# Variabile aleatoare

Variabila aleatoare sau intamplatoare este legata de experimente aleatoare, care desfasurate in timp conduc la procese aleatoare. In cadrul teoriei statistice a semnalelor, procesul (semnalul) aleator este un model mai realist decat semnalul determinist  pentru o serie intreaga de semnale atat utile (date, imagini, sunete) cat si perturbatoare (zgomote) din sistemele de prelucrare si transmitere a informatiei. Teoria statistica a semnalelor este strans legata de teoria probabilitatilor si de teoria multimilor, care impreuna permit introducerea notiunii de *spatiu probabilistic*.

## 1. Spatiu probabilistic

Baza pentru definirea variabilei aleatoare este *spatiul probabilistic* = ($H$, $\mathcal{A}$, $P$), numit de unii autori si model statistic. Acesta este compus din trei elemente: multimea esantioanelor $H$,  campul evenimentelor $\mathcal{A}$, si masura probabilistica $P$.

- *multimea esantioanelor H*: multimea tuturor rezultatelor posibile $\eta$ ale unui experiment aleator.

*Exemplu*: numerele corespunzatoare  apelurilor sosite la o anumita centrala de comutatie, fetele aparute la aruncarea zarului, durata de viata a unei anumite componente a unui sistem, tensiunea retelei masurat la bornele unei prize.

- *campul evenimentelor $\mathcal{A}$*: multimea nevida, continand submultimi ale multimii $H$, avand urmatoarele proprietati:
  a) $H \in \mathcal{A}$,
  b) Din $A \in \mathcal{A}$ rezulta $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
  c) Din $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, rezulta $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

In aceasta definitie se noteaza cu $\overline{A}$ complementul mutimii $A$, adica toate elementele multimii $H$ care nu sunt in $A$. In consecinta, un rezultat $\eta_i \in H$ poate fi element al mai multor evenimente.

*Exemplu*: la aruncarea zarului, multimea rezultatelor este $H = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_6\}$ unde $\eta_i$ = aparitia fetei $i$ si un camp posibil de evenimente este $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\eta_1\}, \{\eta_1, \eta_2\}, \{\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\}, ..., H\}$

- <u>*Masura probabilistica P*</u>: o masura speciala care se poate asocia elementelor campului evenimentelor, o functie care se poate defini pe acest camp $\mathcal{A}$. Domeniul valorilor ei este intervalul {0, 1} al numerelor reale; se poate spune ca functia $P$ este o aplicatie a campului $\mathcal{A}$ pe intervalul {0, 1}. Proprietatile lui $P$ sunt definite prin trei axiome (Kolmogorov):
  a) $P(A) \geq 0$
  b) $P(H) = 1$
  c) $P(\bigcup_{1}^{n} A_i) = \sum_{1}^{n} P(A_i)$ unde $A_i$ sunt disjuncte doua cate doua.

Definitiile probabilitatii:

- ca frecventa relativa: $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$ unde un experiment aleator este repetat de $n$ ori si evenimentul $A$ apare de $n_A$ ori
- in sens clasic: $P(A) = \frac{N_A}{N}$ unde $N$ este numarul total de rezultate ale experimentului (numarul elementelor din $H$ finit), din care evenimentul $A$ intervine de $N_A$ ori.

Legi uzuale ale probabilitatii:

- $P(\varnothing) = 0$ unde $\varnothing$ este evenimentul nul,
- $P(A) \leq 1$,
- Daca
  $A \cup \overline{A} = H$ si $A \cap \overline{A} = \phi$ atunci $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Daca $A \subset B$ atunci $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- Daca $A_i \cap A_j = \phi$ $\forall i \neq j$ si $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = H$ atunci
  $P(A) = P(A \cap H) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + ... + P(A \cap A_n)$

adica seturile $A_i$ sunt mutual exclusive si complete.

Probabilitatea conditionata:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{sau} \quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\text{sau in forma Bayes:} \quad P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

In contextul de mai sus, $P(A)$ se numeste probabilitatea *a priori* iar $P(A|B)$ se numeste probabilitatea *a posteriori* a evenimentului $A$. Din axiomele de mai sus rezulta:

$$P(A|B)\geq 0$$

$$P(H|B)=1$$

$$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B) \quad \text{daca } A_1 \text{ si } A_2 \text{ sunt disjuncte}$$

Se spune ca doua evenimente sunt statistic independente daca:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad \text{si atunci mai rezulta:}$$

$$P(A|B)=P(A)$$

$$P(B|A)=P(B)$$

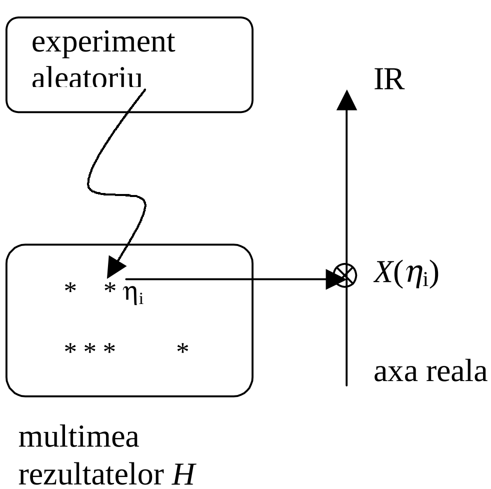
$$P(A|H)=P(A) \quad \text{deoarece} \quad P(H)=1$$

