

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет

«Московский институт электронной техники»

Факультет микроприборов и технической кибернетики

Кафедра высшей математики 1

Амелин Владислав Владимирович

Бакалаврская работа

по направлению 01.03.04 «Прикладная математика»

«Фильтрация шумов на изображениях в базисе дискретных вейвлет-преобразований»

Студент

(Амелин В.В.)

Научный руководитель,

д.ф.-м.н., профессор кафедры ВМ-1

(Умняшкин С.В.)

Москва 2016

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Обзор существующих видов шумов и методы их фильтрации	6
1.1. Основные источники шумов и их виды	6
1.2. Линейная фильтрация в пространственной области	7
1.3. Медианная фильтрация	9
1.4. Анизотропная диффузия	11
1.5. Математическая морфология	11
1.6. Цели и задачи выпускной квалификационной работы	15
Глава 2. Разработка методов фильтрации	17
2.1. Основы теории вейвлет-анализа	17
2.2. Дискретное вейвлет-преобразование сигналов и изображений	20
2.3. Оценка качества изображений	24
2.4. Классическая пороговая фильтрация изображений на основе вейвлет-преобразований	26
2.5. Локально-адаптивный выбор порогов для фильтрации	28
2.6. Пороговая фильтрация изображений в базисе пакетных вейвлет-преобразований	31
Глава 3. Практические результаты	34
3.1. Результаты фильтрации зашумленных изображений	34
3.2. Кодирование отфильтрованных изображений	42
Выводы и заключение	44
Список использованных источников	46

Введение

Компьютерная графика, как наука, стала весьма популярной в век информационных технологий. Она состоит из трёх направлений: визуализация, обработка изображений, а также распознавание образов. Визуализация заключается в создании изображения на основе некоторого описания. Задачей распознавания образов является классификация объектов, представленных на изображении, по нескольким категориям или классам. Под обработкой подразумеваются всевозможные методы по преобразованию изображения: сглаживание, коррекция цветов, увеличение резкости и контрастности и т.д. Обработка может заключаться как в улучшении качества изображения по определённому критерию, так и в кардинальном изменении этого изображения, например, для последующего выделения границ объектов [3, 17].

Методы по обработке изображения также зависят от того, каким путём оно было получено. Так, для оцифрованных чёрно-белых и цветных фотографий характерно наличие шума, поэтому необходимо применять фильтрацию, которая заключается в том, чтобы в ходе некоторой обработки получить новое изображение, наиболее близкое по своим характеристикам к оригиналу. Шум может возникнуть из-за плохих условий съёмки, при дефектах аппаратуры для захвата изображений, в результате электромагнитной наводки.

Фильтрация шумов очень важна при решении широкого круга задач и имеет большое практическое применение. При подавлении шумов улучшается восприятие изображений. Также повышается качество изображений и качество алгоритмов по их обработке, например, алгоритмов по классификации объектов. Фильтрация применяется с целью повышения чёткости снимков в медицинских диагностических системах: УЗИ, МРТ, КТ и др. Стоит отметить, что шумоподавление имеет важное значение при сжатии изображений. В основе сжатия лежит использование взаимной корреляции между пикселями, которая на зашумленных изображениях уменьшается. Также при кодировании зашумленных изображений объём закодированной информации становится больше, в отличие от кодирования с предварительным подавлением шумов. В последние десятилетия было разработано много новых методов цифровой фильтрации сигналов и изображений.

На данный момент не существует универсальных методов по подавлению всех видов шумов, но часто шум на изображениях можно приблизить моделью белого гауссовского шума. В данной работе представлены реализация и теоретическое обоснование алгоритма по фильтрации аддитивных гауссовских шумов с различной дисперсией. В основе метода лежит применение дискретных вейвлет-преобразований.

Вейвлет-преобразование – это сравнительно молодое и важное направление в теории и технике обработки сигналов и изображений, возникшее в конце прошлого века. Теория вейвлетов, по сравнению с Фурье-анализом, обладает рядом преимуществ, связанных с обработкой сигналов и изображений. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа состоит в том, что при его использовании можно легко выявлять локальные изменения сигнала, тогда как Фурье-анализ не позволяет сделать этого: коэффициенты Фурье показывают поведение сигнала на всём его протяжении. За довольно короткое время разработана большая математическая теория вейвлетов, а их применение значительно расширило круг решаемых прикладных задач [1, 2].

Данная работа состоит из трёх глав. Все вычисления и алгоритмы написаны в среде Matlab, а реализация прямого и обратного двумерного дискретного вейвлет-преобразования осуществляется при помощи специальной библиотеки, написанной на C++.

В первой главе рассмотрены источники и основные виды шумов на изображениях, приводится описание существующих методов по их фильтрации. В конце главы сформулирована цель работы, а также обозначены задачи, решение которых необходимо для достижения поставленной цели.

Во второй главе более подробно рассмотрены основные аспекты теории вейвлетов. Показано, в чём состоит преимущество фильтрации гауссовских шумов в базисе дискретных вейвлет-преобразований перед другими методами фильтрации и приведены критерии объективной оценки качества фильтрации. Представлена разработка метода в теоретическом плане. Предлагаются различные способы поиска порогов для подавления шумов в базисе вейвлет-преобразований и объясняется преимущество метода, основанного на локально-адаптивном выборе порогов для фильтрации шумов.

Третья глава посвящена практическим результатам. Показаны результаты фильтрации изображений с различным уровнем шума для всех предложенных во второй главе методов и приводится их сравнительная характеристика.

В заключении приведены перспективы дальнейшего развития предложенного в дипломной работе метода.

Глава 1. Обзор существующих видов шумов и методы их фильтрации

1.1. Основные источники шумов и их виды

На реальных изображениях помимо полезной информации присутствуют различные помехи, которые часто называют шумом. Источники шума весьма разнообразны. К ним относятся:

- дефекты аппаратуры для захвата изображений;
- зернистость фотоматериалов;
- пыль и грязь на матрице и объективе;
- усиление сигнала и тепловой шум в цифровом фотоаппарате;
- плохие условия съёмки;
- оцифровка изображений и др. [17].

В свою очередь все шумы, характерные для цифровых изображений, могут быть классифицированы различными способами, но стоит выделить основные виды: белый шум, импульсный шум, а также разновидность импульсного шума – шум вида «соль и перец» [3].

Белый шум – это шум, спектральные составляющие которого имеют равномерное распределение мощности по всему диапазону частот. В природе нет «чисто» белого шума, под ним понимается шум с равномерным спектром мощности в рассматриваемом частотном диапазоне. Одним из видов белого шума является аддитивный белый гауссовский шум, функция плотности распределения амплитуд которого имеет вид:

$$P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}},$$

где a – амплитуда шума, а σ – среднеквадратическое отклонение. Под аддитивностью понимается, что зашумленное изображение получается в результате сложения исходного изображения и шума:

$$I'(x, y) = I(x, y) + R(x, y),$$

где $I'(x, y)$ – пиксель зашумленного изображения, $I(x, y)$ – пиксель исходного (оригинального) изображения, $R(x, y)$ – аддитивная шумовая компонента [3].

Также существует мультипликативный шум, получающийся вследствие перемножения исходного изображения с шумом:

$$I'(x, y) = I(x, y) \cdot R(x, y) .$$

Например, шум такого вида присутствует на ультразвуковых и радиолокационных изображениях.

Импульсный шум описывается соотношением:

$$I'(x, y) = (1 - p)I(x, y) + p \cdot k(x, y) ,$$

где $k(x, y)$ – модель импульсного шума, $p \in \{0,1\}$. При импульсном шуме происходит замена пикселей изображения на новые, значение которых сильно отличается от значения окружающих пикселей [3].

Под шумом «соль и перец» (salt-and-pepper) понимается замена с вероятностью p пикселей изображения на чёрные, а с вероятностью q – на белые ($p, q \in \{0,1\}$). Для полутоновых изображений, с разрядностью 8 бит, чёрному пикселю соответствует значение 0, а белому – 255. Чем больше значения параметров p и q , тем более зашумленным получается итоговое изображение. [3].

Рассмотрим распространенные методы по удалению шумов.

1.2.Линейная фильтрация в пространственной области

Под линейной фильтрацией понимается вычисление линейной комбинации значений пикселей в окне фильтрации с коэффициентами ядра (маски) линейного фильтра. Ядро скользит вдоль всего изображения. Один шаг линейной фильтрации (вычисление значения центрального пикселя) будет выглядеть следующим образом:

$$I'(x, y) = \sum_{i=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} I(x + i, y + j) \cdot Mask(x + i, y + j) , \quad (1.1)$$

где m, n – ширина и высота окна фильтрации. Результат выполнения для всех пикселей операции (1.1) называется свёрткой изображения I с ядром $Mask$ [3, 18].

Простейший случай линейной фильтрации – скользящее среднее в окне. Результатом данной фильтрации является среднее арифметическое, вычисленное по всем пикселям в окне. Маска при такой фильтрации будет иметь одинаковые элементы, равные $1/n$, где n – число элементов в маске. Чем больше размер окна,

тем сильнее происходит усреднение, в результате чего наблюдается размытие границ объектов [17].

Можно повысить устойчивость результатов фильтрации на краях областей, применяя метод гауссовского размытия. Это свёртка изображения с функцией

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

где σ — это среднеквадратическое отклонение (задаёт степень размытия изображения). Гауссово ядро в этом случае называется гауссианом. Для гауссиана размером $(2k + 1) \times (2k + 1)$ каждый элемент H_{ij} можно вычислить по следующей формуле:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(i - k - 1)^2 + (j - k - 1)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.2)$$

В центре ядра весовые коэффициенты больше, чем на его границах. Это позволяет подавлять шум, сохраняя требование, чтобы пиксели были схожи с соседними. Для отдалённых пикселей требование будет не таким строгим из-за меньших значений весовых коэффициентов [3].

Параметр σ стоит выбирать, исходя из практических соображений. При очень малом значении σ сглаживание не слишком эффективно, т.к. значения всех элементов гауссиана, кроме центрального, будут очень малы. Для больших σ кроме шума исчезнет и большая часть элементов изображения.

