SEMINAR 10

Problema 1. Arătaţi că $A = \{\frac{a+b\sqrt{5}}{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv_2 b\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$ cu o infinitate de elemente inversabile.

Soluţie: • Arătăm că $(A,+)$ este subgrup în $(\mathbb{R},+)$.
Fie $\frac{a+b\sqrt{5}}{2}, \frac{c+d\sqrt{5}}{2} \in A; a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, a şi b au aceeaşi paritate, c şi d sunt de aceeaşi paritate.
$\frac{a+b\sqrt{5}}{2} - \frac{c+d\sqrt{5}}{2} = \frac{(a-c)+(b-d)\sqrt{5}}{2}$. Este clar că $a-c, b-d \in \mathbb{Z}$ şi pentru că a şi b au aceeaşi paritate şi respectiv c şi d au aceeaşi paritate, atunci $a-c$ şi $b-d$ au aceeaşi paritate.
• A este parte stabilă în raport cu înmulţirea.

$$\frac{a+b\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c+d\sqrt{5}}{2} = \frac{(ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5}}{4} = \frac{\frac{(ac+5bd)}{2} + \frac{(ad+bc)\sqrt{5}}{2}}{2}.$$

Considerăm cazul a şi b impare şi c şi d tot impare, $a = 2p+1, b = 2q+1, c = 2x+1, d = 2y+1$.

$$\frac{(ac+5bd)}{2} = \frac{4px+2p+2x+1+20qy+10q+10y+5}{2} = 2px+p+x+10qy+5q+5y+3 =$$

$$= 2px+10qy+p+x+4(q+y)+q+y+3 \in \ Z$$

,
Mai mult $\frac{(ac+5bd)}{2} \equiv_2 p+x+q+y+1$.

$$\frac{(ad+bc)}{2} = \frac{4py+2p+2y+1+4qx+2q+2x+1}{2} = 2py+p+y+2qx+q+x+1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{(ad+bc)}{2} = 2py+p+y+2qx+q+x+1 \equiv_2 p+y+q+x+1 \equiv_2 p+x+q+y+1 \equiv_2 \frac{(ac+5bd)}{2}.$$

Făcând calcule similare pentru celelate parităţi rezultă că $\frac{a+b\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c+d\sqrt{5}}{2} \in A$, deci A este parte stabilă faţă de " $\cdot$ ".
A este inel cu unitate, unitatea fiind $1 = \frac{2+0\sqrt{5}}{2}$, $2,\ 0 \in \mathbb{Z}, 2 \equiv_2 0$.
• $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este inversabil, inversul acestuia este $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ pentru că $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1^2+(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{-1+5}{4} = 1$.
Toate elementele $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k, k \in \mathbb{N}$ sunt inversabile cu inversele $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^k$.

Problema 2. Arătaţi că $A = \{\frac{a+b\sqrt{7}}{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv_2 b\}$ nu este subinel în $\mathbb{R}$.

Soluţie: • $(A,+)$ este subgrup al lui $\mathbb{R}$.
• A NU este parte stabilă faţă de $\cdot$. Voi da un exemplu:
$\frac{1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{7}}{2} = \frac{3+7+\sqrt{7}+3\sqrt{7}}{4} = \frac{10+4\sqrt{7}}{4} = \frac{5+2\sqrt{7}}{2}$. $5, 2 \in \mathbb{Z}$, dar $5 \not\equiv_2 2$. Deci produsul elementelor NU este în A.

Problema 3. Fie A un inel şi $x \in A$ cu $x^n = 0$ pentru un anume $n \geqslant 1$ (un astfel de element se numeşte *element nilpotent*). Arătaţi că x este zero-divizor şi $1 + x$ este element inversabil.

Soluţie: Cel mai mic $n \geqslant 1$ cu proprietatea că $x^n = 0$ se numeşte ordin de nilpotenţă. Deci pentru n ordinul de nilpotenţă a lui x avem $x \cdot x^{n-1} = x^n = 0$. Deci $x \in Z(A)$, unde $Z(A)$ sunt divizorii lui 0 din inelul A.

$(1 + x)(1 - x + x^2 - \ldots \pm x^{n-1}) = 1 \pm x^n = 1$, (+ pentru n impar şi $-$ pentru n par) pentru că $x^n = 0$.

Problema 4. Determinaţi elementele nilpotente din inelul $\mathbb{Z}_{12}$. Daţi un exemplu de zero-divizor care nu este nilpotent.

Soluţie: $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{12} \mid (k, 12) \neq 1\} = \{\hat{2}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{9}, \hat{10}\}$.

$\hat{4}^2 = \hat{4} \Rightarrow \hat{4}^k = 4, (\forall) k \in \mathbb{N}$ este un zero-divizor care NU este nilpotent.

Problema 5. Fie $n \geqslant 2$. Arătaţi că $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este nilpotent dacă şi numai dacă a se divide cu toţi factorii primi ai lui n.

Soluţie: Vedem că se verifică afirmaţia din această problemă pentru $\hat{6} \in \mathbb{Z}_{12}$. $12 = 2^2 \cdot 3$ şi $6 = 2 \cdot 3$.

Considerăm descompunerea în factori primi ai lui $n, n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}, s_j \geqslant 1$.

"$\Rightarrow$" Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ nilpotent. Deci există $t \geqslant 2$ a.î. $\hat{a}^t = \hat{0} \Leftrightarrow a^t = q \cdot n$ pentru un $q \in \mathbb{N}$. Deci pentru $\forall 1 \leqslant j \leqslant k$, $p_j \mid a^t$, dar p_j este prim, de unde rezultă $p_j \mid a$.

"$\Leftarrow$" $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ cu $a_j \leqslant s_j$, $(\forall) j, 1 \leqslant j \leqslant k$. $a^u = (p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k})^u = p_1^{ua_1} p_2^{ua_2} \ldots p_k^{ua_k}$.

$\hat{a}$ este nilpotent cu ordinul de nilpotenţă cel mai mic u a.î. $ua_j \geqslant s_j$, $(\forall)\ j, 1 \leqslant j \leqslant k$.

Problema 6. Arătaţi că

$$A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este un subinel în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluţie: • $(A, +)$ este subgrup al $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

Fie $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \in A$. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & 0 \\ b - d & a - c \end{pmatrix}$ cu $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$.

• A parte stabilă faţă de "$\cdot$".

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc + ad & ac \end{pmatrix}$, $ac, bc + ad \in \mathbb{Z}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$.

Problema 7. Fie A inelul din problema precedentă. Determinaţi $U(A)$ şi $Z(A)$.

Soluţie:
• $U(A)$: Căutăm $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ a.î. $\exists \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ cu proprietatea $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} ax & 0 \\ bx+ay & ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax & = 1 \\ bx+ay & = 0 \end{cases}$.
Din prima ecuaţie, pentru că $a, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = x \in \{\pm 1\}$ iar a doua ecuaţie devine $a(b+y) = 0 \Rightarrow b = -y$.

$U(A) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}\}$. De menţionat că inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$, iar inversa matricei $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -b & -1 \end{pmatrix}$.

$Z(A)$: Căutăm $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ a.î. $\exists \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu proprietatea
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax & 0 \\ bx+ay & ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax & = 0 \\ bx+ay & = 0 \end{cases}$
Din prima ecuaţie avem $a = 0$ sau $x = 0$.

Presupunem $a \neq 0$, deci din prima ecuaţie rezultă $x = 0$. A doua ecuaţie devine $ay = 0$, de unde $y = 0$.

A rezultat $x = y = 0$, deci matricea 0_2, dar trebuie ca $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deci $a = 0$. A doua ecuaţie devine $bx = 0$. a, b nu pot fi simultan nule, deci $x = 0$.

$Z(A) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}\}$.

Problema 8. Arătaţi că

$$F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$$

este un subinel în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$. Este F corp ?

Soluţie: • $(F, +)$ este subgrup al $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), +)$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix}$ cu $a-c, b-d \in \mathbb{Z}_2$.

• F este parte stabilă în raport cu "·".

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc+bd \\ bc+ad+bd & bd+ac+ad+bc+bd \end{pmatrix} \in F$.

Considerăm $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \in F \backslash \{0_2\}$, deci a, b nu sunt simultan $\hat{0}$.

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = a(a+b) - b^2 = a^2 + ab + b^2$ (lucrăm peste $\mathbb{Z}_2$). Cantitatea $a^2 + ab + b^2 = \hat{0} \Leftrightarrow a = b = \hat{0}$, ceea ce nu este adevărat. Astfel $\det \neq \hat{0}$, adică $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \hat{1}$ şi deci matricea este inversabilă. Deci F este corp. Elementele lui F sunt:

$$F = \{\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}\}.$$