SEMINAR 7

Să se determine subgrupurile şi să se descrie laticea acestora pentru grupurile, $\mathbb{Z}_p$ cu p prim, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, D_3, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times Z_4$, $\mathbb{Z}_8$, D_4, Q grupul cuarternionilor.

Determinaţi subgrupurile normale ale grupurilor D_3, D_4, Q.

- **Grupuri $\mathbb{Z}_p$ cu p prim**

  $\mathbb{Z}_p = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{p-1}\}$. p prim $\Rightarrow \mathrm{ord}(\hat{j}) = \frac{p}{(p,j)} = p$, $(\forall) 1 \leqslant j \leqslant p-1$.

  Deci $\mathbb{Z}_p =< \hat{1} >=< \hat{2} >= \ldots =< \widehat{p-1} >$, adică poate fi generat de oricare dintre elementele $\hat{1}, \ldots, \widehat{p-1}$.

  Teorema Lagrange ne spune că într-un grup finit G, pentru orice subgrup $H < G$, avem $|H| | |G|$. În cazul de faţă pentru $G = \mathbb{Z}_p$, dacă $H < \mathbb{Z}_p$, atunci $|H| | p$, dar p este prim şi deci $|H| \in \{1, p\}$, deci $H = \hat{0}$ sau $H = \mathbb{Z}_p$. Deci Z_p cu p prim nu are subgrupuri proprii adică $\nexists H$ a.î.$1 \lneq H \lneq \mathbb{Z}_p$.

  În fiecare dintre figurile următoare segmentul ce uneşte două subgrupuri reprezintă incluziunea subgrupului scris mai jos în cel scris mai sus.

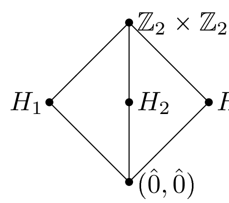
  Pentru $\mathbb{Z}_p$ laticea subgrupurilor este

- **Grupul Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.**

  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{1})\}$. Ordinul oricărui element diferit de $(\hat{0}, \hat{0})$ este 2. Fiecare dintre aceste elemente generează un subgrup de ordin 2.

  Astfel $H_1 =< (\hat{1}, \hat{0}) >= \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0})\}$, $H_2 =< (\hat{0}, \hat{1}) >= \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1})\}$, $H_3 =< (\hat{1}, \hat{1}) >= \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{1})\}$.

  $|H_1| = |H_2| = |H_3| = 2$. Laticea subgrupurilor este următoarea

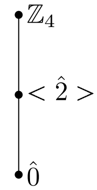


- **Grupul $\mathbb{Z}_4$.**

  $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Avem $\mathrm{ord}(\hat{0}) = 1$, $\mathrm{ord}(\hat{1}) = 4 = \mathrm{ord}(\hat{3})$ şi $\mathrm{ord}(\hat{2}) = \hat{2}$.

  Deci $\mathbb{Z}_4 =< \hat{1} >=< \hat{3} >$. Avem un subgrup propriu $< \hat{2} >= \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

Laticea subgrupurilor pentru $\mathbb{Z}_4$ este

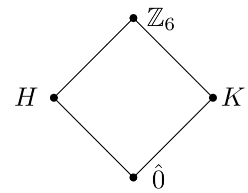


- **Grupul $\mathbb{Z}_6$.**

$\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. Avem $\mathrm{ord}(\hat{0}) = 1$, $\mathrm{ord}(\hat{1}) = 6 = \mathrm{ord}(\hat{5})$, $\mathrm{ord}(\hat{2}) = \mathrm{ord}\,\hat{(}4) = \frac{6}{(2,6)} = \frac{6}{(4,6)} = \frac{6}{2} = 3$.

Deci $\mathbb{Z}_6 =< \hat{1} >=< \hat{5} >$, $H =< \hat{2} >=< \hat{4} >= \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ iar $K =< \hat{3} >= \{\hat{0}, \hat{3}\}$. $|H| = 3$ iar $|K| = 2$.

Laticea subgrupurilor pentru $\mathbb{Z}_6$ este:



Până aici toate grupurile prezentate sunt abeliene şi deci subgrupuriloe acestora sunt în fiecare caz este normale.

- **Grupul $D_3 \simeq S_3$.**

Acesta este primul grup din lista celor propuse spre studiu care nu este abelian.

Voi folosi permutări.

