SEMINAR 6

Problema 1. Să se arate că $((-1,1),*) \simeq ((0,\infty),\cdot)$, unde $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$.

Soluţie: Considerăm $f:(-1,1)\longrightarrow(0,+\infty), f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Este clar că $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$ şi $\lim_{x\to 1} f(x)=0$. Trebuie să demonstrăm că f este morfism şi este funcţie bijectivă.

• morfism:

$$f(x*y)=\frac{1-x*y}{1+x*y}=\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}=\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy}=\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=f(x)\cdot f(y).$$

• f injectivă: $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1}=\frac{1-x_2}{1+x_2}\Leftrightarrow(1-x_1)(1+x_2)=(1-x_2)(1+x_1)\Leftrightarrow -x_1+x_2=x_1-x_2\Leftrightarrow 2x_2=2x_1\Leftrightarrow 2x_2=2x_1\Leftrightarrow x_1=x_2$

• f surjectivă: fie $y\in(0,+\infty)$, trebuie să rezolvăm ecuaţia $f(x)=y$. Avem $\frac{1-x}{1+x}=y\Leftrightarrow 1-x=y+xy\Leftrightarrow 1-y=x(1+y)\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}\in(-1,1)$.

Deci f este izomorfism.

Definiţie: Fie G un grup şi $x\in G$ un element al lui G.
Dacă $x^n\neq 1$ pentru $\forall n>0$, atunci spunem că ordinul lui x şi notăm $\mathrm{ord}(x)$, este ∞.
Dacă $\exists k>0$ cu $x^k=1$, atunci $\mathrm{ord}(x)=\min\{k\in\mathbb{N}^*\mid x^k=1\}$.

Problema 2. Fie G un grup şi $a,b\in G$ elemente de ordin finit, m şi n. Presupunem că $ab=ba$ şi că $(m,n)=1$. Arătaţi că ab are ordinul mn.

Problema 3. Demonstraţi că grupurile $(\mathbb{Z}_4,+)$ şi $(U(\mathbb{Z}_{10}),\cdot)$ sunt izomorfe.

Tabla adunării pe $\mathbb{Z}_4$ este:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Să precizăm ordinele elementelor grupului $\mathbb{Z}_4$. Avem:
$\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow 4\cdot\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow \mathrm{ord}(\hat{1})=4$,
$\hat{2}+\hat{2}=\hat{0}\Leftrightarrow 2\cdot\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow\mathrm{ord}(\hat{2})=2$,
$\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{0}\Leftrightarrow 4\cdot\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow\mathrm{ord}(\hat{3})=4$.

$U(\mathbb{Z}_{10})=\{\overline{1},\overline{3},\overline{7},\overline{9}\}$ şi tabla înmulţirii este:

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

Ordinele elementelor grupului $U(\mathbb{Z}_{10})$ sunt:
$\overline{3}\cdot\overline{3}\cdot\overline{3}\cdot\overline{3}=\overline{1}\Rightarrow \mathrm{ord}(\overline{3})=4$,
$\overline{7}\cdot\overline{7}\cdot\overline{7}\cdot\overline{7}=\overline{1}\Rightarrow \mathrm{ord}(\overline{7})=4$,
$\overline{9}\cdot\overline{9}=\overline{1}\Rightarrow \mathrm{ord}(\overline{9})=2$.

Astfel un izomorfism trebuie să transforme un element de un anumit ordin într-un element de acelaşi ordin. Avem $\hat{0}\mapsto\overline{1}, \hat{2}\mapsto\overline{9}, \hat{1}\mapsto\overline{3}, \hat{3}\mapsto\overline{7}$ sau $\hat{0}\mapsto\overline{1}, \hat{2}\mapsto\overline{9}, \hat{1}\mapsto\overline{7}, \hat{3}\mapsto\overline{3}$. se verifică uşor că acestea sunt izomorfisme.

Produsul direct a două grupuri G_1, G_2 este $G_1\times G_2$, operaţia este produsul pe componente. Elementele din G_1 comută cu cele din G_2.

Problema 4. Să se scrie tabla grupului $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$. Să se demonstreze că $(U(\mathbb{Z}_8),\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$.

Soluţie: Notăm elementele din $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$: $0=(\hat{0},\hat{0}), a=(\hat{1},\hat{0}), b=(\hat{0},\hat{1}), a+b=(\hat{1},\hat{1})$. Adunarea se face pe componente. Avem $a+b=b+a$ pentru că adunăm pe fiecare componentă cu $\hat{0}$. Tabla adunării este

$+$	0	a	b	$a+b$
0	0	a	b	$a+b$
a	a	$a+a=0$	$a+b$	$a+a+b=b$
b	b	$b+a=a+b$	$b+b=0$	$b+a+b=a+b+b=a$
$a+b$	$a+b$	$a+b+a=b$	$a+b+b=a$	$a+b+a+b=a+a+b+b=0$

$+$	0	a	b	$a+b$
0	0	a	b	$a+b$
a	a	0	$a+b$	b
b	b	$a+b$	0	a
$a+b$	$a+b$	b	a	0

Vedem că $\mathrm{ord}(a)=\mathrm{ord}(b)=\mathrm{ord}(a+b)=2$.

Pentru $U(\mathbb{Z}_8)=\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\}$ avem $\mathrm{ord}(\hat{3})=\mathrm{ord}(\hat{5})=\mathrm{ord}(\hat{7})=2$. Cele două grupuri sunt izomorfe. Sunt grupuri cu doi generatori şi orice izomorfism este determinat de valorile pe generatori. De exemplu $0\mapsto\hat{1}, a\mapsto\hat{3}, b\mapsto\hat{5}, a+b\mapsto\hat{3}\cdot\hat{5}=\hat{7}$.

