SEMINAR 2

Problema 1. Fie mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ şi funcţia $f : A \longrightarrow B$ dată prin

$$1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto d$$

Pentru orice $X \subset A$ şi orice $Y \subset B$, calculaţi $f(X)$ şi respectiv $f^{-1}(Y)$.

Soluţie: Submulţimile mulţimii A sunt în număr de $2^4 = 16$. Acestea sunt $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

Imaginea directă a acestor mulţimi este $f(\varnothing) = \varnothing, f(\{1\}) = \{a\}, f(\{2\}) = \{b\}, f(\{3\}) = \{c\}, f(\{4\}) = \{d\}, f(\{1, 2\}) = \{a, b\}, f(\{1, 3\}) = \{a, c\}, f(\{1, 4\}) = \{a, d\}, f(\{2, 3\}) = \{b, c\}$, $f(\{2, 4\}) = \{b, d\}, f(\{3, 4\}) = \{c, d\}, f(\{1, 2, 3\}) = \{a, b, c\}, f(\{1, 2, 4\}) = \{a, b, d\}$, $f(\{1, 3, 4\}) = \{a, c, d\}, f(\{2, 3, 4\}) = \{b, c, d\}, f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{a, b, c, d\}$.

Imaginile inverse ale submulţimilor mulţimii $\{a, b, c, d\}$ sunt

$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(\{a\}) = \{1\}, f^{-1}(\{b\}) = \{2\}, f^{-1}(\{c\}) = \{3\}, f^{-1}(\{d\}) = \{4\}, f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2\}, f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 3\}, f^{-1}(\{a, d\}) = \{1, 4\}, f^{-1}(\{b, c\}) = \{2, 3\}, f^{-1}(\{b, d\}) = \{2, 4\}$, $f^{-1}(\{c, d\}) = \{3, 4\}, f^{-1}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3\}, f^{-1}(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 4\}, f^{-1}(\{a, c, d\}) = \{1, 3, 4\}$, $f^{-1}(\{b, c, d\}) = \{2, 3, 4\}), f^{-1}(\{a, b, c, d\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Problema 2. Pentru orice mulţimi X, Y notăm cu $H(X, Y)$ mulţimea funcţiilor de la X la Y. Fie A, B, C trei mulţimi nevide şi fie funcţia

$$\alpha : H(A, H(B, C)) \to H(A \times B, C)$$

definită prin $\alpha(f)(a, b) = f(a)(b)$ pentru orice $f \in H(A, H(B, C)), a \in A, b \in B$.

(i) Arătaţi că α este bijectivă,

(ii) Explicitaţi $\alpha(f)$ pentru $f \in H(\{1, 2, 3\}, H(\{4, 5, 6\}, \{a, b, c, d\}))$, dată prin $f(1) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ a & b & d \end{pmatrix}$, $f(2) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $f(3) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ c & c & a \end{pmatrix}$.

Soluţie:

(i) Fie $f, g \in H(A, H(B, C))$, a.î. $\alpha(f) = \alpha(g) \Leftrightarrow (\forall)(a, b) \in A \times B, \quad \alpha(f)(a, b) = \alpha(g)(a, b) \Leftrightarrow f(a)(b) = g(a)(b)$, egaltate valabilă pentru orice $b \in B \Rightarrow f(a) = g(a)$, egalitate valabilă pentru orice $a \in A \Rightarrow f = g$. Deci α este injectivă.

Considerăm o funcţie $F : A \times B \longrightarrow C$. Definim $f : A \longrightarrow H(B, C)$ prin $f(a)(b) := F(a, b)$. Prin definiţia lui f, avem $\alpha(f) = F$. Deci α este surjectivă.

(ii) $\alpha(f)(1, 4) = f(1)(4) = a, \alpha(f)(1, 5) = f(1)(5) = b, \alpha(f)(1, 6) = f(1)(6) = d, \alpha(f)(2, 4) = f(2)(4) = b, \alpha(f)(2, 5) = f(2)(5) = a, \alpha(f)(2, 6) = f(2)(6) = c, \alpha(f)(3, 4) = f(3)(4) = c, \alpha(f)(3, 5) = f(3)(5) = c, \alpha(f)(3, 6) = f(3)(6) = a$.

Problema 3. Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă.

Soluţie: $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ sunt mulţimi numărabile. Folosind un rezultat din curs $\Rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ este numărabilă iar $\mathbb{Q}$ se identifică cu mulţimea claselor de echivalenţă $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star/\sim$, unde $(x, y) \sim (p, q) \Leftrightarrow xq = yp$. Deci $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Problema 4. Fie A o mulţime nevidă şi $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow A$ o funcţie. Notăm cu

$$B := A \backslash \{f(X) \mid X \subseteq A, f(X) \in X\}$$

(i) Arătaţi că există $D \in \mathcal{P}(A) \backslash \{B\}$ cu $f(D) = f(B)$.
(ii) Găsiţi un D în cazul $A = \{1, 2, 3\}$ şi

$$f = \begin{pmatrix} \varnothing & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluţie: (i) Fie $f(B) = b$. Dacă $b \in B$, atunci $f(B) = b \notin B$. O contradicţie.

Deci $b \notin B \Leftrightarrow (\exists) D \subset A$ a.î. $f(D) = b \in D$. $D \neq B$ pentru că $b \in D \backslash B$ şi $f(D) = f(B)$.

Rezultă că nu există funcţii injective de la mulţimea părţilor unei mulţimi $\mathcal{P}(A)$, la mulţimea nevidă A.

(ii) Pentru exemplul dat $\{f(X) \mid X \subseteq A, f(X) \in X\} = \{1\}$, $(X = A)$ iar $B = A \backslash \{1\} = \{2, 3\}$. $f(\varnothing) = f(\{3\}) = f(A) = f(B) = 1$. Avem deci în acest caz trei exemple de mulţimi $D \neq B$ pentru care $f(D) = f(B)$.

Problema 5. Fie A, B, C trei mulţimi. Arătaţi că $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ unde $X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ este diferenţa simetrică a mulţimilor X, Y.

Soluţie: $A \Delta (B \Delta C) = A \Delta B \Delta C = (A \Delta B) \Delta C$ este reprezentată în figura de mai jos de regiunea colorată cu albastru.

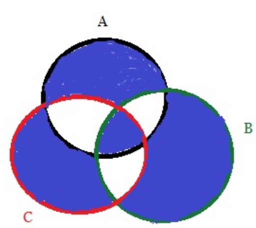

Figura 1: $A \Delta B \Delta C$