$S_3 = \{\mathrm{id}_{[3]}, a = (123), a^2 = (132), b = (12), ab = (123)(12) = (13), a^2b = (132)(12) = (23)\}$. În scrierea uzuală $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. În scrierea folosită anterior se scriu de fapt imaginile elementelor prin permutarea respectivă. Mai mult, în această scriere a unei permutări elementele fixate de permutare NU sunt menţionate. Astfel, $a(1) = 2, a(2) = 3, a(3) = 1$. Aşa apare scrierea compactă $a = (123)$. Pentru b avem $b(1) = 2, b(2) = 1, b(3) = 3$, de unde $b = (12)$.

Pentru grupul S_3 avem $a^3 = \mathrm{id}_{[3]}, b^2 = (ab)^2 = (a^2b)^2 = \mathrm{id}_{[3]}$. Mai avem relaţia $ba = a^2b$. Deci $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^2) = 3$, $\mathrm{ord}(b) = \mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(a^2b) = 2$.

Subgrupurile grupului S_3, primul neabelian pe care-l studiem, sunt:

$K =< a >=< a^2 >= \{\mathrm{id}_{[3]}, a, a^2\}$, $H_1 =< b >= \{\mathrm{id}_{[3]}, b\}$, $H_2 =< ab >= \{\mathrm{id}_{[3]}, ab\}$, $H_3 =< a^2b >= \{\mathrm{id}_{[3]}, a^2b\}$.

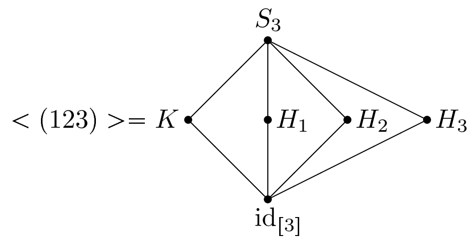
K este un subgrup de index 2, deci normal. H_1, H_2, H_3 sunt de index 3. Din teorie nu reiese că sunt normale.

Să facem o verificare pentru unul dintre acestea.

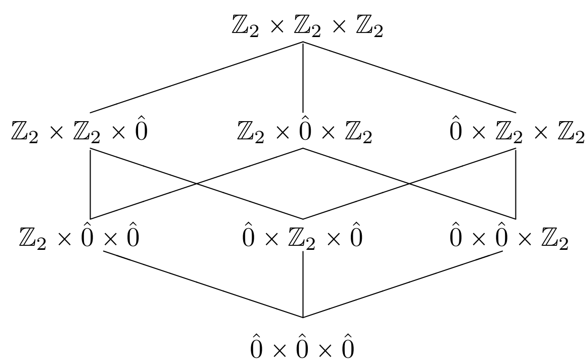
Elementul $b \in H_1$ îl vom conjuga cu $a^2 \in S_3$. $a^3 = \mathrm{id}_{[3]} \Rightarrow a^{-1} = a^2$ şi $(a^2)^{-1} = a$. Avem $a^2b(a^2)^{-1} = a^2ba = baa = ba^2 \notin H_1$. Deci conjugarea lui $b \in H_1$ cu un element din S_3 NU este un element din H_1, deci H_1 nu este normal.

Nici subgrupurile H_2 şi H_3 nu sunt normale.

Laticea subgrupurilor în acest caz este

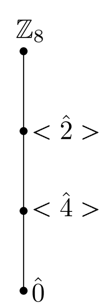


- **Grupul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.**
  Toate elementele diferite de identitate sunt de ordin 2.
  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\hat{0}, \hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{1}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}), (\hat{0}, \hat{1}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{1}, \hat{1})\}$
  Laticea subgrupurilor este



Toate subgrupurile sunt normale, grupul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ fiind abelian.

- **Grupul $\mathbb{Z}_8$.**
  $\mathbb{Z}_8 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}\}$.
  Elementele nenule au ordinele: $\mathrm{ord}(\hat{1}) = \mathrm{ord}(\hat{3}) = \mathrm{ord}(\hat{5}) = \mathrm{ord}(\hat{7}) = 8$, $\mathrm{ord}(\hat{2}) = \mathrm{ord}(\hat{6}) = 4$ şi $\mathrm{ord}(\hat{4}) = 2$.
  $\mathbb{Z}_8 =< \hat{1} >=< \hat{3} >=< \hat{5} >=< \hat{7} >$,
  $< \hat{2} >=< \hat{6} >= \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \simeq \mathbb{Z}_4$,
  $< \hat{4} >= \{\hat{0}, \hat{4}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.
  Toate subgrupurile sunt normale pentru că $\mathbb{Z}_8$ este abelian.
  Laticea subgrupurilor este



- **Grupul diedral $\mathcal{D}_4$.**

  Grupul simetriilor pătratului este generat de R, rotaţia cu $90°$ în sens antiorar în jurul centrului pătratului şi s una din cele patru simetrii ale pătratului. Avem relaţiile $R^4 = s^2 = \mathrm{id}$ şi $R^3s = sR$. Alte relaţii care se deduc din acestea sunt $R^2s = sR^2, Rs = sR^3$. Grupul nu este abelian.