При увеличении размеров гауссиана происходит всё большее размытие изображения при фиксированном σ . Данный фильтр является сепарабельным, т.е.

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right),$$

поэтому можно значительно ускорить работу метода при больших размерах фильтра, применяя операцию свёртки сначала по строкам, а затем по столбцам изображения [22].

Примеры масок размера 3×3 , характерных для линейной фильтрации:

$$Mask1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Mask2 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Mask3 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Во втором и третьем случаях значению центрального пикселя присваивается взвешенное среднее в соответствии с коэффициентами. Маска *Mask3* является гауссовой.

Можно модифицировать алгоритм линейной усредняющей фильтрации и находить среднее арифметическое только тех пикселей, разница между каждым из которых и центральным меньше заданного порога.

Линейная фильтрация имеет простую реализацию и наиболее успешно работает для гауссовского шума. Но для всех линейных алгоритмов фильтрации изображений характерно сглаживание резких перепадов яркости. Применение линейной фильтрации для импульсного шума даёт плохие результаты [3, 18].

1.3. Медианная фильтрация

Медианная фильтрация – это нелинейный метод обработки сигналов, предложенный Джоном Тюки в 1971 году. При медианной фильтрации для каждого пикселя рассматривается окно, которое часто имеет центральную симметрию (в центре окна располагается текущая точка фильтрации). Окна чаще всего имеют вид квадрата или креста, как показано на рисунке 1.1 [19].

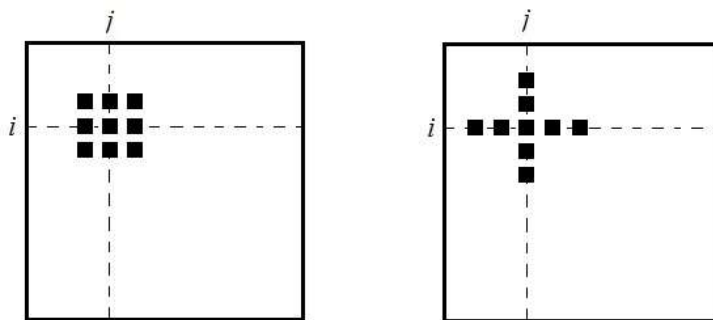


Рисунок 1.1. Примеры окон для медианной фильтрации: квадрат (слева), крест (справа)

Те пиксели, которые попали в окно, составляют набор данных для вычисления значения искомого центрального пикселя. Набор данных представляется в виде одномерного массива $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, где w_i – значения яркостей пикселей, причём количество элементов нечётно, т.к. рассматриваются симметричные окна, имеющие центральный элемент. Далее последовательность

элементов сортируется по возрастанию и выбирается центральный элемент отсортированного массива, который и является медианой упорядоченной последовательности. Значение найденной медианы присваивается текущей точке изображения. Обозначим данную процедуру следующим образом:

$$p^* = med(w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Также медиану можно вычислить по следующей формуле:

$$p^* = \arg \min_{w_i \in W} \sum_{w_j \in W} |w_i - w_j|. \quad (1.3)$$

Обработка каждой точки происходит независимо, но для ускорения работы можно на новом шаге использовать уже выполненные вычисления. Размеры окна можно изменять с целью увеличения эффективности работы алгоритма.

В отличие от линейной фильтрации, медианная фильтрация хорошо подавляет импульсные помехи, а также помехи типа «соль и перец». Рассмотрим это на примере. Пусть имеется одномерный массив $W = \{121, 105, 95, 42, 251, 53, 132, 97, 73\}$, где значение текущей точки фильтрации равно 251. Такая высокая яркость центрального пикселя может быть обусловлена влиянием импульсной помехи. После сортировки последовательности по возрастанию получим новую последовательность, для которой $p^* = med(w_1, w_2, \dots, w_n) = 97$. Как можно видеть, импульсная помеха была заменена на новое значение, которое не является экстремальным в данной выборке.

Если импульсная помеха не является точечной, а покрывает некоторую локальную область, то она будет подавлена, если размер этой области меньше половины размера окна медианной фильтрации. Однако произойдёт размытие мелких деталей, величина которых меньше размера этого окна. В отличие от линейной, медианная фильтрация показывает плохие результаты при фильтрации гауссовского шума. Но она в меньшей степени размывает границы объектов на изображении. Это происходит потому, что для окна, находящегося вблизи границы, разделяющей тёмный и светлый участок изображения, медиана с большей вероятностью будет находиться среди элементов, к которым относится центральный элемент в окне. Описанная выше теория приведена в [19].

1.4. Анизотропная диффузия

Суть данного метода заключается в том, что яркость каждого пикселя рассматриваемого изображения представляется в виде соответствующего значения температуры. В результате получается температурная карта всего изображения. Процесс подавления шума осуществляется выравниванием температур. Это достигается моделированием процесса теплопереноса:

$$I_t = c \cdot \Delta I,$$

где I_t – интенсивность пикселей, c – коэффициент теплопроводности, ΔI – разность температур двух пикселей.

Зависимость коэффициента теплопроводности от градиента интенсивности пикселей выражается формулой:

$$c(\nabla I) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla I|}{k}\right)^2\right), \quad (1.5)$$

где k – коэффициент диффузии (чем он выше, тем сильнее происходит размытие изображения) [17].

К достоинствам метода можно отнести устойчивость к размытию границ на деталях изображения. Это связано с тем, что на границе происходит сильное изменение яркости, поэтому значение коэффициента теплопроводности, вычисленное по формуле (1.5), будет небольшим, и перенос тепла на границе будет незначительным.

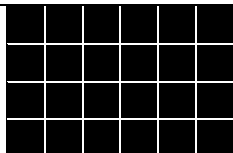
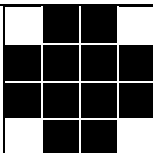
1.5. Математическая морфология

Морфология – это подход к анализу изображения, основанный на формах, который применяется для исследования его структуры и дальнейшему извлечению из него определённых свойств. Данный метод сначала был разработан для бинарных изображений, но впоследствии был расширен на изображения в градациях серого цвета [3]. Благодаря тому, что метод математической морфологии умеет отделять важную для последующей обработки информацию от ненужного шума и других дефектов изображения, он нашёл своё применение в биологии, медицинской диагностике, контроле качества, распознавании образов и т. д.

Морфология обычно описывается с точки зрения алгебраической теории множеств. Для простоты рассмотрим морфологию бинарных изображений,

которые представляют собой упорядоченные множества чёрных и белых пикселей. Соответственно областью такого изображения будет некоторое подмножество всех его точек. Любая операция бинарной морфологии есть некоторое преобразование этого множества. Исходные данные представляют собой заданное бинарное изображение I и так называемый структурный элемент S . Структурный элемент – это бинарное изображение произвольной геометрической формы. Примеры наиболее распространённых структурных элементов приведены в таблице 1.1 [3, 21].

Таблица 1.1. Примеры структурных элементов

$BOX(h, w)$ – прямоугольник	$DISK(d)$ – диск	$RING(d)$ – кольцо
		

Любой структурный элемент имеет начальную точку, которая может располагаться как внутри элемента, так и за его пределами. В случае симметричных элементов начальная точка находится в центре.

Для понимания принципа математической морфологии рассмотрим простые теоретико-множественные операции на примерах, приведённых в таблице 1.2.

К базовым морфологическим операциям относят трансляцию (перенос), дилатацию (расширение) и эрозию (сужение) (более подробно в [3, 21]).

Таблица 1.2. Теоретико-множественные операции

Изображение A	Изображение B	Операции			
		Объединение $A \cup B$	Пересечение $A \cap B$	Дополнение A^c	Разность $A \setminus B$
					

Операция трансляции (translation) представляет собой сдвиг множества пикселей на изображении на заданное расстояние и записывается следующим образом:

$$X_v = \{x + v \mid x \in X\},$$

где X – множество пикселей изображения, v – вектор сдвига. Пример данной операции изображён на рисунке 1.2.

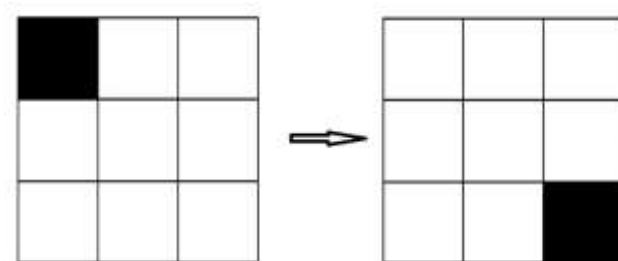


Рисунок 1.2. Пример морфологической операции трансляции

Операция дилатации (dilation) изображения I структурным элементом S задаётся выражением:

$$I \oplus S = \bigcup_{s \in S} I_s.$$

Таблица 1.3. Пример морфологической операции дилатации

Изображение I	Структурный элемент S	Результат операции $I \oplus S$

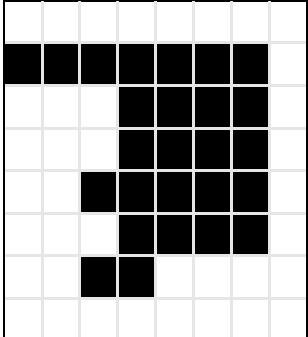
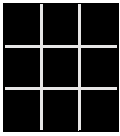
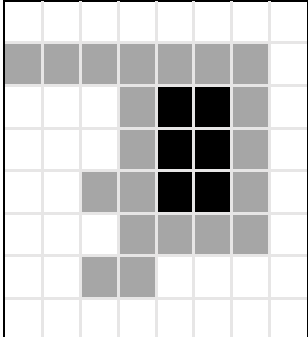
Суть операции заключается в том, что когда начальная точка элемента S совмещается с бинарным пикселем со значением 1 исходного изображения, то элемент S полностью записывается в выходное изображение. Пример данной операции приведён в таблице 1.3.

Операция эрозии (erosion) изображения I структурным элементом S задаётся выражением:

$$I \ominus S = \{z \in I \mid S_z \subseteq I\}.$$

Суть операции заключается в следующем: если выполняется условие, при котором все пиксели элемента S совмещаются с соответствующими бинарными пикселями со значением 1 исходного изображения, то в выходное изображение записывается пиксель, расположенный под начальной точкой элемента S . Если хотя бы один пиксель элемента S не совместится с единичным пикселем исходного изображения, то в выходное изображение запишется пиксель, расположенный под начальной точкой элемента S , но со значением 0. Пример данной операции приведён в таблице 1.4.

