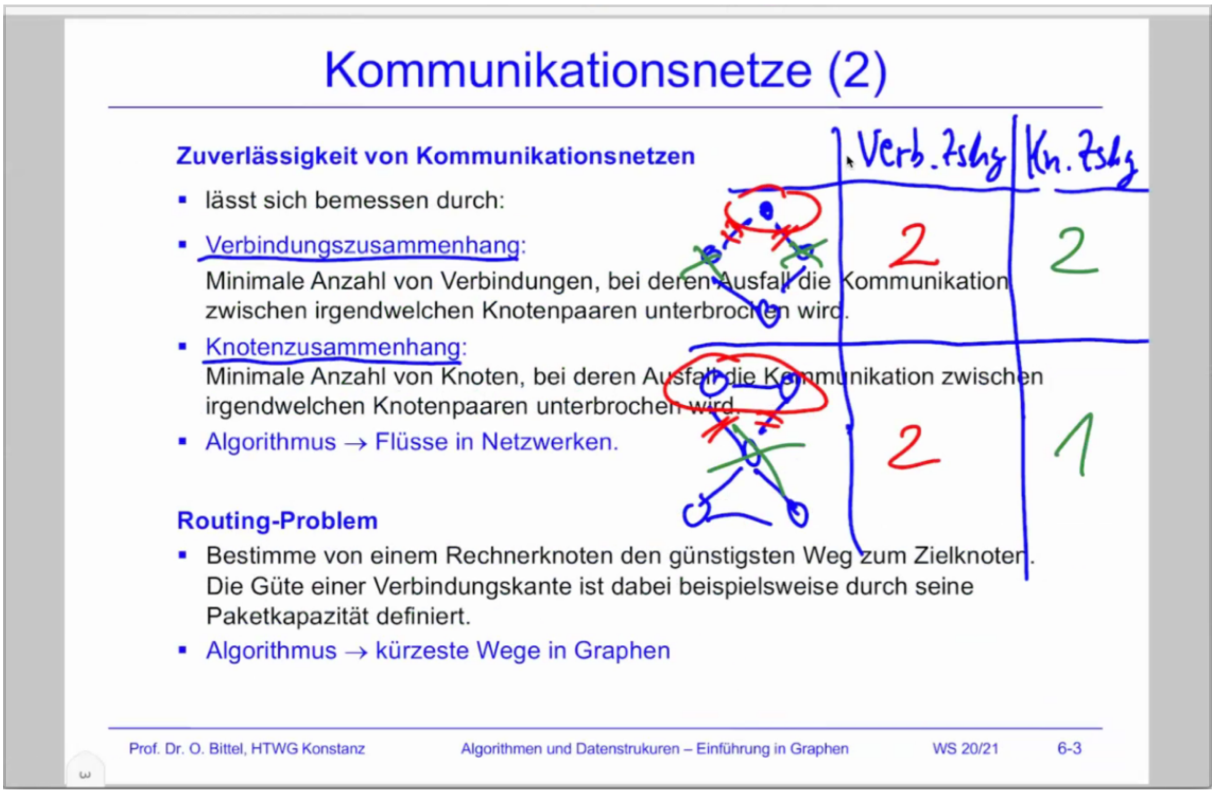
#uni/semester3/alda/vorlesung5

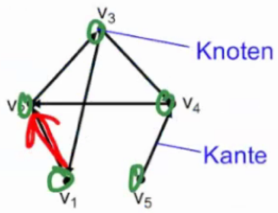
Skript 6 Einführung in Graphen



Gerichteter Graph

- Ein gerichteter Graph G = (V, E) besteht aus einer Menge V von Knoten (engl. vertices) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (engl. edges).
- Eine Kante ist ein geordnetes Paar von Knoten (v,w).
- Die Kanten sind gerichtet: die Kante (v,w) geht von Knoten v nach Knoten w. In den graphischen Darstellungen werden Pfeile verwendet.
- Kanten der Form (v,v) heißen Schlingen.
- Gerichtete Graphen werden auch Digraphen genannt.

