SEMINAR 1

Problema 1. Să se determine mulţimile X, Y a.î.

(i) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, (ii) $X \cap Y = \{4,6,9\}$, (iii) $X \cup \{3,4,5\} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$, (iv) $Y \cup \{2,4,8\} = \{2,4,5,6,7,8,9\}$.

Soluţie: Din (ii) avem $\{4,6,9\} \subset X, Y$. Trebuie să vedem care sunt elementele ce trebuiesc adăugate la mulţimea $\{4,6,9\}$ pentru a fi îndeplinite condiţiile condiţiile (iii) şi (iv).

$$\underbrace{X \cap Y = \{4,6,9\}}$$
$$\underbrace{X \cup \{3,5\}}_{\{1,3,4,5,6,8,9\}} \qquad \underbrace{Y \cup \{2,8\}}_{\{2,4,5,6,7,8,9\}} \qquad \text{4 este în } X \text{ şi } Y$$

Obţinem $X = \{1,4,6,8,9\}$ şi $Y = \{4,5,6,7,9\}$. Vedem că acestea verifică toate condiţiile.

Problema 2. Fie funcţia $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(x,y) = x^2 - y^2$. Arătaţi că $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}\setminus\{4k+2 | k \in \mathbb{Z}\}$.

Cu $\mathrm{Im}(f)$ am notat imaginea funcţiei f. $\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{Z} \mid (\exists)(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a. î. f(x, y) = z$\}$.

Soluţie: Notăm clasele de resturi modulo 4 cu: $\hat{0} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\hat{1} = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\hat{2} = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\hat{3} = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. După cum se ştie din clasa a XII-a acestea se pot aduna şi înmulţi. Astfel avem $\hat{0}^2 = \hat{0}$, $\hat{1}^2 = \hat{1}$, $\hat{2}^2 = \hat{0}$, $\hat{3}^2 = \hat{1}$. De exemplu considerăm $(4k+3) \in \hat{3}$. $(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2+6k+2) + 1 \in \hat{1}$. Deci pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{x}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$. Pentru $x, y \in \mathbb{Z}$ avem $x^2 - y^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \widehat{-1} = \hat{3}\}$. Acest calcul arată că $\nexists z \in \mathbb{Z}$. a.î. $z^2 \in \hat{2}$. Deci avem incluziunea "$\subseteq$".

"$\supseteq$": Pentru numerele de tipul $4k, 4k+1, 4k+3, k \in \mathbb{Z}$ arătăm că sunt diferenţe de pătrate de numere întregi.

$4k = (k+1)^2 - (k-1)^2 = (k+1+k-1)(k+1-k+1) = 2k \cdot 2 = 4k$

$4k+1 = (2k+1)^2 - (2k)^2$ şi $4k+3 = (2k+2)^2 - (2k+1)^2$

Problema 3. Fie funcţia $f : \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = (x-\sqrt{2})^2 + (y - \frac{1}{3})^2$. Arătaţi că f este injectivă. ($\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.)

Soluţie: $f(x,y)$ este pătratul distanţei în plan de la (x,y) la $(\sqrt{2}, \frac{1}{3}) = \omega$. Din definiţie f este injectivă $\Leftrightarrow [(\forall)(x,y) \neq (x',y') \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow f(x,y) \neq f(x',y')$.

Fie $f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = (x'-\sqrt{2})^2 + (y'-\frac{1}{3})^2$. Desfacem pătratele, reducem termenii asemenea şi obţinem

$$x^2 - x'^2 + y^2 - y'^2 - \frac{2}{3}(y-y') = 2\sqrt{2}(x-x')$$

.

Ştim că $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$. Dacă $x \neq x'$ atunci $\sqrt{2} = \frac{x^2-x'^2+y^2-y'^2-\frac{2}{3}(y-y')}{2(x-x')} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este absurd. Deci $x = x'$. Egalitatea devine $y^2 - y'^2 - \frac{2}{3}(y-y') = 0 \Leftrightarrow (y-y')(y+y'-\frac{2}{3}) = 0$. Dacă $y \neq y'$ atunci $y + y' = \frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$, ceea ce este o contradinţie. Deci avem şi $y = y'$. Am obţinut: $f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y')$, adică f este injectivă.

