SEMINAR 5

Soluţii probleme temă

Problema 1. În primul rând $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\max)$, $(\mathbb{N},\text{c.m.m.m.c})$ sunt monoizi. Notăm cu c.m.m.m.c$\{a,b\} = [a,b]$. Elementul neutru pentru adunare este 0, ca şi pentru operaţia max. Pentru $[\ ,\ ]$ elementul neutru este 1. Adunarea este asociativă. Pentru a două operaţie pe $\mathbb{N}$ avem $\max\{\max\{a,b\},c\} = \max\{a,b,c\} = \max\{a,\max\{b,c\}\}$. Similar pentru operaţia de luare a c.m.m.m.m.c . Avem deci trei monoizi.

Dacă presupunem că $f : (\mathbb{N},+) \longrightarrow (\mathbb{N},\max)$ este izomorfism atunci $f(2a) = f(a+a) = \max\{f(a),f(a)\} = f(a)$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^\star$. Deci f nu este injectiv. Contradicţie.

Similar, dacă presupunem că $g : (\mathbb{N},+) \longrightarrow (\mathbb{N},\text{c.m.m.m.c})$ este izomorfism, atunci $g(2a) = g(a+a) = [g(a),g(a)] = g(a)$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^\star$. Deci g nu este injectiv. Contradicţie.

Doi monoizi izomorfi trebuie să aibă proprietăţi similare. Pentru orice $a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow \max\{a,b\} \in \{a,b\}$, dar $[a,b] \notin \{a,b\}$ în general. Deci nici ultimii doi monoizi nu sunt izomorfi.

Problema 2. $(\mathbb{N},+)$ este monoidul liber generat de un element, acesta fiind 1.

Considerăm $f : (\mathbb{N},+) \longrightarrow (\mathbb{N},+)$ morfism. Atunci $f(0) = 0$ şi $f(1) = a \in \mathbb{N}$. $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$. Se demonstrează foarte uşr prin inducţie că $f(n) = n \cdot a$. Deci $\text{End}(\mathbb{N},+) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid f\text{morfism}\} = \mathbb{N}$.

Fie acum $g : (\mathbb{N},\max) \longrightarrow (\mathbb{N},\max)$ morfism. Pentru $i < j; i,j \in \mathbb{N}^\star$ avem $g(\max\{i,j\}) = \max\{g(i),g(j)\} \Leftrightarrow g(j) = \max\{g(i),g(j)\} \Rightarrow g(i) \leqslant g(j)$.

Am obţinut $\text{End}(\mathbb{N},\max) = \{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid g \text{ crescătoare}\}$.

Fie $h : (\mathbb{N},+) \longrightarrow (\mathbb{N},\max)$ morfism. $h(1) = a, h(2) = h(1+1) = \max\{h(1),h(1)\} = h(1)$. Se demonstrează $h(n) = h(1)$.

Deci $\text{Hom}((\mathbb{N},+),(\mathbb{N},\max)) = \{h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid h(0) = 0, h(n) = a, \forall n \in \mathbb{N}^\star\}$

Fie $k : (\mathbb{N},\max) \longrightarrow (\mathbb{N},+)$ morfism, atunci $k(\max\{i,i\}) = k(i) + k(i) \Leftrightarrow k(i) = k(i) + k(i), \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow k(i) = 0$.

Deci $\text{Hom}((\mathbb{N},\max),(\mathbb{N},+)) = \{0\}$, morfismul nul.

Problema 3. Dacă $f : (\mathbb{N},\max) \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}),\cup)$ este morfism de monoizi atunci $f(0) = \varnothing$ şi $f(i) = A_i \subset \mathbb{N}$. Mai mult pentru $i < j; i,j \in \mathbb{N}^\star, f(\max\{i,j\}) = f(i) \cup f(j) \Leftrightarrow f(i) = f(i) \cup f(j) \Leftrightarrow A_i = A_i \cup A_j \Rightarrow A_i \subseteq A_j$. Dar f dorim să fie injectiv deci pentru $i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$. Avem astfel pentru $i < j,\ A_i \subsetneq A_j$.

Putem lua $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n) = [n] = \{1,2,\ldots,n\}$.

Probleme seminar

$U(\mathbb{Z}_n,\cdot) = \{\hat{x} \mid x \in \mathbb{Z}, (x,n) = 1\} = \{\hat{x} \mid \exists \hat{y} \in \mathbb{Z} \text{ cu } \hat{x}\hat{y} = \hat{1}\}$, grupul unităţilor din $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$. $U(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ este subgrup al monoidului $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$. $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_s})$, unde descompunerea în factori primi a numărului n este $p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$.

Problema 0. Să se scrie tabla legii de compoziţie a grupului $U(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.

Soluţie: $U(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$. $6 = 2 \cdot 3$, deci $|U(\mathbb{Z}_6)| = 6 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 2$. Tabla legii de compoziţie este:

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$

Vedem că aceasta este similară cu tabla adunării lui $(\mathbb{Z}_2, +)$. $\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ şi avem

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

.

Problema 1. Să se scrie tabla legii de compoziţie a grupului $U(\mathbb{Z}_8, \cdot)$.

Soluţie: $U(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$. $8 = 2^3$, deci $|U(\mathbb{Z}_8)| = 8 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 4$. Tabla legii de compoziţie este:

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$

Problema 2. Să se scrie tabla legii de compoziţie a grupului $U(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$.

