Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №1.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sin x_1 - \dfrac{1}{6}x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1000 - 3x(t) - 1000y^2(t) + 10z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

V. Простейшая модель эпидемии Кермака-Маккендрика описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -N_1(t)N_2(t), \\ \dot{N}_2(t) = -\alpha N_2(t)(1 - N_1(t)), \\ \dot{N}_3(t) = \alpha N_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – мера невосприимчивости к данному вирусу (иммунитет); α – положительный параметр. Число людей, которые заражаются повторно, пропорционально величине $N_1(t)N_2(t)$.

1. Найти положения равновесия системы (1).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (1).

3. Построить фазовые портреты системы (1) для разных начальных условий.

4. Установить бифуркационные значения параметра α для $N_2(t)$ и $N_3(t)$.

VI. Г. И. Марчук предложил модель, которая описывает борьбу вирусов $N_1(t)$, антител $N_2(t)$, и плазматических клеток $N_3(t)$ в человеческом организме, зараженном вирусной инфекцией. Мера зараженности определяется переменной величиной $m(t)$. Модель Марчука описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon - \gamma N_2(t))N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = \rho N_3(t) - (\mu + \nu\gamma N_1(t))N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = \alpha N_1(t)N_2(t) - N_3(t)(N_3 - N_3^*) \\ \dot{m}(t) = \sigma N_1 - \mu m(t). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\epsilon = 2$, $\gamma = 0.8$, $\rho = 0.17$, $\mu = 0.5$, $\nu\gamma = 8$; $\alpha = 10^4$, если $m \leq 0.1$; $\alpha = 10^5 \cdot (1-m)/9$, если $0.1 \leq m \leq 1$; $\sigma > 0$.

1. Найти положения равновесия системы (2).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (2).

3. Построить фазовые портреты системы (2) для разных начальных условий.

4. Установить бифуркационные значения параметра σ для $N_3(t)$.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №2.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 - x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2000 - 4x(t) - 10y^2(t) + 10z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_1x_2 + x_3^3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

V. Колебательные процессы в химических средах наиболее просто описываются с помощью реакции Белоусова-Жаботинского. Система уравнений такой реакции имеет вид

$$\begin{cases} \epsilon\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - x(t)y(t) - qx^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2fz(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - z(t). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ концентрации веществ в смеси; ϵ, q, f –положительные параметры, причем $0 < \epsilon << 1$.

1. Найти положения равновесия системы (3).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (3).

3. Построить фазовые портреты системы (3) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (3) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t)(x(t) - L)\frac{K - x(t)}{K} - \gamma x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -\epsilon y(t) + k\gamma x(t)y(t), \end{cases} \tag{4}$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы, $y(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $k < 1$ – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника; ϵ, γ, a – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (4).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (4).

3. Построить фазовые портреты системы (4) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (4) возникают периодичесие решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №3.

I.Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + kx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - 2x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2 + 2x_n - 3, n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 30000 - 5x(t) - 300y^2(t) + 0z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 12z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -12y(t) + z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \epsilon N_1(t) - \alpha N_1(t) - \frac{\gamma N_1(t) N_2(t)}{1+\rho N_1(t)}, \\ \dot{N}_2(t) = m - \frac{bN_2(t)}{1+\lambda N_1(t)}, \end{cases} \tag{5}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертвы, $N_2(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $\rho = \lambda$, $b = 1$; $\epsilon, \gamma, \alpha, m$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (5).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (5).

3. Построить фазовые портреты системы (5) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (5) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \quad (6)$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (6).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (6).

3. Построить фазовые портреты системы (6) для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №4.

I.Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - kx_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу.(Предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.)

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 3\alpha, n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2000 - 3x(t) - 300y^2(t) - 10000z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + 2z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 2x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \quad (7)$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (7).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (7).

3. Построить фазовые портреты системы (7) для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим модель взаимодействия трех популяций с учетом гистерезисных явлений. Здесь развитие второй популяции начинается только после достижения первой популяцией некоторого критического уровня; аналогично для третьей популяции.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1\Big(1 - \dfrac{x}{K_1}\Big)x - b_{11}\dfrac{xy}{K_1} - b_{12}\dfrac{xz}{K_1}, \\ \\ \dot{y}(t) = r_2\Big(1 - \Big(\dfrac{2y - K_2 - C_2}{K_2 - C_2}\Big)^2\Big)y + b_{21}\dfrac{xy}{K_2} - b_{23}\dfrac{yz}{K_2}, \\ \\ \dot{z}(t) = r_3\Big(1 - \Big(\dfrac{2z - K_3 - C_3}{K_3 - C_3}\Big)^2\Big)z + b_{32}\dfrac{xz}{K_3} + b_{33}\dfrac{yz}{K_3}. \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем предполагается, что все 14 коэффициентов этой системы r_1, $b_{11}, b_{12}, K_1, ..., b_{33}$ – неотрицательны и $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$, $K_2 \neq C_2$, $K_3 \neq C_3$.

1. Найти положения равновесия системы (8).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (8).

3. Построить фазовые портреты системы (8) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (8) возникают периодические решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №5.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 9x_1(t) + 22x_2(t) - 6x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 8x_1(t) + 16x_2(t) - 5x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha - x_n^3 + x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2000 - 1x(t) + 300y^2(t) - 10000z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (4)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + z(t) + x(t)(-(4)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 6x_3 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1 - x_2^2 - 2x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Одна из моделей модель контактного механизма передачи инфекции такова:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha v_1 N_1(t) N_3(t) - b v_1 N_1(t) + q N_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha v_1 N_1(t) N_3(t) + b v_1 N_1(t) - \beta N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - p N_3(t), \\ \dot{N}_4(t) = p N_3(t) - q N_4(t), \\ \dot{v}(t) = (c N_2(t) - m N_4(t)) v(t). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – доля больных; $N_4(t)$ – доля выздоровевших; v – активность возбудителя. $N_1(t) + ... + N_4(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (9).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (9).

3. Построить фазовые портреты системы (9) для переменных N_1, N_2, N_3 для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель предэпидемической циркуляции:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\alpha KVN(t)N_1(t) + \beta N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = \alpha KVN(t)N_1(t) - \beta N_1(t), \\ \dot{n}(t) = (cN(t) - mV(t) - pn(t))n(t), \\ \dot{V}(t) = (c_1N(t) - m_1V(t) - p_1n(t))V(t). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $N(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_1(t)$ – доля носителей вируса; $n(t)$ – плотность вирусов в воздухе; $V(t)$ – активность вирусов; $N(t) + N_1(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (10).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (10).

