## SEMINAR 11

**Problema 1.** Determinaţi idealele inelului $\mathbb{Z}_{12}$.

**Soluţie:** $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Din teorema de corespondenţă idealele $\overline{J}$ ale inelului $\mathbb{Z}_{12}$ sunt în bijecţie cu idealele $J$, $12\mathbb{Z} \subset J \subset \mathbb{Z}$. Dintr-un rezultat de la curs ştim că toate idealele inelului $\mathbb{Z}$ sunt de forma $n\mathbb{Z}$. Incluziunea $12\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ implică $n|12$, de unde $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Deci idealele $\overline{J} \subset \mathbb{Z}_{12}$ sunt $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

**Problema 2.** Determinaţi idealele (stângi/drepte/bilaterale) ale inelului de matrice $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

**Soluţie:** $\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $|\mathbb{Z}_2| = 2$ de unde $|\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)| = 16$. Voi scrie tabla înmulţirii pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$. Elementele inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ sunt $0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_8 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_9 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_{10} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Tabla înmulţirii este:

| $\cdot$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $I$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_{10}$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $A_1$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $0$ | $0$ | $A_5$ | $A_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_2$ | $0$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_5$ | $A_5$ | $A_5$ |
| $A_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_5$ | $A_5$ | $A_5$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_5$ |
| $A_3$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $0$ | $0$ | $A_9$ | $A_3$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_4$ | $0$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_9$ | $A_9$ | $A_9$ |
| $A_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_9$ | $A_9$ | $A_9$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_9$ |
| $A_5$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_5$ | $0$ | $A_5$ | $A_5$ | $0$ | $A_5$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $0$ |
| $A_6$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $0$ | $0$ | $1$ | $A_6$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_8$ | $0$ | $A_8$ | $A_6$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $I$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $I$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_{10}$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $1$ |
| $A_7$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_9$ | $A_6$ | $A_7$ | $I$ | $A_8$ | $A_5$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $A_{10}$ | $A_{11}$ | $1$ |
| $A_8$ | $0$ | $0$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_6$ | $A_8$ | $1$ | $1$ | $1$ | $A_8$ | $A_6$ | $1$ |
| $A_9$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_9$ | $0$ | $A_9$ | $A_9$ | $0$ | $A_9$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_3$ | $A_4$ | $0$ |
| $A_{10}$ | $0$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_1$ | $A_{10}$ | $A_{11}$ | $A_2$ | $1$ | $A_{13}$ | $A_{12}$ | $A_7$ | $I$ | $A_5$ |
| $A_{11}$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_3$ | $A_4$ | $1$ | $A_1$ | $A_{11}$ | $A_{10}$ | $A_2$ | $A_9$ | $A_7$ | $I$ | $A_{13}$ | $A_{12}$ | $A_5$ |
| $A_{12}$ | $0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_5$ | $A_3$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $A_4$ | $1$ | $A_{11}$ | $A_{10}$ | $I$ | $A_7$ | $A_9$ |
| $A_{13}$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_1$ | $A_2$ | $1$ | $A_3$ | $A_{13}$ | $A_{12}$ | $A_4$ | $A_5$ | $I$ | $A_7$ | $A_{11}$ | $A_{10}$ | $A_9$ |
| $1$ | $0$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_6$ | $A_8$ | $1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_6$ | $A_8$ | $0$ |

Ideale la dreapta: $\{0, A_1, A_2, A_5\}$, $\{0, A_3, A_4, A_9\}$, $\{0, A_6, A_8, 1\}$

Ideale la stânga: $\{0, A_1, A_3, A_6\}$, $\{0, A_2, A_4, A_8\}$, $\{0, A_5, A_9, 1\}$

Singulerele ideale bilaterale sunt 0 şi inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

**Problema 3.** Arătaţi că idealul generat de 2 şi $X$ în $\mathbb{Z}[X]$ nu este principal.

**Soluţie:** Un ideal principal este un ideal generat de un singur element. Idealul generat de 2 şi $X$, $I =< 2, X >$ este diferit de tot inelul $\mathbb{Z}[X]$ (1 nu se scrie ca o combinaţie de 2 şi $X$ cu coeficienţi polinoame).

Presupunem că $I =< 2, X >=< f >$, deci în particular $< 2, X >\subset< f >\Rightarrow f|X$ şi $f|2$. Din $f|X \Rightarrow f = \pm 1$ sau $f = \pm X$. Dar cum $I \neq \mathbb{Z}[X]$, $f \neq \pm 1$, deci $f = \pm X$. Relaţia $f|2$ devine $\pm X|2$, ceea ce este o contradicţie. Deci $I$ nu este principal.

**Problema 4.** Fie $A$ şi $B$ două inele comutative. Arătaţi că idealele inelului produs direct $A \times B$ sunt de forma $I \times J$ cu $I$ ideal al lui $A$ şi $J$ ideal a lui $B$.

