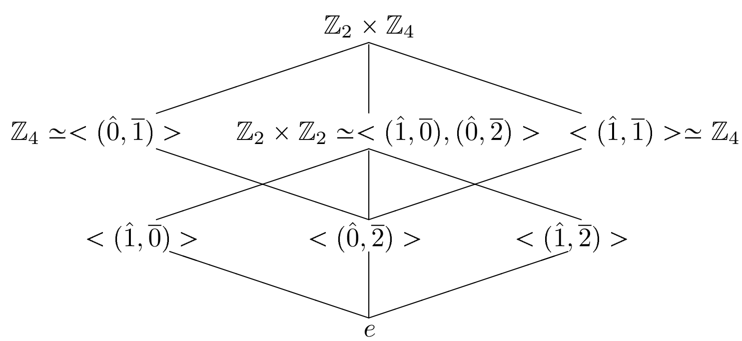
SEMINAR 8

Tema 7 Problema 1. Voi descrie subgrupurile grupului abelian $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{e = (\hat{0}, \overline{0}), (\hat{0}, \overline{1}), (\hat{0}, \overline{2}), (\hat{0}, \overline{3}), (\hat{1}, \overline{0}), (\hat{1}, \overline{1}), (\hat{1}, \overline{2}), (\hat{1}, \overline{3})\}$.
$\mathrm{ord}(e) = 1, \mathrm{ord}((\hat{0}, \overline{1})) = 4, \mathrm{ord}((\hat{0}, \overline{2})) = 2, \mathrm{ord}((\hat{0}, \overline{3})) = 4, \mathrm{ord}((\hat{1}, \overline{0})) = 2, \mathrm{ord}((\hat{1}, \overline{1}) = 4, \mathrm{ord}((\hat{1}, \overline{2})) = 2, \mathrm{ord}((\hat{1}, \overline{3})) = 4$.

Subgrupuri: e,
$< (\hat{0}, \overline{2}) >= \{e, (\hat{0}, \overline{2})\}$ subgrup de ordin 2,
$< (\hat{1}, \overline{0}) >= \{e, (\hat{1}, \overline{0})\}$ subgrup de ordin 2,
$< (\hat{1}, \overline{2}) >= \{e, (\hat{1}, \overline{2})\}$ subgrup de ordin 2,
$< (\hat{0}, \overline{1}) >= \{e, (\hat{0}, \overline{1}), (\hat{0}, \overline{2}), (\hat{0}, \overline{3})\} =< (\hat{0}, \overline{3}) >$ subgrup de ordin 4
$< (\hat{1}, \overline{1}) >= \{e, (\hat{1}, \overline{1}), (\hat{0}, \overline{2}), (\hat{1}, \overline{3})\} =< (\hat{1}, \overline{3}) >$ subgrup de ordin 4.
Dar $(\hat{0}, \overline{2}) + (\hat{1}, \overline{0}) = (\hat{1}, \overline{2})$, $(\hat{1}, \overline{0}) + (\hat{1}, \overline{2}) = (\hat{0}, \overline{2})$ şi $(\hat{1}, \overline{2}) + (\hat{0}, \overline{2}) = (\hat{1}, \overline{0})$.

Deci $\{e, (\hat{0}, \overline{2}), (\hat{1}, \overline{0}), (\hat{1}, \overline{2})\}$ formează un subgrup de ordin 4, izomorf cu grupul Klein. Laticea subgrupurilor este:



Toate subgrupurile sunt normale pentru că grupul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ este abelian.

Tema 7 Problema 3. Considerăm morfismul $F : G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G)$ definit prin $F(g) = \varphi_g$.