## 2. Definitia varibilei aleatoare reale $X(\eta)$

Variabila aleatoare reala $X(\eta)$ este reprezentarea multimii rezultatelor $H$ a unui experiment aleator pe multimea IR a numerelor reale cu urmatoarele proprietati:

a) $\{X(\eta)\leq x\}\in \mathcal{A} \quad$ pentru fiecare $x\in IR$

b) $P(\{X(\eta)=-\infty\})=P(\{X(\eta)=+\infty\})=0$




Valoarea unei variabile aleatoare $X(\eta)$ pentru un argument $\eta = \eta_i$ se numeste *o realizare* a variabilei (vezi fig. alaturata). Variabila aleatoare poate fi continua sau discreta. Daca multimea rezultatelor $H$ este numarabila, atunci $X(\eta)$ este o variabila aleatoare discreta (aruncarea cu zarul), daca multimea rezultatelor *H* este nenumarabila, atunci variabila aleatoare este continua (masurarea valorilor unei tensiuni).

*Exemplu*: aruncarea zarului; *H* = {toate fetele posibile)

| $\eta$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X(\eta)$ | 0 | 0 | 5 | 10 | 10 | 100 |
| | | | | | | |

## 3. Functia de repartite a probabilitatii si densitatea de probabilitate

Permit ***caracterizarea completa*** a unei variabile aleatoare.

*Functia de repartitie a probabilitatii* este:

- $F_x(x) = P(\{X(\eta) \leq x\})$.

Proprietatile ei sunt:

a) $F_x(-\infty) = 0$

b) $F_x(+\infty) = 1$

c) $F_x(x)$ creste monoton

- *Densitatea de probabilitate* este:

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

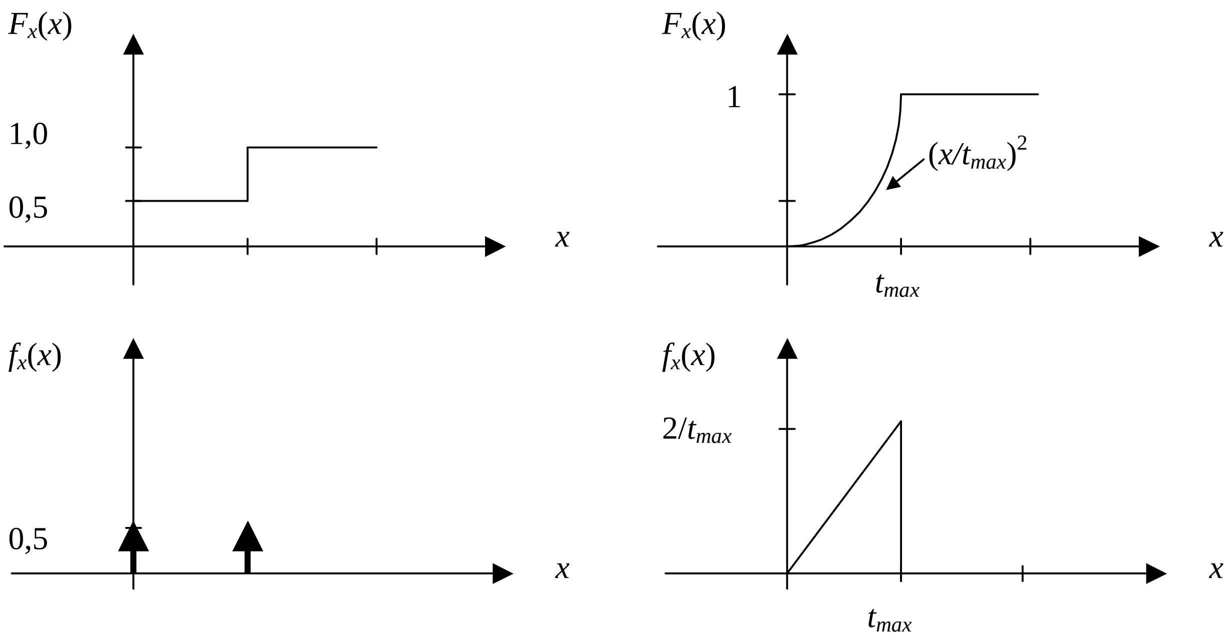
Aceasta derivata exista numai pentru varibile cu functie de repartitie absolut continua. In punctele in care functia de repartitie are salturi, se introduc distributii $\delta$ ponderate cu un factor egal cu marimea saltului lui $F_x(x)$ in punctul respectiv.

Functia de repartitie se poate deduce din densitate prin integrare:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\mathrm{d}u.$$

*Exemple:*

Variabile aleatoare discrete (Aruncarea cu banul ) — Variabile aleatoare continue (Masurarea timpului de viata)




Daca o variabila aleatoare discreta ia valorile $x_i$ cu $i$ = 1, ..., M atunci densitatea de probabilitate este de forma:

$f_x(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \delta(x - x_i)$ unde $a_i$ este saltul lui $F_x(x)$ la $x_i$ :

$a_i = P(\{X(\eta) = x_i\})$

Introducand cele doua relatii in expresia lui $F_X(x)$ se obtine :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du = \sum_{x_i \le x} P(\{X(\eta) = x_i\})$$

Proprietati ale densitatii de probabilitate a unei variabile aleatoare :

a) $f_x(x) \ge 0$ pentru toti $x$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$

Se poate calcula din $f_x(x)$ probabilitatea ca $X(\eta)$ sa ia o valoare intre $x_1$ si $x_2$ :

$$P(\{x_1 \le X(\eta) \le x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)dx$$

Pentru variabile discrete datorita proprietatii de filtrare a lui $\delta$, probabilitatea devine :

$$P(\{x_1 \le X(\eta) \le x_2\}) = \sum_{x_1 \le x_i \le x_2} P(\{X(\eta) = x_i\})$$

**4.Valori medii ale variabilelor aleatoare** (valori asteptate = expected values)

Permit caracterizarea incompleta, partiala a variabilelor aleatoare.

- *Momente de ordin n*

$$\overline{X}^{(n)} = E\{[X(\eta)]^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_x(x)dx = m_x^{(n)}$$

*Pentru n = 1* (valoare medie liniara):

$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)dx$ pentru variabile continue

$\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k$ pentru variabile discrete

$P_k = P(\{X(\eta) = x_k\})$

Operatorul de mediere se poate extinde si asupra functiilor de variabila aleatoare. Daca $g(X(\eta))$ este o functie bijectiva de variabila aleatoare $X(\eta)$, atunci:

$$E\{g(X(\eta))\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_x(x)$$

Daca desitatea de probabilitate $f_x(x)$ exista, atunci:

$$E\{g(X(\eta))\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$$

Operatorul de mediere este un operator liniar:

$$E\{ag(X(\eta))\} = aE\{g(X(\eta))\}$$

$$E\{g(X(\eta)) + h(Y(\eta))\} = E\{g(X(\eta))\} + E\{h(Y(\eta))\}$$

*Pentru n = 2* (valoare medie patratica):

$$\overline{X}^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_x(x) dx \quad \text{pentru variabile continue}$$

$$\overline{X}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} P_k {x_k}^2 \quad \text{pentru variabile discrete}$$

- *Momente centrale de ordin n:*

$$\overline{(X - \overline{X})}^{(n)} = E\{[X(\eta) - \overline{X}]^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^n \, f_x(x) dx$$

$$= \mu_x^{(n)}$$

*Pentru n = 2* (varianta):

$$\overline{(X - \overline{X})}^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^2 \, f_x(x) dx \quad \text{pentru variabile continue}$$

Var$\{X(\eta)\}$= $\sigma_x^2$; $\sigma_x$ este dispersia (deviatia standard) a v.a.

Se poate arata ca:

$$\mathrm{Var}\{X(\eta)\} = \sigma_x^2 = \overline{X}^{(2)} - \{(\overline{X})\}^2$$

Statistica clasica este o statistica de ordin 2, care descrie variabilele aleatoare numai cu valori medii de ordinul 1 si 2.

Statisticile de ordin superior folosesc pentru caracterizarea v.a. si valorile medii de ordin n >2. Valorile medii de ordin superior lui 2 se numesc cumulanti. Interesul crescand din ultimul timp pentru statisticile de ordin superior este justificat de urmatoarea teorema:

**O v.a. poate fi complet caracterizata daca se cunosc valorile medii pana la ordinul n, cand n→∞.**

5. **Ansamble de doua variabile aleatoare**

Pe acelasi spatiu al esantioanelor *H* se pot defini mai multe variabile aleatoare, de exemplu $X(\eta)$ si $Y(\eta)$, proiectand multimea *H* a rezultatelor posibile pe doua multimi *IR* de numere reale.

Pentru aceste doua variabile se pot defini:

6. **Functia de repartitie a ansamblului:**

$F_{XY}(x,y) = P(\{X(\eta) \leq x\} \cap \{Y(\eta) \leq y\})$ si

**Densitatea de probabilitate a ansamblului**:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\delta^2 F_{xy}(x,y)}{\delta x \delta y}.$$

Evenimentele sigure in aceasta situatie sunt $\{X(\eta) \leq \infty\}$, respectiv$\{Y(\eta) \leq \infty\}$, iar evenimentele imposibile $\{X(\eta) \leq -\infty\}$, respectiv$\{Y(\eta) \leq -\infty\}$.

