Seminar săpt. 4

SSSS Spații vectoriale; repere, coordonate, operații cu subspații

2. Fie $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$, $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ rep. canonic

Fie $R' = \{-1 + 2X + 3X^2, x - x^2, x - 2x^2\}$

a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}_2[X]$

b) $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

c) Coordonatele lui $P = 3 - x + x^2$ în rap. cu R'

Sol: a) $\mathbb{R}_2[x] \equiv \mathbb{R}^3$

$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \equiv (a_0, a_1, a_2)$

$R' \equiv \{\underset{e_1'}{(-1,2,3)}, \underset{e_2'}{(0,1,-1)}, \underset{e_3'}{(0,1,-2)}\}$

$$\left.\begin{array}{l} rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \text{ (maxim)} \xRightarrow{\text{Crit LI}} R' \text{ SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = |R'| \end{array}\right\} \Rightarrow R' \text{ reper}$$

b) A

c) $P \equiv (3,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3,-1,1) &= x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' \\ &= x_1'(-1,2,3) + x_2'(0,1,-1) + x_3'(0,1,-2) \\ &= (-x_1', 2x_1' + x_2' + x_3', 3x_1' - x_2' - 2x_3') \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x_1' = 3 \\ 2x_1' + x_2' + x_3' = -1 \\ 3x_1' - x_2' - 2x_3' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = -3 \\ x_2' + x_3' = 5 \\ -x_2' - 2x_3' = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = -3 \\ x_3' = -15 \\ x_2' = 20 \end{cases}$$

$\cancel{(\overset{x_1'}{-3}, \overset{x_2'}{-15}, \overset{x_3'}{20})}$ $(\overset{x_1'}{-3}, \overset{x_2'}{20}, \overset{x_3'}{-15})$

Coordonatele lui $P = 3 - x + x^2$ în rap. cu R'

3. Fie $(V,+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. vect. 3-dim

Fie $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3\}$ reper în V și

$\mathcal{R}' = \{v_1' = v_1,\ v_2' = v_1 + v_2,\ v_3' = v_1 + v_2 + v_3\} \subset V$

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ este reper în V; $\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $A = ?$

b) Dacă $v \in V$ are coord. (x_1, x_2, x_3) în raport cu $\mathcal{R}$, atunci care sunt coord. (x_1', x_2', x_3') în raport cu $\mathcal{R}'$?

Sol:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A \in GL(3,\mathbb{R}) \\ \underset{\text{reper}}{\mathcal{R}} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{R}'$ reper

b) $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = x_1' v_1' + x_2' v_2' + x_3' v_3'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_2 - x_3 \end{array}$

$(x_1', x_2', x_3') = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$

6. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}\} = S(A)$

Exercițiu stil de examen 0,3p

a) Prec. o bază în V'

b) $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$

c) Să se descompună $x = (1,1,2)$ în rap. cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

Sol:

a) $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$\dim V' = 3 - \operatorname{rg} A = 3 - 2 = 1$

$\left.\begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_1 = -4\alpha \\ x_2 = 8\alpha \end{array}\right| \begin{array}{l} V' = \{(-4\alpha, 8\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{R}' = \{(-4, 8, 1)\} - SG(V') \\ \quad \neq 0_{\mathbb{R}^3} \quad \llcorner SLI \end{array} \Bigg| \Rightarrow \mathcal{R}'$ reper în V'

b) $rg\begin{pmatrix} -4 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ 8 & \\ 1 & \end{pmatrix} = 3$

alegem a.î. rg( ) = 3

$V'' = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$

$\mathcal{R}''$ reper

c) $x = \underset{\in V'}{x'} + \underset{\in V''}{x''} = (1,1,2) = \overbrace{a(-4,8,1)}^{x'} + \overbrace{b(1,0,0)+c(0,1,0)}^{x''}$

$= (-4a+b, 8a+c, a)$

$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$

$\begin{cases} -4a+b=1 \\ 8a+c=1 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=9 \\ c=-15 \\ a=2 \end{cases}$

$(a,b,c) = (2,9,-15)$ coord. lui x în rap. cu $\mathcal{R}$

$\Rightarrow x' = (-8, 16, 2) \in V'$

$x'' = (9, -15, 0) \in V''$

10. Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $V' = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = ?$ Precizați o bază în V'

b) Să se scrie $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$

c) Descompuneți $x = (1,2,1,2)$ ca sumă dintre un vec. din V' și unul din V''