3. Построить фазовые портреты системы (10) для переменных N, N_1 для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №6.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t) - 3x_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n^4 - \alpha x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2000 - 6x(t) - 100y^2(t) - 1000z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 3y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + 3z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -3x_1 + 4x_1^2x_2x_3 + x_3^2 - x_2 \\ x_1^3 - x_2^2 - 2x_1^4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V.Рассмотрим следующую модель эпидемии с плотностнозависимым коэффициентом смертности:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = rN(t) - \beta X(t)Y(t) - f(N)X(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t)Y(t) - f(N)Y(t) - (\gamma + \alpha)Y(t), \\ \dot{Z}(t) = \gamma Y(t) - f(N)Z(t), \\ \dot{N}(t) = rN(t) - f(N)N(t) - \alpha Y(t). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $X(t)$ – число здоровых людей на момент времени t, потенциально подверженных заболеванию; $Y(t)$ – число больных людей; $Z(t)$ – число людей, приобретших иммунитет; функция $f(N) = const$ – коэффициент смертности, не связанный с заболеванием; r – коэффициент рождаемости; β – коэффициент передачи инфекции; α – коэффициент смертности, связанный с заболеванием; $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$. Все параметры $r, ..., \alpha$ имеют некоторые постоянные положительные значения.

1. Найти положения равновесия системы (11).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (11).

3. Построить фазовые портреты системы (11) для переменных $X(t), Y(t)$, $Z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Модель абстрактной изотермической химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) - cx(t)y(t) - \frac{dz(t)x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = e + fx^2(t) - gy(t) - \frac{hx(t)y(t)}{y(t)+K_2}, \\ \dot{z}(t) = j + kxz(t) - lz(t). \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $a, b, ..., m, l$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (12).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (12).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной z как функцию от l.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №7.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2 - \alpha x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III.Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4000 - 0x(t) - 10000y^2(t) - 0z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 10z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -10y(t) + z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_1^2x_2 + 5x_3 - x_2^2 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим следующую модель формирования внутриэтнических отношений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha KVN_1(t)N_2(t) + \beta N_2(t) + qN_3(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha KVN_1(t)N_2(t) - (\beta + b)N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = bN_2(t) - qN_3(t), \\ \dot{V}(t) = (c_0 + c_1KN_1(t) - m(N_2(t) + N_3(t))V(t). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к данной этнокультуре; $N_2(t)$ – доля активно поддерживающих этнокультуру; $N_3(t)$ – число противников этнокультуры; $V(t)$ – уровень этноцентризма; $N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c_0, c_1, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (13).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (13).

3. Построить фазовые портреты системы (13) для переменных $N_1(t), N_2(t)$, $N_3(t)$ для разных начальных условий.

VI. Формирование феномена субкультуры. Рассмотрим следующую динамическую модель (миф-массовое сознание):

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha KVN_1(t)N_3(t) + \delta KN_2(t) - bV(t)N_1(t) + qN_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha KVN_1(t)N_3(t) - \delta KN_2(t) - \beta N_2(t) + bV(t)N_1(t) - dV(t)N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - pN_3(t) + dV(t)N_2(t), \\ \dot{N}_4(t) = pN_3(t) - qN_4(t), \\ \dot{V}(t) = (c_0 + c_1 KN_1(t) - mN_3(t))V(t). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к данной субкультуре; $N_2(t)$ – доля активно поддерживающих субкультуру; $N_3(t)$ – доля сторонников субкультуры, выходящих из под ее влияния; $N_4(t)$ – число противников субкультуры; $V(t)$ – яркость мифа; $N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) + N_4(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c_0, c_1, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (14).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (14).

3. Построить фазовые портреты системы (14) для переменных $N_1(t), N_2(t)$, $N_3(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_3 как функцию от параметра p.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №8.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6\sin x_1 + x_1^2 + x_2^2, \\ \dot{x}_2(t) = \exp x_1 - 1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 1 + \alpha x_n^2 - 3\alpha x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4000 - 7x(t) - 1000y^2(t) - 0z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2z(t) + x(t)(y(t) + (3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -2y(t) + z(t) + x(t)(-(3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2 x_2 + x_3^2 - x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модельную экосистему, состоящую из двух трофических уровней (растительность-травоядные животные). Эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_0(t) = Q - \alpha_0 N_0(t) N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = N_1(t) \cdot (k_0 \alpha_0 N_0(t) - \alpha_1 N_2(t) - m_1), \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t) \cdot (k_1 \alpha_1 N_1(t) - m_2). \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $N_0(t), N_1(t), N_2(t)$ – биомассы соответствующих уровней; Q – скорость поступления внешнего ресурса; $\alpha_0, ..., k_1, m_2$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (15).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (15).

3. Построить фазовые портреты системы (15) для переменных $N_0(t), N_1(t)$, $N_2(t)$ для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим модельную экосистему, состоящую из трех трофических уровней, описываемую следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t) \cdot (-m_1 + \alpha_0(C - N(t)) - \alpha_1 N_2(t)), \\ \dot{N}_1(t) = N_2(t) \cdot (-m_2 + \alpha_1 N_1(t) - \alpha_2 N_3(t)), \\ \dot{N}_2(t) = N_3(t) \cdot (-m_3 + \alpha_2 N_2(t)). \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ – биомассы соответствующих уровней; $N(t) = N_1(t)$ $+N_2(t) + N_3(t)$; $\alpha_0, ..., m_3$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (16).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (16).

3. Построить фазовые портреты системы (16) для переменных $N_1(t), N_2(t)$, $N_3(t)$ для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №9.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - x_2(t) + \ x_1^3(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + x_2^3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n^3 - \alpha x_n + 3, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1.23x(t) - 0.6y(t) + 0.69z(t) + y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -1.38x(t) - 1.4y(t) + 1.15z(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = -3.5x(t) - 2y(t) + 1.6z(t) + x(t)z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_1^2x_2 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1 + x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Задача охраны редкого вида. Рассмотрим модельную экосистему, состоящую из трех трофических уровней (растительность – травоядные животные – хищники), описываемую следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_0(t) = Q - \alpha_0 N_0(t) N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = N_1(t) \cdot (k_0 \alpha_0 N_0(t) - \alpha_1 N_2(t) - m_1), \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t) \cdot (k_1 \alpha_1 N_1(t) - \alpha_2 N_3(t) - m_2), \\ \dot{N}_3(t) = N_3(t) \cdot (k_2 \alpha_2 N_2(t) - -\alpha_3 N_3(t) - m_3). \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $N_0(t), N_2(t), N_3(t), N_3(t)$ – биомассы соответствующих уровней; $\alpha_0, ...,$ m_3 предполагаются положительными числами.

В этой задаче задаются желаемые диапазоны изменения численности редкого вида, а для остальных требуется найти границы изменения их численностей так, чтобы численность популяции редкого вида находилась в этих желаемых диапазонах. Редкий вид (например, хищники или растительность) выбирается произвольно.

1. Найти положения равновесия системы (17).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (17).