Rezulta astfel pentru ansamblul de doua v.a. urmatoarele

**Proprietati ale functiei de repartitie de ansamblu, $F_{XY}(x,y)$:**

$$F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x)$$
$$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$$
$$F_{XY}(x, -\infty) = 0$$
$$F_{XY}(-\infty, y) = 0$$
$$F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$$

Functia de repartitie a ansamblului se poate determina prin integrarea densitatii de probabilitate a ansamblului:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u, v) du dv .$$

Densitatile marginale de probabilitate se pot determina cu relatiile:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

**Proprietatile densitatii de probabilitate de ansamblu:**

- este o functie nenegativa:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0$$

- satisface conditia de completitudine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

Observatie: Pentru v.a. discrete densitatile de probabilitate se inlocuiesc cu probabilitati, iar integrarile prin sumari.

**Independenta statistica a doua variabile aleatoare**

Este una din relatiile interesante pentru studiul sistemelor de prelucrare a informatiei, deoarece efectele variabilelor pot fi luate in consideratie separat. Conditia de independenta statistica este:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) . f_Y(y) .$$

Rezulta pentru functiile de repartitie relatia:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x).F_Y(y).$$

**Valori medii (momente) ale ansamblului**

- Moment de ordin k, m

$$m_{xy}{}^{(k,m)} = E\{X^k(\eta)Y^m(\eta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^m f_{XY}(x,y)dxdy$$

pentru $\mathrm{k}=1,\ \mathrm{m}=1,$ se obtine functia de corelatie mutuala

$$m_{xy}{}^{(1,1)} = Cor\{XY\} = E\{XY\}$$

- Moment centrat de ordin k, m

$$\mu_{xy}{}^{(k,m)} = E\{(X(\eta) - m_X{}^{(1)})^k (Y(\eta) - m_Y{}^{(1)})^m\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X{}^{(1)})^k (y - m_y{}^{(1)})^m f_{XY}(x,y)dxdy$$

pentru $\mathrm{k}=1,\ \mathrm{m}=1,$ se obtine functia de covariatie mutuala

$$\mu_{xy}{}^{(1,1)} = Cov\{XY\} = E\{(X(\eta) - m_X{}^{(1)})\ (Y(\eta) - m_Y{}^{(1)})\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X{}^{(1)})\ (y - m_y{}^{(1)})\ f_{XY}(x,y)dxdy$$

Intre Cor si Cov exista relatia :

$$Cov\{XY\} = Cor\{XY\} - E\{X\}\cdot E\{Y\} = E\{XY\} - E\{X\}\cdot E\{Y\}$$

Variabile necorelate :

$$Cov\{XY\} = 0 \quad \to \quad E\{XY\} = E\{X\}\cdot E\{Y\}$$

Variabile ortogonale :

$$Cor\{XY\} = E\{XY\} = 0$$

Doua variabile aleatoare independente statistic sunt necorelate :

$$E\{X(\eta)Y(\eta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E\{X(\eta)\}E\{Y(\eta)\}$$

Reciproca nu este intotdeauna adevarata: conditia de independenta statistica este mai „tare” decat cea de necorelare (decorelare).

Coeficient de corelatie

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}{}^{(1,1)}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E\{(X(\eta) - m_X{}^{(1)})(Y(\eta) - m_Y{}^{(1)})\}}{|\sqrt{E\{(X(\eta) - m_X{}^{(1)})^2\} \cdot E\{(Y(\eta) - m_Y{}^{(1)})^2\}}|}$$

limitele domeniului de variatie ale coeficientului sunt :

$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

*Demonstratie*:

$$E\left\{\left(\frac{X(\eta) - m_X{}^{(1)}}{\sigma_X} \pm \frac{Y(\eta) - m_Y{}^{(1)}}{\sigma_Y}\right)^2\right\} \geq 0$$

valoarea medie a partii din stanga a relatiei este :

$1 \pm 2\rho_{XY} + 1 \geq 0$

care este valabila pentru ambele semne numai pentru $|\rho_{XY}| \leq 1$

Coeficientul de corelatie arata relatia dintre doua variabile aleatoare :

1. Sunt decorelate pentru :

$\rho_{XY} = 0$

2. Daca sunt liniar dependente : $Y(\eta) = aX(\eta)$, atunci se poate arata ca $\rho_{XY} = 1$ pentru $a > 0$ si $\rho_{XY} = -1$ pentru $a < 0$.