Arătăm că $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$. Considerăm $f \in \mathrm{Aut}(G)$ şi $\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$. $f \circ \varphi_g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(g)$. Avem $(f \circ \varphi_g \circ f^{-1})(x) = f(\varphi_g(f^{-1}(x))) = f(gf^{-1}(x)g^{-1}) = f(g)f(f^{-1}(x))(f(g))^{-1} =$
$= f(g)(f \circ f^{-1})(x)(f(g))^{-1} = f(g)\,\mathrm{id}_G(x)(f(g))^{-1} = f(g)x(f(g))^{-1} = \varphi_{f(g)}(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f \circ \varphi_g \circ f^{-1} = \varphi_{f(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$. Deci conjugarea unui element din $\mathrm{Inn}(G)$ cu un element arbitrar din $\mathrm{Aut}(G)$ ne dă un element din $\mathrm{Inn}(G)$. Astfel $\mathrm{Inn}(G)$ este subgrup normal în $\mathrm{Aut}(G)$.

Determinăm acum subgrupul $\mathrm{Ker}(F) = \{g \in G \mid F(g) = \mathrm{id}_G\} = \{g \in G \mid \varphi_g = \mathrm{id}_G\}$.

$\varphi_g = \mathrm{id}_G \Leftrightarrow \varphi_g(x) = \mathrm{id}_G(x), (\forall)x \in G \Leftrightarrow gxg^{-1} = x, (\forall)x \in G \Leftrightarrow gx = xg, (\forall)x \in G$.

Deci $\mathrm{Ker}(F) = \{g \in G \mid gx = xg, (\forall)x \in G\}$. Acest subgrup normal (nucleul oricărui morfism este un subgrup normal) în G se numeşte centrul grupului G şi se notează cu $Z(G)$. Este subgrupul elementelor care comută cu toate elementele grupului G.

Problema 1. Demonstraţi că orice subgrup finit generat al grupului $(\mathbb{Q},+)$ este ciclic.

Soluţie: Considerăm $H =< \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} >< \mathbb{Q}$, unde $q_j \in \mathbb{N}^\star$ pentru orice $1 \leqslant j \leqslant n$. Considerăm $s = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$, c.m.m.m.c. al numitorilor şi fractiile echivalente $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p'_1}{s}, \ldots \frac{p_n}{q_n} = \frac{p'_n}{s}$.

Atunci $H =< \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} >=< \frac{p'_1}{s}, \ldots, \frac{p'_n}{s} >=< \frac{1}{s} >$ pentru că oricare dintre generatorii $\frac{p'_j}{s} = \frac{1}{s} + \ldots + \frac{1}{s}$ sumă cu p'_j termeni dacă $p'_j > 0$ şi opusul acestei sume dacă $p'_j < 0$.

Problema 2. Determinaţi morfismele între grupurile aditive $\mathbb{Z}_{12}$ şi $\mathbb{Z}_{18}$.

Soluţie: Fie $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{18}, f$ morfism. Întrucât $\mathbb{Z}_{12} =< \hat{1} >$, grup ciclic generat de $\hat{1}$, este suficient să dăm valoarea lui f pe generatorul $\hat{1}$
(pentru fiecare $\hat{g} \in \mathbb{Z}_{12}, f(\hat{g}) = f(\hat{1} + ... + \hat{1}),$ cu g termeni în sumă, $= f(\hat{1}) + ... + f(\hat{1}) = gf(\hat{1})$).

Fie aşadar $f(\hat{1}) = \overline{k} \in \mathbb{Z}_{18}$. Ştim că ordinul elementului divide ordinul grupului, deci ord$(\overline{k})|18$.

Dar $f(\hat{0}) = \overline{0}$ (f morfism), $\overline{0} = f(\hat{0}) = f(\widehat{12}) = f(12 \cdot \hat{1}) = 12f(\hat{1}) = 12 \cdot \overline{k}$. Dar ord$(\overline{k})$ este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea $p \cdot \overline{k} = \overline{0}$. Deci ord$(\overline{k})|12$. Deci ord$(\overline{k})$ divide şi 12 şi 18, deci ord$(\overline{k})$ divide c.m.m.d.c (12,18) = 6. Astfel ord$(\overline{k}) \in \{1, 2, 3, 6\}$. Vom nota cu $f_{\overline{k}}$ morfismul cu valoarea în $\hat{1}$ egală cu $\overline{k}$. Deci $f_{\overline{k}}(\hat{1}) = \overline{k}$.