Sol: Căutăm rg(A)

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow rg A = 2$

$\dim V' = 4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$

$x_3 = \alpha$

$x_4 = \beta$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2\alpha - 3\beta \\ 2x_1 + 3x_2 = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$2x_1 - 2x_2 = -4\alpha - 6\beta \quad (-)$$

$$5x_2 = 2\alpha + 7\beta$$

$$x_2 = \frac{2}{5}\alpha + \frac{7}{5}\beta$$

$$x_1 = -\frac{8}{5}\alpha - \frac{8}{5}\beta$$

$$V' = \left\{ \left(-\frac{8}{5}\alpha - \frac{8}{5}\beta, \frac{2}{5}\alpha + \frac{7}{5}\beta, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$$

$$\frac{\alpha}{5}\underbrace{(-8, 2, 5, 0)}_{= V_1} + \frac{\beta}{5}\underbrace{(-8, 7, 0, 5)}_{= V_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{R}' = \{v_1, v_2\} \text{ SG} \\ \dim V' = 2 = |\mathcal{R}'| \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{R}' \text{ reper în } V'$$

b)
$$rg \begin{pmatrix} -8 & -8 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$\mathcal{R}' \cup \mathcal{R}'' = \mathcal{R}$ în $\mathbb{R}^4$

$\mathcal{R}'' = \{e_3, e_1\}$ ← din baza canonică $\mathcal{R}_0 = \{e_1 = (1,0,0,0),$

$V'' = \langle \mathcal{R}'' \rangle$ $\quad e_2 = (0,1,0,0),$

$\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$ $\quad e_3 = (0,0,1,0),$

$e_4 = (0,0,0,1)\}$ rep. canonic în $\mathbb{R}^4$

c) $(1,2,1,2)=\overbrace{a(-8,2,5,0)+b(-8,7,0,5)}^{x'}+\overbrace{c(0,0,1,0)+d(1,0,0,0)}^{x''}$

$=(-8a-8b+d,\ 2a+7b,\ 5a+c,\ 5b)$

$$\begin{cases} -8a-8b+d=1 \\ 2a+7b=2 \\ 5a+c=1 \\ 5b=2 \quad \Rightarrow b=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2a+7\cdot\frac{2}{5}=2 \Rightarrow a=-\frac{2}{5}$

$5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+c=1 \Rightarrow c=3$

$-8\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-8\cdot\frac{2}{5}+d=1 \Rightarrow d=1$

$x'=\left(\frac{16}{5},-\frac{4}{5},-2,0\right)+\left(-\frac{16}{5},\frac{14}{5},0,2\right)=(0,2,-2,2)$

$x''=(1,0,3,0)$

5/6. $V=(0,\infty)$, $(V,\oplus,\odot)/_{\mathbb{R}}$ sp. vect

$x\oplus y=xy$, $\alpha\odot x=x^{\alpha}$

Arătați că $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ sunt vectori LD

Sol.:

$a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $(a\odot\sqrt{2})\oplus(b\odot\sqrt{3})=0_V=1_{\mathbb{R}}$

$(\sqrt{2})^{a}\cdot(\sqrt{3})^{b}=1 \quad |\ln \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{2}\ln 2+\frac{b}{2}\ln 3=0 \quad |\cdot 2$

$a=\frac{-b\ln 3}{\ln 2}=-b\log_2 3$

Daca $b=1 \Rightarrow a=-\log_2 3 \Rightarrow$ SLD

8/3 !!!!! Fie $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ și $V'=\langle\underbrace{\{(1,2,-1,0),(1,0,0,3)\}}^{\text{SLI maximal}}\rangle$

a) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4=V'\oplus V''$, $V''=?$

Să se descrie V'' printr-un –//– liniare

Sol.:

a) $\forall x \in V', \exists a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a(1,2,-1,0) + b(1,0,0,3)$

$$\overset{x}{\parallel} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a+b, 2a, -a, 3b)$$

$$\begin{cases} x_1 = a+b \\ x_2 = 2a \\ x_3 = -a \\ x_4 = 3b \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\Delta_{C1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_3 + x_2 = 0$$

$$\Delta_{C2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_4 + 6x_1 - 3x_2 = 0$$

$$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_3 + x_2 = 0 \\ -2x_4 + 6x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

b)

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$V'' = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Exercițiile sunt utile pt. examen}}$