**Functia de repartitie conditionata si densitatea de probabilitate conditionata.**

$$F_X(x/B) = P(\{X(\eta) \le x\}/B)$$

$$f_X(x/B) = \frac{dF_X(x/B)}{dx}$$

*Pentru* $B = \{X(\eta) \le a\}$

$$F_X(x/B) = \frac{P(\{X(\eta) \le x\} \cap \{X(\eta) \le a\})}{P(\{X(\eta) \le a\})}$$

$$x \ge a \quad \to \quad P(\{X(\eta) \le x\} \cap \{X(\eta) \le a\}) = P(\{X(\eta) \le a\})$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x/B) = 1$$

$$x \le a \quad \to \quad P(\{X(\eta) \le x\} \cap \{X(\eta) \le a\}) = P(\{X(\eta) \le x\})$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x/B) = \frac{F_X(x)}{F_X(a)}$$

$$f_X(x/B) = \frac{dF_X(x/B)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{F_X(a)} = \dfrac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^{a} f_X(u)du} & \textit{pentru } x \le a \\ 0 & \textit{pentru } x \ge a \end{cases}$$

*Pentru* $B = \{Y(\eta) \le y\}$

$$F_X(x/B) = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$$

$$f_X(x/B) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

# 7. Densitati de probabilitate uzuale

Distributii discrete

- Uniforma, cand rezultatele experimentului aleator sunt egal probabile: $P(X = x_i) = 1/n \quad i = 1,2,3,...,n$
- Binomiala, cand intereseaza probabilitatea de aparitie a unui eveniment $A$ de probabilitate $p$ de $k$ ori in sirul de $n$ repetitii ale experimentului:
  $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 1,2,...n$ unde :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } m! = m(m-1)(m-2)...(3)(2)(1); \quad 0! = 1$$

*Exemplu*: Probabilitatea de eronare a $k$ simboluri intr-un cuvant de lungime $n$

- Poisson, cand intereseaza numarul $k$ al rezultatelor pozitive ale unui experiment intr-un interval de timp de lungime $T$ :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2,...$$

cu $\lambda = \lambda' T$ unde $\lambda'$ este numarul rezultatelor pozitive care apar in unitatea de timp.

*Exemplu*: Numarul apelurilor primite de o centrala telefonica sau numarul electronilor emisi de un catod fierbinte.

Distributii continue:

- Distributia uniforma

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \le x \le b \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

Media si varianta varibilei aleatoare uniforme sunt:

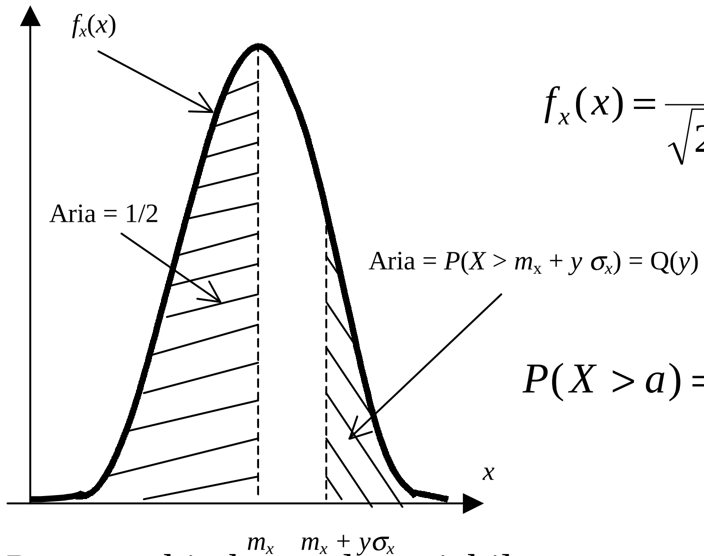
$$m_x = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

*Exemplu*: Eroarea de cuantizare

- Distributia normala (gaussiana) unidimensionala

Este cea mai utilizata, avand o forma analitica simpla; are multiple aplicatii ca urmare a teoremei limita centrala.




$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$P(X > a) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

Pentru schimbarea de variabila :

$z = (x - m_x)/\sigma_x$, integrala precedenta devine:

$$P(X > a) = \int_{(a-m_X)/\sigma_X}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)dz$$

O medoda de calcul a acestei integrale se bazeaza pe integrala tabulata $Q(y)$:

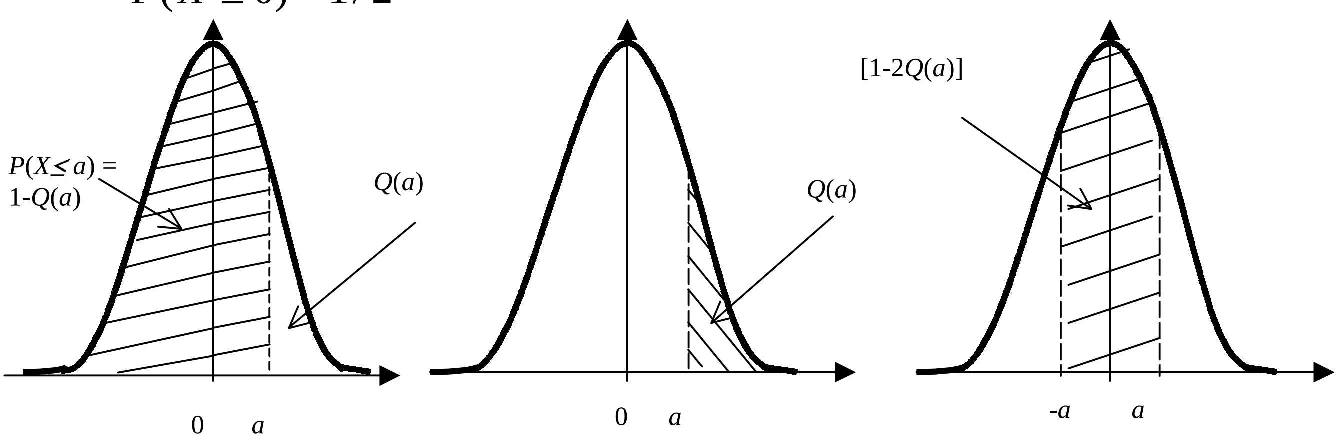
$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^x \exp(-z^2/2)dz, \quad y > 0$$