  $D_4 = \{\mathrm{id}, R, R^2, R^3, s, Rs, R^2s, R^3s\}$.
  $\mathrm{ord}(R) = \mathrm{ord}(R^3) = 4 = \frac{4}{(3,4)} = 4$.
  $\mathrm{ord}(R^2) = \mathrm{ord}(s) = \mathrm{ord}(Rs) = \mathrm{ord}(R^2s) = \mathrm{ord}(R^3s) = 2$.
  De exemplu $(R^2s)^2 = R^2sR^2s = sR^2R^2s = sR^4s = s\,\mathrm{id}\,s = s^2 = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{ord}(R^2s) = 2$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & D_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq < R^2, Rs > \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & < R > \simeq \mathbb{Z}_4 \arrow[d, dash] & < R^2, s > \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
< R^3s > \arrow[drr, dash] & < Rs > \arrow[dr, dash] & < R^2 > \arrow[d, dash] & < s > \arrow[dl, dash] & < R^2s > \arrow[dll, dash] \\
 & & \mathrm{id} & &
\end{tikzcd}
$$

$< R^2 > \lhd < R > \lhd D_4$. Nu rezultă imediat că $< R^2 > \lhd D_4$. Trebuie să facem conjugarea. Este suficient cu generatorii grupului D_4. Conjugarea lui R^2 cu R ne dă R^2, fiind puteri ale lui R. $sR^2s^{-1} = sR^2s = ssR^2 = \mathrm{id}\,R^2 = R^2$. Conjugarea păstrează subgrupul $< R^2 >$, deci acesta este normal în D_4.

Nu acelaşi lucru se întâmplă pentru subgrupurile $< s >, < Rs >, < R^2s >, < R^3s >$.

Voi face conjugarea cu generatorii R şi s pentru subgrupul $< Rs >$. $R^4 = \mathrm{id} \Rightarrow R^{-1} = R^3$.

Avem $R(Rs)R^{-1} = RRsR^3 = sR^2R^3 = sR^5 = sR = R^3s \notin < Rs >$. Deci $< Rs >$ nu este normal în D_4.

Vedem că $< Rs > \lhd < R^2, Rs > \lhd D_4$, dar $< Rs >$ nu este subgrup normal în D_4.

• Fie G un grup şi $\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \longrightarrow G \mid f \text{ automorfism}\}$. Este uşor de văzut că $\mathrm{Aut}(G)$ este grup: compunerea morfismelor este asociativă, id_G este elementul neutru la compunere iar fiecare automorfism (morfism bijectiv) are un invers.

Considerăm $\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi_g : G \longrightarrow G \mid \varphi_g(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G\}$ subgrupul automorfismelor interioare.

Demonstrăm că φ_g este automorfism al grupului G.

- φ_g morfism: $\varphi_g(xy) = g(xy)g^{-1} = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \varphi_g(x)\varphi_g(y)$.
- φ_g injectiv: $\varphi_g(x) = \varphi_g(y) \Leftrightarrow gxg^{-1} = gyg^{-1}$. Înmulţind la stânga cu g^{-1} şi la dreapta cu g obţinem $x = y$.
- φ_g surjectiv: Fie $y \in G$. Trebuie să rezolvăm ecuaţia $\varphi_g(x) = y$ în funţie de x. $\varphi_g(x) = y \Leftrightarrow gxg^{-1} = y \Leftrightarrow x = g^{-1}yg$. Deci pentru $\forall y \in G, \exists x = g^{-1}yg \in G$ a.î. $\varphi_g(x) = y$.

Considerăm aplicaţia $F : G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G)$ definită prin $F(g) = \varphi_g$. Demonstrăm că F este morfism. Trebuie arătat că $F(g_1g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$.

$F(g_1g_2) = \varphi_{g_1g_2}$. $\varphi_{g_1g_2}(x) = g_1g_2x(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1(g_2xg_2^{-1})g_1^{-1} = \varphi_{g_1}(g_2xg_2^{-1}) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = (\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})(x) \Rightarrow \varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$, adică $F(g_1g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$.