Dacă ord$(\overline{k}) = 1 \Rightarrow \overline{k} = \overline{0}$ şi $f_{\overline{0}}$ este morfismul nul, Im$(f_{\overline{0}}) = \{\overline{0}\}$,

dacă ord$(\overline{k}) = 2 \Rightarrow \overline{k} = \overline{9}$, $f_{\overline{9}}(\hat{1}) = \overline{9}$, Im$(f_{\overline{9}}) = \{\overline{0}, \overline{9}\}$

dacă ord$(\overline{k}) = 3 \Rightarrow \overline{k} \in \{\overline{6}, \overline{12}\}$, $f_{\overline{6}}(\hat{1}) = \overline{6}$, Im$(f_{\overline{6}}) = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\} =$ Im$(f_{\overline{12}}); f_{\overline{12}}(\hat{1}) = \overline{12}$,

dacă ord$(\overline{k}) = 6 \Rightarrow \overline{k} \in \{\overline{3}, \overline{15}\}$, $f_{\overline{3}}(\hat{1}) = \overline{3}$, Im$(f_{\overline{6}}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\} =$ Im$(f_{\overline{15}}); f_{\overline{15}}(\hat{1}) = \overline{15}$,

Aceste morfisme se pot şi aduna şi avem Hom$(\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18}) \simeq \mathbb{Z}_6$. Tabla adunării este

$+$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$
$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$
$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{0}}$
$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$
$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$
$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{12}}$	$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$
$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{15}}$	$f_{\overline{0}}$	$f_{\overline{3}}$	$f_{\overline{6}}$	$f_{\overline{9}}$	$f_{\overline{12}}$

Cum adunăm în general două funcţii $f, h : A \longrightarrow (B,+)$, unde pe B avem o operaţie de adunare.

$f + h : A \longrightarrow B$ este o altă funcţie şi aceasta este definită $(f + h)(a) = f(a) + h(a)$. În acest fel adunăm şi morfismele între $\mathbb{Z}_{12}$ şi $\mathbb{Z}_{18}$.

Să exemplificăm pentru două morfisme. Să vedem că $f_{\overline{9}} + f_{\overline{6}} = f_{\overline{15}}$.

$(f_{\overline{9}} + f_{\overline{6}})(\hat{1}) = f_{\overline{9}}(\hat{1}) + f_{\overline{6}}(\hat{1}) = \overline{9} + \overline{6} = \overline{15} = f_{\overline{15}}(\hat{1})$.

Mai mult pentru orice $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{12}$, $(f_{\overline{9}}+f_{\overline{6}})(\hat{k}) = f_{\overline{9}}(\hat{k})+f_{\overline{6}}(\hat{k}) = f_{\overline{9}}(k\hat{1})+f_{\overline{6}}(k\hat{1}) = kf_{\overline{9}}(\hat{1})+kf_{\overline{6}}(\hat{1}) = k(f_{\overline{9}}(\hat{1}) + f_{\overline{6}}(\hat{1})) = k(\overline{9} + \overline{6}) = k\overline{15} = kf_{\overline{15}}(\hat{1}) = f_{\overline{15}}(k\hat{1}) = f_{\overline{15}}(\hat{k})$. Deci $f_{\overline{9}} + f_{\overline{6}} = f_{\overline{15}}$. Vedem că este suficient să verificăm egalitatea pe generatorul $\hat{1}$.

În general avem Hom$(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) \simeq \mathbb{Z}_{(p,q)}$.

Problema 3. Arătaţi că singurul morfism de grupuri de la $(\mathbb{Q},+)$ la $(\mathbb{Z},+)$ este cel nul.