3. Построить фазовые портреты системы (17) для переменных $N_1(t), N_2(t),$ $N_3(t)$ для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим модель слияния компаний. Предполагается, что в результате слияния и поглощения происходит полный или частичный переход капитала от одних фирм к другим. Исходная модель выглядит так

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A + bx(t)(1 - y(t)) - x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - \gamma x(t)y(t) + cz^{\alpha}(t), \\ \dot{z}(t) = -\beta z(t) + z^{\alpha}(t). \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $x(t)$ – величина, характеризующая накопление основного капитала присоединяемыми компаниями (жертвы); $y(t)$ – величина, характеризующая накопление основного капитала компаниями поглощающими первые (хищники); $z(t)$ – величина, характеризующая накопление основного капитала компаниями, образованные соединением первых и вторых (комплексы); $0 < \alpha < 1$; A, b, c, γ, β – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (18).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (18).

3. Построить бифуркационную диаграмму зависимости стационарного значения y от b.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №10.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) - 12x_2(t) - 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I.$):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^3 (1 - x_n^2), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -5x(t) + (1.602y(t) + z(t))(y(t) - z(t)), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 28z(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - 28y(t) + 2z(t) + x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2 x_2 + x_3^2 - 3x_2 \\ x_1 + 3x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель системы саморазвивающейся рыночной экономики

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = bx(t)((1 - \sigma)z(t) - \delta y(t)), \\ \dot{y}(t) = x(t)(1 - (1 - \delta)y(t) + \sigma z(t)), \\ \dot{z}(t) = a(y(t) - dx(t)). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь приведенная $x(t)$ – переменная, описывающая движение капитала; $y(t)$ – переменная, описывающая движение платежеспособного спроса; $z(t)$ – норма прибыли. Положим $a = 7$, $b = 0.4$, $d = 1.17$.

1. Найти положения равновесия системы (19).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (19).

3. Построить бифуркационную диаграмму зависимости стационарного значения x от σ при фиксированном значении δ.

VI. Рассмотрим модель инфекции, распространяемой микропаразитами

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = m(1 - s(t)) - \beta(1 + \epsilon\cos 2\pi t)s(t)e(t), \\ \dot{e}(t) = \beta(1 + \epsilon\cos 2\pi t)s(t)e(t) - (m + a)e(t), \\ \dot{p}(t) = ae(t) - (m + g)p(t). \end{cases} \tag{20}$$

Здесь $s(t)$ – число людей восприимчивых к инфекции; $e(t)$ – число носителей инфекции (не больных); $p(t)$ – число людей, зараженных инфекцией (больных). Положим $a = 100$, $g = 35.84$, $m = 0.02$, $\beta \in [0, 3000]$, $\epsilon \in [0, 1]$.

1. Найти положения равновесия системы (20).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (20).

3. Построить бифуркационную диаграмму зависимости стационарного значения p от ϵ при фиксированном значении β.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №11.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 9x_1(t) + 22x_2(t) - 6x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 8x_1(t) + 16x_2(t) - 5x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.)

$$x_{n+1} = \alpha + \alpha x_n^2 - x_n^3, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - 10z(t)) + 20(y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 10z(t) - 20x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 10x(t) - 10y(t) + 20x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 4x_3^2 - x_2^2 \\ x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель взаимодействия детритов, входящих в некоторую экосистему, и хищников, уничтожающих эти детриты:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha - x(t) - \beta x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) - \frac{\mu y(t)z(t)}{1+y(t)}, \\ \dot{z}(t) = \frac{\mu y(t)z(t)}{1+y(t)} - \epsilon z(t). \end{cases} \tag{21}$$

Здесь $x(t)$ – плотность детритов; $y(t)$ – плотность биомассы; $z(t)$ – плотность хищников, уничтожающих детриты; α бифуркационный параметр; $\beta = 0.2$; $\gamma = 0.2$; $\mu = 0.2$; $\epsilon = 0.1$.

1. Найти положения равновесия системы (21).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (21).

3. Построить бифуркационную диаграмму зависимости стационарного значения x от α при фиксированных остальных значениях параметров.

VI. Рассмотрим следующую модель нелинейного осциллятора при внешнем гармоническом воздействии:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -2\delta y(t) - \alpha x(t) - \beta x^3(t) + B\cos z, \\ \dot{z}(t) = \omega. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь $x(t)$ – величина отклонения от положения равновесия; $y(t)$ – скорость; z – частота внешнего воздействия; $\alpha = \beta = 1.$; $\delta = 0.05$; $\omega = 1$; B – бифуркационный параметр.

1. Найти положения равновесия системы (22).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (22).

3. Построить бифуркационную диаграмму зависимости стационарного значения x от B при фиксированных остальных значениях параметров.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №12.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sin x_1 - \dfrac{1}{6}x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n^2 - 4, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 140y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) - 200z(t) - 140x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = 200y(t) + z(t) + x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 2x_3^2 \\ x_1^3 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Модель абстрактной изотермической химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) - cx(t)y(t) - \frac{(dz(t)+e)x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = f + gz(t) - hy(t) - \frac{jx(t)y(t)}{y(t)+K_2}, \\ \dot{z}(t) = k - mz(t) + lx(t)z(t). \end{cases} \tag{23}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $a, b, ..., m, l$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (23).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (23).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной z как функцию от l.

4. Построить фазовые портреты системы (23) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Модель двуступенчатого электронного генератора Чуа описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(y(t) - f(x(t))), \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t) + z(t), \\ \dot{z}(t) = -\beta y(t). \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие напряжения в цепи; $\alpha = 9$; $\beta = 14$. Положим $f(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|) + 0.5(m_1 - m_2)(|x+2| - |x-2|)$, где $m_0 = -0.3$, $m_1 = -1.2$, $m_2 = -3$.

1. Найти положения равновесия системы (24).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (24).

3. Построить фазовые портреты системы (24) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №13.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 + x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + x(t)(x(t) - 3)(5y^2(t) - z^2(t))/(1 + y^2(t) + z^2(t)), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - 14z(t) - 5(x(t) - 3)y(t), \\ \dot{z}(t) = 14y(t) + 2z(t) + 5(x(t) - 3)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -9x_1 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_2^2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель 4-х -мерной системы с высокой степенью симметрии:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) + y(t)z(t)u(t), \\ \dot{y}(t) = b(x(t) + y(t)) - x(t)z(t)u(t), \\ \dot{z}(t) = -cz(t) + x(t)y(t)u(t), \\ \dot{u}(t) = -du(t) + x(t)y(t)z(t). \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t), u(t)$ – соответствующие напряжения в цепи; $a = 50$; $b = 10$; $c = 10$; $d = 80$.

1. Найти положения равновесия системы (25).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (25).

3. Построить фазовые портреты системы (25) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от a.

VI. Модель химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k_1 + k_2 x(t) - \frac{(k_3 y(t) + k_4 z(t)) x(t)}{x(t) + K_1}, \\ \dot{y}(t) = k_5 x(t) - k_6 y(t), \\ \dot{z}(t) = k_7 x(t) - k_8 z(t) - k_9 z^2(t) - \frac{k_{10} z(t)}{z(t) + K_2}. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $k_1, k_2, ..., K_1, K_2$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (26).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (26).