Problema 4. Considerăm funţia $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\{1,2\}) \times \mathcal{P}(\{1,3\})$, definită prin $f(A) = (A\cap\{1,2\}, A\cap\{1,3\})$. Să se expliciteze f şi să se verifice dacă este injectivă sau surjectivă.

Soluţie: $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})| = 2^4$. În general numărul submulţimilor mulţimii $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ este 2^n. Deci numărul elementelor mulţimii $\mathcal{P}(\{1,2\}) \times \mathcal{P}(\{1,3\})$ este $2^2 \cdot 2^2 = 2^4 = 16$.

De exemplu $f(\varnothing) = (\varnothing,\varnothing) = f(\{4\})$, $f(\{1\}) = (\{1\},\{1\}) = f(\{1,4\})$. Deci f nu este injectivă. Cum f o funcţie între mulţimi de acelaşi cardinal şi f nu este injectivă, atunci nu poate fi nici surjectivă.

De exemplu $(\{1\},\varnothing) \notin \mathrm{Im}(f)$. $\{1\}$ pe prima componentă se obţine din intersecţia mulţimii $\{1,2\}$ cu $\{1\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ sau cu $\{1,3,4\}$. Dar pe a două poziţie avem intersecţia dintre $\{1,3\}$ şi una dintre aceste mulţimi iar această intersecţie este diferită de $\varnothing$. Similar$(\varnothing,\{1\}) \notin \mathrm{Im}(f)$.

Problema 5. Fie $a, b \in \mathbb{N}^\star$, $A = [a] = \{1,2,\ldots,a\}$, $B = [b] = \{1,2,\ldots,b\}$. Arătaţi că:
(i) Numărul funcţiilor $f : A \longrightarrow B$ este b^a.
(ii) Dacă $a \leqslant b$, numărul funcţiilor injective $A \longrightarrow B$ este $\frac{b!}{(b-a)!}$.
(iii) Numărul funcţiilor strict crescătoare $A \longrightarrow B$ este $C_b^a = \binom{b}{a}$.
(iv) Numărul funcţiilor crescătoare $A \longrightarrow B$ este $C_{a+b-1}^a = \binom{a+b-1}{a}$.
Soluţie:

(i) Pentru $(\forall)\ j \in [a]$, $f(j) \in [b]$. Deci $f(j)$ poate lua oricare dintre cele b valori. O funcţie între două mulţimi finite este caracterizată de mulţimea valorilor sale, adică de imagine, care în acest caz este $f(1), f(2), \ldots, f(a)$, sau fără virgule $f(1)f(2)\ldots f(a)$. Deci fiecare funcţie de la A la B poate fi gândită ca un cuvânt de lungime a cu litere în alfabetul $[b]$. Astfel numărul funcţiilor de la A la B este egal cu numărul cuvintelor de lungime a cu litere în alfabetul $[b]$. Cum fiecare literă a cuvântului poate lua b valori, numărul acestor cuvinte este b^a, care este şi numărul tuturor funcţiilor de la A la B.

(ii) Funcţiile injective $f : A \longrightarrow B$ se identifică cu acele cuvinte lungime a cu litere distincte în alfabetul $[b]$. Deci prima literă poate lua b valori, dar odatfixată această literă următoarea literă poate fi oricare dintre cele b elemente, mai puţin cea aleasă pe prima poziţie, deci pentru a doua poziţie avem la dispoziţie $b-1$ alegeri. Similar, pentru a treia poziţie, odată fixate valorile primelor două poziţii, vom avea $b-2$ alegeri. În sfârşit pentru ultima vom avea $b-a+1$ alegeri. Deci mulţimea funcţiilor injective $f : A \longrightarrow B$ este $b(b-1)(b-2)\ldots(b-a+1) = \frac{b!}{(b-a)!}$.

