SEMINAR 13

Problema 1. Calculaţi caracteristica inelelor $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ şi $\mathbb{Z}[i]/ < 2 + 2i >$.

Soluţie: $\text{car}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}) = 0$.

$\text{ord}(\hat{1}, \bar{1}) = [\text{ord}(\hat{1}), \text{ord}(\bar{1})] = [4, 6] = 12 \Rightarrow \text{car}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6) = 12$.

Notăm $L = \mathbb{Z}[i]/ < 2 + 2i >$. $\text{car}(L) = \text{ord}(1_L)$ în grupul aditiv $(L, +)$. Deci este cel mai mic număr natural a.î. $n \cdot 1_L = 0 \Leftrightarrow n \cdot 1_L \in < 2+2i >$. $1_L = 1$. Vrem să găsim $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset < 2+2i >$. Fie $(a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$ a.î. $(a + bi)(2 + 2i) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2(a - b + (a + b)i) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$. Deci elementele întregi din idealul $< 2 + 2i >$ sunt $2 \cdot (a - (-a)) = 2 \cdot 2a = 4a$.

Deci cel mai mic număr natural care aparţine idealului $< 2 + 2i >$ este 4.

Avem $1 + 1 + 1 + 1 = 4 = (1 - i)(2 + 2i) \equiv_{<2+2i>} 0$ şi astfel $\text{car}(L) = 4$.

Problema 2. Fie A un inel şi $f : \mathbb{Q} \longrightarrow A$ un morfism de inele. Calculaţi caracteristica inelului A.

Soluţie: Pentru orice morfism de inele $\text{Ker}(f)$ este ideal în $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ este corp deci singurele ideale ale sale sunt 0 şi $\mathbb{Q}$.

- Dacă $\text{Ker}(f) = \mathbb{Q}$, atunci f este morfismul nul, dar f este morfism de inele şi $f(1) = 1$. O contradicţie.
- Deci varianta posibilă este $\text{Ker}(f) = 0$, adică f este injectivă. Astfel pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$ $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = n \cdot 1_A \neq 0$ (f este injectivă şi $n \neq 0$). Deci $\text{car}(A) = 0$.

Problema 3. Presupunem cunoscut faptul că inelul factor

$$L = \mathbb{Z}_2[X]/ < X^3 + X + \hat{1} >$$

are ordinul 8. Arătaţi că L este corp şi grupul său multiplicativ este generat de $\hat{X}$.

Soluţie: Putem arăta că L este corp în două moduri.

- Avem următorul rezultat: Fie K un corp şi $f(X) \in K[X]$ un polinom ireductibil. Atunci $K[X]/(f)$ este corp.

$f(X) = X^3 + X + \hat{1}$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2[X]$ pentru că $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$ (nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$ deci nu poate fi factorizat peste $\mathbb{Z}_2[X]$.)

- În L avem $\widehat{X^3} = -\hat{X} - \hat{1} = \hat{X} + \hat{1}$ (lucrăm cu coeficienţi $\mathbb{Z}_2$ şi $-\hat{1} = \hat{1}$).

Deci $L = \{a + b\hat{X} + c\hat{X}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2\} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{X}, \hat{X}^2, \hat{X} + \hat{1}, \hat{X}^2 + \hat{1}, \hat{X}^2 + \hat{X}, \hat{X}^2 + \hat{X} + \hat{1}\}$. Arătăm că orice element nenul este inversabil menţionând inverul fiecărui element.

$\hat{1}$ este propriul invers.

$\hat{X} \cdot (\hat{X}^2 + \hat{1}) = \hat{X}^3 + \hat{X} = \hat{X} + \hat{1} + \hat{X} = 2\hat{X} + \hat{1} = \hat{1}$. Deci $\hat{X}$ şi $\hat{X}^2 + \hat{1}$ sunt inverse unul altuia.

$\hat{X}^4 = \hat{X} \cdot \hat{X}^3 = \hat{X}(\hat{X} + \hat{1}) = \hat{X}^2 + \hat{X}$.

