Lista 3

1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție "$\perp$", prin:

$$x \perp y = \sqrt[5]{x^5+y^5} \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se studieze proprietățile acesteia.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, definim legea de compoziție "$*$", prin: $x * y = ax+by+c$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Să se determine $a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. legea să fie comutativă și asociativă.

3. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție "$*$", prin: $x * y = xy + ax + by + c$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$.
a) Ce relație există între a,b,c pentru ca legea să fie asociativă?
b) Legea "$*$" este asociativă $\Leftrightarrow$ are element neutru.
c) Există elemente neinversabile?

4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție "$\circ$", prin: $x \circ y = 2(x+y-1) - xy$ $(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}$.
Să se arate că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă față de legea "$\circ$", iar $(\mathbb{R} \setminus \{2\}, \circ)$ este un grup comutativ.

5. Să se arate că mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x \neq 0, x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup comutativ.

6. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_{103} \right\}$. Este mulțimea $M \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\}$ un grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor?