SEMINAR 3

Problema 1. Fie $n \geqslant 1$ şi notăm cu $\varphi(n)$ numărul întregilor pozitivi $\leqslant n$ primi cu n (funcţia φ *se numeşte indicatorul lui Euler*). Să se arate că

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$$

unde $p_1, p_2, \dots p_s$ sunt factorii primi ai lui n.

Soluţie: Un număr prim cu n este un număr k pentru care cel mai mare divizor comun (c. m. m. d. c.) al numerelor n şi k este 1. Notaţia consacrată pentru c.m.m.d.c.$\{n, k\}$ este (n, k).

Considerăm descompunerea în factori primi ai lui $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$.

Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant s$ notăm cu $A_j = \{1 \leqslant k \leqslant n \mid p_j | k\}$ muţimea numerelor naturale cel mult egale cu n ce se divid cu p_j .

Dorim să calculăm numărul elementelor mulţimii $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Numărul căutat este cardinalul complementarei acestei mulţimi, deci $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n|$.

Pentru calculul $|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n|$ folosim principiul includerii-excluderii şi avem

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{L \subset [s]} (-1)^{|L|+1} | \cap_{i \in L} A_i|$$

Avem $A_j = \{p_j \cdot 1, p_j \cdot 2, p_j \cdot \frac{n}{p_j}\}$. Deci $|A_j| = \frac{n}{p_j}$.

$A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{1 \leqslant k \leqslant n \mid p_{i_1} | k$ şi $p_{i_2} | k\}$ şi $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}$.

Similar pentru mulţimea de indici $L = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$, avem
$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l} = \{1 \leqslant k \leqslant n \mid p_{i_1} | k \ , \dots \ , \ p_{i_l} | k\}$ ce are cardinalul $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_l}}$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{s} (-1)^2 |A_i| + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant s} (-1)^3 |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant s} (-1)^{l+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| +$$

$$+ (-1)^{s+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_s| =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{n}{p_i} - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots + (-1)^{l+1} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}} + (-1)^{s+1} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_s}}.$$

Deci $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$. Dând factor comun pe n şi schimbând semnele în suma de mai sus obţinem

$$\varphi(n) = n(1 - \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots + (-1)^l \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_l}} + (-1)^s \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_s}}) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$$

Problema 2. Arătaţi că numărul permutărilor fără puncte fixe ale mulţimii $[n]$ este

$$n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

.

Soluţie: Notăm cu $A_i = \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$ mulţimea tuturor permutărilor lui $[n]$ ce au pe i ca punct fix. Atunci $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ reprezintă toate permutările ce au puncte fixe. Trebuie să aflăm $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, iar numărul permutărilor fără puncte fixe este $n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, unde după cum bine se ştie numărul permutărilor este $n!$.

Folosim din nou principiul includerii-excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{K \subset [n]} (-1)^{|K|+1} | \cap_{i \in K} A_i|$$

Pentru $K = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$, avem $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{\sigma \mid \sigma(i_j) = i_j, (\forall) 1 \leqslant j \leqslant k\} =$ $= \{\sigma : [n] \backslash K \longrightarrow [n] \backslash K \mid \sigma \text{ permutare}\}$. Deci $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Vedem că acest număr este acelaşi pentru toate mulţimile $K \subset [n]$ cu $|K| = k$. Avem $C_n^k = \binom{n}{k}$ submulţimi de cardinal k ale mulţimii $[n]$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{K \subset [n], \\ |K| = k}} | \cap_{i \in K} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \cdot (n-k)! =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!)} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

Numărul permutărilor fără puncte fixe este $n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = n!(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} \frac{1}{k!}) =$

$$= n!(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}) = n!(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}).$$

Problema 3. Folosind definiţia arătaţi că relaţia de congruenţă modulo n este relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{Z}$.

Soluţie: Pentru un $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ definim $x \equiv y \pmod n \Leftrightarrow n \mid (x - y) \Leftrightarrow x - y = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.
Arătăm că relaţia definită mai sus este reflexivă simetrică şi tranzitivă.
• Reflexivitatea: $x - x = 0 = n \cdot 0 \Rightarrow x \equiv x \pmod n$.
• Simetria: Fie $x \equiv y \pmod n \Leftrightarrow x - y = n \cdot k \Rightarrow y - x = n \cdot (-k)$. Cum $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-k) \in \mathbb{Z}$. Deci $y \equiv x \pmod n$
• Tranzitivitatea: Fie $x \equiv y \pmod n$ şi Fie $y \equiv z \pmod n$, $x - y = n \cdot p, y - z = n \cdot q$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$. Atunci $x - z = x - y + y - z = n \cdot (p + q)$ şi $p + q \in \mathbb{Z}$.