$\hat{X}^2(\hat{X}^2 + \hat{X} + \hat{1}) = \hat{X}^4 + \hat{X}^3 + \hat{X}^2 = \hat{X}^2 + \hat{X} + \hat{X} + \hat{1} + \hat{X}^2 = 2\hat{X}^2 + \hat{X} + \hat{1} = \hat{1}$. Deci $\hat{X}^2$ şi $\hat{X}^2 + \hat{X} + \hat{1}$ sunt inverse unul altuia.

$(\hat{X} + \hat{1})(\hat{X}^2 + \hat{X}) = \hat{X}^3 + \hat{X}^2 + \hat{X}^2 + \hat{X} = \hat{X} + \hat{1} + 2\hat{X}^2 + \hat{X} = 2\hat{X} + \hat{1} = \hat{1}$. Astfel $\hat{X} + \hat{1}$ şi $\hat{X}^2 + \hat{X}$ sunt inverse unul altuia.

Deci am toate elementele nenule sunt inversabile şi astfel L este corp.

Să vedem acum că $L\backslash\{0\}$ este generat de $\widehat{X}$.
Avem $\widehat{X}^2$,
$\widehat{X}^3 = \widehat{X} + \widehat{1}$,
$\widehat{X}^4 = \widehat{X}^2 + \widehat{X}$,
$\widehat{X}^5 = \widehat{X}\widehat{X}^4 = \widehat{X}(\widehat{X}^2 + \widehat{X}) = \widehat{X}^3 + \widehat{X}^2 = \widehat{X} + \widehat{1} + \widehat{X}^2 = \widehat{X}^2 + \widehat{X} + \widehat{1}$,
$\widehat{X}^6 = \widehat{X}^3\widehat{X}^3 = (\widehat{X} + \widehat{1})(\widehat{X} + \widehat{1}) = \widehat{X}^2 + 2\widehat{X} + \widehat{1} = \widehat{X}^2 + \widehat{1}$,
$\widehat{X}^7 = \widehat{X}\widehat{X}^6 = \widehat{X}(\widehat{X}^2 + \widehat{1}) = \widehat{X}^3 + \widehat{X} = \widehat{X} + \widehat{1} + \widehat{X} = 2\widehat{X} + \widehat{1} = \widehat{1}$.
Deci toate elementele nenule sunt obţinute ca puteri ale lui $\widehat{X}$.

Problema 4. Rezolvaţi în corpul cuaternionilor $\mathbb{H}$ ecuaţia

$$(1 + 2i + 3j + 4k)x = -37 + 4i + 9j + 8k.$$

Soluţie: $\mathbb{H} = \{a + b\underline{i} + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. În această expresie a este coeficientul matricei identitate 2×2.
$\underline{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. La seminar am scris ultima intrare din matrice i în loc de $-i$. Este greşit. Forma scrisă aici este corectă. Elementul i din matrice este $\sqrt{-1}$. $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ iar $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Aici $1 = I_2$, este elementul neutru la înmulţirea matricelor. Avem relaţiile $\underline{i}^2 = j^2 = k^2 = \underline{i}jk = -1$, $\underline{i}j = k = -j\underline{i}$, $jk = \underline{i} = -kj$, $k\underline{i} = j = -\underline{i}k$.
De aici voi folosi notaţia i pentru matricea $\underline{i}$.
Avem de rezolvat ecuaţia $(1 + 2i + 3j + 4k)(a + bi + cj + dk) = -37 + 4i + 9j + 8k$. făcând înmulţirile conform relaţiilor de mai sus şi adunând termenii asemenea obţinem
$(a-2b-3c-4d)+(2a+b-4c+3d)i+(3a+4b+c-2d)j+(4a-3b+2c+d)k = -37+4i+9j+8k$.
Egalând coeficienţii obţinem sistemul de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute:
$\begin{cases} a - 2b - 3c - 4d &= -37 \\ 2a + b - 4c + 3d &= 4 \\ 3a + 4b + c - 2d &= 9 \\ 4a - 3b + 2c + d &= 8 \end{cases}$ care are soluţia $a = 1, b = 3, c = 4, d = 5$.
Deci $x = 1 + 3i + 4j + 5k \in \mathbb{H}$.