(iii) Fie $f : A \longrightarrow B$, f strict crescătoare $\Leftrightarrow 1 \leqslant f(1) = x_1 < f(2) = x_2 < \ldots < f(a) = x_a \leqslant b$. Deci a da o funcţie strict crescătoare de la A la $B \Leftrightarrow$ a da un şir de elemente $1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots x_a \leqslant b \Leftrightarrow$ a da o submulţime cu a elemente a lui B. Numărul acestor submulţimi, prin definiţie este C_b^a, în notaţie anglo-americană $\binom{b}{a}$.

(iv) Fie $f : A \longrightarrow B$, f crescătoare. Imaginea unei astfel de funcţii este $1 \leqslant f(1) = x_1 \leqslant f(2) = x_2 \leqslant \ldots \leqslant f(a) = x_a \leqslant b \Leftrightarrow 1 \leqslant x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \ldots x_a + a - 1 \leqslant b + a - 1$. Deci a da o funcţie crescătoare este echivalent cu a da o submulţime de cardinal a din mulţimea $\{1,2,\ldots,b+a-1\}$. Numărul acestor submulţimi este prin definiţie $C_{b+a-1}^a = \binom{b+a-1}{a}$.

Problema 6. (Principiul includerii-excluderii) Pentru orice mulţime finită X notăm cu $|X|$ cardinalul acesteia, adică numărul de elemente. Fie $A_1, \ldots, A_n$ mulţimi finite. Atunci

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{K \subset [n]} (-1)^{|K|+1} |\bigcap_{i \in K} A_i|.$$

Pentru $n = 2$, avem formula binecunoscută $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
Soluţie: Pentru $n = 2$ formula de mai sus se demonstrază uşor şi foarte intuitiv cu diagrame Venn. De fapt, orice element din $A_1 \cup A_2$ este sau din A_1 sau din A_2, cele din intersecţia $A_1 \cap A_2$ fiind numărate şi în A_1 şi în A_2. Deci trebuie să le scădem o dată.

Se face inducţie după n. Să demonstrăm $P2 \longrightarrow P3$: Avem trei mulţimi finite, A_1, A_2, A_3 şi vom considera $A_1 \cup A_2$ o mulţime şi A_3 a doua mulţime. APlicăm $P2$. Deci

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|, \text{folosind } P2 \text{ obţinem} =$$
$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Temă Demonstraţi $P3 \longrightarrow P4$ şi $Pn \longrightarrow P(n+1)$.

Problema 7. Să se determine numărul funţiilor surjective $[k] \longrightarrow [n]$, unde $k \geqslant n$.

Soluţie: Numărul funcţiilor surjective este n^k minus numărul funcţiilor ce nu sunt surjective. O funcţie $f : [k] \longrightarrow [n]$ dacă există cel puţin $i \in [n]$ a.î. $i \notin \mathrm{Im}(f)$.

Notăm cu $N_i = \{f : [k] \longrightarrow [n] | i \notin \mathrm{Im}(f)\}$. Funcţiile ce nu sunt surjective sunt cele din $\bigcup_{i=1}^n N_i$, iar numărul acestora, folosind principiul includerii-excluderii este $|\bigcup_{i=1}^n N_i| = \sum_{K \subset [n]} (-1)^{|K|+1} |\bigcap_{i \in K} N_i|$. $|N_i| = (n-1)^k$, pentru că N_i este mulţimea funcţiilor de la mulţimea $[k]$ la mulţimea $[n] \setminus \{i\}$ de cardinal $n-1$. Similar pentru o mulţime de indici $K \subset [n]$, de cardinal p, avem avem $|\bigcap_{i \in K} N_i| = (n-p)^k$.

Deci numărul funcţiilor surjective este $n^k - |\bigcup_{i=1}^n N_i| = n^k - \sum_{K \subset [n]} (-1)^{|K|+1} |\bigcap_{i \in K} N_i| = n^k + \sum_{K \subset [n]} (-1)^{|K|} |\bigcap_{i \in K} N_i| = n^k + \sum_{p=1, K \subset [n], |K|=p}^n (-1)^{|K|} |\bigcap_{i \in K} N_i| = n^k + \sum_{p=1}^n (-1)^p C_n^p (n-p)^k = n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - \ldots (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^k$.