SEMINAR 9

Problema 1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$.

(i) Scrieţi pe σ ca produs de cicli disjuncţi.
(ii) Calculaţi ordinul permutării σ.
(iii) Calculaţi signatura permutării σ.

Soluţie:
(i) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (1297)(38)(47)$. Reamintesc că 5 nu se scrie pentru că este element fixat de σ. Cicli disjuncţi permută.
(ii) Pentru un produs de cicli disjuncţi $c_1c_2\dots c_p, \mathrm{ord}(c_1c_2\dots c_p) = [\mathrm{ord}(c_1), \mathrm{ord}(c_2), \dots, \mathrm{ord}(c_p)]$, unde $[,,..,]$ reprezintă c.m.m.m.c al numerelor dintre parantezele drepte.

Deci $\mathrm{ord}(\sigma) = [4, 2, 2, 1] = 4$.
(iii) Signatura unei transpoziţii este -1. Deci $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{numărul de transpoziţii}}$.

$(1297) = (12)(29)(97)$, (în general un ciclu de lungime k este produsul unui ciclu a $k-1$ transpoziţii).

Deci $\sigma = (1297)(38)(47) = (12)(29)(97)(38)(47)$, deci $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.

Problema 2. Scrieţi grupul diedral D_6 ca un subgrup al lui S_6.

Soluţie: Este suficient să scriem generatorii R, s, unde R este rotaţia în sens antiorar cu $60°$, iar s este simetria în dreapta ce uneşte mijlocul a două muchii.

$R \rightsquigarrow (123456)$ iar $s \rightsquigarrow (16)(25)(34)$. R este un element de ordin 6 iar s are ordinul 2.

$R^2 \rightsquigarrow (135)(246), R^3 \rightsquigarrow (14)(25)(36), R^4 \rightsquigarrow (153)(246), R^5 \rightsquigarrow (165432)$.

Vă rămâne să scrieţi celelalte elemente de ordin 2, care corespund simetriilor $Rs, R^2s, R^3s, R^4s, R^5s$.

Problema 3. Listaţi elementele subgrupului lui S_8 generat de $(1256)(3478)$ şi $(1357)(2864)$ (prezentarea prin permutări a grupului cuternionilor).

Soluţie: Notăm $j = (1256)(3478)$ şi $k = (1357)(2864)$. Vedem că şi pentru j şi pentru k cei doi 4 cicli comută fiind pe mulţimi diferite de indici.

Astfel $j^2 = (15)(26)(37)(48) = (15)(37)(26)(84) = k^2$.

$j^3 = (1256)^3(3478)^3 = (1652)(3874)$, $k^3 = (1357)^3(2864)^3 = (1753)(2468), j^4 = k^4 = e$.

$jk = (1256)(3478)(1357)(2864) = (1458)(2367)$,

$kj = (1357)(2864)(1256)(3478) = (1854)(2763) = (jk)^3$

$(jk)^2 = (15)(48)(26)(37) = (kj)^2 = j^2 = k^2$.

Deci $< j, k >= \{e, j, k, j^3, k^3, jk, kj = (jk)^3, j^2 = k^2 = (jk)^2 = (kj)^2\}$.

Problema 4. Listaţi subgrupurile lui A_4 precizând care sunt normale.

Soluţie: A_4 este subgrupul altern al grupului S_4, format din permutările pare. Am precizat mai sus că un ciclu de lungime k este produsul unui ciclu a $k-1$ transpoziţii, deci signatura unui ciclu de lungime k este $(-1)^{k-1}$. Elementele grupului A_4 sunt:
e,
$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$,
$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$.

Subgrupurile sunt: e, $<(12)(34)>= \{e, (12)(34)\}$, $<(13)(24)>= \{e, (13)(24)\}$, $<(14)(23)>= \{e, (14)(23)\}$,
$<(12)(34), (13)(24)>= \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,
$<(123)>= \{e, (123), (132)\}$, $<(124)>= \{e, (124), (142)\}$, $<(134)>= \{e, (134), (143)\}$,
$<(234)>= \{e, (234), (243)\}$ şi bineînţeles A_4.
Dintre acestea, conjugând cu elemente din A_4 vedem că în afară de e şi A_4 subgrupul $<(12)(34), (13)(24)>= \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ este normal în A_4.

Problema 5. În S_7 considerăm subgrupul $C =< (123), (12)(4567) >$. Listaţi elementele lui C ştiind că $|C| = 12$.

Soluţie: Fie $a = (123)$, $b = (12)(4567)$. $a^2 = (132), a^3 = e = b^4$. $b^2 = (46)(57), b^3 = (12)(4765)$.
$ab = (123)(12)(4567) = (12)(23)(12)(4567) = (13)(4567)$,
$ba = (12)(4567)(123) = (12)(4567)(12)(23) = (12)(12)(23)(4567) = (23)(4567)$.
Se vede că $(ab)^2 = (ba)^2 = b^2 = (46)(57)$, $(ab)^3 = (13)(4765)$, $(ba)^3 = (23)(4765)$.
$a^2b = (132)(12)(4567) = (23)(4567) = (13)(4567) = ba$,
$ba^2 = (12)(4567)(132) = (12)(132)(4567) = (13)(4567) = ab$.
$ab^2 = b^2a = (123)(46)(57)$, $a^2b^2 = b^2a^2 = (132)(46)(57)$.
Deci $C = \{e, a, a^2, b, b^2, b^3, ab, ba, (ab)^3, (ba)^3, ab^2, a^2b^2\}$.