Problema 5. Fie inelul factor

$$M = \mathbb{Z}[i]/ < 3 > .$$

Arătaţi că M este corp şi grupul său multiplicativ e generat de $\widehat{1 + i}$. În această problemă $i = \sqrt{-1}$.

Soluţie: $M = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{i}, \widehat{2i}, \widehat{1 + i}, \widehat{1 + 2i}, \widehat{2 + i}, \widehat{2 + 2i}\}$.
Pentru că $1 + 1 + 1 = 3 \in < 3 >$, deci $\mathrm{car}(M) = 3$.
Arătăm ca şi în **problema 3** că fiecare element nenul este inversabil.
$\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{4} \equiv_{<3>} \widehat{1}$, deci $\widehat{2}$ este propriul invers.
$\widehat{i} \cdot \widehat{2i} = \widehat{-2} \equiv_{<3>} \widehat{1}$, de unde deducem că $\widehat{i}$ şi $\widehat{2i}$ sunt inverse unul altuia.
$(\widehat{1 + i}) \cdot (\widehat{2 + i}) = \widehat{2} - \widehat{1} + \widehat{i} + \widehat{2i} = \widehat{1} + \widehat{3i} \equiv_{<3>} \widehat{1}$. Am obţinut că $\widehat{1 + i}$ şi $\widehat{2 + i}$ sunt inverse unul altuia.
$(\widehat{1 + 2i}) \cdot (\widehat{2 + 2i}) = \widehat{2} - \widehat{4} + \widehat{2i} + \widehat{4i} = -\widehat{2} + \widehat{6i} \equiv_{<3>} \widehat{1}$. Deci $\widehat{1 + 2i}$ şi $\widehat{2 + 2i}$ sunt inverse unul altuia.

Trebuie sămai arătăm că $M \backslash \{\hat{0}\}$ este generat de $\widehat{1+i}$.
$(\widehat{1+i})^2 = 1 + \widehat{2i - 1} = \hat{2}i$,
$(\widehat{1+i})^3 = 1 + \widehat{3i-3} - i = \widehat{1+2i}$,
$(\widehat{1+i})^4 = (\widehat{1+i})^2 \cdot (\widehat{1+i})^2 = \hat{2}i \cdot \hat{2}i = \widehat{-4} = -\hat{1} = \hat{2}$,
$(\widehat{1+i})^5 = (\widehat{1+i}) \cdot (\widehat{1+i})^4 = (\widehat{1+i}) \cdot \hat{2} = \widehat{2+2i}$,
$(\widehat{1+i})^6 = ((\widehat{1+i})^2)^3 = (\hat{2}i)^3 = \widehat{-8i} = \hat{i}$,
$(\widehat{1+i})^7 = (\widehat{1+i}) \cdot (\widehat{1+i})^6 = (\widehat{1+i}) \cdot (\hat{i}) = (\widehat{i-1}) = (\widehat{2+i})$.
$(\widehat{1+i})^8 = ((\widehat{1+i})^4)^2 = \hat{2}^2 = \hat{4} = \hat{1}$.

Problema 6. Explicitaţi morfismul lui Frobenius pentru corpul M din exemplul precedent.

Soluţie: Am menţionat că car$(M) = 3$. Morfismul Frobenius este $F : M \longrightarrow M, F(x) = x^3$. Deci pentru orice $\widehat{a+bi} \in M$, $F(\widehat{a+bi}) = \widehat{a+bi}^{\,3} = a^3 + 3a^2bi \widehat{+ 3ab}^2 i^2 + b^3 i^3 = a\widehat{^3 - b^3}i$.