3. Построить фазовые портреты системы (26) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от k_1.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №14.

I. Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + kx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - 2x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.)

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^4, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 250y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Модель химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k_1 + k_2x(t) - \frac{(k_3y(t)+k_4z(t))x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = k_5x(t) - k_6y(t), \\ \dot{z}(t) = k_7x(t) - \frac{k_8z(t)}{z(t)+K_2}. \end{cases} \tag{27}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $k_1, k_2, ..., K_1, K_2$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (27).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (27).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от k_6.

4. Построить фазовые портреты системы (27) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Модель химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k_1 + k_2 x(t) - \frac{k_3 x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = k_4 x(t) - k_5 y(t) + k_6 z(t) y^2(t), \\ \dot{z}(t) = k_7 - k_6 z(t) y^2(t). \end{cases} \tag{28}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $k_1, k_2, ..., K_1, K_2$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (28).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (28).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной y как функцию от k_5.

4. Построить фазовые портреты системы (28) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №15.

I.Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - kx_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 1 + \alpha x_n + x_n^2, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 250y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_3 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 5x_3^2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Модель одноступенчатого электронного генератора Чуа описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(y(t) - f(x(t))), \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t) + z(t), \\ \dot{z}(t) = -\beta y(t). \end{cases} \quad (29)$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие напряжения в цепи; $\alpha = \beta = 10$. Положим $f(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$, где $m_0 = -0.7$, $m_1 = -1.8$.

1. Найти положения равновесия системы (29).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (29).

3. Построить фазовые портреты системы (29) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель эпидемии с плотностнозависимым коэффициентом смертности:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = rN(t) - \beta X(t)Y(t) - f(N)X(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t)Y(t) - f(N)Y(t) - (\gamma + \alpha)Y(t), \\ \dot{Z}(t) = \gamma Y(t) - f(N)Z(t), \\ \dot{N}(t) = rN(t) - f(N)N(t) - \alpha Y(t). \end{cases} \tag{30}$$

Здесь $X(t)$ – число здоровых людей на момент времени t, потенциально подверженных заболеванию; $Y(t)$ – число больных людей; $Z(t)$ – число людей, приобретших иммунитет; функция $f(N) = \mu + kN$ – коэффициент смертности, не связанный с заболеванием (μ, k – положительные константы); r – коэффициент рождаемости; β – коэффициент передачи инфекции; α – коэффициент смертности, связанный с заболеванием; $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$. Все параметры $r, ..., \alpha$ имеют некоторые постоянные положительные значения.

1. Найти положения равновесия системы (30).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (30).

3. Построить фазовые портеты системы (30) для переменных $X(t), Y(t)$, $Z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от параметра r.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №16.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 9x_1(t) + 22x_2(t) - 6x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -11x_1(t) + 4x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 1x_1(t) + 6x_2(t) - 5x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 2 - \alpha x_n^2 - 3\alpha x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 20z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 20y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2 x_2 - 8x_3 - x_2^2 \\ x_1 - 5x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Колебательные процессы в химических средах наиболее просто описываются с помощью реакции Белоусова-Жаботинского. Система уравнений такой реакции имеет вид

$$\begin{cases} \epsilon\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - x(t)y(t) - qx^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2fz(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - z(t). \end{cases} \tag{31}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ концентрации веществ в смеси; ϵ, q, f –положительные параметры, причем $0 < \epsilon << 1$.

1. Найти положения равновесия системы (31).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (31).

3. Построить фазовые портреты системы (31) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (31) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t)(x(t) - L)\frac{K - x(t)}{K} - \gamma x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -\epsilon y(t) + k\gamma x(t)y(t), \end{cases} \tag{32}$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы, $y(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $k < 1$ – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника; ϵ, γ, a – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (32).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (32).

3. Построить фазовые портреты системы (32) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (32) возникают периодичесие решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №17.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t) - 3x_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2(1 - x_n^2), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 700z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 700y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \epsilon N_1(t) - \alpha N_1(t) - \frac{\gamma N_1(t)N_2(t)}{1+\rho N_1(t)}, \\ \dot{N}_2(t) = m - \frac{bN_2(t)}{1+\lambda N_1(t)}, \end{cases} \tag{33}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертвы, $N_2(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $\rho = \lambda$, $b = 1$; $\epsilon, \gamma, \alpha, m$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (33).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (33).

3. Построить фазовые портреты системы (33) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (33) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t) N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t) N_3(t), \end{cases} \tag{34}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (34).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (34).

3. Построить фазовые портреты системы (34) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_2 как функцию от параметра K.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №18.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n^2(1 - \alpha x_n - x_n^2), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.2x(t) - 3y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 5z(t) + x(t)(y(t) + 2z(t)), \\ \dot{z}(t) = -5y(t) + 2z(t) + x(t)(-2y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2 + x_3 \\ x_1^2 - 8x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \tag{35}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (35).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (35).

3. Построить фазовые портреты системы (35) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_1 как функцию от параметра L.

VI. Рассмотрим модель взаимодействия трех популяций с учетом гистерезисных явлений. Здесь развитие второй популяции начинается только после достижения первой популяцией некоторого критического уровня; аналогично для третьей популяции.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1\Big(1 - \dfrac{x}{K_1}\Big)x - b_{11}\dfrac{xy}{K_1} - b_{12}\dfrac{xz}{K_1}, \\ \\ \dot{y}(t) = r_2\Big(1 - \Big(\dfrac{2y - K_2 - C_2}{K_2 - C_2}\Big)^2\Big)y + b_{21}\dfrac{xy}{K_2} - b_{23}\dfrac{yz}{K_2}, \\ \\ \dot{z}(t) = r_3\Big(1 - \Big(\dfrac{2z - K_3 - C_3}{K_3 - C_3}\Big)^2\Big)z + b_{32}\dfrac{xz}{K_3} + b_{33}\dfrac{yz}{K_3}. \end{cases} \tag{36}$$

с начальными условиями $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем предполагается, что все 14 коэффициентов этой системы $r_1, b_{11}, b_{12}, K_1, ..., b_{33}$ – неотрицательны и $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$, $K_2 \neq C_2$, $K_3 \neq C_3$.

1. Найти положения равновесия системы (36).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (36).

3. Построить фазовые портреты системы (36) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от параметра K_1 (от параметра K_2).

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №19.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6\sin x_1 + x_1^2 + x_2^2, \\ \dot{x}_2(t) = \exp x_1 - 1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2 (1 + x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.2x(t) - 3y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 5z(t) + x(t)(y(t) + 2z(t)), \\ \dot{z}(t) = -5y(t) + 2z(t) + x(t)(-2y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 6x_1x_2 + x_3^2 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Одна из моделей модель контактного механизма передачи инфекции такова:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha v_1 N_1(t) N_3(t) - b v_1 N_1(t) + q N_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha v_1 N_1(t) N_3(t) + b v_1 N_1(t) - \beta N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - p N_3(t), \\ \dot{N}_4(t) = p N_3(t) - q N_4(t), \\ \dot{v}(t) = (c N_2(t) - m N_4(t)) v(t). \end{cases} \tag{37}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – доля больных; $N_4(t)$ – доля выздоровевших; v – активность возбудителя. $N_1(t) + ... + N_4(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (37).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (37).