$$P(X > a) = Q[(a - m_x)/\sigma_x]$$

Deasemenea se poate calcula:

$P(X \le a) = 1 - Q(y)$ sau:

$P(X \le 0) = 1/2$

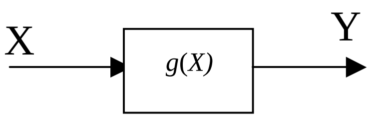


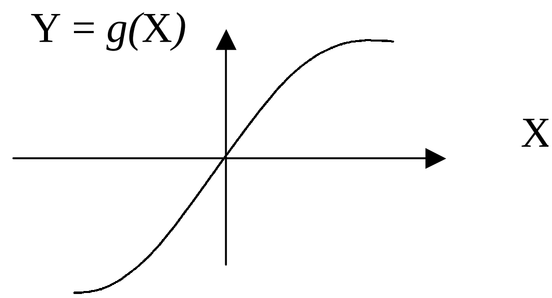
- Distributia normala bidimensionala

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2-\frac{2\rho(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}$$

## 8. Transformari de variabile aleatoare

***Cazul unidimensional***:




*Exemplu*: caracteristica unui amplificator
In ce consta problema: daca este cunoscuta $f_X(x)$ trebuie determinata $f_Y(y)$

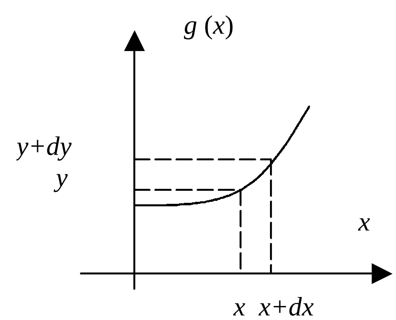
a) Cazul cand $g(x)$ este bijectiva:

g: R →R

$$P\{x \le X \le x+dx\}=P\{y \le Y \le y+dy\}$$

$$\Downarrow$$

$$f_X(x)dx = f_Y(y)dy \Rightarrow f_Y(y)=f_X(x)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=g^{-1}(y)}}$$



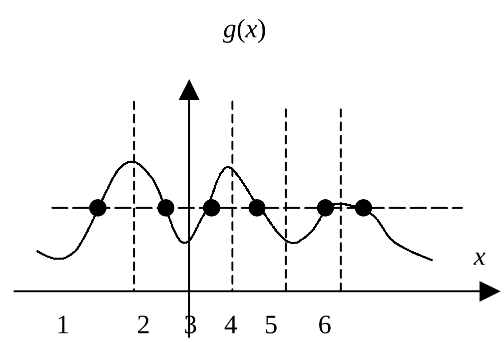

b) Cazul cand g este bijectiva pe portiuni:

g: R →R

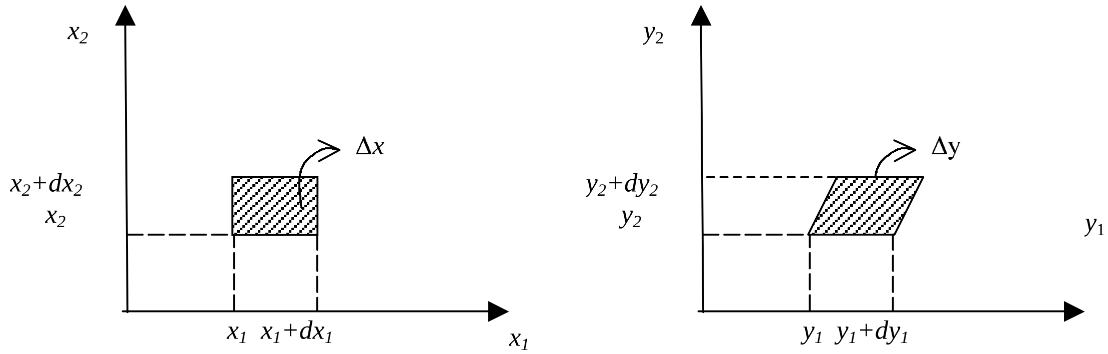
$$\forall y \in R, \quad \exists x_i \in R \Rightarrow \quad g(x_i)=y$$

$$\Downarrow$$

$$f_Y(y)=\sum\frac{f_x(x_k)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_k=g^{-1}(y)}}$$



