SEM. II.

T. Hamilton-Cayley. T. Laplace. Forma eșalon.
Alg. Gauss-Jordan.

1). Calculați A^{-1}, utilizând T. Hamilton-Cayley, resp. alg. Gauss-Jordan

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Să se determina o formă eșalon pe linii / resp. forma eșalon redusă pe linii. Precizați rg A

3) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Să se scrie polinomul caract.

b) Calculați A^{100} (utilizând T.H-C)

4) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = A^5 - 3A^4 + A - 8I_2$

Să se det $a, b \in \mathbb{R}$ al $B = aA + bI_2$.

5) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculați det A, utilizând Th. Laplace pentru $p=2$, l_2, l_3 fixate, resp. c_1, c_2 fixate.

6) $A = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_2d_1 & a_1c_2 & a_2d_2 \\ a_3c_1 & a_4d_1 & a_3c_2 & a_4d_2 \\ b_1c_3 & b_2d_3 & b_1c_4 & b_2d_4 \\ b_3c_3 & b_4d_3 & b_3c_4 & b_4d_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

Utilizând T. Laplace pt $p=2$, l_1, l_2 fixate, să se arate că

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Calculați A^{2025}, utilizând TH-C.

8) Fie ec $X^{2025} = A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Precizați nr de soluții dacă

a) $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

9) Fie ec $x^3 + px + q = 0$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sol ec $(p, q \in \mathbb{C})$

Calculați Δ^2, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$.

10) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile.

Dem că $rg(A^{-1} + B^{-1}) = rg(A + B)$

<u>Ind</u>: Dc $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile $\Rightarrow$

$rg(BAC) = rg A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

11) Utilizând matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, arătați că $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

12) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ec $\Delta(x) = 0$, unde

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

13) Fie P, Q, R funcții polinomiale de grad cel mult 2 și $a, b, c \in \mathbb{C}$ date? Notăm

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \end{vmatrix}$$

Dacă $\Delta_0 = 1$, atunci $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = ?$

14) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ aî $AB = BA$

Dem că $\det(A^2+B^2) \geq 0$

15) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A^n \neq O_n$, at $A^k \neq O_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Ind. T. H-C.

Sisteme liniare

1. $\begin{cases} x+\alpha y+z=1 \\ \alpha x-y+z=1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ Să se rez. Discuție după $\alpha \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ x+\alpha^2 z=0, \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$ Sist. are sol. unică nulă

3. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \end{cases}$ Să se rez pt $a\neq b$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

4. Fie ΔABC și a,b,c lg laturilor.

$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$

Să se arate că pt $\forall \Delta ABC$ sist are sol unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0,y_0,z_0\in(-1,1)$

5. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$ Să se rez pt a,b,c dist. două câte 2 $(a,b,c\in\mathbb{R})$

6. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ a) $a=?$ ai SCD
b) Să se rez pt $a=1$.

7. $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ x+ay+z=-1 \\ -x+y-z=b \end{cases}$ a) $a,b=?$ $(a,b\in\mathbb{R})$ a.î. SCdN
b) Să se rez. pt $a=-1, b=1$

8. $\begin{cases} ax+bz=2 \\ ax+ay+4z=4 \\ ay+2z=b \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Discuție.

9. $\sum_{i=1}^{k}(1+i)x_i + \sum_{i=1}^{4-k} i\,x_{i+k} = 0$, $\forall k=\overline{1,3}$.
Să se rez. sist

10. $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 4^{i-1}$, $\forall i=\overline{1,4}$, unde $a_{ij}=j^{i-1}$, $\forall i,j=\overline{1,4}$
Rez. sist.

11. $\begin{cases} x+y+mz-t=0 \\ 2x+y-z+t=0 \\ 3x-y-z-t=0 \\ mx-2y-2t=0 \end{cases}$ $m=?$ a.î. sist are și sol nenule?

12. $\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=-1 \\ 2x+y+3z+3t=0 \\ x+2y+3z=-3 \end{cases}$
Să se rez, utilizând metoda eliminării Gauss-Jordan