3. Построить фазовые портреты системы (37) для переменных N_1, N_2, N_3 для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель предэпидемической циркуляции:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\alpha K V N(t) N_1(t) + \beta N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = \alpha K V N(t) N_1(t) - \beta N_1(t), \\ \dot{n}(t) = (cN(t) - mV(t) - pn(t))n(t), \\ \dot{V}(t) = (c_1 N(t) - m_1 V(t) - p_1 n(t))V(t). \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $N(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_1(t)$ – доля носителей вируса; $n(t)$ – плотность вирусов в воздухе; $V(t)$ – активность вирусов; $N(t) + N_1(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (38).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (38).

3. Построить фазовые портреты системы (38) для переменных N, N_1 для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №20.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - x_2(t) + \ x_1^3(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + x_2^3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n^3(\alpha - x_n^2), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -0.7y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 0.2y_2(t) - 20y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = 20y_2(t) + 0.2y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t) \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2^2 \\ x_1 - x_2^2 - 2x_1^2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель 4-х -мерной системы с высокой степенью симметрии:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) + y(t)z(t)u(t), \\ \dot{y}(t) = b(x(t) + y(t)) - x(t)z(t)u(t), \\ \dot{z}(t) = -cz(t) + x(t)y(t)u(t), \\ \dot{u}(t) = -du(t) + x(t)y(t)z(t). \end{cases} \tag{39}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t), u(t)$ – соответствующие напряжения в цепи; $a = 50$; $b = 10$; $c = 10$; $d = 80$.

1. Найти положения равновесия системы (39).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (39).

3. Построить фазовые портреты системы (39) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от a.

VI. Модель химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k_1 + k_2 x(t) - \frac{(k_3 y(t) + k_4 z(t)) x(t)}{x(t) + K_1}, \\ \dot{y}(t) = k_5 x(t) - k_6 y(t), \\ \dot{z}(t) = k_7 x(t) - k_8 z(t) - k_9 z^2(t) - \frac{k_{10} z(t)}{z(t) + K_2}. \end{cases} \tag{40}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $k_1, k_2, ..., K_1, K_2$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (40).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (40).

3. Построить фазовые портреты системы (40) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от k_1.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №21.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) - 2x_2(t) - 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^3(1 - x_n^2 + 2x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -7y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 3y_2(t) - 20y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = 20y_2(t) + 3y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t) \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 4x_1 + x_3^2x_1 - x_2^2 \\ -9x_1 - x_2^2 - 2x_1x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Простейшая модель эпидемии Кермака-Маккендрика описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -N_1(t)N_2(t), \\ \dot{N}_2(t) = -\alpha N_2(t)(1 - N_1(t)), \\ \dot{N}_3(t) = \alpha N_2(t). \end{cases} \tag{41}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – мера невосприимчивости к данному вирусу (иммунитет); α – положительный параметр. Число людей, которые заражаются повторно, пропорционально величине $N_1(t)N_2(t)$.

1. Найти положения равновесия системы (41).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (41).

3. Построить фазовые портреты системы (41) для разных начальных условий.

4. Установить бифуркационные значения параметра α для $N_2(t)$ и $N_3(t)$.

VI. Г. И. Марчук предложил модель, которая описывает борьбу вирусов $N_1(t)$, антител $N_2(t)$, и плазматических клеток $N_3(t)$ в людском организме, зараженном вирусной инфекцией. Мера зараженности определяется переменной величиной $m(t)$. Модель Марчука описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon - \gamma N_2(t))N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = \rho N_3(t) - (\mu + \nu\gamma N_1(t))N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = \alpha N_1(t)N_2(t) - N_3(t)(N_3 - N_3^*) \\ \dot{m}(t) = \sigma N_1 - \mu m(t). \end{cases} \tag{42}$$

Здесь $\epsilon = 2$, $\gamma = 0.8$, $\rho = 0.17$, $\mu = 0.5$, $\nu\gamma = 8$; $\alpha = 10^4$, если $m \leq 0.1$; $\alpha = 10^5 \cdot (1 - m)/9$, если $0.1 \leq m \leq 1$; $\sigma > 0$.

1. Найти положения равновесия системы (42).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (42).

3. Построить фазовые портреты системы (42) для разных начальных условий.

4. Установить бифуркационные значения параметра σ для $N_3(t)$.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №22.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 11x_1(t) + 2x_2(t) - 6x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 3x_1(t) + 16x_2(t) - 5x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha + \alpha x_n^2 - x_n^3 + x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -3y_1(t) + 2y_1^2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t) + 2y_1(t)y_2(t) + y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_2(t) = 1y_2(t) + 30y_3(t) - y_1^2(t) + y_2^2(t) - y_3^2(t) + 2y_1(t)y_2(t) + y_2(t)y_3(t), \\ \dot{y}_3(t) = -30y_2(t) + 1y_3(t) + 2y_1(t)y_3(t) + 3y_2(t)y_3(t) + y_3^2(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2^2 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Колебательные процессы в химических средах наиболее просто описываются с помощью реакции Белоусова-Жаботинского. Система уравнений такой реакции имеет вид

$$\begin{cases} \epsilon\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - x(t)y(t) - qx^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2fz(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - z(t). \end{cases} \tag{43}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ концентрации веществ в смеси; ϵ, q, f –положительные параметры, причем $0 < \epsilon << 1$.

1. Найти положения равновесия системы (43).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (43).

3. Построить фазовые портреты системы (43) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (43) возникают периодические решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t)(x(t) - L)\frac{K - x(t)}{K} - \gamma x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -\epsilon y(t) + k\gamma x(t)y(t), \end{cases} \tag{44}$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы, $y(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $k < 1$ – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника; ϵ, γ, a – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (44).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (44).

3. Построить фазовые портреты системы (44) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (44) возникают периодичесие решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №23.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sin x_1 - \dfrac{1}{6}x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n + 3\alpha x_n^2 - 2, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 2y_1(t) - 20y_3(t) + 3y_1^2(t) - 2y_2^2(t) - y_3^2(t) - 2y_2(t)y_3(t) - 2y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_2(t) = -0.5y_2(t) + 4y_2^2(t) + y_3^2(t) + 8y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t)y_3(t) + 4y_1(t)y_3(t), \\ \dot{y}_3(t) = 20y_1(t) + 2y_3(t) + 4y_1(t)y_3(t) + 2y_2(t)y_3(t) + y_3^2(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 \\ x_1^2 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \epsilon N_1(t) - \alpha N_1(t) - \frac{\gamma N_1(t)N_2(t)}{1+\rho N_1(t)}, \\ \dot{N}_2(t) = m - \frac{bN_2(t)}{1+\lambda N_1(t)}, \end{cases} \tag{45}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертвы, $N_2(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $\rho = \lambda$, $b = 1$; $\epsilon, \gamma, \alpha, m$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (45).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (45).