**Soluţie:** Demonstrăm că $I \times J$ este ideal în inelul $A \times B$.

Considerăm morfismul de inele $\varphi : A \times B \longrightarrow A/I \times B/J, \varphi(a, b) = (a + I, b + J)$. Este un morfism surjectiv de inele, iar $\mathrm{Ker}(\varphi) = I \times J$, este ideal în $A \times B$ ( ca nucleul unui morfism de inele).

Demonstrăm acum că orice ideal din inelul $A \times B$ este produs direct de ideale din cele două inele. Fie $K \subset A \times B$, ideal. Considerăm morfismele proiecţie pe cei doi factori $p : A \times B \longrightarrow A$ şi $q : A \times B \longrightarrow B$.

Arătăm că $K = p(K) \times q(K)$.

Fie $(x, y) \in K, (x, y) = (x, 0) + (0, y)$, deci $K \subset p(K) \times q(K)$.

Fie $(x, y), (x', y') \in K$, arbitrare şi deci $(x, y') \in p(K) \times q(K)$ un element arbitrar.

$(x, y') = (1, 0)(x, y) + (0, 1)(x', y') \in K$. De aici egalitatea $K = p(K) \times q(K)$.

**Problema 5.** Determinanţi idealele inelului produs direct $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

**Soluţie:** Singurele ideale ale unui corp $k$ sunt 0 şi $k$. Deci, folosind **problema 4** idealele inelului $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ sunt $0, n\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, n \geqslant 1$.

**Problema 6.** Arătaţi că nu există morfisme de inele între $\mathbb{Z}[i]$ şi $\mathbb{Q}$. ($i = \sqrt{-1}$).

**Soluţie:** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este inelul întregilor lui Gauss.

Un morfism de inele $f : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}$ are proprietatea $f(1) = 1$ (1 este unitatea faţă de înmulţire atât în $Z[i]$ cât şi în $\mathbb{Q}$). $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2$.

Fie $f(i) = x \in \mathbb{Q}$, valoarea elementului $i$ prin morfismul $f$.

Dar $2 = (1 + i)(1 - i)$. De aici $2 = f(2) = f((1 + i)(1 - i)) = f(1 + i)f(1 - i) = (f(1) + f(i))(f(1) - f(i)) = (1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$. Deci $x^2 = -1$ cu $x \in \mathbb{Q}$. Absurd.

Deci nu există morfism de inele $f : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}$.

**Problema 7.** Calculaţi tablele de adunare şi înmulţire ale inelului factor $\mathbb{Z}[i]/ < 2 >$. Câte ideale are acest inel ?

**Soluţie:** Avem următoarele clase în $\mathbb{Z}[i]/ < 2 >$.

- $a = 2p, b = 2q, p, q \in \mathbb{Z}$; $\widehat{a + bi} = \widehat{0}$,
- $a = 2p + 1, b = 2q, p, q \in \mathbb{Z}$; $\widehat{a + bi} = \widehat{1}$,
- $a = 2p, b = 2q + 1, p, q \in \mathbb{Z}$; $\widehat{a + bi} = \widehat{i}$,
- $a = 2p + 1, b = 2q + 1, p, q \in \mathbb{Z}$; $\widehat{a + bi} = \widehat{1 + i}$.

Tabla adunării:

| $+$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{i}$ | $\widehat{1+i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{i}$ | $\widehat{1+i}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\widehat{1+i}$ | $\hat{i}$ |
| $\hat{i}$ | $\hat{i}$ | $\widehat{1+i}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\widehat{1+i}$ | $\widehat{1+i}$ | $\hat{i}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ |

Tabla înmulţirii:

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{i}$ | $\widehat{1+i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{i}$ | $\widehat{1+i}$ |
| $\hat{i}$ | $\hat{0}$ | $\hat{i}$ | $\hat{1}$ | $\widehat{1+i}$ |
| $\widehat{1+i}$ | $\hat{0}$ | $\widehat{1+i}$ | $\widehat{1+i}$ | $\hat{0}$ |

Idealele inelului $\mathbb{Z}[i]/<2>$ sunt $\hat{0}$, $\mathbb{Z}[i]/<2>=\{\hat{0},\hat{1},\hat{i},\widehat{1+i}\}$ şi $<1+i>=\{\hat{0},\widehat{1+i}\}$. Deci inelul are trei ideale, toate bilaterale, inelul fiind comutativ.

**Problema 8.** Arătaţi că
$(i)$ funcţia $f:\mathbb{Z}[i]\longrightarrow\mathbb{Z}_5, f(a+bi)=\widehat{a+2b}$ este morfism de inele.
$(ii)$ Inelul factor $\mathbb{Z}[i]/<2-i>$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_5$.

**Soluţie:**
$(i)$ $f((a+bi)+(c+di)) = f((a+c)+(b+d)i) = \widehat{(a+c)+2(b+d)} = \widehat{a+2b+c+2d} = \widehat{a+2b}+\widehat{c+2d} = f(a+bi)+f(c+di)$.