Таблица 1.4. Пример морфологической операции эрозии

Изображение I	Структурный элемент S	Результат операции $I \ominus S$
		

Существуют также производные морфологические операции, которые являются комбинацией базовых. Основные из них это закрытие и раскрытие.

Операция закрытия (closing) изображения I структурным элементом S задаётся выражением:

$$I \bullet S = (I \oplus S) \ominus S.$$

Данная операция позволяет убрать углубления на краях области изображения и скрыть небольшие внутренние отверстия [21].

Операция раскрытия (opening) изображения I структурным элементом S задаётся выражением:

$$I \circ S = (I \ominus S) \oplus S.$$

Данная операция позволяет удалить тонкие линии и перемычки на изображении и сгладить контуры объектов [21].

Морфологические операции можно обобщить на случай полутоновых изображений и применять для удаления шумов. Для примера рассмотрим алгоритм,

описанный в [16]. Смысл его заключается в следующем. К исходному изображению I применяется операция, представляющая собой полусумму операций открытия-закрытия и закрытия-открытия. В результате получается изображение I' , которое содержит меньше шума и выглядит более сглаженным по сравнению с исходным. Изображение $\Delta I = I - I'$ будет состоять из шума и деталей изображения I , размер которых не превышает размера структурного элемента S , использованного в данных морфологических операциях. Исходя из предположения, что амплитуда шума меньше амплитуды деталей изображения, производится обнуление тех пикселей изображения ΔI , значения которых меньше некоторого порога. После этого изображение ΔI складывается с изображением I' .

Преимуществом метода математической морфологии является его простота, а также высокая эффективность обработки бинарных изображений.

Основным недостатком метода является неестественный вид обработанных изображений, что не позволяет применять его для работы с фотореалистичными изображениями.

1.6. Цели и задачи выпускной квалификационной работы

В данной работе рассматривается фильтрация аддитивного белого гауссовского шума с различной дисперсией на основе дискретных вейвлет-преобразований.

Целью работы является разработка и реализация универсального метода пороговой фильтрации, способного подстраиваться под различные уровни шума, при использовании которого повышается качество отфильтрованного изображения по сравнению с классическими методами.

Основные задачи, решение которых необходимо для достижения поставленной цели:

- изучение классических методов фильтрации изображений в базисе дискретных вейвлет-преобразований;
- разработка программы для тестирования классических алгоритмов фильтрации и подбора оптимальных порогов;

- изучение способов оценки белого гауссовского шума на изображении и особенностей представления изображений в области вейвлет-преобразований;
- разработка метода и программной реализации локально-адаптивной фильтрации шумов в базисе дискретных вейвлет-преобразований;
- оценка результатов фильтрации на примере стандартных тестовых изображений.

Глава 2. Разработка методов фильтрации

2.1. Основы теории вейвлет-анализа

Вейвлеты (англ. wavelet – небольшая волна, рябь) – это специальные функции в форме коротких волн (всплесков) с нулевым средним, обладающие частотно-временной локализацией, способные к сдвигу и масштабированию. Вейвлеты образуют полную ортогональную систему функций. Способность к масштабированию помогает вейвлетам находить различия в характеристиках сигнала на разных частотах, а способность к сдвигу – производить анализ сигнала в различных точках на всём рассматриваемом интервале. Благодаря полноте представляется возможным осуществить синтез сигнала, применив обратное вейвлет-преобразование. Рассмотрим всё вышесказанное подробнее [1, 2, 5].

Пусть $f(x)$ определена на $R(-\infty, +\infty)$, а также $f(x) \in L_2(R)$, тогда непрерывным вейвлет-преобразованием функции $f(x)$ называют функцию:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(a, b, x)dx, \quad (2.1)$$
$$a, b \in R, \quad a \neq 0,$$

где $\psi(a, b, x) \equiv \psi_{ab}(x)$ – вейвлеты, получившиеся в результате сдвига и масштабирования материнского вейвлета $\psi(x) \in L_2(R)$. Для вейвлет-функции выполняется: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0$.

Базис пространства $L_2(R)$ конструируется на основе материнского вейвлета, норма которого равна 1. Смещение функции вейвлета по временной оси необходимо для перекрытия всей временной оси: $\psi(b, x) \equiv \psi(x - b)$. Для перекрытия частотного диапазона применяется масштабирование: $\psi(a, x) \equiv |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{a}\right)$. Если параметр a будет расти, то произойдёт расширение временного образа вейвлета, что повлечёт за собой перемещение частотной локализации на более низкие частоты. Следовательно, изменяя параметр a при фиксированной точке $(x - b)$ временной оси, можно просматривать частотный спектр в окрестности этой точки.

Описанные выше преобразования и конструируют базисные вейвлеты $\psi(a, b, x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Норма каждого вейвлета, образованного от

материнского, также равна 1. Если эти вейвлеты к тому же ортогональны, то их совокупность образует полную ортогональную систему функций. В таблице 2.1 представлены примеры вейвлетов.

Таблица 2.1. Примеры вейвлетов

Название вейвлета	Определение вейвлета
Вейвлет Хаара	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$
ФНАТ-вейвлет («французская шляпа»)	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$
МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа»)	$\psi(x) = (1 - x^2)\exp(-\frac{x^2}{2})$

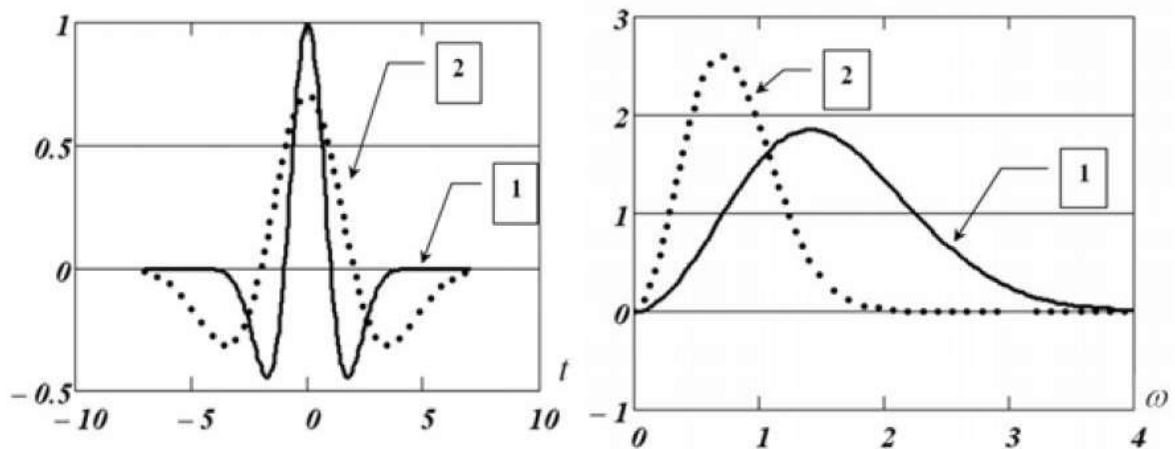


Рисунок 2.1. Графики МНАТ-вейвлетов (слева) и их Фурье-образов (справа) при:
 $b = 0, a = 1$ (номер 1); $b = 0, a = 2$ (номер 2)

На рисунке 2.1 показано поведение МНАТ-вейвлета при различных масштабах a (параметр $b = 0$). При увеличении параметра a наблюдается расширение вейвлета и сжатие частотного диапазона Фурье-образа.

Функция $S(a, b)$, вычисленная по формуле (2.1), содержит сведения о частотно-временных особенностях функции $f(x)$. При небольших значениях

параметра a можно получить сведения о мелких деталях сигнала $f(x)$, а при больших значениях – о глобальном поведении сигнала. Хорошее разрешение по времени (маленькая ширина вейвлета) обуславливает плохое разрешение по частоте (большая ширина Фурье-образа вейвлета) и наоборот. В некотором смысле можно сказать, что вейвлет-преобразование адаптировано для поиска низкочастотных и высокочастотных характеристик сигналов.

Для ортонормированных вейвлетов обратное преобразование имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} C(a, b) \psi(a, b, x) da db, \quad (2.2)$$

где C_ψ – коэффициент нормировки:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} \right) d\omega < \infty, \quad (2.3)$$

где $\Psi(\omega)$ – Фурье-образ $\psi(t)$. Обратное преобразование выполняется при помощи тех же базисных функций, что и прямое.

На практике вместо непрерывного применяют дискретное вейвлет-преобразование, что приводит к уменьшению вычислительных затрат. Параметры a и b определяются из следующих соображений:

$$a = 2^j, b = k2^j, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Параметр j будет отвечать за масштаб, а параметр k – за сдвиг. Базисные функции будут иметь вид:

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Формулы (2.4) и (2.5) представляют из себя прямое и обратное дискретное вейвлет-преобразование соответственно:

$$d_{j,k} = C(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^{-j}x - k) f(x) dx, \quad (2.4)$$

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k). \quad (2.5)$$

Описанную выше теорию можно найти в [2].

2.2. Дискретное вейвлет-преобразование сигналов и изображений

В данной работе под прямым дискретным вейвлет-преобразованием (DWT) понимается прохождение сигнала через низкочастотный и высокочастотный фильтры (НЧ- и ВЧ-фильтры) с последующим прореживанием (удалением каждого второго элемента). Рассмотрим это на одномерном случае [1, 5, 8-13].

Вначале сигнал $x(i)$ проходит через НЧ-фильтр с характеристикой $g(i)$. На выходе получается свёртка входного сигнала с характеристикой фильтра:

$$y_{\text{нч}}(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(i)g(k-i).$$

Одновременно сигнал раскладывается с помощью ВЧ-фильтра, характеристика $h(i)$ которого задаётся следующим образом:

$$g(i) = (-1)^i h(2M - i - 1),$$

где постоянная M определяет длину области задания вейвлета. При увеличении M представляется возможным более сильное сжатие сигнала, а также сглаживание ошибок, связанных с фильтрацией. Но, с другой стороны, возрастает число коэффициентов фильтра, что приводит к значительному увеличению времени вычислений. Постоянная M выбирается исходя из целей и задач при обработке сигналов и изображений.