3. Построить фазовые портреты системы (45) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (45) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \tag{46}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (46).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (46).

3. Построить фазовые портреты системы (46) для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №24.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 1x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) - 4x_3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I.$):

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 + x_n - 2, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - 16z(t) - 3x^2(t) - x(t)y(t) + x(t)z(t) + y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -7x(t)y(t) + y(t)z(t) + 2.5y^2(t) - 2.5z^2(t), \\ \dot{z}(t) = 16x(t) + 2z(t) + z^2(t) - 7x(t)z(t) + 3y(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3^2 - 4x_2 \\ x_1 - x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1^2 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \tag{47}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (47).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (47).

3. Построить фазовые портреты системы (47) для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим модель взаимодействия трех популяций с учетом гистерезисных явлений. Здесь развитие второй популяции начинается только после достижения первой популяцией некоторого критического уровня; аналогично для третьей популяции.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1\Big(1 - \dfrac{x}{K_1}\Big)x - b_{11}\dfrac{xy}{K_1} - b_{12}\dfrac{xz}{K_1}, \\[2ex] \dot{y}(t) = r_2\Big(1 - \Big(\dfrac{2y - K_2 - C_2}{K_2 - C_2}\Big)^2\Big)y + b_{21}\dfrac{xy}{K_2} - b_{23}\dfrac{yz}{K_2}, \\[2ex] \dot{z}(t) = r_3\Big(1 - \Big(\dfrac{2z - K_3 - C_3}{K_3 - C_3}\Big)^2\Big)z + b_{32}\dfrac{xz}{K_3} + b_{33}\dfrac{yz}{K_3}. \end{cases} \tag{48}$$

с начальными условиями $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем предполагается, что все 14 коэффициентов этой системы r_1, $b_{11}, b_{12}, K_1, ..., b_{33}$ – неотрицательны и $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$, $K_2 \neq C_2$, $K_3 \neq C_3$.

1. Найти положения равновесия системы (48).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (48).

3. Построить фазовые портреты системы (48) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (48) возникают периодичесие решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №25.

I. Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + kx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - 2x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 16 - \alpha x_n^4, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 20x(t) - 10y(t) + 9z(t) - 3x^2(t) - x(t)y(t) + x(t)z(t) + y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 37x(t) - 12y(t) + 19z(t) - 7x(t)y(t) + y(t)z(t) + 2.5y^2(t) - 2.5z^2(t), \\ \dot{z}(t) = z^2(t) - 7x(t)z(t) + 3y(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_1^2x_2 + x_3^2 - 3x_2^2 \\ x_1^2 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Одна из моделей модель контактного механизма передачи инфекции такова:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha v_1 N_1(t)N_3(t) - bv_1 N_1(t) + qN_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha v_1 N_1(t)N_3(t) + bv_1 N_1(t) - \beta N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - pN_3(t), \\ \dot{N}_4(t) = pN_3(t) - qN_4(t), \\ \dot{v}(t) = (cN_2(t) - mN_4(t))v(t). \end{cases} \quad (49)$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – доля больных; $N_4(t)$ – доля выздоровевших; v – активность возбудителя. $N_1(t)+...+N_4(t)=1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (49).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (49).

3. Построить фазовые портреты системы (49) для переменных N_1, N_2, N_3 для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель предэпидемической циркуляции:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\alpha KVN(t)N_1(t) + \beta N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = \alpha KVN(t)N_1(t) - \beta N_1(t), \\ \dot{n}(t) = (cN(t) - mV(t) - pn(t))n(t), \\ \dot{V}(t) = (c_1N(t) - m_1V(t) - p_1n(t))V(t). \end{cases} \tag{50}$$

Здесь $N(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_1(t)$ – доля носителей вируса; $n(t)$ – плотность вирусов в воздухе; $V(t)$ – активность вирусов; $N(t)+N_1(t)=1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (50).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (50).

3. Построить фазовые портреты системы (50) для переменных N, N_1 для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №26.

I. Найти все значения параметра k, для которого следующая система будет асимптотически устойчивой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 - kx_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 1 + \alpha x_n - x_n^2, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 10y(t) + 2x^2(t) + 2x(t)y(t) + x(t)z(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -10x(t) + 3y(t) - x^2(t) + 2x(t)y(t) + y(t)z(t) + y^2(t) - z^2(t), \\ \dot{z}(t) = z^2(t) + 2x(t)z(t) + 3y(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + 4x_3^2 - 5x_2 \\ 6x_1 - 3x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим следующую модель эпидемии с плотностнозависимым коэффициентом смертности:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = rN(t) - \beta X(t)Y(t) - f(N)X(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t)Y(t) - f(N)Y(t) - (\gamma + \alpha)Y(t), \\ \dot{Z}(t) = \gamma Y(t) - f(N)Z(t), \\ \dot{N}(t) = rN(t) - f(N)N(t) - \alpha Y(t). \end{cases} \tag{51}$$

Здесь $X(t)$ – число здоровых людей на момент времени t, потенциально подверженных заболеванию; $Y(t)$ – число больных людей; $Z(t)$ – число людей, приобретших иммунитет; функция $f(N) = const$ – коэффициент смертности, не связанный с заболеванием; r – коэффициент рождаемости; β – коэффициент передачи инфекции; α – коэффициент смертности, связанный с заболеванием; $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$. Все параметры $r, ..., \alpha$ имеют некоторые постоянные положительные значения.

1. Найти положения равновесия системы (51).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (51).

3. Построить фазовые портреты системы (51) для переменных $X(t), Y(t)$, $Z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Модель абстрактной изотермической химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) - cx(t)y(t) - \frac{dz(t)x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = e + fx^2(t) - gy(t) - \frac{hx(t)y(t)}{y(t)+K_2}, \\ \dot{z}(t) = j + kxz(t) - lz(t). \end{cases} \tag{52}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $a, b, ..., m, l$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (52).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (52).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной z как функцию от l.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №27.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) - 7x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 7x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) + 16x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 - 2\alpha x_n, n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4000 - 0x(t) - 10000y^2(t) - 0z^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) + 10z(t) + x(t)(y(t) + (4/3)z(t)), \\ \dot{z}(t) = -10y(t) + z(t) + x(t)(-(4/3)y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_2 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1 - x_2^2 - 2x_2x_3 \\ x_1^3 + 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим следующую модель формирования внутриэтнических отношений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha KVN_1(t)N_2(t) + \beta N_2(t) + qN_3(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha KVN_1(t)N_2(t) - (\beta + b)N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = bN_2(t) - qN_3(t), \\ \dot{V}(t) = (c_0 + c_1KN_1(t) - m(N_2(t) + N_3(t))V(t). \end{cases} \tag{53}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к данной этнокультуре; $N_2(t)$ – доля активно поддерживающих этнокультуру; $N_3(t)$ – число противников этнокультуры; $V(t)$ – уровень этноцентризма; $N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c_0, c_1, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (53).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (53).