Soluţie: Fie $f : (\mathbb{Q},+) \longrightarrow (\mathbb{Z},+)$ morfism de grupuri. Deci $f(0) = 0$ şi $f(1) = k \in \mathbb{Z}$. Dar $1 \in \mathbb{Q}$ se poate scrie ca fracţie $\frac{p}{p} = 1, (\forall)p \in \mathbb{N}^\star$. $k = f(1) = f(\frac{p}{p}) = pf(\frac{1}{p}) \Rightarrow p|k$ pentru $(\forall)p \in \mathbb{N}^\star$.

De aici $k = 0$. Dar f este morfism deci $f(n) = nf(1) = n \cdot 0 = 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$. Dacă $m \in \mathbb{Z}, m < 0$,, atunci $0 = f(0) = f(m - m) = f(m) + f(-m) = f(m) + 0 \Rightarrow f(m) = 0$. $0 = f(\frac{p}{p}) = pf(\frac{1}{p}) \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = 0 \Rightarrow f(\frac{r}{p}) = rf(\frac{1}{p}) = r \cdot 0 = 0$.

Problema 4. Calculaţi tabla de înmulţire a grupului factor $Q/\{\pm 1\}$ unde Q este grupul cuaternionilor.

Soluţie: Notăm $H = \{\pm 1\}$, unde $1 = I_2$. $< \mathbf{j} > \cap < \mathbf{k} >= \{\pm I_2\}$. H fiind intersecţie de subgrupuri normale este un subgrup normal al grupului Q, deci Q/H este grup. Elementele sunt $\overline{H}$ pe care o vom nota cu $\overline{1_H}$.

$\bar{\mathbf{j}} = \{\pm \mathbf{j}\}$, $\bar{\mathbf{k}} = \{\pm \mathbf{k}\}$, $\overline{\mathbf{jk}} = \{\pm \mathbf{jk}\}$.

$\bar{\mathbf{j}}^2 = \overline{\mathbf{j^2}} = \overline{-I_2} = \overline{1_H}$.

$\bar{\mathbf{k}}^2 = \overline{\mathbf{k^2}} = \overline{-I_2} = \overline{1_H}$.

$\overline{\mathbf{jk}}^2 = \overline{(\mathbf{jk})^2} = \overline{\mathbf{jkjk}} = \overline{-\mathbf{jjkk}} = \overline{I_2(-I_2)} = \overline{-I_2} = \overline{1_H}$.

Tabla înmulţirii a grupului factor $Q/\{\pm 1\}$ este

$\cdot$	$\overline{1_H}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\bar{\mathbf{k}}$	$\overline{\mathbf{jk}}$
$\overline{1_H}$	$\overline{1_H}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\bar{\mathbf{k}}$	$\overline{\mathbf{jk}}$
$\bar{\mathbf{j}}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\overline{1_H}$	$\overline{\mathbf{jk}}$	$\bar{\mathbf{k}}$
$\bar{\mathbf{k}}$	$\bar{\mathbf{k}}$	$\overline{\mathbf{jk}}$	$\overline{1_H}$	$\bar{\mathbf{j}}$
$\overline{\mathbf{jk}}$	$\overline{\mathbf{jk}}$	$\bar{\mathbf{k}}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\overline{1_H}$

Problema 5. Arătaţi că funcţia

$$f : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, +), \; f(a, b) = (a - b, \hat{a})$$

este morfism de grupuri. Deduceţi că grupul factor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ < (2, 2) >$ este izomorf cu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Soluţie $f((a, b) + (c, d)) = f(a + c, b + d) = (a + c - (b + d), \widehat{a + c}) = (a - b + c - d, \hat{a} + \hat{c}) = (a - b, \hat{a}) + (c - d, \hat{c}) = f(a, b) + f(c, d)$. Deci f este morfism.

Identificăm $\mathrm{Ker}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(a, b) = (0, \hat{0})\}$. $f(a, b) = (0, \hat{0}) \Leftrightarrow (a - b, \hat{a}) = (0, \hat{0}) \Rightarrow a - b = 0$ şi $\hat{a} = \hat{0} \Rightarrow a = b$ şi $a = 2k$. Deci $\mathrm{Ker}(f) = \{(2k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} =< (2, 2) >$.