После НЧ-фильтрации получаются коэффициенты аппроксимации (приближение исходного сигнала), а после ВЧ-фильтрации – детализирующие коэффициенты (вейвлет-коэффициенты). Оба фильтра связаны и вместе образуют квадратурные зеркальные фильтры.

Полученные после прохождения квадратурных зеркальных фильтров коэффициенты сигнала подвергаются прореживанию в два раза. Это можно осуществить из-за того, что проведённая фильтрация приводит к уменьшению в два раза частотного диапазона каждого из получившихся сигналов. Прореженные последовательности коэффициентов имеют вид:

$$y_{\text{нч}}(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(i)g(2k-i), \quad y_{\text{вч}}(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(i)h(2k-i).$$

Данное разложение можно применять несколько раз: к полученным в ходе НЧ-фильтрации и прореживания коэффициентам входного сигнала вновь можно

применить описанный выше алгоритм вейвлет-преобразования. В связи с двукратным прореживанием длину входного сигнала целесообразно брать кратной 2^n , где n – число уровней разложения. Многоуровневое вейвлет-преобразование можно представить в виде дерева, как показано на рисунке 2.2.

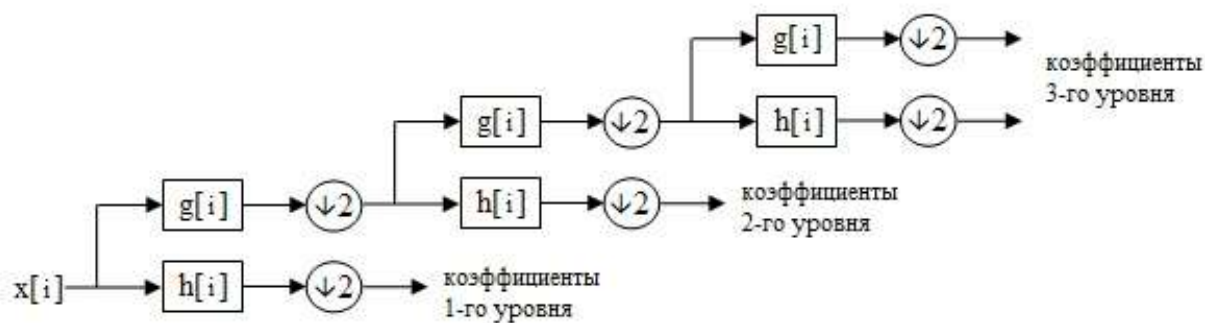


Рисунок 2.2. Схема трёхуровневого прямого дискретного вейвлет-преобразования

Обратное дискретное вейвлет-преобразование (IDWT) заключается в применении обратных фильтров к низкочастотным и высокочастотным коэффициентам, у которых восстановлены каждые вторые элементы (их значение берётся равным 0), и их суммирования. Наличие двух последовательностей коэффициентов позволяет однозначно восстановить исходный сигнал, несмотря на вдвое меньший диапазон частот каждой последовательности, в отличие от сигнала до фильтрации при одном уровне преобразования. Прямое дискретное вейвлет-преобразование называют анализом, а обратное – синтезом. На рисунке 2.3 приведена схема прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования для одного уровня [1, 5, 8-13].

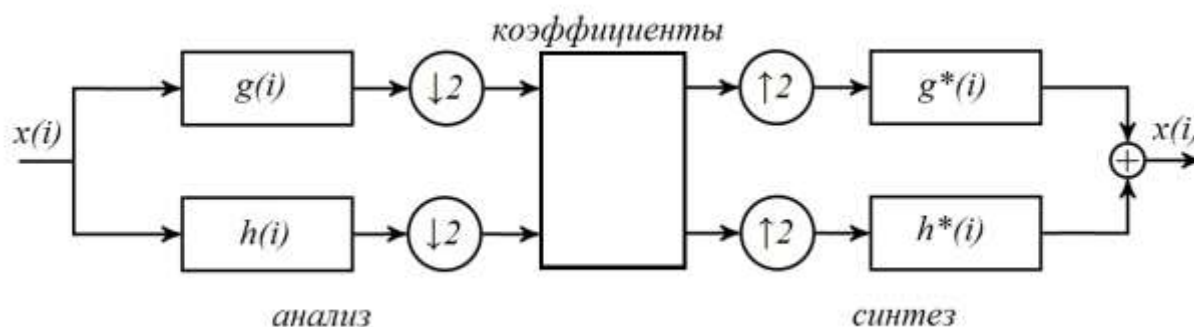


Рисунок 2.3. Схема одноуровневого дискретного вейвлет-преобразования

Алгоритм вейвлет-преобразования изображения аналогичен одномерному случаю. Его можно интерпретировать следующим образом: сначала матрица изображения I подвергается построчной обработке НЧ- и ВЧ-фильтрами декомпозиции с последующим прореживанием. В результате такой обработки получаются две матрицы W_L и W_H , каждая из которых содержит, по сравнению с исходной матрицей, вдвое меньшее количество столбцов за счёт выполненного после фильтрации прореживания. Затем две полученные матрицы обрабатываются по аналогичной схеме вдоль столбцов, и каждая матрица вновь разделяется на две. Написанное выше иллюстрируется на рисунке 2.4 [10].

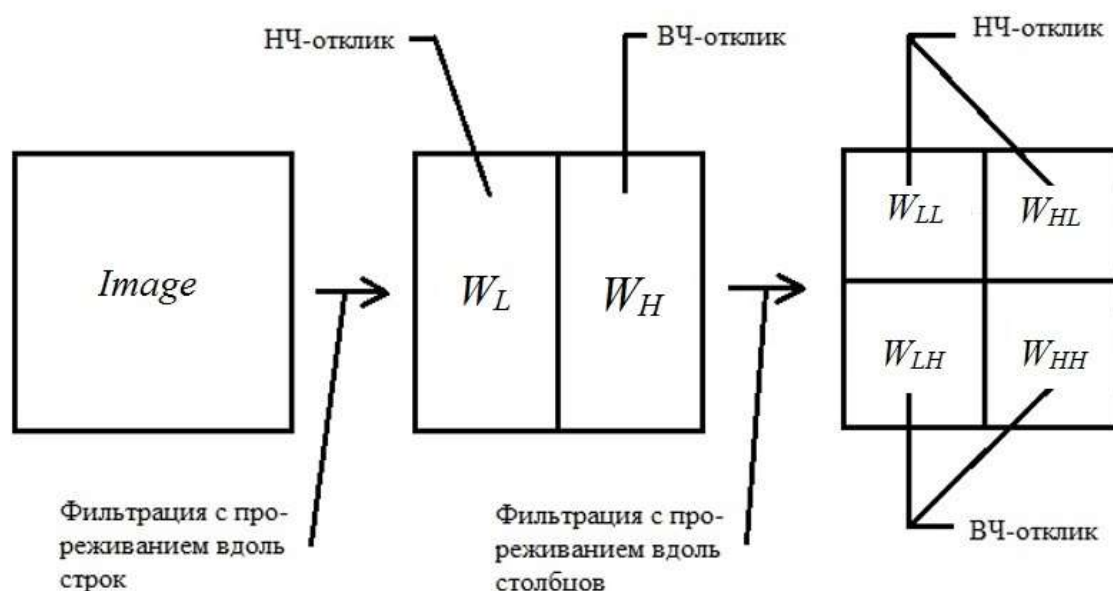


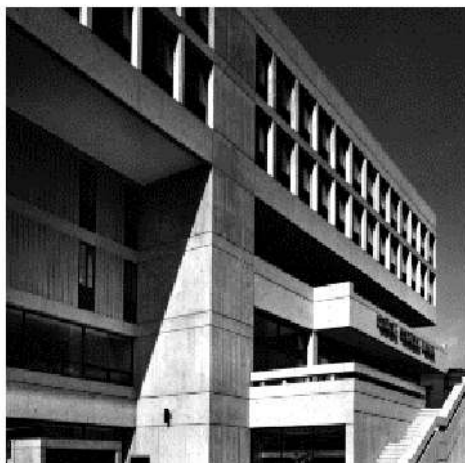
Рисунок 2.4. Схема реализации одного уровня двумерного прямого дискретного вейвлет-преобразования при помощи одномерной фильтрации

Коэффициенты матрицы W_{HL} характеризуют резкие изменения (ВЧ-составляющую) сигнала по горизонтальному направлению координат и сглаженный сигнал (НЧ-составляющую) по вертикальному направлению координат. Выделение резких изменений сигнала по горизонтальной оси и сглаживание (подавление резких изменений) вдоль вертикальной оси соответствуют выявлению вертикальных «фронт» сигнала. Аналогично, коэффициенты матрицы W_{LH} характеризуют горизонтально ориентированные перепады фронтов сигнала, а W_{HH} – диагональные.

Матрицы W_{LL} , W_{HL} , W_{LH} , W_{HH} называются саббэндами (от англ. subband – частотный диапазон). Низкочастотный саббэнд W_{LL} характеризует сглаженную (т.е. менее точную, более грубую) проекцию двумерного сигнала, остальные саббэнды отвечают за высокочастотные компоненты разложения сигнала. Помимо приведённой выше схемы можно выполнить сначала фильтрацию матрицы I вдоль столбцов, а затем – вдоль строк. В этом случае саббэнды W_{LH} и W_{HL} поменяются местами [10].

Описанную процедуру одноуровневого двумерного дискретного преобразования можно повторно применять к НЧ-саббэндам. При N -кратном повторении получим N -уровневое преобразование. На рисунке 2.5 приведены этапы двухуровневого дискретного вейвлет-преобразования для тестового изображения «mit.tif».