3. Построить фазовые портреты системы (53) для переменных $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ для разных начальных условий.

VI. Формирование феномена субкультуры. Рассмотрим следующую динамическую модель (миф-массовое сознание):

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha K V N_1(t) N_3(t) + \delta K N_2(t) - bV(t)N_1(t) + qN_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha K V N_1(t) N_3(t) - \delta K N_2(t) - \beta N_2(t) + bV(t)N_1(t) - dV(t)N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - pN_3(t) + dV(t)N_2(t), \\ \dot{N}_4(t) = pN_3(t) - qN_4(t), \\ \dot{V}(t) = (c_0 + c_1 K N_1(t) - mN_3(t))V(t). \end{cases} \tag{54}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к данной субкультуре; $N_2(t)$ – доля активно поддерживающих субкультуру; $N_3(t)$ – доля сторонников субкультуры, выходящих из под ее влияния; $N_4(t)$ – число противников субкультуры; $V(t)$ – яркость мифа; $N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) + N_4(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c_0, c_1, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (54).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (54).

3. Построить фазовые портреты системы (54) для переменных $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_3 как функцию от параметра p.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №28.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t) - 3x_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2(1 - x_n)(2 + x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 250z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 250y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3^2 - x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 7x_3 \\ x_1 - 4x_2^2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

V. Модель абстрактной изотермической химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) - cx(t)y(t) - \frac{(dz(t)+e)x(t)}{x(t)+K_1}, \\ \dot{y}(t) = f + gz(t) - hy(t) - \frac{jx(t)y(t)}{y(t)+K_2}, \\ \dot{z}(t) = k - mz(t) + lx(t)z(t). \end{cases} \qquad (55)$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $a, b, ..., m, l$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (55).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (55).

3. Построить бифуркационную диаграмму для переменной z как функцию от l.

4. Построить фазовые портреты системы (55) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель эпидемии с плотностнозависимым коэффициентом смертности:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = rN(t) - \beta X(t)Y(t) - f(N)X(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta X(t)Y(t) - f(N)Y(t) - (\gamma + \alpha)Y(t), \\ \dot{Z}(t) = \gamma Y(t) - f(N)Z(t), \\ \dot{N}(t) = rN(t) - f(N)N(t) - \alpha Y(t). \end{cases} \tag{56}$$

Здесь $X(t)$ – число здоровых людей на момент времени t, потенциально подверженных заболеванию; $Y(t)$ – число больных людей; $Z(t)$ – число людей, приобретших иммунитет; функция $f(N) = \mu + kN$ – коэффициент смертности, не связанный с заболеванием (μ, k – положительные константы); r – коэффициент рождаемости; β – коэффициент передачи инфекции; α – коэффициент смертности, связанный с заболеванием; $N(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$. Все параметры $r, ..., \alpha$ имеют некоторые постоянные положительные значения.

1. Найти положения равновесия системы (56).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (56).

3. Построить фазовые портреты системы (56) для переменных $X(t), Y(t)$, $Z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от параметра r.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №29.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_2^2(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = x_n^2(2 - 3\alpha x_n - x_n^2), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 20z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 20y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 - x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 2x_3^3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Колебательные процессы в химических средах наиболее просто описываются с помощью реакции Белоусова-Жаботинского. Система уравнений такой реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \epsilon\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - x(t)y(t) - qx^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2fz(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) - z(t). \end{cases} \tag{57}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ концентрации веществ в смеси; ϵ, q, f –положительные параметры, причем $0 < \epsilon << 1$.

1. Найти положения равновесия системы (57).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (57).

3. Построить фазовые портреты системы (57) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (57) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t)(x(t) - L)\frac{K - x(t)}{K} - \gamma x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -\epsilon y(t) + k\gamma x(t)y(t), \end{cases} \qquad (58)$$

где $x(t)$ – плотность популяции жертвы, $y(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $k < 1$ – коэффициент переработки биомассы жертвы в биомассу хищника; ϵ, γ, a – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (58).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (58).

3. Построить фазовые портреты системы (58) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (58) возникают периодичесие решения.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №30.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6\sin x_1 + x_1^2 + x_2^2, \\ \dot{x}_2(t) = \exp x_1 - 1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2(1 + x_n)(2 - x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 700z(t) + 10x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t) + 700y(t) - z(t) - 15x(t)z(t). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2 x_2 x_3 + 3x_3 - 4x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \epsilon N_1(t) - \alpha N_1(t) - \frac{\gamma N_1(t) N_2(t)}{1+\rho N_1(t)}, \\ \dot{N}_2(t) = m - \frac{bN_2(t)}{1+\lambda N_1(t)}, \end{cases} \tag{59}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертвы, $N_2(t)$ – плотность популяции хищника, K, L – верхняя и нижняя плотности популяции жертвы, $\rho = \lambda$, $b = 1$; $\epsilon, \gamma, \alpha, m$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (59).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (59).

3. Построить фазовые портреты системы (59) для разных начальных условий.

4. Найти, при каких значениях параметров в системе (59) возникают периодичесие решения.

VI. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \tag{60}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (60).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (60).

3. Построить фазовые портреты системы (60) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_2 как функцию от параметра K.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №31.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия с помощью функций Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - x_2(t) + \ x_1^3(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + x_2^3(t). \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x,\alpha)$ отображает в себя: $f(I,\alpha) \subset I.$):

$$x_{n+1} = x_n^3(\alpha - x_n^2 + x_n), n = 0, 1, 2, ...$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.2x(t) - 3y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 5z(t) + x(t)(y(t) + 2z(t)), \\ \dot{z}(t) = -5y(t) + 2z(t) + x(t)(-2y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 5x_1 + x_3^2 - x_2^2 \\ 3x_1^2 - 5x_2 - x_3^2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель биологического сообщества хищник-жертва, учитывающей существование нижней критической плотности популяции жертвы, а также учитывающей миграцию популяций хищников и жертв:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_1(t))N_1 - d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_2(t) = \epsilon_1 N_2(t)(N_2(t) - L)\frac{K - N_2(t)}{K} - \alpha N_2(t)N_3(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \\ \dot{N}_3(t) = -\epsilon_3 N_3 + k\alpha N_2(t)N_3(t), \end{cases} \tag{61}$$

где $N_1(t)$ – плотность популяции жертв, недостижимых для хищников, $N_2(t)$ – плотность популяции жертв, достижимых для хищников, $N_3(t)$ – плотность популяции хищников ; $\epsilon_i, \gamma_i, \alpha, k, K, d$ – положительные константы.