Problema 6. Examinând ordinul elementelor, arătaţi că grupurile D_6, A_4 şi C nu sunt izomorfe.

Soluţie: Considerăm numai elementele netriviale
D_6:
2 elemente de ordin 6: R, R^5
2 elemente de ordin 3: R^2, R^4.
7 elemente de ordin 2: $R^3, s, Rs, R^2s, R^3s, R^4s, R^5s$.
A_4 :
8 elemente de ordin 3: $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$
3 elemente de ordin 2: $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$.
C :
2 elemente de ordin 6: ab^2, a^2b^2.
6 elemente de ordin 4: $b, b^3, ab, ba, (ab)^3, (ba)^3$.
2 elemente de ordin 3: a, a^2,
1 element de ordin 2: $b^2 = (ab)^2 = (ba)^2$.

Problema 7. Fie $K = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Arătaţi că:
(i) K este subgrup normal în S_4.
(ii) Scrieţi clasele lui S_4 modulo K.
(iii) S_4/K este izomorf cu S_3.

Soluţie: *(i)* Ştim că $S_4 = <(12),(23),(34)>$. Deci va trebui să verificăm conjugarea elementelor din K cu aceşti generatori.
$(12)(12)(34)(12) = (34)(12) = (12)(34), (12)(13)(24)(12) = (14)(23), (12)(14)(23)(12) = (13)(24)$,
$(23)(12)(34)(23) = (13)(24), (23)(13)(24)(23) = (12)(34), (23)(14)(23)(23) = (23)(14) = (14)(23)$,
$(34)(12)(34)(34) = (34)(12) = (12)(34), (34)(13)(24)(34) = (14)(23), (34)(14)(23)(34) = (13)(24)$.

Vedem că toate elementele din K conjugate cu generatorii lui S_4 ne dau elemente din K. Deci K este normal.

(ii) Voi scrie elementele grupului S_4.

e,
$(12),(13),(14),(23),(24),(34)$,
$(12)(34),(13)(24),(14)(23)$,
$(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)$,
$(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)$.

Trebuie să vedem care sunt mulţimile σK cu $\sigma \in S_4$.

Prima clasă a lui S_4 modulo K este chiar K. Considerăm σ transpoziţie.

$(12)K = \{(12),(12)(12)(34),(12)(13)(24),(12)(14)(23)\} = \{(12),(34),(1324),(1423)\} = (34)K = (1324)K = (1423)K$,

$(13)K = \{(13),(13)(12)(34),(13)(13)(24),(13)(14)(23)\} = \{(13),(1234),(24),(1432)\} = (24)K = (1234)K = (1432)K$,

$(14)K = \{(14),(14)(12)(34),(14)(13)(24),(14)(14)(23)\} = \{(14),(1243),(1342),(23)\} = (23)K = (1243)K = (1342)K$,

$(123)K = \{(123),(123)(12)(34),(123)(13)(24),(123)(14)(23)\} = \{(123),(134),(243),(142)\} = (134)K = (243)K = (142)K$,

$(132)K = \{(132),(132)(12)(34),(132)(13)(24),(132)(14)(23)\} = \{(132),(234),(124),(143)\} = (234)K = (124)K = (143)K$.

Acestea sunt cele şase clase modulo K.

(iii) $f : S_4 \longrightarrow S_3$ decriem un morfism pe generatori. $(12) \mapsto (12), (23) \mapsto (23), (34) \mapsto (12)$. Este clar că $(12)(34) \mapsto (12)^2 = e$.

$(13) = (12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ iar $(24) = (23)(34)(23)$, de unde
$(13)(24) \mapsto (23)(12)(23)(23)(12)(23) = e$.

Am demonstrat că $(12)(34)$ şi $(13)(24) \in \operatorname{Ker}(f)$, deci şi produsul acestora $(14)(23) \in \operatorname{Ker} f$.

Deci $\operatorname{Ker}(f) = K$ şi f este surjectiv. Folosind teorema fundamentală de izomorfism rezultă că $S_4/K \simeq S_3$.

Problema 8. Fie D_5 subgrupul lui S_5 generat de (12345) şi $(25)(34)$.

(i) Scrieti elementele lui D_5.
(ii) Listaţi subgrupurile lui D_5 precizând care sunt normale.

Soluţie:*(i)* Fie $r = (12345)$ şi $s = (25)(34)$.

$D_5 = \{e, r, r^2 = (13524), r^3 = (14253), r^4 = (15432), s, rs = (12)(35), r^2 s, r^3 s, r^4 s\}$

(ii) $<(12345)>$ este normal. Mai sunt subgrupuri de ordin 2 generate fiecare de câte o simetrie. Acestea nu sunt normale.