$\dim U = \dim W = 5$

$U, W \subseteq \mathbb{R}^9$

$U \cap W \neq \{0\}$

$\dim(U + W) \leq \dim(\mathbb{R}^9) = 9$

$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$\Leftrightarrow \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \leq 9$

$\Leftrightarrow 10 - \dim(U \cap W) \leq 9$

$\Leftrightarrow \dim(U \cap W) \geq 1$

$\Rightarrow U \cap W$ has a basis $\neq ()$ $\Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$