Recapitulare

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a) f. eșalon b) rg A

2. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ $V_1 = <\{(1,1,1),(0,3,1),(2,-1,1)\}>$. $V_2 = \{(1,-2,4),(-2,4,8)\}$.
   a) SLI max în V_1, V_2
   b) reper în V_1, V_2, V_1+V_2. ($R_1 \cup R_2$ SL pt V_1+V_2 extragem SLI max).
   c) $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

3. $(\mathbb{R}_2[X],+,\cdot)$ $R' = \{1+X,\ 1+X+X^2,\ 1+\alpha X - X^2\}$.
   $\alpha = ?$ a.î. R' e SLI / SLD / SG.

4. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}\right\}$
   a) reper în V'
   b) $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$; Descrieți V'' ca sp sol. unui SLO.
   c) Descomp $x = (1,0,-3)$ în rap cu $V' \oplus V''$, p = proiecția pe V', $p(x) = ?$

5. Ex $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ $A = [f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   a) Ker f; b) Im f; c) Se poate diagonaliza? (nu)

6. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2)$
   $R' = \{(1,1),(-1,2)\}$ $A' = [f]_{R',R'} = ?$

7. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(1,1) = (-1,2)$, $f(0,1) = (3,0)$ $f(x) = ?$

8. $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
   a) Ker f; b) $f(V)$ $V = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{R}\right\}$

Ex

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (-3x_1 + 2x_2, -5x_1 + 4x_2, 2x_1 - 2x_2 - x_3)$

a) val. pr ; b) ssp pr. ; c) reperul în rap cu care A diag

d) $A^n = ?$

Ex $f \in End(\mathbb{R}^3)$.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ valori pr.

$v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ vect pr. coresp.

$f = ?$

Ex $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\ker(g)$; b) Q ; c) Să se aducă Q la o f. canonică (met Gauss, Jacobi, met. val. proprii)

Este g produs scalar în $\mathbb{R}^3$

Ex $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$

Precizați signatura.

Ex $(\mathbb{R}^3, g_0)$ $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

a) $U^\perp$; b) $R = R_1 \cup R_2$ reper orton, R_1, R_2 r. orton $U, U^\perp$

c) $p: U \oplus U^\perp \to U$ pr. ortog pe U

$p(1,0,1)$

Ex $(\mathbb{R}^3, g_0)$ $U = \langle \{(1,-1,2), (1,1,1)\} \rangle$

s simetria ortog față de U

$s(0,0,1) = ?$

Ex Ex $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = [f]_{R_0, R_0}$$

a) $f \in O(\mathbb{R}^3)$ speța 1. b) $\varphi = \measuredangle$ rot ; axa de rotație.

b) $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ orton ai $[f]_{R,R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Ex. $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $u = (1, -1, 2)$

Să se afle transf. ortog de sp 1 , $\varphi = \frac{\pi}{6}$, axa $\langle u \rangle$.

Ex $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3)(1, 2, -2)$

a) $f \in Sim(\mathbb{R}^3)$

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f.p. asoc. Să se aducă la o f can prin transf ortog.

Ex $A(1, -1, 2)$, $\mathcal{D}: \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 3}{-1} = \frac{x_3}{1}$; $\pi: x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

a) $\pi' \perp \mathcal{D}$, $\pi' \ni A$

b) $\mathcal{D}' \ni A$, $\mathcal{D}' \perp \pi$

c) dist $(A, \mathcal{D})$

d) dist (A, π)

Ex $\mathcal{D}_1: \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 2}{1} = \frac{x_3}{1}$, $\mathcal{D}_2: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$

a) $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ necopl

b) ec $\perp$ comune

Ex $\Gamma: f(x) = 3x_1^2 + 8\alpha x_1 x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2 = 0$

a) $\alpha = ?$ ai Γ are centru unic

b) $\alpha = -1$ Să se aducă la o f. canonică, ef. izometrii.