

I. 10p.  
 1p.  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$ . Fie  $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  formă biliniară și  $G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  matricea asociată în raport cu reperul canonic  $R_0$ .

Este  $(\mathbb{R}^3, g)$  un spațiu vectorial real?

2p.  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  s.v.e.r.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 4x_3)$

0.5p a)  $f \in \text{Sim}(\mathbb{R}^3)$

1p b) Scrieți  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  forma pătratică asociată.

2p. c) Det. un reper ortonormat în  $\mathbb{R}^3$  în raport cu care  $Q$  are o formă canonică.

1p 2p. 3)  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  s.v.e.r. a) Det. un reper ortonormat în  $\mathbb{R}^3 = \langle \{u\} \rangle \oplus \langle \{u\} \rangle^\perp$  și scrieți ecuația rotației de unghi  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  și axa  $\langle \{u\} \rangle$ , unde  $u = (1, 0, 2)$

4)  $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, g_0), \varphi)$  sp. af. euclid; fie  $M(1, 0, 2)$  și dreapta  $D: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \end{cases}$

1p a) Aflați ec. dreptei  $D'$ , unde  $M \in D'$  și  $D' \parallel D$ .

1p b) Aflați ec. planului  $\pi$ , unde  $M \in \pi$  și  $\pi \perp D$ .

II 10p.  
 1p. 1)  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$ . Fie  $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$ .  
 Este  $g$  un produs scalar?

2) Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  s.v.e.r.  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  și  $[f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $R_0 =$  reperul canonic

0.5p a)  $f(x) = ?$ ;  $f \in \text{Sim}(\mathbb{R}^3)$

1p b) Scrieți  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  forma pătratică asociată.

2p. c) Det. un reper ortonormat în  $\mathbb{R}^3$  în raport cu care  $Q$  are o formă canonică.

3)  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  s.v.e.r.,  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (x_3, -x_2, x_1)$

1p. a) Arătați că  $f$  este o rotație și precizați unghiul de rotație și axa de rotație.

2p. b) Precizați reperul ortonormat  $R'$  dim  $\mathbb{R}^3$  și  $[f]_{R', R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

4)  $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, g_0), \varphi)$  sp. af. euclidian. Fie  $D_1: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$  și  $D_2: \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 2}{4} = \frac{x_3}{3}$

1p a) Arătați că  $D_1$  și  $D_2$  sunt coplanare

2p b) Scrieți ec. planului  $\pi$ , determinat de  $D_1$  și  $D_2$ .