(v,v)

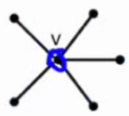


$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

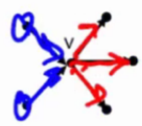
$E = \{ (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_1), (v_3,v_4), (v_4,v_2), (v_5,v_4) \}$

Grad

- In einem ungerichteten Graphen ist der Grad eines Knoten die Anzahl seiner Nachbarn.
- Bei einem gerichteten Graphen wird die Anzahl der Vorgänger Eingangsgrad und die Anzahl der Nachfolger Ausgangsgrad genannt.



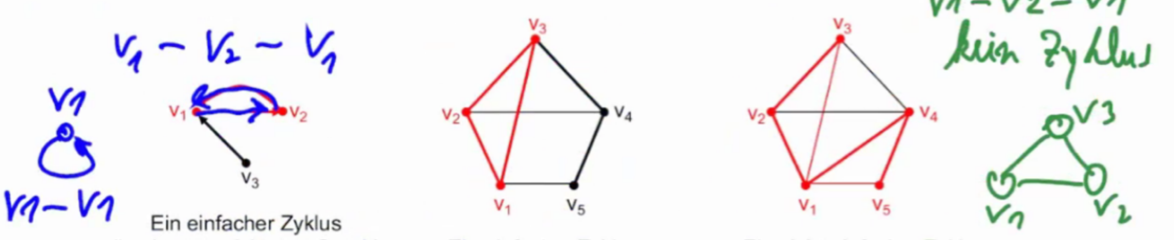
Der Grad von v ist damit 5.



Der Eingangsgrad von v ist 2 und der Ausgangsgrad 3.

Zyklus

- Ein Weg $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in einem gerichteten Graph heisst Zyklus (cycle), falls Anfangsknoten v_1 und Endknoten v_n identisch sind und $n \geq 2$ ist (d.h. wenigstens eine Kante).
- Ein Weg $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in einem ungerichteten Graph heisst Zyklus (cycle), falls Anfangsknoten v_1 und Endknoten v_n identisch sind, $n \geq 4$ ist (d.h. wenigstens drei Kanten) und alle Kanten unterschiedlich sind.
- Zwei Zyklen sind gleich, falls sich ihre Wege (jeweils ohne Endknoten) durch eine zyklische Verschiebung unterscheiden.
- Zyklenfreie Graphen werden auch azyklisch (acyclic graph) genannt.



Ein einfacher Zyklus (in einem gerichteten Graph) der Länge 2: v_1, v_2, v_1

Ein einfacher Zyklus der Länge 3: v_1, v_2, v_3, v_1

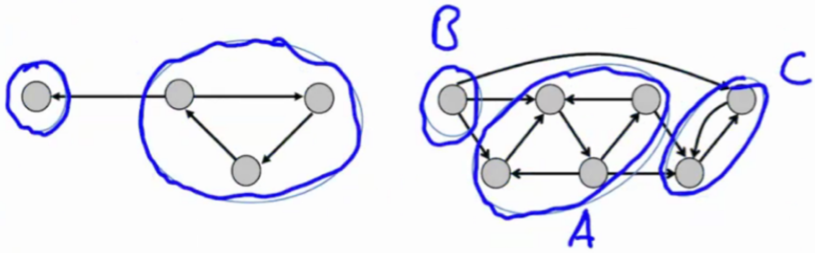
Ein nicht-einfacher Zyklus der Länge 6: $v_1, v_2, v_3, v_1, v_5, v_4, v_1$

V1–V2–V3–V1

➜ Beim ungerichtet muss die Anzahl der Knoten >= 4, weil sonst würde es immer ein Zyklus geben, und somit wäre ein Zyklus sinnlos sein.

Zusammenhangskomponenten bei gerichteten Graphen

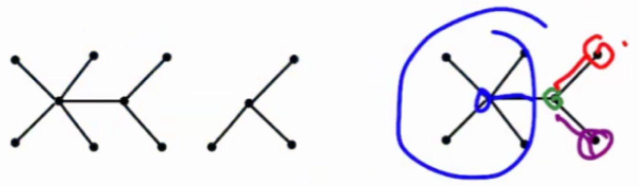
- Eine starke bzw. schwache Zusammenhangskomponente eines gerichteten Graphen G ist ein maximal stark bzw. schwach zusammenhängender Teilgraph.



