits ein praktisch periodisches Spektrum! Jedes praktisch periodische Spektrum entspricht akustisch einem in der Tonhöhe eindeutig identifizierbaren Ton/Klang, der mindestens 1 s dauert.

- Bei einem *reinen Ton* ist lediglich eine einzige Frequenz zu hören. Es handelt sich also um eine *sinusförmige* Druckschwankung, die das Ohr wahrnimmt.

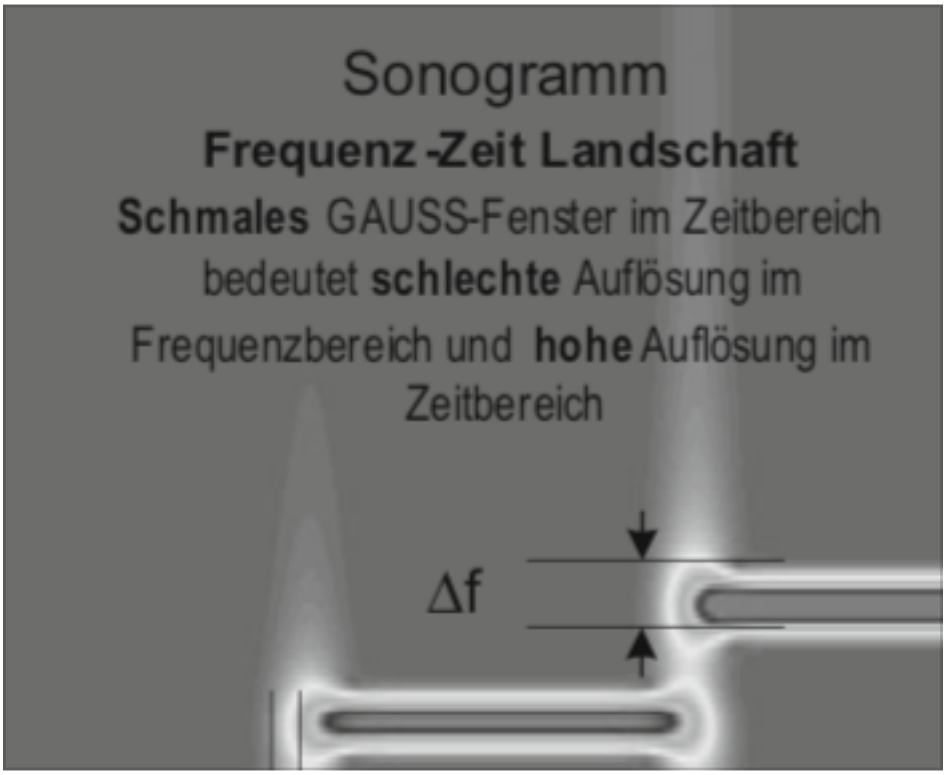
- Bei einem *Ton* lässt sich eindeutig die *Tonhöhe* bestimmen. Ein Geigenton enthält hörbar mehrere Frequenzen, die tiefste wahrnehmbare Frequenz ist der *Grundton* und gibt die Tonhöhe an. Die anderen werden *Obertöne* genannt und sind bei fastperiodischen akustischen Signalen ganzzahlig Vielfache der Grundfrequenz.

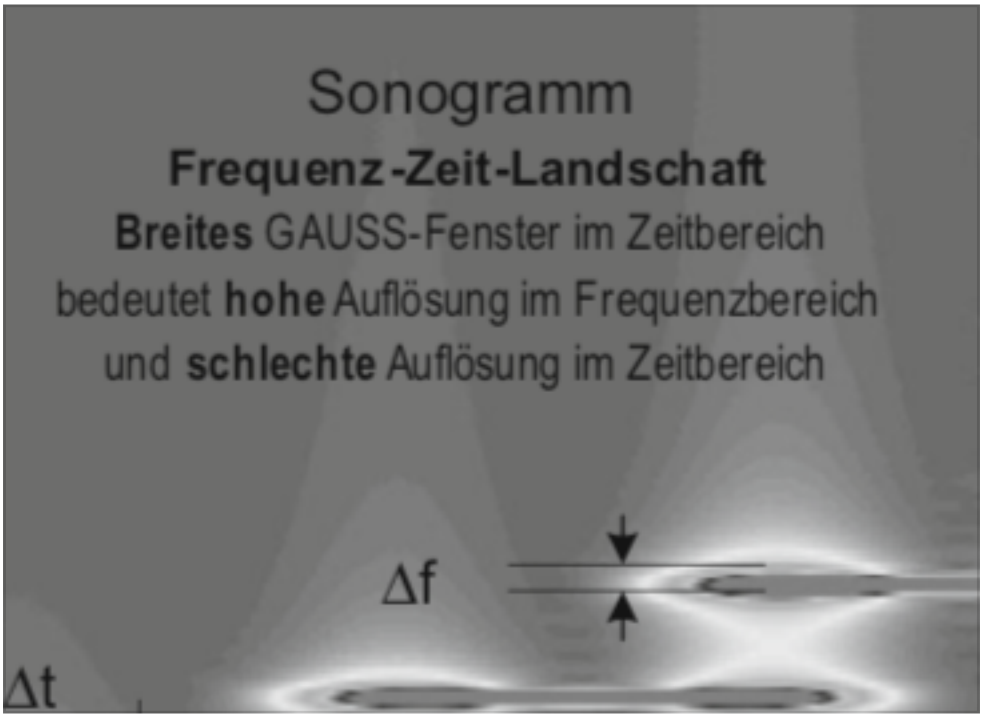
- Ein *Klang* – z. B. der Akkord eines Pianos – besteht durchweg aus mehreren Tönen. Hier lässt sich dann nicht eine einzige Tonhöhe bzw. eine eindeutige Tonhöhe ermitteln.

- Jedes Instrument und auch jeder Sprecher besitzt eine bestimmte *Klangfarbe*. Sie wird geprägt durch die in den (sich überlagernden) Tönen enthaltenen Obertöne.

Wird also ein ***kurzes*** *Zeitfenster gewählt, lässt sich relativ* ***genau*** *zeitlich lokalisieren, wann ein relativ* ***breites*** *Band benachbarter Frequenzen real wahrnehmbar war und sich nicht durch Interferenz gegenseitig auslöschte.*

Wird demgegenüber ein ***längeres*** *Zeitfenster gewählt, lässt sich relativ ungenau zeitlich lokalisieren, wann ein relativ* ***schmales*** *Band benachbarter Frequenzen real wahrnehmbar war und sich nicht durch Interferenz gegenseitig auslöschte.*





Ziel der STFFT ist es, nähere Informationen darüber zu erhalten, welche Frequenzbänder zu welchen Zeitabschnitten existieren.

Für alle zu analysierenden Frequenzen wird durch Skalierung das Fenster so breit gemacht, dass die gleiche Anzahl von Perioden jeweils das Fenster ausfüllen.

Noch einfacher: Breites Fenster bei tieferen und schmales Fenster bei höheren Frequenzen, damit stets annähernd fast-periodische Signale mit vergleichbarer Unschärfe im Zeit- und Frequenzbereich analysiert werden.

Durch die Wavelet–Transformation wird es möglich, das Unschärfe–Phänomen nicht nur auf die Zeit–Frequenz–Problematik, sondern auch auf andere Muster auszudehnen, die im Mutter–Wavelet enthalten sind, z. B. Sprünge und Unstetigkeiten. Sie ist darauf spezialisiert, beliebige Formen der ***Veränderung*** *effizienter zu analysieren, auszufiltern und abzuspeichern.*

Das Unschärfe–Prinzip gilt unveränderlich auch bei der Wavelet–Transformation. Durch die geeignete Musterwahl für das Mutter–Wavelet und die geschickte Skalierung ist eine präzisere messtechnische Analyse möglich, ***wann*** *bzw.* ***wo*** *in einem Signal bestimmte Frequenzbänder – die immer auf eine zeitliche oder lokale Änderung (z. B. bei Bildern) hinweisen – vorhanden sind.*

Vorlesung 8: 4, 20, 5, 13,1, 2, 3

Vorlesung 9: 7, 9, 11, 21