Să demonstrăm că f este surjectiv. Considerăm $(x, \hat{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ şi trebuie să găsim $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a.î. $f(a, b) = (x, \hat{y}) \Leftrightarrow (a - b, \hat{a}) = (x, \hat{y}) \Leftrightarrow a - b = x$ şi $a = y + 2k$ (luăm $k = 0$). Deci $b = a - x = y - x, a = y$. Deci pentru orice $(x, \hat{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ am găsit $(y, y - x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a.î. $f(y, y - x) = (y - y + x, \hat{y}) = (x, \hat{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Deci $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Din teorema fundamentală de izomorfism avem $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Problema 6. Considerăm grupul produs semidirect $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ cu operaţia dată prin

$$(x, \hat{a})(y, \hat{b}) = (x + (-1)^a y, \widehat{a + b}) \text{ pentru} (x, \hat{a}) \text{ şi } (y, \hat{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

(i) Calculaţi ordinul fiecărui element

(ii) Găsiţi două elemente de ordin doi cu produsul de ordin infinit.

Soluţie: (i) Considerăm elementele de tip $(x, \hat{0}), x \in \mathbb{Z}$. $(x, \hat{0})^2 = (x, \hat{0}) \cdot (x, \hat{0}) = (x + (-1)^0 x, \widehat{0 + 0}) = (2x, \hat{0})$. Pentru $p \in \mathbb{N}^\star$ avem $(x, \hat{0})^p = (px, \hat{0})$ (se demonstrează prin inducţie). Deci avem $\mathrm{ord}((x, \hat{0})) = \infty$.

Elementele $(x,\hat{1}), x \in \mathbb{Z}$. $(x,\hat{1})^2 = (x,\hat{1})\cdot(x,\hat{1}) = (x+(-1)^1 x, \widehat{1+1}) = (0,\hat{0})$, unde $(0,\hat{0})$ este elementul neutru pentru operaţia dată ($(x,\hat{y})(0,\hat{0}) = (x+(-1)^y 0, \widehat{y+0}) = (x,\hat{y})$). Deci $\mathrm{ord}((x,\hat{1})) = 2$.

(ii) Avem $(x,\hat{1})\cdot(0,\hat{1}) = (x,\hat{0})$. Fiecare din elementele membrului stâng sunt de ordin 2, iar elementul din membrul drept este de ordin infinit.

Problema 7. Arătaţi că grupul $(\mathbb{C}^\star,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{R},+)\times(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}$.

Soluţie: Orice număr $z \in \mathbb{C}$ se scrie $z = |z|(\cos(t) + i\sin(t))$, unde $|z| > 0$ şi $t = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ şi $i = \sqrt{-1}$. Ştim că $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ şi $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) (\mod 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Grupurile $((0,+\infty),\cdot) \simeq (\mathbb{R},+)$ sunt izomorfe via izomorfismul ln, $(\ln(x_1\cdot x_2) = \ln(x_1)+\ln(x_2))$.

Aplicaţia $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{S}^1,\cdot), t \mapsto (\cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t))$ este un morfism cu nucleul $\mathbb{Z}$. Deci din teorema fundamentală de izomorfism rezultă că $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{S}^1,\cdot)$.

Izomorfismul cerut este $f : \mathbb{C}^\star \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}, f(z) = (\ln(|z|), \arg(z))$. Este un morfism pentru că $f(z_1\cdot z_2) = (\ln(|z_1 z_2|), \arg(z_1 z_2)) = (\ln(|z_1|) + \ln(|z_2|), \arg(z_1) + \arg(z_2)) = (\ln(|z_1|), \arg(z_1)) + (\ln(|z_2|), \arg(z_2)) = f(z_1)+f(z_2)$. Este uşor de văzut că f este bijectivă. Deci f este un izomorfism.