а)



б)



в)

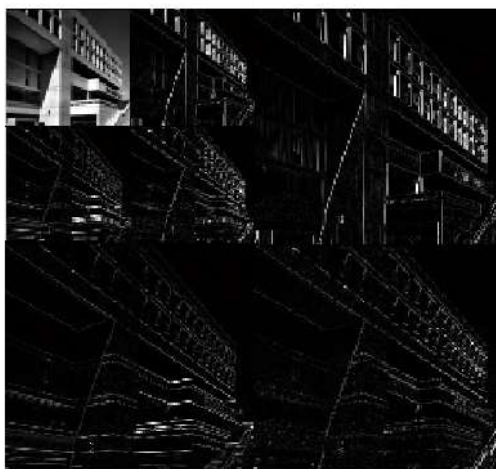


Рисунок 2.5. Пример двумерного дискретного вейвлет-преобразования: а) исходное изображение; б) результат выполнения одноуровневого преобразования; в) результат выполнения двухуровневого преобразования

Базисные функции двумерного вейвлет-спектра обладают важным свойством: базисные функции более высокого уровня разрешения получаются из базисных функций более низкого уровня путём сжатия и сдвига, причём «потомки» имеют носитель, который не выходит за область носителя «родителя», но у каждого вейвлет-родителя имеется уже по четыре потомка. Так, если $\psi(x, y)$ – родительский вейвлет (типа LH , HL , HH), то им порождаются следующие четыре функции потомка [10]:

$$\psi(x, y) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2\psi(2x, 2y), & 2\psi(2x - 1, 2y) \\ 2\psi(2x, 2y - 1), & 2\psi(2x - 1, 2y - 1) \end{array} \right\}.$$

Схема связей «родитель-потомки» отражена на рисунке 2.6.

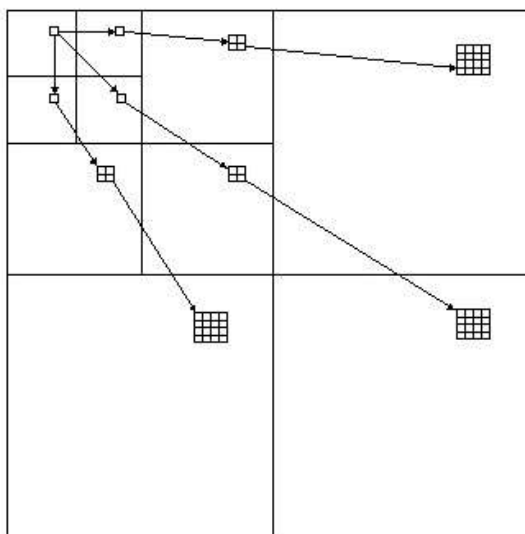


Рисунок 2.6. Структура связей «родитель-потомки» между базисными функциями двумерного вейвлет-спектра на примере трёхуровневого преобразования

2.3. Оценка качества изображений

Одним из важных моментов является оценка качества полученного в результате фильтрации изображения. Оценки бывают субъективными и объективными. Объективные оценки качества не учитывают особенности человеческого восприятия, тем не менее при поиске оптимальных порогов

фильтрации и оптимизации изображения применяются именно объективные оценки. Объективные меры качества должны быть не сложными в реализации и при этом хорошо согласовываться с результатами субъективных оценок.

На данный момент наиболее распространённым критерием оценки качества изображения при анализе результатов фильтрации является пиковое отношение сигнал/шум – PSNR (peak signal-to-noise ratio):

$$PSNR = 20lg \left(\frac{MAX_I}{\sqrt{\frac{1}{NM} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M (I(x,y) - \tilde{I}(x,y))^2}} \right), \quad (2.6)$$

где I – исходное изображение размера $N \times M$, \tilde{I} – отфильтрованное изображение, MAX_I – максимальное значение, которое может принять пиксель изображения (для полутоновых изображений с разрядностью 8 бит $MAX_I = 255$). Разность в знаменателе характеризует среднеквадратичное значение амплитуды шума. Чем больше величина PSNR, тем более схожи изображения между собой. Но стоит учесть, что высокий показатель PSNR не гарантирует хорошее качество изображения [3].

Ещё одним критерием оценки качества отфильтрованного изображения является метрика структурного сходства – SSIM (англ. Structural Similarity). Эта метрика имеет более сложную реализацию в отличие от PSNR, однако считается, что она точнее учитывает особенности восприятия человека.

Метод основан на том, что пиксели изображения имеют между собой связь, особенно если они близки друг с другом. Такие зависимости несут важную информацию об изображении. SSIM применяется для окон различных размеров. Разница между двумя окнами X и Y , имеющими одинаковый размер $N \times N$, будет вычисляться следующим образом:

$$SSIM(X, Y) = \frac{(2\mu_X\mu_Y + c_1)(2\sigma_{XY} + c_2)}{(\mu_X^2 + \mu_Y^2 + c_1)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + c_2)}, \quad (2.7)$$

где μ_X и μ_Y – среднее значение для изображений X и Y , σ_X^2 и σ_Y^2 – дисперсия X и Y , σ_{XY} – ковариация X и Y , $c_1 = (0.01L)^2$, $c_2 = (0.03L)^2$ (L – динамический диапазон пикселей). Полученная оценка лежит в диапазоне от 0 до 1. При 1 оба изображения идентичны. Обычно размеры окна берут равными 8×8 [3].

2.4. Классическая пороговая фильтрация изображений на основе вейвлет-преобразований

Рассмотрим зашумленное изображение I' : $I'(x, y) = I(x, y) + R(x, y)$, где $I(x, y)$ – пиксель исходного изображения, а $R(x, y)$ – случайная шумовая помеха. Часто предполагается, что значения R представляют собой отсчеты белого гауссовского шума. Для фильтрации шума в базисе дискретных вейвлет-преобразований сначала выполняется декомпозиция изображения I' , т.е. выполняется N -уровневое вейвлет-преобразование изображения. Для большинства изображений энергия распределяется неравномерно и в большей степени содержится в области низких частот. Белый гауссовский шум имеет равномерное распределение энергии по частотам, следовательно, при вейвлет-преобразовании большая информация о шуме будет содержаться в области высоких частот (области типа LH , HL , HH) наряду с мелкими деталями изображения. Полезная информация об изображении содержится в основном в низкочастотных коэффициентах. Поэтому фильтрация шумов заключается в уменьшении в высокочастотных саббэндах вейвлет-коэффициентов, которые имеют небольшую амплитуду. При этом необходимо как можно меньше затрагивать значения коэффициентов, отвечающих за детали изображения, т.к. это приведет к размытию этих деталей на изображении при синтезе. Значение, на которое произойдет уменьшение коэффициентов, зависит от уровня шума. После необходимо восстановить изображение по отфильтрованному вейвлет-спектру, выполнив обратное дискретное вейвлет-преобразование [2, 9-11]. Общая схема шумоподавления изображена на рисунке 2.7.

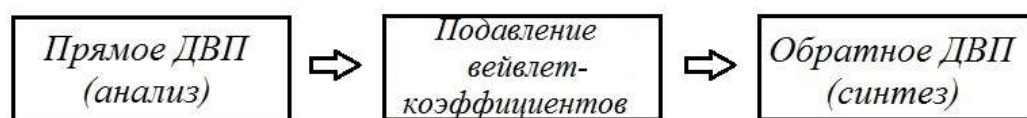


Рисунок 2.7. Общая схема фильтрации шумов на основе дискретного вейвлет-преобразования

Классический способ фильтрации шума – пороговая фильтрация вейвлет-коэффициентов. На практике применяются два способа пороговой фильтрации:

жесткая (hard) и мягкая (soft). Об этом можно прочесть в [2, 10, 17]. Жесткая пороговая фильтрация заключается в обнулении коэффициентов разложения, которые по модулю не больше некоторого порогового значения T . Её можно определить следующей функцией:

$$hard = \begin{cases} W(x, y), & |x| > T, \\ 0, & |x| \leq T. \end{cases} \quad (2.8)$$

Мягкая пороговая фильтрация, помимо обнуления коэффициентов с малыми амплитудами, «подтягивает» к нулю все остальные коэффициенты. Соответствующая функция имеет вид:

$$soft = \begin{cases} W(x, y) - T, & x > T, \\ W(x, y) + T, & x < -T, \\ 0, & |x| \leq T. \end{cases} \quad (2.9)$$

Стоит отметить, что для мягкой пороговой фильтрации уменьшаются абсолютные значения всех вейвлет-коэффициентов, что приводит к уменьшению амплитуды на восстановленном изображении и размытию контрастных элементов. Однако, в отличие от hard-фильтрации, во многих случаях удаётся устранить появление артефактов при восстановлении. Тем не менее, решающее влияние на качество фильтрации оказывает выбор порога T .

Как жесткая, так и мягкая пороговая фильтрация может быть реализована различными способами [10]:

- Общая (универсальная) фильтрация, для которой порог T выбирается общим для всех уровней вейвлет-коэффициентов. Это самый простой в реализации случай, который не всегда даёт хороший результат.
- Многоуровневая фильтрация, при которой для вейвлет-коэффициентов N -уровневого преобразования на каждом уровне выбираются различные пороги $T = T_N$. Вейвлет-коэффициенты на первом уровне разложения содержат больше сведений о высокочастотном шуме, чем на последующих уровнях, поэтому они подавляются сильнее, что соответствует самому большому порогу фильтрации. С каждым следующим уровнем порог уменьшается.
- Фильтрация, при которой для каждого саббэнда подбирается свой порог. Такой выбор порогов демонстрирует чуть более качественную

фильтрацию в отличие от обычной многоуровневой фильтрации, но возрастает вычислительная сложность, связанная с поиском оптимальных значений констант для каждого уровня шума.

Описанные методы пороговой фильтрации могут быть реализованы при использовании различных вейвлет-базисов. Выбор необходимого вейвлет-базиса зависит от задач, решаемых при фильтрации: применение более гладких вейвлетов позволяет получить соответственно более гладкую аппроксимацию изображения, а при использовании менее гладких вейвлетов (которые имеют малое количество элементов, отличных от нуля) происходит лучшее выделение локальных особенностей на изображении [10].

Пороговая фильтрация хорошо работает при низком уровне шума, так как весь шум попадёт в область ниже порога, при этом почти все детали изображения окажутся выше порога и останутся нетронутыми при фильтрации. При повышении уровня шума при тех же порогах на отфильтрованном изображении начнут появляться артефакты – отдельные всплески шума. При повышении порогов эти артефакты исчезнут, но под фильтрацию попадут и детали изображения, в результате чего изображение получится размытым [2, 5].

