

Forma Jordau

OBS

$A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sunt echivalente $A \sim A' \Leftrightarrow$
 $\exists C \in GL(n, \mathbb{K})$ ai $A' = C^{-1}AC$

" \sim " este o relatie de echivalență.

OBS

$(\text{End}(V), +, \cdot) \xrightarrow{\varphi} (M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ izomorfism de inele.

$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V , $A = (a_{ji})_{j,i=1,\dots,n}$ matricea asociată lui $f \in \text{End}(V)$ în raport cu \mathcal{R} .

$$\varphi(f) = A$$

Problema

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exists C \in GL(n, \mathbb{C})$ ai
 $A' = C^{-1}AC$ este

- a) diagonală
- b) „aproape” diagonală.

(SAU)

$\forall f \in \text{End}(V)$, \exists un reper \mathcal{R} în V ai
 matricea asociată lui f în raport cu \mathcal{R} este

- a) diagonală
- b) „aproape” diagonală

Def Fie $\lambda \in \mathbb{C}$.

• I.n. bloc Jordan de ordinul p asociat lui λ

matricea $J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \mid p \geq 2$

$$J_1(\lambda) = (\lambda)$$

• I.n. matrice Jordan de ord n o matrice

$$J = \left(\begin{array}{c|c} J_{p_1}(\lambda_1) & 0 \\ \hline 0 & J_{p_t}(\lambda_t) \end{array} \right), \quad p_1 + \dots + p_t = n.$$

Teorema $(V, +, \cdot) / \mathbb{C}$ sp. vectorial
 $\forall f \in \text{End}(V)$, \exists un reper în V ai matrice
 asociată lui f în raport cu \mathcal{R} este matrice Jordan
 $J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$, $p_1 + \dots + p_t = n = \dim V$

(SAU) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists C \in GL(n, \mathbb{C})$ ai
 $A' = C^{-1}AC$ este o matrice Jordan J .

Scrisura blocurilor Jordan pe diagonală este
 unică, modulo permutarea blocurilor Jordan pe
 diagonală.

PAS 1 $f \in \text{End}(V)$ ai $\exists m \in \mathbb{N}^*$ ai $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{m \text{ ori}} = f^m = 0$
 i.e. endomorfism nilpotent.

Prop. \exists un reper ai matricea asociată lui f
 este matricea Jordan.

$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_t}(0) \end{pmatrix}$, unde $p_1 + \dots + p_t = n$.
 $n_1 = \text{nr. blocurilor Jordan de ord } 1$
 $n_2 = \text{nr. blocurilor Jordan de ord } 2$
 \vdots
 $n_k = \text{nr. blocurilor Jordan de ord } k$
 $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + k \cdot n_k = n$,

$n_i = \text{rg}(A^{i-1}) - 2 \text{rg}(A^i) + \text{rg}(A^{i+1})$, $\forall i = \overline{1, k}$

$A^0 = I_n$, A matricea asoc. lui f în rap. cu un
 reper \mathcal{V} .

PAS 2

$f \in \text{End}(V)$ cu o singură valoare proprie λ .
 $p_f(x) = (x - \lambda)^m$, $m = \text{multiplicitatea lui } \lambda$.
 (polinomul caracteristic)

$$(x - \lambda)^m = 0 \Rightarrow (f - \lambda \text{id}_V)^m = 0$$

$$(A - \lambda I_n)^m = 0 \quad (\text{T. Hamilton-Cayley})$$

$g \in \text{End}(V)$, $g = f - \lambda \text{id}_V$ este endomorfism nilpotent

$\Rightarrow \exists$ un reper în V ai matricea asociată lui g este matricea Jordan $J_g = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_t}(0) \end{pmatrix}$

$$f = g + \lambda \text{id}_V \Rightarrow$$

$$J_f = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_t}(\lambda) \end{pmatrix}$$

PAS 3

$f \in \text{End}(V)$ arbitrar

$\lambda_1, \dots, \lambda_r = \text{valori pr. distincte}$

$m_1, \dots, m_r = \text{multiplicitățile coresp.}$

$$p_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

$$\text{Not } V_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{id})^{m_i}), \quad i = \overline{1, r}$$

$$f_i := f|_{V_i}, \quad \forall i = \overline{1, r}$$

$f_i \in \text{End}(V_i)$ cu val. proprie unică λ_i , $\forall i = \overline{1, r}$

Aplicăm PAS 2 la fiecare f_i , $i = \overline{1, r}$

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

În reperul $R = R_1 \cup \dots \cup R_r$ matricea asociată lui f este o matrice Jordan.

Aplicatie

$$f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$$

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x) = (x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_4, -x_1 - 2x_3 + x_4, -x_2)$$

Să se det. matricea Jordan asociată lui f

Sol

$$R_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ reperul canonic}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matricea asociată lui } f \text{ în rap. cu } R_0.$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^4 = 0.$$

$$\begin{matrix} \lambda^4 = 0 \\ A^4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow f \text{ endom. nilpotent}$$

$$m_i = \text{rg}(A^{i-1}) - 2\text{rg}(A^i) + \text{rg}(A^{i+1}), \quad i = \overline{1, k}$$

$$\boxed{\text{rg } A = 2, \text{rg } A^2 = 1, \text{rg } A^3 = \text{rg } A^4 = 0, A^0 = J_4.}$$

$$m_1 = \text{rg}(J_4) - 2\text{rg}(A) + \text{rg}(A^2) = 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$m_2 = \text{rg}(A^1) - 2\text{rg}(A^2) + \text{rg}(A^3) = 2 - 2 \cdot 1 + 0 = 0$$

$$m_3 = \text{rg}(A^2) - 2\text{rg}(A^3) + \text{rg}(A^4) = 1 - 2 \cdot 0 + 0 = 1$$

$$m_i = 0, \quad \forall i \geq 4$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 \\ 0 & J_3(0) \end{pmatrix}$$