$f((a+bi)\cdot(c+di)) = f((ac-bd)+(ad+bc)i) = \widehat{(ac-bd)+2(ad+bc)} = \widehat{(ac+4bd)+2(ad+bc)}$ (în $\mathbb{Z}_5, -1\equiv_5 4$ ) $= \widehat{(a+2b)(c+2d)} = (\widehat{a+2b})\cdot(\widehat{c+2d}) = f(a+bi)\cdot f(c+di)$.

$f(0)=\hat{0}, f(1)=\hat{1}$.

$(ii)$ Morfismul este surjectiv deoarece pentru $(\forall)\hat{x}\in\mathbb{Z}_5, (\exists)x+0i\in\mathbb{Z}[i]$, a.î. $f(x+0i) = \widehat{x+2\cdot 0}=\hat{x}$.

" $\mathrm{Ker}(f)=<2-i>$ "

" $\subseteq$ " Fie $a+bi\in\mathbb{Z}[i]\Leftrightarrow\widehat{a+2b}=\hat{0}\in\mathbb{Z}_5\Leftrightarrow a+2b=5k, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=5k-2b$.

Deci un element arbitrar din $\mathrm{Ker}(f)$ este de forma $(5k-2b)+bi, b,k\in\mathbb{Z}$. Pentru a arăta incluziunea trebuie să vedem că $(5k-2b)+bi\in<2-i>$, adică trebuie să găsim $m,n\in\mathbb{Z}$ a.î. $(5k-2b)+bi=(m+ni)(2-i)\Leftrightarrow(5k-2b)+bi=(2m+n)+(-m+2n)i$.

Sistemul $\begin{cases} 2m+n &= 5k-2b \\ -m+2n &= b \end{cases}$. Înmulţim cu 2 ecuaţia a doua şi adunăm cele două ecuaţii. Obţinem $n=k$. Introducând în prima ecuaţie obţinem $m=2k-b$.

Deci $(5k-2b)+bi=((2k-b)+ki)(2-i)\in<2-i>$.

" $\supseteq$ " Este suficient să verificăm că $(2-i)\in\mathrm{Ker}(f)$. $f(2-i)=\widehat{2+2(-1)}=\widehat{2-2}=\hat{0}$.

Din teorema fundamentală de izomorfism pentru inele rezultă că $\mathbb{Z}[i]/<2-i>\simeq\mathbb{Z}_5$.

**Problema 9.** Arătaţi că inelul factor $\mathbb{Z}[i]/<2+2i>$ nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_8$.

**Soluţie:** Inelul $\mathbb{Z}_8$ are zero-divizori $\{\hat{2},\hat{4},\hat{6}\}$, dar şi elementele nilpotente $\hat{2}$ cu ordinul de nilpotenţă 3 şi $\hat{4}$ cu ordinul de nilpotenţă 2.

Arătăm că în $\mathbb{Z}[i]/<2+2i>$ nu există nilpotenţi de ordin 2.

Considerăm $a+bi \notin < 2+2i > \Leftrightarrow a, b$ nu sunt simultan pare (adică $a+bi \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]/ < 2+2i >$). Arătăm că $(a+bi)^2 \neq 0$ în $\mathbb{Z}[i]/ < 2+2i >$.

Presupunem că $(a+bi)^2 = 0 \in \mathbb{Z}[i]/ < 2+2i > \Leftrightarrow (\exists) m, n \in \mathbb{Z}$ a.î. $(a+bi)^2 = (2+2i)(m+ni) \Leftrightarrow (a^2-b^2)+2abi = 2(m-n)+2(m+n)i$.

Cum $a, b$ nu sunt simultan pare avem trei cazuri:

• $a = 2p+1$, $b = 2q$

$a^2 - b^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2$ este impar deci nu poate fi egal cu $2(m-n)$.

• $a = 2p$, $b = 2q+1$

$a^2 - b^2$ este impar (similar calcului de mai sus).

• $a = 2p+1$, $b = 2q+1$

$a^2 - b^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2 - 4q - 1 = 4(p^2 - q^2) + 4(p-q) = 4(p-q)(p+q+1)$,

$2ab = 2(2p+1)(2q+1)$.

Obţinem sistemul $\begin{cases} 2(m-n) &= 4(p-q)(p+q+1) \\ 2(m+n) &= 2(2p+1)(2q+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n &= 2(p-q)(p+q+1) \\ m+n &= (2p+1)(2q+1) \end{cases}$

Adunând cele două ecuaţii obţinem $2m = 2(p-q)(p+q+1) + (2p+1)(2q+1) \Leftrightarrow 2m - 2(p-q)(p+q+1) = (2p+1)(2q+1)$, adică un număr par este egal cu un număr impar, ceea ce este absurd.

Deci $\mathbb{Z}[i]/ < 2+2i >$ nu are nilpotenţi de ordin 2, deci nu poate fi izomorf cu $\mathbb{Z}_8$, care elementul $\hat{4}$ nilpotent de ordin 2.