Problema 4. Considerăm relaţiile α şi β pe $\mathbb{R}$.
$x \alpha y$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$ şi $x \beta y$ dacă $|x - y| < 2$. Să se studieze care din aceste relaţii sunt relaţii de echivalenţă.

Soluţie:
Relaţia α:
• Reflexivitatea: $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \alpha x$
• Simetria: dacă $x - y = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = -(x - y) = -k \in \mathbb{Z}$. Deci $x \alpha y \Rightarrow y \alpha x$.
• Tranzitivitatea: dacă $x - y = p \in \mathbb{Z}$ şi $y - z = q \in \mathbb{Z}$, atunci $x - z = x - y + y - z = p + q \in \mathbb{Z}$. Deci $x \alpha y$ şi $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$.
Aşadar α este relaţie de echivalenţă.

Relaţia β:

• Reflexivitatea: $|x-x| = 0 < 2 \Rightarrow x\beta x$.

• Simetria: dacă $|x-y| < 2 \Rightarrow |-(y-x)| < 2 \Rightarrow |-1||(y-x)| < 2 \Rightarrow |y-x| < 2$, deci $x\beta y \Rightarrow y\beta x$.

• Tranzitivitatea: Relaţia β nu este tranzitivă: de exemplu $|0-1,3| = 1,3 < 2, |1,3-2,2| = 0,9 < 2$, dar $|0-2,2| = 2,2 > 2$.

Deci relaţia β nu este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$.

Problema 5. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Soluţie: Vedem că $f(x) = (x+1)^2 + 1$.

• Injectivitatea: fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2+2x_1 = x_2^2+2x_2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ sau $x_1 = -x_2 - 2$. Deci f nu este injectivă pentru că $f(-x-2) = f(x)$, şi $-x-2 \neq x, (\forall)x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

• Surjectivitatea: trebuie să verificăm că pentru $(\forall)y \in \mathbb{R}, (\exists)x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - y = 0$. Soluţiile sunt $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-(2-y)} = -1 \pm \sqrt{y-1}$. Vedem că dacă $y < 1$ atunci soluţiile $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$.

Funcţia $f(x) = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ este bijectivă dacă considerăm $f : [-1,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$, iar inversa este $f^{-1} : [1,\infty) \longrightarrow [-1,\infty), f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-1}$. Verificaţi că $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{[1,\infty)}$ şi $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{[-1,\infty)}$

Problema 6. Studiaţi dacă funţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+3x}{2}$ este bijectivă şi inversa este

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Soluţie:

• Injectivitatea: fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3+3x_1 = x_2^3+3x_2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3) = 0$. $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \geqslant 0$ pentru $(\forall)x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. (Pentru $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2 = 0$. Pentru $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 = x_2^2((\frac{x_1}{x_2})^2 + \frac{x_1}{x_2} + 1)$. Trinomul din ultima paranteză este strict pozitiv pentru toate valorile reale ale fracţiei $\frac{x_1}{x_2}$). Deci $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3 > 0$ pentru $(\forall)x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Astfel, $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci funcţia este injectivă.

• Surjectivitatea: Menţionez soluţia ecuaţiei de gradul 3. Fiecare ecuaţie de grad 3 se poate reduce printr-o schimbare de variabile la o ecuaţie de forma $x^3+qx+r = 0$. Se caută rădăcină de forma $u = \alpha+\beta$. Avem $\alpha\beta = -\frac{q}{3}$ iar $\alpha^3 = \frac{1}{2}\left(-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}\right)$.

Fie $y \in \mathbb{R}$, dorim să găsim $x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y \Leftrightarrow x^3+3x-2y = 0$.

Căutăm soluţie de tipul $\alpha+\beta$, unde $\alpha^3 = \frac{1}{2}\left(2y+\sqrt{(4y)^2+\frac{4\cdot 27}{27}}\right) = y+\sqrt{y^2+1}$, de unde $\alpha = \sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$. Cum $y^2+1 > 0$ pentru $(\forall)y \in \mathbb{R}$, avem $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\beta = -\frac{1}{\alpha} = -\sqrt[3]{\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}} = -\sqrt[3]{\frac{y-\sqrt{y^2+1}}{y^2-(y^2+1)}} = \sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}$.

Deci soluţia ecuaţiei $f(x) = y$ este $u = \sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}} + \sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}} \in \mathbb{R}$, de unde tragem concluzia că f este surjectivă.

Deci funcţia f este bijectivă. Verificaţi faptul că funcţia $g(x)$ dată în enunţ (care vedeţi că provine din rezolvarea ecuaţiei $f(x) = y$) este inversa funcţiei f.