**Алгоритмы для нахождения**

**Наибольшего Внутренне Устойчивого Подмножества (**НВУП)

***Aлгоритм Maльгранжа***

Пусть *M* бинарная матрица размерности , где – это множество линий и – множество колонок. Обозначим через матрицу *f*, состоящую из элементов, находящихся на пересечении линий и колонок .

Пусть  и  две подматрицы матрицы *M*, определённые парой множеств линий и колонок и .

**Определение 1.** *Матрица называется подматрицей матрицы*  ()*, если и .*

**Определение 2.** *Подматрица f матрицы M называется полной, если все её элементы равны 1.*

**Определение 3.** *Подматрица f матрицы M называется максимально полной, если она является полной и не существует другой полной подматрицы g такой, что .*

**Определение 4.** *Семейство подматриц из M называется покрытием матрицы M, если каждый элемент равный 1 из M принадлежит хотя бы одной из подматриц из семейства* ***C****.*

**Пример.** Пусть дана матрица

В качестве подматриц матрицы *M,* выберем следующие:

Из этих матриц, матрицы полны, максимально полны. А семейство подматриц является покрытием матрицы *M*.

Для любых двух подматриц и , определяются следующие две операции  и :

 и



Пусть *A* матрица смежности некоторого неориентированного графа , a – матрица, которая является дополнением матрицы *A*. (Элементы матрицы вычисляются используя элементы матрицы *A* по формуле ).

Aлгоритм Maльгранжа это алгоритм построения всех квадратных подматриц матрицы , на основе которых определяются наибольшие внутренне устойчивые подмножества графа *G*.

**Шаг I:**

Строим некоторое покрытие матрицы . Обычно в качестве начального покрытия берется семейство всех полных подматриц из которые имеют форму , где , a  формируется из столбцов матрицы , которые содержат единицу в строке . Считаем, что .

**Шаг II:**

Строим семейство

В итоге есть семейство всех полных подматриц из , которые содержатся в других подматрицах семейства .

**Шаг III:**

Строим семейство подматриц, полученных при применении обеих операций  и  ко всем возможным парам матриц из при условии, что эти новые элементы не будут содержатся в подматрицах из .

**Шаг IV:**

Формируем матричное покрытие

.

**Шаг V:**

Если , тогда считаем, что и переходим к шагу **II**. В противном случае, содержит все полные подматрицы матрицы .

**Шаг VI:**

Строим новое семейство , в которое включаем максимальные квадратные подматрицы полных подматриц из , такие что каждая из них не содержится в другой квадратной подматрицы из . Вершины соответствующие строкам (столбцам) матриц семейства составляют максимальные внутренне устойчивые подмножества. Таким образом число всех максимальных внутренне устойчивых подмножеств равно .

**Пример.** Построим все максимальные внутренне устойчивые множества графа *G*

*a*

*b*

*c*

*f*

*d*

*e*

Матрица смежности *A* данного графа и её дополнение :

Исходное покрытие матрицы :

.

В этом случае Ø и, как следствие, .

Получаем:

Для примера, подматрица получается таким образом:

.

Формируем покрытие

Формируем покрытие

Так как Ø, получаем

,

Откуда следует, что Ø и, как следствие, .

Согласно алгоритму, покрытием матрицы которое содержит все полные подматрицы является:

Извлекаем из каждой полной подматрицы максимальную квадратную подматрицу и выбираем только те, которые не содержатся в других квадратных подматрицах. Получаем семейство

.

Семейство всех максимальных внутренне устойчивых множеств графа является:

Наибольшим внутренне устойчивое множество является и, следовательно, .