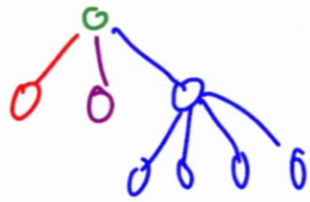
Gerichtete Graphen mit ihren starken Zusammenhangskomponenten.

Wald und Baum

- Ein ungerichteter und azyklischer Graph heißt auch Wald.
- Ein zusammenhängender Wald heißt auch Baum.

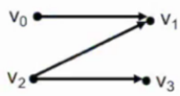


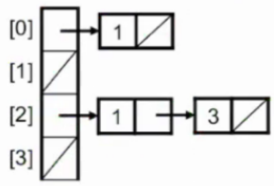
Wald Baum



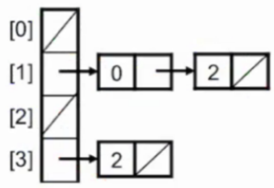
Adjazenzliste bei gerichteten Graphen

- Bei einem gerichteten Graphen werden zwei getrennte Listen verwaltet: eine Vorgänger-Liste und eine Nachfolger-Liste.





Nachfolger
~~Vorgänger~~-Liste



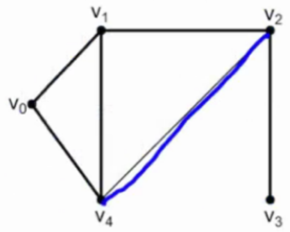
Vorgänger
~~Nachfolger~~-Liste

Kantenliste

- Speichere die Menge aller Kanten in einer sortierten Suchstruktur (sortiertes Feld oder Suchbaum).
- Aus einer linearen Ordnung für Knoten ergibt sich eine lineare Ordnung für Kanten:

  $(v, v') \le (w, w')$ falls $v < w$ oder $v = w$ und $v' \le w'$

- Beispiel: sortiertes Kanten-Feld



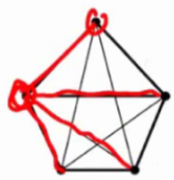
	[0]	[1]	[2]	…								[11]
i	0	0	1	1	1	2	2	2	3	4	4	4
j	1	4	0	2	4	1	3	4	2	0	1	2

Alle Nachbarknoten zu v_2 sind effizient auffindbar.

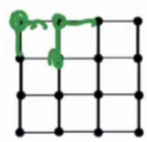
- Bei einem ungerichten Graphen wird für eine Kante von v nach w sowohl (v,w) als auch (w,v) gespeichert.
- Bei einem gerichteten Graphen wird die Kantenliste in Vorgänger- und Nachfolger-Liste aufgeteilt.

Dünn- und dichtbesetzte Graphen

- Falls $|E| = O(|V|)$ (dünnbesetzter Graph; sparse graph), dann ist die Speicherung als Adjazenzliste oder Kantenliste Speicherplatz sparender und effizienter in der Laufzeit.
- Falls $|E| = O(|V|^2)$ (dichtbesetzter Graph; dense graph), dann ist die Speicherung als Adjazenzmatrix Speicherplatz sparender und effizienter in der Laufzeit.



$|V| = 5$
$|E| = 10$



- Vollständiger Graph (alle Knotenpaare sind durch eine Kante verbunden) ist dichtbesetzt.
- Es gilt: $|E| = |V|*(|V|-1)/2 = O(|V|^2)$.
- Manhattan-Graph (Graph für Mahattan mit Kreuzungen als Knoten und Strassen als Kanten) ist dünnbesetzt.
- Es gilt: $|E| \approx 2*|V| = O(|V|)$.

$|V|$ = Anz. Knoten ; $|E|$ = Anz. Kanten

➡ Internet ist anscheinend dünnbesetzt!

➡ Straßenkarte mit Kanten als Autobahnen. Das ist auch dünnbesetzt, da Stuttgart z. B. nicht mit ganzem Deutschland verbunden ist.