Grupul $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ se numeţe grupul lui Klein.

Problema 5. Orice grup cu 4 elemente este izomorf sau cu $(\mathbb{Z}_4,+)$ sau cu $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$.

Soluţie: Ordinul grupului este numărul de elemente al acestuia. Se ştie că pentru orice $x\in G, \mathrm{ord}(x)|\ |G|$. Deci pentru un grup G cu 4 elemente, orice element $1\neq x\in G\Rightarrow \mathrm{ord}(x)\in\{2,4\}$.

• pentru orice $1\neq x, \mathrm{ord}(x)=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=x^{-1}$. Considerăm $1\neq y\neq x$, şi $y^2=1$ de unde $y^{-1}=y$. xy este un alt element. Am demonstrat în seminarul 5 că orice grup pentru care orice $x\in G, x^2=1$ este abelian. Deci $yx=xy$. Astfel elementele grupului sunt $1,x,y,xy$, cele diferite de 1 de ordin 2. Acesta este grupul Klein.

• $\exists x\in G, \mathrm{ord}(x)=4$. Deci avem $x^4=1$ şi elementele grupului $G=\{1,x,x^2,x^3\}$. Să vedem că acestea sunt distincte. $1\neq x$ pentru că $\mathrm{ord}(x)=4$ iar $\mathrm{ord}(1)=1$. Dacă $x^2=1$ atunci $\mathrm{ord}(x)=2<4$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $x^2\neq 1$. Dacă $x^2=x\Rightarrow x=1$, ceea ce este fals. Deci $1\neq x^2\neq x$. Similar se arată că $1\neq x^3\neq x$ şi $x^3\neq x^2$. Deci $(G,\cdot)\simeq\ (Z_4,+)$. Acesta este de fapt grupul ciclic cu 4 elemente scris multiplicativ sau aditiv.

Problema 6. Să se arate că $D_3 \simeq S_3$.

Soluţie: D_3 este generat de ρ rotaţia cu $120°$ în sens antiorar în jurul centrului şi s oricare dintre cele trei simetrii. Vom considera $s = s_3$, simetria faţă de mediatoarea l_3 ce trece prin vârful 3. Acţiunea rotaţiei ρ pe vârfurile 1, 2, 3 ale triunghiului este : $(1,2,3) \longmapsto (2,3,1)$. Ac ciunea simetriei $s = s_3$ pe vârfurile triungiului este $(1,2,3) \longmapsto (2,1,3)$. ρ şi s sunt generatorii grupului D_3, adică fiecare element se poate scrie ca un cuvânt în puterile lui ρ şi ale lui s. Ca mulţime $D_3 = \{1, \rho, \rho^2, s, \rho s, \rho^2 s\}$. Corespondenţa $\rho \mapsto a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $s \mapsto b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ defineşte un izomorfism între D_3 şi S_3. În ambele grupuri operaţia este compunerea aplicaţiilor care se face de la dreapta la stânga.

Problema 7. Orice grup cu 6 elemente este izomorf sau cu $\mathbb{Z}_6$ sau cu grupul permutărilor S_3.

Soluţie: Folosim din nou faptul că pentru orice $x \in G, \operatorname{ord}(x) | \, |G|$.

• $\nexists x \in G, \operatorname{ord}(x) = 6$. Atunci $(\forall) x \neq 1$ poate avea ordinul 2 sau 3. Aplicând teorema Cauchy rezultă că există în G un element $x, \operatorname{ord}(x) = 3$ şi un element $y, \operatorname{ord}(y) = 2$. Bineînţeles $x \neq y$, pentru că au ordine diferite. Avem $1 \neq x \neq x^2 \neq 1$. Putem avea $y = x^2$? Dacă ar fi adevărat atunci $1 = y^2 = (x^2)^2 = x^4$. Deci $x^4 = 1 = x^3 (\operatorname{ord}(x) = 3) \Rightarrow x = 1$, ceea ce este fals. Deci $y \notin \{1, x, x^2\}$. În G avem elementele $\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$.

- dacă $yx = 1 \Rightarrow x = y^{-1} = y$ - fals
- dacă $yx = x \Rightarrow y = 1$ - fals
- dacă $yx = x^2 \Rightarrow y = x$ - fals
- dacă $yx = y \Rightarrow x = 1$ - fals
- dacă $yx = xy$ nu avem o contradicţie, grupul care se obţine este abelian
- o altă variantă este ca $yx = x^2y \Leftrightarrow yxy^{-1} = x^2 \Leftrightarrow yxy = x^2$.

1: $yx = xy$. Notăm $xy = a$. $a^2 = (xy)^2 = xyxy = xyyx = x^2$, $a^3 = aa^2 = (xy)x^2 = yxx^2 = y$, $a^4 = x^4 = xx^3 = x$, $a^5 = a^2a^3 = x^2y$, $a^6 = (a^3)^2 = y^2 = 1$. Am obţinut un element de ordin 6, deci o contradicţie.

2. $yx = x^2y$. În acest caz avem $yx^2 = yxx = x^2yx = x^2x^2y = x^4y = xy$. Deci în acest caz $G = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$, iar $yx = x^2y$ şi $yx^2 = xy$. Acesta este grupul $S_3 \simeq D_3$.

• $\exists x \in G, \operatorname{ord}(x) = 6$, atunci
$G = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, adică grupul ciclic cu 6 elemente. Similar cu demonstraţia din problema 5, aceste elemente sunt distincte. Deci $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_6, +)$.