2.5. Локально-адаптивный выбор порогов для фильтрации

Между пикселями на изображении существует зависимость, которая сохраняется и при вейвлет-преобразовании [11]. Этот факт можно учитывать при подборе порогов для фильтрации.

Вначале произведём усреднение всех вейвлет-коэффициентов в высокочастотной области. Для этого для каждого коэффициента будем рассматривать окно размером 3×3 , в котором центральному коэффициенту будем присваивать среднее значение модулей всех коэффициентов в этом окне. В результате получим более сглаженное представление вейвлет-коэффициентов. Эта операция напоминает линейную фильтрацию в пространственной области со скользящим средним в окне. Такая процедура поможет лучше выделить коэффициенты, отвечающие за границы объектов, в результате чего вероятность их удаления в ВЧ-области при пороговой фильтрации снизится. Важно заметить, что усреднять значения следует в каждом саббэнде отдельно, иначе края каждого

саббэнда будут размыты, что негативно скажется на качестве изображения при восстановлении.

Аддитивный гауссовский шум, присутствующий на изображении, не коррелирован с ним [3]. Поэтому при формировании порогов можно дополнительно учитывать уровень шума на изображении. В результате получаем общую формулу подсчёта порога для конкретного коэффициента вейвлет-преобразования:

$$T(x, y) = C_{local}\sigma_l + C_{noise}\sigma_{noise} , \quad (2.9)$$

где σ_l – среднее по модулю значение коэффициента, σ_{noise} – среднеквадратическое отклонение (СКО) шума, C_{local} , C_{noise} – некоторые константы, которые ищутся отдельно для каждого уровня вейвлет-преобразования. Таким образом производится локальная адаптация и получается матрица порогов, учитывающая зависимость между коэффициентами. Так как шум и изображение не связаны между собой, то такой подход к поиску порогов позволяет находить универсальные константы, которые будут фильтровать шум с заданным СКО на любом изображении.

В итоге, для фильтрации зашумленного изображения, необходимо оценить уровень шума, а затем, зная оптимальные константы для нескольких уровней шума и интерполировав их, получить пороги для фильтрации.

Для оценки СКО белого гауссовского шума на изображении необходимо сделать следующие шаги:

1. Вычислить двумерное Фурье-преобразование изображения, в результате чего получится спектр, в центре которого будет содержаться информация о самом изображении, а информация о шуме будет сосредоточена на границе.
2. Рассмотреть небольшую область $W'(x, y)$ размера $a \times b$ на границе спектра W размера $N \times N$ и вычислить для неё уровень шума по формуле:

$$\sigma_{noise} = \sqrt{\sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^b \frac{(W'(x, y))^2}{a \cdot b \cdot N^2}}. \text{ Т.к. изображение и шум не коррелированы,}$$

то вычисленное значение и будет характеризовать среднеквадратическое отклонение шума [18].

Данный метод достаточно точно позволяет оценить СКО гауссовского шума.

Опишем шаги алгоритма, который далее предстоит реализовать в виде программы:

1. Искусственно наложить аддитивный белый гауссовский шум с СКО σ_{noise} на изображение и вычислить PSNR до фильтрации.
2. Применить к данному разложению пятиуровневое вейвлет-преобразование.
3. Для всех уровней в каждом саббэнде произвести усреднение модулей коэффициентов и получить сглаженную матрицу пятиуровневого вейвлет-преобразования.
4. Ввести сетку для поиска констант C_{local} и C_{noise} .
5. Вычислить значения порогов по формуле (2.9) для всех коэффициентов вейвлет-преобразования на рассматриваемом уровне.
6. Произвести обнуление всех коэффициентов на рассматриваемом уровне исходного вейвлет-преобразования, модуль которых не выше найденного порога.
7. Применить к получившемуся разложению обратное вейвлет-преобразование.
8. Заново вычислить PSNR.
9. Повторить действия 5-8 для всех значений констант из заданной сетки.
10. Найти максимальное значение PSNR и определить значения констант, соответствующие найденному максимальному PSNR.
11. Повторить действия 4-10 для остальных уровней вейвлет-разложения.

Найденные таким образом константы будут обеспечивать лучшие пороги для фильтрации в метрике PSNR. Вместо PSNR также можно использовать метрику SSIM.

Данный алгоритм можно оптимизировать, применяя ортогональные вейвлеты Добеши [14], при использовании которых максимальное PSNR отфильтрованного изображения соответствует максимальному PSNR в вейвлет-области. Поэтому, используя данные вейвлеты, можно производить поиск максимального PSNR в вейвлет-области и таким образом найти оптимальные константы при меньших вычислительных затратах. Однако на практике при

фильтрации шумов лучшие результаты демонстрируют вейвлеты Antonini и Villa [15].

Применяя описанный алгоритм для различных значений σ_{noise} , получим наборы констант, которые можно интерполировать и использовать при локально-адаптивной фильтрации любого зашумленного изображения, не имея информации об оригинале. Уровень шума определяется через двумерное Фурье-преобразование изображения, как было пояснено выше.

2.6. Пороговая фильтрация изображений в базисе пакетных вейвлет-преобразований

Выше рассматривалась пороговая фильтрация изображений на основе классического двумерного N -уровневого дискретного вейвлет-преобразования (преобразование на каждом уровне выполняется только для НЧ-саббэнды). На практике при фильтрации шумов хорошие результаты демонстрирует применение пакетных дискретных вейвлет-преобразований. Идея такого преобразования заключается в том, что разложению подвергаются не только низкочастотные, но и высокочастотные саббэнды [5, 9, 10]. Схематично пакетное вейвлет-разложение для одномерного случая можно представить в виде дерева, показанного на рисунке 2.8. На вершине дерева находится исходный сигнал, далее располагаются вейвлет-коэффициенты. Ветви дерева, направленные влево, указывают на аппроксимирующие коэффициенты, а правые ветви указывают на детализирующие коэффициенты предыдущего узла. В результате появляется много способов выбрать базис – от минимального классического до полного пакетного разложения всех уровней. Этот базис получил название базиса вейвлет-пакетов. Из возможных базисов необходимо выбрать такой, который описывает изображение минимальным

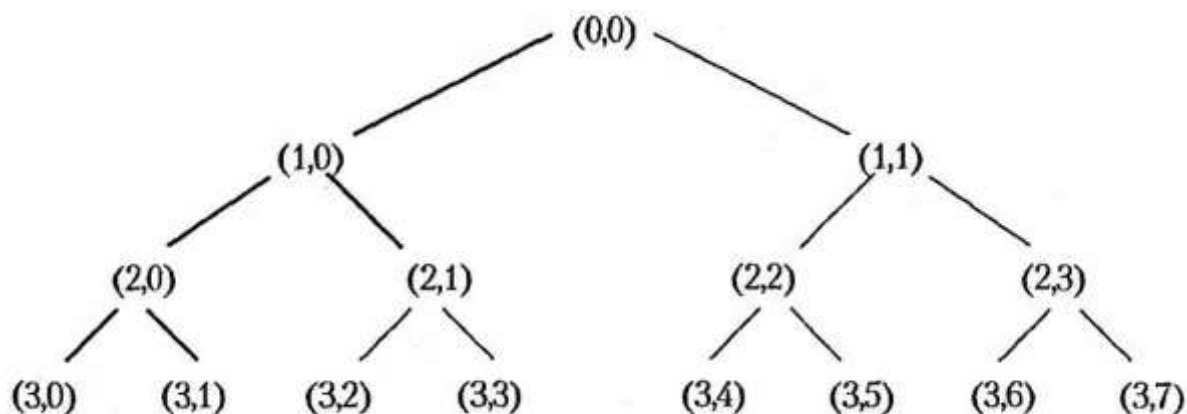


Рисунок 2.8. Общая схема пакетного трёхуровневого вейвлет-преобразования

количеством вейвлет-коэффициентов, т.е. при таком выборе базиса большие по амплитуде коэффициенты оказываются сосредоточены в небольшой области вейвлет-преобразования, а большинство коэффициентов близко к нулю. Критерием для выбора оптимального базиса является нахождение наименьшей энтропии, которая определяет усреднённость сигнала. Можно выделить два наиболее часто встречающихся типа энтропии: Шеннона и «log energy».

Энтропия по Шеннону определяется следующим выражением:

$$E(s) = - \sum_i s_i^2 \log(s_i^2),$$

где s_i — значения сигнала s . Для корректного подсчёта следует сделать следующее соглашение: $0 \log(0) = 0$. Энтропия «log energy» вычисляется по формуле:

$$E(s) = \sum_i \log(s_i^2),$$

при соглашении: $\log(0) = 0$.

Минимальная энтропия соответствует минимальному числу существенных коэффициентов, необходимых для представления сигнала. При нахождении оптимального базиса на каждом шаге для рассматриваемой области изображения считается энтропия до применения вейвлет-преобразования и сравнивается с энтропией, подсчитанной для этой области после преобразования. Если значение энтропии уменьшается, то преобразование выполняется, иначе данная область коэффициентов остаётся без изменения [9].

Для реализации данного алгоритма модифицируем метод локально-адаптивной фильтрации в классическом базисе. Необходимо заменить для

рассмотренного в предыдущем пункте метода классическое пятиуровневое вейвлет-преобразование на пакетное. При вычислении матрицы порогов константы C_{local} и C_{noise} находить не нужно – они имеют значения, найденные ранее для локально-адаптивного метода. Поэтому необходимо найти пороги только один раз и обнулить соответствующие вейвлет-коэффициенты, а затем применить обратное пакетное вейвлет-преобразование. При такой реализации ожидается наблюдать увеличение PSNR.

Глава 3. Практические результаты

3.1. Результаты фильтрации зашумленных изображений

Тестирование алгоритмов фильтрации производится на полутоновых изображениях (пиксель может принимать значение от 0 до 255) размером 512×512 . Реализация всех алгоритмов написана в среде Matlab. Вычисления вейвлет-преобразований выполняются с помощью библиотеки «Baseline Wavelet Transform Coder Construction Kit», написанной на C++ Джеффом Дэвисом [23]. Для всех алгоритмов выполняется пятиуровневое дискретное вейвлет-преобразование (классическое или пакетное).

На первом этапе были рассмотрены классические методы пороговой фильтрации белого гауссовского шума. В таблице 3.1 приведены результаты поиска оптимальных порогов (общего для всех уровней, а также различных для каждого уровня преобразования) при фильтрации зашумленного тестового изображения «lena.bmp» с различным СКО шума.

Таблица 3.1. Сравнительная таблица результатов пороговой фильтрации искусственно зашумленного тестового изображения «lena.bmp»

Фильтр	Уровень шума, σ	Порог фильтрации, T	PSNR до фильтрации, дБ	PSNR после фильтрации, дБ
Daubechies 4	10	29	28.1269	31.6506
		[33, 24, 13, 0, 0]		32.0260
	20	64	22.1193	28.2875
		[80, 56, 41, 6, 0]		28.9217
	30	101	18.7058	26.4968
		[130, 96, 61, 10, 0]		27.1860
Villa 18/10	10	31	28.1269	32.4167
		[36, 29, 14, 0, 0]		32.6895
	20	70	22.1193	29.2298
		[101, 73, 51, 8, 0]		29.5860
	30	112	18.7058	27.3448
		[144, 115, 86, 16, 0]		27.7459

Как видно из таблицы, при использовании вейвлетов Villa, уровень PSNR отфильтрованного изображения повышается по сравнению с фильтрацией с применением вейвлетов Добеши. Как и было описано во второй главе, использование различных порогов для каждого уровня показывает более хорошие результаты при фильтрации по сравнению с подавлением коэффициентов по одному общему порогу.

Для сравнения приведём пример поиска оптимальных порогов для нескольких уровней шума при использовании метрики SSIM (таблица 3.2).

Таблица 3.2. Результаты пороговой фильтрации искусственно зашумленного тестового изображения «lena.bmp» для некоторых значений σ_{noise}

Фильтр	Уровень шума, σ	Порог фильтрации, T	SSIM до фильтрации	SSIM после фильтрации
Daubechies	20	[76, 69, 56, 20, 0]	0.6764	0.8706
4	30	[119, 106, 92, 60, 0]	0.5356	0.8139
Villa 18/10	20	[90, 85, 69, 8, 0]	0.6764	0.8746

Как можно заметить, пороги немного отличаются от найденных для максимального PSNR, однако значения лежат примерно в тех же пределах. При использовании вейвлетов Villa также наблюдается повышение качества отфильтрованного изображения.

Во всех случаях на пятом уровне происходит обнуление коэффициентов, следовательно, для изображений размером 512×512 достаточно рассматривать лишь четыре уровня преобразований.

Для некоторых из найденных выше порогов приведём результаты фильтрации при использовании пакетных вейвлет-преобразований (таблица 3.3). Как видно из результатов, применение пакетных вейвлет-преобразований улучшает работу классических методов.

Таблица 3.3. Результаты пороговой фильтрации искусственно зашумленного тестового изображения «lena.bmp» для пакетных вейвлет-преобразований

Фильтр	Уровень шума, σ	Пороги фильтрации, Т	PSNR до фильтрации, дБ	PSNR после фильтрации, дБ
Daubechies 4	10	[33, 24, 13, 0, 0]	28.1269	32.0708
	20	[80, 56, 41, 6, 0]	22.1193	29.0036
	30	[130, 96, 61, 10, 0]	18.7058	27.2660

Теперь рассмотрим результаты фильтрации разработанного в данной работе локально-адаптивного метода. В ходе проведения практических вычислений было установлено, что константы C_{local} представляют собой большие по модулю отрицательные величины. Таким образом, пороги вытягиваются в отрицательном направлении, и значения с малой амплитудой будут располагаться ближе к нулю. Тогда константы C_{noise} отвечают за число пороговых элементов, значение которых окажется положительным и будет влиять на фильтрацию. Граничный случай – это отсутствие шума на изображении ($\sigma_{noise} = 0$): тогда не будет положительных порогов и не произойдет обнуления вейвлет-коэффициентов. В таблице 3.4 представлены результаты фильтрации зашумленного тестового изображения «lena.bmp» с различным СКО шума и найдены константы C_{noise} для каждого случая ($C_{local} = [-500, -500, -500, -500, -500]$).

Таблица 3.4. Сравнительная таблица результатов локально-адаптивной фильтрации искусственно зашумленного тестового изображения «lena.bmp»

Фильтр	Уровень шума, σ	Константы C_{noise}	PSNR до фильтрации, дБ	PSNR после фильтрации, дБ	
				Классич. ВП	Пакетное ВП
Daubechies 4	5	[730, 685, 620, 590, 0]	34.1626	36.3933	36.1637
	10	[735, 695, 625, 595, 0]	28.1269	32.9586	32.7628
	20	[790, 715, 645, 605, 0]	22.1193	29.7796	29.5950
	30	[889, 715, 647, 627, 383]	18.7058	27.9311	27.7826
	40	[928, 720, 650, 630, 483]	16.3643	26.7563	26.5834

При использовании вейвлетов Villa результаты PSNR также получаются выше. Например, при $\sigma_{noise} = 20$: $C_{noise} = [850, 845, 840, 661, 0]$, а PSNR после фильтрации при классическом ВП – 30.4128 дБ. Для метрики SSIM аналогичные вычисления дают следующий результат: $C_{noise} = [950, 947, 893, 661, 0]$, SSIM = 0.8970 (PSNR = 30.3710).

Замена классического вейвлет-преобразования на пакетное при использовании локально-адаптивного метода пороговой фильтрации приводит к уменьшению значения PSNR. Это можно объяснить следующим образом: при пакетном вейвлет-преобразовании между коэффициентами уменьшается статическая зависимость, характерная для классического разложения. Поэтому при использовании метода, основанного на зависимостях коэффициентов, разумнее будет применять именно классическое вейвлет-преобразование. На рисунке 3.1 представлен график, сравнивающий качество фильтрации всех рассмотренных в работе методов подавления шумов.

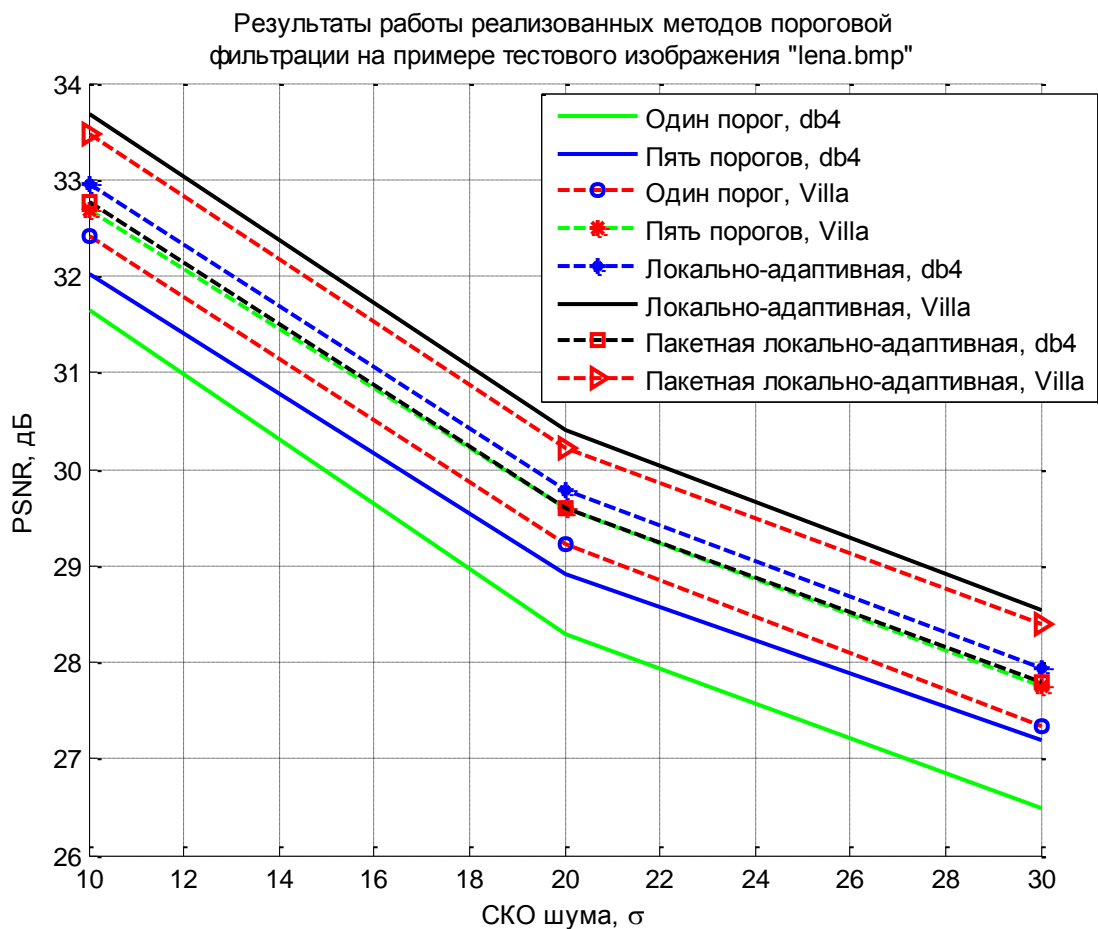


Рисунок 3.1. Результаты фильтрации рассмотренных методов

Полученные в таблице 3.4 константы можно интерполировать и применять для других зашумленных тестовых изображений, оценив уровень шума при помощи Фурье-преобразования. Так, для изображения «barbara.png», зашумленного белым гауссовским шумом с СКО $\sigma_{noise} = 24$, получаем: при фильтрации по интерполированным значения констант PSNR = 25.8618, тогда как максимальное PSNR = 25.8892. Для изображения «st.tif» при $\sigma_{noise} = 17$: при фильтрации по интерполированным значения констант PSNR = 31.5613, а максимальное PSNR = 31.5887.

Таким образом, приведённые результаты подтверждают идеи, выдвинутые во второй главе, и предложенный метод является универсальным при фильтрации аддитивного белого гауссовского шума. Ниже представлены изображения, демонстрирующие результаты локально-адаптивной фильтрации на примере тестового зашумленного изображения «lena.bmp» при $\sigma_{noise} = 20$.