Soluţie: $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}\}$. $10 = 2 \cdot 5$, deci $|U(\mathbb{Z}_{10})| = 10 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 4$. Tabla legii de compoziţie este:

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{7}$	$\hat{9}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{7}$	$\hat{9}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{9}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{1}$	$\hat{9}$	$\hat{3}$
$\hat{9}$	$\hat{9}$	$\hat{7}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$

Se vede că tabla înmulţirii grupului $U(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ este diferită de tabla grupului $U(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$.

Problema 3. Să se scrie tabla legii de compoziţie a grupului $U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$.

Soluţie: $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$. $12 = 2^2 \cdot 3$, deci $|U(\mathbb{Z}_{12})| = 12 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 4$. Tabla legii de compoziţie este:

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{11}$	$\hat{11}$	$\hat{9}$	$\hat{7}$	$\hat{1}$

Se vede că tabla înmulţirii grupului $U(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ este similară cu tabla grupului $U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$.

Problema 4. Să se scrie tabla legii de compoziţie $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Soluţie: $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Tabla adunării este:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Se vede că această tablă este similară cu tabla în mulţirii pe $U(\mathbb{Z}_{10})$.

Problema 5. Să se scrie tabla legii de compoziţie a grupului diedral D_3.

Soluţie: $D_3 = \{1 = \mathrm{id}_\triangle, \rho, \rho^2, s_1, s_2, s_3\}$, unde ρ este rotaţia în sens antiorar cu $120°$ în jurul centrului triunghiului echilateral, iar s_j reprezintă reflecţia faţă de mediatoarea l_j care trece prin vârful j al triunghiului echilateral 123. Operaţia $\circ$ este compunerea funcţiilor care sunt şi izometrii ale planului, compunere care este asociativă şi are ca element neutru $1 = \mathrm{id}_\triangle$. De exemplu $\rho s_1 = \rho \circ s_1$, prima dată aplicăm s_1 şi apoi ρ.

$\circ$	1	ρ	ρ^2	s_1	s_2	s_3
1	1	ρ	ρ^2	s_1	s_2	s_3
ρ	ρ	ρ^2	1	$\rho s_1 = s_3$	$\rho s_2 = s_1$	$\rho s_3 = s_2$
ρ^2	ρ^2	1	ρ	$\rho^2 s_1 = s_2$	$\rho^2 s_2 = s_3$	$\rho^2 s_3 = s_1$
s_1	s_1	$s_1\rho = s_2$	$s_1\rho^2 = s_3$	$s_1^2 = 1$	$s_1 s_2 = \rho$	$s_1 s_3 = \rho^2$
s_2	s_2	$s_2\rho = s_3$	$s_2\rho^2 = s_1$	$s_2 s_1 = \rho^2$	$s_2^2 = 1$	$s_2 s_3 = \rho$
s_3	s_3	$s_3\rho = s_1$	$s_3\rho^2 = s_2$	$s_3 s_1 = \rho$	$s_3 s_2 = \rho^2$	$s_3^2 = 1$

$\circ$	1	ρ	ρ^2	s_1	s_2	s_3
1	1	ρ	ρ^2	s_1	s_2	s_3
ρ	ρ	ρ^2	1	s_3	s_1	s_2
ρ^2	ρ^2	1	ρ	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	1	ρ	ρ^2
s_2	s_2	s_3	s_1	ρ^2	1	ρ
s_3	s_3	s_1	s_2	ρ	ρ^2	1

Problema 6. Să se demonstreze că orice grup G în care $x^2 = 1$ pentru orice $x \in G$ este abelian.

Soluţie: Dacă în grupul G avem $x^2 = 1$, înmulţind această relaţie cu x^{-1} obţinem $x^2 x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} \Leftrightarrow 1 \cdot x = x^{-1} \Leftrightarrow x = x^{-1}$. Scriem relaţia din ipoteză pentru xy, unde x, y sunt arbitrare în G. Avem $(xy)^2 = 1 \Leftrightarrow (xy)(xy) = 1$. Înmulţim la stânga cu x^{-1} şi la dreapta cu y^{-1} şi obţinem $yx = x^{-1}y^{-1} = xy$. Deci grupul este abelian (comutativ).

Problema 7. Pe mulţimea (-1, 1) considerăm operaţia $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Să se demonstreze că $((-1, 1), *)$ este grup.

Soluţie: Arătăm că (-1, 1) este parte stabilă pentru $*$. $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow |x| < 1$. Deci pentru $|x| < 1$ şi $|y| < 1 \Rightarrow |x| \cdot |y| < 1 \Leftrightarrow |xy| < 1 \Leftrightarrow -1 < xy < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 + xy < 2$. În particular $1 + xy \neq 0$.

Arătăm că $x * y + 1 > 0$. $x * y + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+1+xy}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$. Fiecare paranteză a numărătorului cât şi numitorul sunt pozitive, deci $x * y + 1 > 0 \Leftrightarrow -1 < x * y$.

Pentru $x * y - 1 < 0$ avem: $x * y + 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = -\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$. Fiecare paranteză a numărătorului este strict pozitivă, ca şi numitorul. Deci fracţia este strict negativă. Astfel $x * y < 1$.

Asociativitate: $(x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} = x * (y * z)$.

Elementul neutru este 0.

Inversul fiecărui element $x \in (-1, 1)$ este $-x$.

Cu toate acestea $((-1, 1), *)$.