## SEMINAR 4

**Problema 1.** Considerăm relaţiile $\gamma$ şi $\delta$ pe $\mathbb{R}$.
(i) $x\gamma y$ dacă $x+y\in\mathbb{Z}$
(ii) $x\delta y$ dacă $x+y\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Să se studieze dacă $\gamma$, $\delta$ sunt reflexive, simetrice, tranzitive.

**Soluţie:**
(i) $\exists x\in\mathbb{R}$ pentru care $x+x\notin\mathbb{Z}$, de exemplu $1,2+1,2\notin\mathbb{Z}$, sau $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$. Deci $\gamma$ nu este reflexivă.

Este simetrică: dacă $x\gamma y\Leftrightarrow x+y\in\mathbb{Z}$. $y+x=x+y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\gamma x$.

Nu este tranzitivă: $1,3+0,7=2\in\mathbb{Z}$; $\quad 0,7+2,3=3\in\mathbb{Z}$, dar $1,3+2,3=3,6\notin\mathbb{Z}$.

(ii) $x+x\sqrt{2}=x(1+\sqrt{2})$ . Dacă $\exists x\in\mathbb{R}$ a.î. $x(1+\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$, atunci $\gamma$ NU este reflexivă. $x(1+\sqrt{2})=\frac{p}{q}\Leftrightarrow x=\frac{p}{q(1+\sqrt{2})}=\frac{p(1-\sqrt{2})}{q(-1)}=\frac{p}{q}(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}$. Deci $\delta$ NU este reflexivă. NU este nici simetrică. De exemplu $\sqrt{2}\delta 1$ pentru că $\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dar $1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, deci 1 nu este în relaţia $\delta$ cu $\sqrt{2}$. $\delta$ NU verifică nici axioma tranzitivităţii. De exemplu $\sqrt{2}\delta 1$, $1\delta(\sqrt{2}-1)$, (avem $1+(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2})=1+2-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$), dar $\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2})=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. Deci $\sqrt{2}$ nu este în relaţia $\delta$ cu $\sqrt{2}-1$.

**Problema 2.** Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ definim relaţia $z\sim w\Leftrightarrow z-w\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $\sim$ este relaţie de echivalenţă, determinaţi clasele de echivalenţă şi un sistem de reprezentanţi.

**Soluţie:**
(i) reflexivitatea: $z-z=0\in\mathbb{R}$ pentru $\forall z\in\mathbb{C}$, deci $z\sim z$.
(ii) simetria: dacă $z-w\in\mathbb{R}$, atunci $w-z=-(z-w)\in\mathbb{R}$, de unde $w\sim z$.
(iii) tranzitivitatea: dacă $z-w\in\mathbb{R}$ şi $w-u\in\mathbb{R}$, atunci $z-u=z-w+w-u\in\mathbb{R}$, adică $z\sim u$.

Avem astfel o relaţie de echivalenţă.

Fie $z\in\mathbb{C}$, clasa de echivalenţă a lui $z, [z]=\{z+x\mid x\in\mathbb{R}\}$ ceea ce reprezintă o dreaptă orizontală ce trece prin $z$. Ecuaţia acesteia este $y=\mathrm{Im}(z)$. Sistemul de reprezentanţi este *axa imaginară*.

**Problema 3.** Fie $X$ o mulţime infinită. Pe $\mathcal{P}(X)$ definim relaţia $A\sim B\Leftrightarrow A\Delta B$ este finită. ($\Delta$ reprezintă diferenţa simetrică a mulţimilor). Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă.

**Soluţie:** $A\Delta A=\varnothing, |\varnothing|=0$, deci $A\sim A$. $B\Delta A=A\Delta B$, deci $A\sim B\Rightarrow B\sim A$. Fie $A\sim B$ şi $B\sim C$. $A\Delta C\subset(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$, care este o mulţime finită, fiind reuniune de două mulţimi finite.

**Problema 4.** Considerăm operaţiile algebrice pe $\mathbb{N}$:
(i) $x*y=x+1$,
(ii) $x*y=x$,
(iii) $x*y=xy+1$,
(iv) $x*y=0$,
(v) $x*y=\max\{x,y\}$.

Precizaţi dacă sunt asociative, comutative sau posedă element neutru.

**Soluţie:**
(i) $(x * y) * z = (x + 1) * z = x + 1$. $x * (y * z) = x * (y + 1) = x + 1$. Operaţia este asociativă. Avem $x * y = x + 1 \neq y + 1 = y * x$. Deci operaţia nu este comutativă. Nu are nici element neutru pentru că $x * e = x \Leftrightarrow x + 1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$, ceea ce este fals.
(ii) $(x*y)*z = x*z = x, x*(y*z) = x*y = x$. De aici $(x*y)*z = x*(y*z)$. $x*y = x \neq y = y*x \Rightarrow$ operaţia nu este comutativă. $x * e = x \Leftrightarrow x = x$. $e * x = x \Leftrightarrow e = x$ ptr. $\forall x \in \mathbb{N}$. Deci nu există un element neutru.
(iii) $(x*y)*z = (xy+1)*z = (xy+1)z+1 = xyz+z+1$. Pe de altă parte $x*(y*z) = x*(yz+1) = x(yz + 1) + 1 = xyz + x + 1$. Cele două cantităţi nu sunt egale pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, deci operaţia nu este asociativă. Este comutativă pentru că $x * y = xy + 1 = yx + 1 = y * x$. Elementul neutru trebuie să satisfacă $x * e = x \Leftrightarrow xe + 1 = x \Leftrightarrow x(e - 1) = -1$ pentru $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow \nexists e \in \mathbb{N}$ cu această proprietate.
(iv) Operaţia este asociativă $(x * y) * z = 0 = x * (y * z)$, comutativă $x * y = 0 = y * x$, şi nu are element neutru.
(v) Este asociativă: $(x*y)*z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, y, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\} = x*(y*z)$. Este comutativă $x * y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y * x$. Elementul neutru este 0, (dacă $0 \in \mathbb{N}$), altfel 1.

**Problema 5.** Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim operaţia $x * y = axy + b(x + y) + c$. Arătaţi că $M_{a,b,c} = (\mathbb{Z}, *)$ este monoid $\Leftrightarrow b = b^2 - ac$ şi $b|c$. Mai mult, pentru $a \neq 0$, avem izomorfismele de monoizi $M_{a,b,c} \simeq M_{a,1,0} \simeq K_a$, unde $K_a$ este monoidul multiplicativ $\{am + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

**Soluţie:** Impunând condiţia de asociativitate care trebuie să fie adevărată pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ şi făcând socotelile elementare găsim $b^2 - b - ac = 0$. Pentru elementul neutru $e$ avem $x * e = x$ pentru $(\forall) x \in \mathbb{Z}$. $x * e = x \Leftrightarrow x(ae + b - 1) + be + c = 0, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow be + c = 0$ şi $ae + b - 1 = 0$, deci $e = -\frac{c}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b|c$. Cu această expresie a lui $e$ şi înmulţind cu $b$ ecuaţia $ae + b - 1 = 0$ devine $b^2 - b - ac = 0$.

Deci $M_{a,b,c} = (\mathbb{Z}, *)$ este monoid $\Leftrightarrow b = b^2 - ac$ şi $b|c$.

Presupunem acum că $a \neq 0$ şi $M_{a,b,c}$ este monoid, deci $b|c$ şi deci $d = \frac{c}{b} \in \mathbb{Z}$, de unde $c = bd$. Din $b^2 = b + ac$ împărţind cu $b$ şi înlocuind obţinem $b = 1 + ad$. $c = bd = (1 + ad)d$. Următoarele corespondenţe sunt izomorfisme de monoizi. $f : M_{a,b,c} \longrightarrow M_{a,1,0}, f(x) = x + d$ şi $g : M_{a,1,0} \longrightarrow K_a, g(x) = ax + 1$.