Рисунок 3.2. Зашумленное ($\sigma_{noise} = 20$) тестовое изображение «lena.bmp»



Рисунок 3.3. Классическая пороговая фильтрация, PSNR=29.5860 (вейвлеты Villa)



Рисунок 3.4. Локально-адаптивная пороговая фильтрация, PSNR=30.4128
(вейвлеты Villa)



Рисунок 3.5. Локально-адаптивная пороговая фильтрация, SSIM=0.8970
(PSNR=30.3710, вейвлеты Villa)

Сравним результаты фильтрации зашумленных изображений в пространственной области с предложенным в данной работе методом. Для этого рассмотрим линейную фильтрацию, а также математическую морфологию. Для их реализации воспользуемся встроенными функциями системы Matlab. Чтобы произвести линейную фильтрацию, необходимо выполнить следующие команды:

```
H = fspecial('disk',d1);  
blurred = imfilter(I,H,'replicate');
```

Параметр d1 отвечает за размеры маски в пикселях [4, 6]. Для морфологической фильтрации необходимо вызвать приведённую ниже команду:

```
g = imclose(imopen(I,strel('disk',d2)),strel('disk',d2));
```

Параметр d2 – диаметр фильтрующего примитива-диска в пикселях [4, 6]. Необходимо найти такие параметры d1 и d2, чтобы PSNR получилось максимальным.

Ниже приведены результаты фильтрации для зашумленного изображения «barbara.png» при $\sigma_{noise} = 24$. При локально-адаптивной фильтрации берутся интерполированные значения констант.

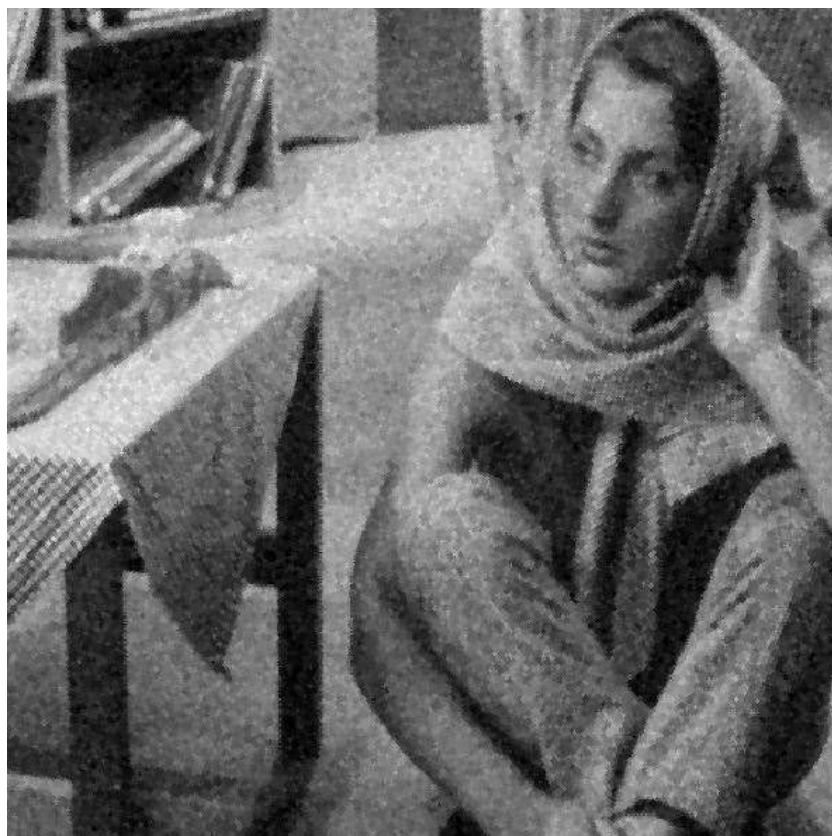


Рисунок 3.6. Морфологическая фильтрация, PSNR=21.2127



Рисунок 3.7. Линейная фильтрация, PSNR=25.1917



Рисунок 3.8. Локально-адаптивная пороговая фильтрация, PSNR=27.0401
(вейвлеты Villa)

3.2. Кодирование отфильтрованных изображений

Рассмотрим, как влияет фильтрация на качество кодирования изображений. Для этого воспользуемся встроенной в Matlab функцией `imwrite()`, позволяющей сохранять изображения, предварительно применяя к ним различные способы сжатия. Для этого закодируем зашумленное и отфильтрованное изображения и сравним их размер после кодирования, а также вычислим PSNR для закодированных изображений. При JPEG кодировании вызов функции будет выглядеть следующим образом:

```
imwrite(uint8(I), 'lena.jpeg', 'jpeg', 'Quality', 30)
```

Параметр «Quality» отвечает за уровень сжатия изображения и лежит в диапазоне от 0 до 100 [4, 6]. Результаты приведены в таблице 3.5.

Для JPEG2000 вызов функции выглядит так:

```
imwrite(uint8(I), 'lena.jp2', 'jp2', 'CompressionRatio', 20)
```

Параметр «CompressionRatio» также отвечает за степень сжатия изображения [4, 6]. Результаты приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.5. Оценка PSNR и размера зашумленного и отфильтрованного изображений при кодировании JPEG ($\sigma_{noise} = 20$)

Зашумленное изображение		Отфильтрованное изображение	
PSNR	Размер, Кб	PSNR	Размер, Кб
24.2884	33.1	29.9096	15.2

Таблица 3.6. Оценка PSNR и размера зашумленного и отфильтрованного изображений при кодировании JPEG2000 ($\sigma_{noise} = 20$)

Зашумленное изображение		Отфильтрованное изображение	
PSNR	Размер, Кб	PSNR	Размер, Кб
26.9642	12.3	30.4198	12.3

Таким образом, фильтрация зашумленных изображений значительно повышает качество кодирования. Это особенно актуально при кодировании, основанном на вейвлет-преобразованиях: после выполнения вейвлет-преобразования можно произвести фильтрацию (процедура обнуления вейвлет-коэффициентов ниже заданного порога не требует больших вычислительных затрат), а затем закодировать изображение.

Выводы и заключение

В ходе данной работы был разработан и реализован в виде программы универсальный метод локально-адаптивной пороговой фильтрации аддитивного белого гауссовского шума. По сравнению с классической пороговой фильтрацией данный метод показывает более высокие результаты: PSNR отфильтрованного изображения повышается в среднем на 0.7-1 дБ. Преимущества данного метода заключаются также в его способности подстраиваться под гауссовский шум с различной дисперсией. Для этого необходимо хранить в памяти значения найденных констант C_{noise} для нескольких уровней шума. Интерполировав эти значения, не составит труда найти оптимальные константы для произвольного уровня шума, который несложно вычислить, используя двумерное Фурье-преобразование зашумленного изображения.

В ходе проведения практических вычислений было установлено, что применение пакетных вейвлет-преобразований не даёт улучшения при реализации представленного в работе метода. Это связано с тем, что при пакетном преобразовании теряется зависимость между вейвлет-коэффициентами, которая характерна для классического разложения. Однако лучшая «упаковка» коэффициентов с большой амплитудой в вейвлет-области позволяет пакетным преобразованиям показывать более хорошие результаты по сравнению с классической фильтрацией по порогу. Также было замечено, что константы C_{local} представляют собой большие по модулю отрицательные величины. Таким образом, пороги вытягиваются в отрицательном направлении, и значения с малой амплитудой будут располагаться ближе к нулю. Тогда константы C_{noise} отвечают за число пороговых элементов, значение которых окажется положительным и будет влиять на фильтрацию. Граничный случай – это отсутствие шума на изображении

($\sigma_{noise} = 0$): тогда не будет положительных порогов и не произойдёт обнуления вейвлет-коэффициентов.

Стоит отметить, что фильтрация предложенным методом не требует больших вычислительных затрат и может применяться перед кодированием, которое основано на вейвлет-преобразовании. Эта операция будет выполняться

непосредственно после вейвлет-преобразования и значительно повысит эффективность работы кодера. Закодированное изображение будет иметь меньший размер и более высокое значение PSNR по сравнению с кодированием без использования предварительной фильтрации.

Дальнейшая работа в этой области заключается в более подробной оценке зависимостей между вейвлет-коэффициентами с целью выбора наиболее оптимальных порогов для фильтрации. Также после фильтрации можно дополнительно обрабатывать изображение в пространственной области для лучшего визуального восприятия.

Список использованных источников

1. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.
2. Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б. Фильтрация сигналов и изображений: фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad). – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 188 с.
3. Гонсалес Р., Вудс. Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
4. Гонсалес Р., Вудс. Р., Эддинс. С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
5. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Пресс, 2010. – 400 с.
6. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
7. Лапшенков Е. М. Неэталонная оценка уровня шума на изображении на основе гармонического анализа. – Компьютерная оптика, 2012, том 36, №3.
8. Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 132 с.
9. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейветы в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
10. Умняшкин С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов: Учебное пособие. – М.: Техносфера, 2016. – 528 с.
11. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003. – 320 с.
12. Штарк Г.-Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
13. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования: Учеб. пособие – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
14. Daubechies "Ten Lectures on Wavelets", Philadelphia: SIAM, 1992.
15. Mallat S. "A wavelet tour of signal processing", Academic Press, London, 2008.
16. Richard Alan Peters II "A New Algorithm for Image Noise Reduction using Mathematical Morphology". IEEE Transactions on Image Processing, Volume 4, Number 3, pp. 554-568, May 1995.

17. URL: <http://cgm.computergraphics.ru/content/view/74>
18. URL: http://edu.alnam.ru/book_incoi.php?id=49
19. URL: http://sernam.ru/book_kir.php?id=25
20. URL: http://aco.ifmo.ru/el_books/image_processing/8_02.html
21. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/obrabotka-izobrazheniy-metodami-matematicheskoy-morfologii-v-assotsiativnoy-ostsillyatornoy-srede>
22. URL: <http://courses.graphicon.ru/main/vision>
23. URL: <http://www.geoffdavis.net/dartmouth/wavelet/wavelet.html>