1. Найти положения равновесия системы (61).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (61).

3. Построить фазовые портреты системы (61) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной N_1 как функцию от параметра L.

VI. Рассмотрим модель взаимодействия трех популяций с учетом гистерезисных явлений. Здесь развитие второй популяции начинается только после достижения первой популяцией некоторого критического уровня; аналогично для третьей популяции.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1\Big(1 - \dfrac{x}{K_1}\Big)x - b_{11}\dfrac{xy}{K_1} - b_{12}\dfrac{xz}{K_1}, \\[2ex] \dot{y}(t) = r_2\Big(1 - \Big(\dfrac{2y - K_2 - C_2}{K_2 - C_2}\Big)^2\Big)y + b_{21}\dfrac{xy}{K_2} - b_{23}\dfrac{yz}{K_2}, \\[2ex] \dot{z}(t) = r_3\Big(1 - \Big(\dfrac{2z - K_3 - C_3}{K_3 - C_3}\Big)^2\Big)z + b_{32}\dfrac{xz}{K_3} + b_{33}\dfrac{yz}{K_3}. \end{cases} \tag{62}$$

с начальными условиями $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем предполагается, что все 14 коэффициентов этой системы $r_1, b_{11}, b_{12}, K_1, ..., b_{33}$ – неотрицательны и $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$, $K_2 \neq C_2$, $K_3 \neq C_3$.

1. Найти положения равновесия системы (62).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (62).

3. Построить фазовые портреты системы (62) для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от параметра K_1 (от параметра K_2).

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №32.

I. Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) - 12x_2(t) - 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I$.):

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n \exp(px_k - x_n^2)}{1 + \gamma x_n}, n = 0, 1, ...,$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.2x(t) - 3y^2(t) + z^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + 5z(t) + x(t)(y(t) + 2z(t)), \\ \dot{z}(t) = -5y(t) + 2z(t) + x(t)(-2y(t) + z(t)). \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 6x_1 + x_3^2 - x_2 \\ 3x_1^2 - 5x_2^2 - 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Одна из моделей модель контактного механизма передачи инфекции такова:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -\alpha v_1 N_1(t) N_3(t) - b v_1 N_1(t) + q N_4(t), \\ \dot{N}_2(t) = \alpha v_1 N_1(t) N_3(t) + b v_1 N_1(t) - \beta N_2(t), \\ \dot{N}_3(t) = \beta N_2(t) - p N_3(t), \\ \dot{N}_4(t) = p N_3(t) - q N_4(t), \\ \dot{v}(t) = (c N_2(t) - m N_4(t)) v(t). \end{cases} \tag{63}$$

Здесь $N_1(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_2(t)$ – степень зараженности населения на данный момент; $N_3(t)$ – доля больных; $N_4(t)$ – доля выздоровевших; v – активность возбудителя. $N_1(t) + ... + N_4(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (63).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (63).

3. Построить фазовые портреты системы (63) для переменных N_1, N_2, N_3 для разных начальных условий.

VI. Рассмотрим следующую модель предэпидемической циркуляции:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = -\alpha K V N(t) N_1(t) + \beta N_1(t), \\ \dot{N}_1(t) = \alpha K V N(t) N_1(t) - \beta N_1(t), \\ \dot{n}(t) = (cN(t) - mV(t) - pn(t))n(t), \\ \dot{V}(t) = (c_1 N(t) - m_1 V(t) - p_1 n(t))V(t). \end{cases} \tag{64}$$

Здесь $N(t)$ – доля населения, восприимчивая к заражению данным вирусом; $N_1(t)$ – доля носителей вируса; $n(t)$ – плотность вирусов в воздухе; $V(t)$ – активность вирусов; $N(t) + N_1(t) = 1$. Все входящие в систему параметры $\alpha, \beta, ..., c, m$ предполагаются положительными числами.

1. Найти положения равновесия системы (64).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (64).

3. Построить фазовые портреты системы (64) для переменных N, N_1 для разных начальных условий.

Лабораторные работы по нелинейной динамике

Комплекс лабораторных работ №33.

I.Для следующей системы исследовать устойчивость положения равновесия

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 45x_2(t) - 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 12x_2(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 6x_1(t) + 6x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

II. Построить бифуркационную диаграмму для следующего дискретного отображения и указать значения параметра α, при котором происходит переход к хаосу (предварительно установить отрезок I числовой оси, который данное отображение $f(x, \alpha)$ отображает в себя: $f(I, \alpha) \subset I.$):

$$x_{n+1} = \alpha x_n \exp(px_k - x_n^2), n = 0, 1, ...,$$

III. Построить хаотический аттрактор для следующей 3-мерной системы автономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -0.7y_1(t) + 9y_1^2(t) - 8y_1(t)y_2(t) - y_2^2(t) + y_3^2(t), \\ \dot{y}_2(t) = 0.2y_2(t) - 20y_3(t) + 11y_1(t)y_2(t) - 7y_2^2(t) + 2y_3^2(t), \\ \dot{y}_3(t) = 20y_2(t) + 0.2y_3(t) + 10y_1(t)y_3(t) - 8y_2(t)y_3(t) + 1y_3^2(t) \end{cases}$$

IV. Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t)$$

построить линейную обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы по первому приближению:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_1^2x_2 + x_3 - x_2^2 \\ x_1 - x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_1 - 4x_2^2 - 3x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

V. Рассмотрим модель 4-х -мерной системы с высокой степенью симметрии:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) + y(t)z(t)u(t), \\ \dot{y}(t) = b(x(t) + y(t)) - x(t)z(t)u(t), \\ \dot{z}(t) = -cz(t) + x(t)y(t)u(t), \\ \dot{u}(t) = -du(t) + x(t)y(t)z(t). \end{cases} \tag{65}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t), u(t)$ – соответствующие напряжения в цепи; $a = 50$; $b = 10$; $c = 10$; $d = 80$.

1. Найти положения равновесия системы (65).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (39).

3. Построить фазовые портреты системы (65) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от a.

VI. Модель химической реакции, в которой взаимодействуют 3 компоненты, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k_1 + k_2 x(t) - \frac{(k_3 y(t) + k_4 z(t)) x(t)}{x(t) + K_1}, \\ \dot{y}(t) = k_5 x(t) - k_6 y(t), \\ \dot{z}(t) = k_7 x(t) - k_8 z(t) - k_9 z^2(t) - \frac{k_{10} z(t)}{z(t) + K_2}. \end{cases} \tag{66}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – соответствующие концентрации веществ участвующих в реакции; $k_1, k_2, ..., K_1, K_2$ – положительные параметры.

1. Найти положения равновесия системы (66).

2. Исследовать на устойчивость положения равновесия системы (66).

3. Построить фазовые портреты системы (66) для переменных $x(t), y(t)$, $z(t)$ для разных начальных условий.

4. Построить бифуркационную диаграмму для переменной x как функцию от k_1.