***Cazul bidimensional:***




$$X \xrightarrow{g_1 g_2} Y : \begin{Bmatrix} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

$$Y \xrightarrow{\varphi_1 \varphi_2} X : \begin{Bmatrix} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) \end{Bmatrix}$$

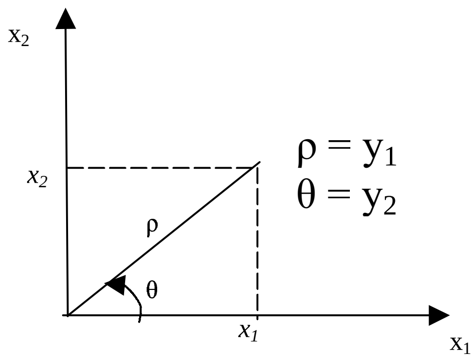
$$P\{x \in \Delta x\} = P\{y \in \Delta y\}$$

$$f_{x_1 x_2}(x_1 x_2) \cdot \Delta x = f_{y_1 y_2}(y_1 y_2) \cdot \Delta y \Rightarrow f_{y_1 y_2}(y_1 y_2) = f_{x_1 x_2}(x_1 x_2) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$ Jacobianul transformarii

$$\lim_{\Delta x -> 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta(y_1 y_2)}{\Delta(x_1 x_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow f_{y_1 y_2}(y_1 y_2) = f_{x_1 x_2}(x_1 x_2) \cdot \frac{1}{\Delta}$$

*Exemplu*: schimbarea de coordonate rectangulare / polare




$x_1 = \rho\cos(\theta) = y_1\cos(y_2)$ $\qquad$ $\rho = y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$x_2 = \rho\sin(\theta) = y_1\sin(y_2)$ $\qquad$ $\theta = y_2 = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$

$$\Delta_{y\to x} = \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \cos(y_2) & \sin(y_2) \\ -y_1\sin(y_2) & y_1\cos(y_2) \end{vmatrix} = y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$f_{x_1x_2}(x_1x_2) = f_{y_1y_2}(y_1y_2)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\rho}\cdot f_{y_1y_2}(y_1y_2)$$

$$f_{y_1y_2}(y_1y_2) = \rho\cdot f_{x_1x_2}(x_1x_2)$$

Modificarea coordonatelor duce la schimbarea distributiilor

$$F_{x_1x_2}(x_1x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{x_1x_2}(u,v)dudv$$

$$F_{y_1y_2}(y_1y_2) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{y_1y_2}(u,v)dudv$$

## 9. Variabile aleatoare complexe

Variabila aleatoare complexa $Z$ se defineste cu ajutorul variabilelor aleatoare reale $X$ si $Y$:

$$Z = X+jY$$

Valoarea medie of $g(Z)$ este definita ca:

$$E\{g(Z)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(z) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

media lui Z, $m_Z$, este :

$$m_Z = E\{Z\} = E\{X\} + jE\{Y\} = m_X + jm_Y$$

varianta este :

$$\sigma_Z^2 = E\{|Z - m_Z|^2\}$$

covarianta lui $Z_m, Z_n$ este :

$$C_{Z_m Z_n} = E\{(Z_m - m_{Z_m})^*(Z_n - m_{Zn})\}$$

unde * semnifica complex conjugat

## 10. Vector aleator

Variabila aleatoare scalara ia valori pe axa reala, iar vectorul aleator ia valori intr-un spatiu *m* dimensional $R_m$. Functia de repartitie a vectorului aleator ca si densitatea sa de probabilitate se pot defini ca pentru ansamble de *m* variabile aleatoare:

$$F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m) = P[(X_1 \le x_1)\ldots(X_m \le x_m)]$$

$$f_{X_1,X_2\ldots X_m}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \frac{\partial^m F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$$

Parametrii importanti sunt valorile medii si covariantele:

$$m_{X_i} = E\{X_i\}$$

$$\sigma_{X_i X_j} = E\{X_i X_j\} - m_{X_i} m_{X_j}$$

Legile probabilistice pentru vectori aleatori pot fi formulate concis, folosind notatii vectoriale. Ansamblul de m variabile aleatoare $X_1$, …$X_m$ poate fi reprezentat ca un vector coloana cu *m* componente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_m \end{bmatrix} \ \textbf{sau}\ \mathbf{X^T} = [X_1 X_2, \ldots, X_m]$$

Vectorul medie si matricea de covariatie sunt:

$$\boldsymbol{m_X} = \boldsymbol{E(X)} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \dots \\ E(X_m) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_X = \boldsymbol{E\{XX^T\}} - \boldsymbol{m_X m_X^T} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \dots & \sigma_{X_1X_m} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2X_2} & \dots & \sigma_{X_2X_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{X_mX_1} & \sigma_{X_mX_2} & \sigma_{X_1X_1} & \sigma_{X_mX_m} \end{bmatrix}$$

componentele sunt necorelate daca:

$$\sigma_{X_i}\sigma_{X_j} = \sigma_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$$

si independente daca:

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} f_{X_i}(x_i)$$

## 11. Functia caracteristica

- Definitie

Este transformata Fourier a densitatii de probabilitate.

$$\Phi_X(j\omega) = \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ \Phi_X(j\omega) = E\{e^{j\omega X}\} \end{cases}$$

pentru variabile discrete:

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{j\omega x_k} P_X(X = x_k)$$

pentru variabile continue:

$$\Phi_X(j\omega) = \int e^{j\omega x} f_X(x)dx$$

- Proprietati:

$$\Phi_X(j\omega) = F^*\{f_X(x)\}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(j\omega)e^{-j\omega x}d\omega$$

- Legatura cu momentul unei variabile aleatoare

Daca se diferentiaza functia caracteristica:

$$\frac{d\Phi_X(j\omega)}{d\omega} = j\int_{-\infty}^{\infty} xe^{j\omega x} f_X(x)dx$$

$$\left.\frac{d\Phi_X(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = j\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = jE\{X\}$$

$$E\{X^n\} = (-j)^n \left.\frac{d^n\Phi_X(j\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}$$

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{d^n\Phi_X(j\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} \frac{\omega^n}{n!}$$

$$\Phi_X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} E\{X^n\}\frac{(j\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{(j\omega)^n}{n!}$$

# Semnale si procese aleatoare

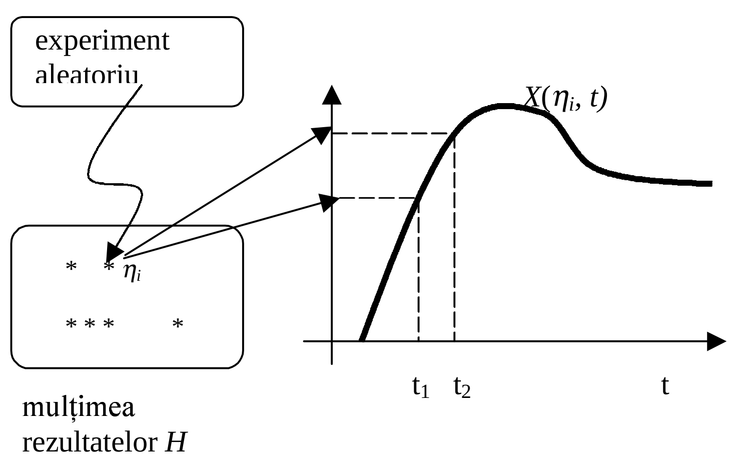
Tinand cont de măsura in care ele sunt previzibile in timp, semnalele pot fi ierarhizate in felul următor:

- Semnale deterministe, a căror evoluție in timp se poate prevedea, ele fiind descrise de o funcție de timp cunoscuta, ca de exemplu $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
- Semnale condiționat – deterministe, a căror evoluție in timp se poate prevedea parțial, deoarece un parametru al semnalului este o variabila aleatoare, ca de exemplu:
$$\begin{cases} X(t) = A(\eta)\cos(\omega t + \varphi) \text{ sau} \\ X(t) = A\cos(\omega(\eta)t + \varphi) \text{ sau} \\ X(t) = A\cos(\omega t + \varphi(\eta)) \end{cases}$$
- Semnale aleatoare, a căror evoluție in timp este practic imprevizibila si care vor fi studiate in continuare.

## 1. Definiția semnalului aleator

Un semnal aleator real este o funcție de doi parametri $X(\eta, t)$ unde $\eta$ ia valori in spațiul eşantioanelor, iar *t*, de obicei, ia valori pe axa reala, pozitiva si are semnificația de timp.

Orice semnal aleator se obține ca urmare a efectuării unui experiment care consta in alegerea din spațiul eşantioanelor $H$ a unui eşantion elementar $\eta_i$ care determina alegerea funcției $X(\eta_i, t)$ din familia de funcții $X(\eta, t)$ (vezi figura).



Fiecărei valori $\eta$ ii corespunde o funcție $X(\eta,t)$, notata $X_\eta(t)$, numita *realizare particulara* sau funcție eşantion a semnalului.
Daca este cunoscut procesul aleator prin mulțimea realizărilor sale particulare, in orice moment de timp $t$ se obține o variabila aleatoare $X_t(\eta)$. In consecința, după cum variază cei doi parametri $\eta$ si $t$, deosebim următoarele cazuri:

- $\eta$ si $t$ variabile: $X(\eta,t)$ este un semnal aleator, adică o familie de realizări particulare;
- $\eta$ variabil si $t$ fix: $X(\eta,t) = X_t(\eta)$ este o variabila aleatoare;
- $\eta$ fix si $t$ variabil: $X(\eta,t) = X_\eta(t)$ este o realizare particulara, adică o funcție de timp obişnuita;
- $\eta$ si $t$ fixe, $X(\eta,t)$ reprezintă un număr.

## 2. Clasificarea semnalelor aleatoare.

- Semnale aleatoare in timp continuu, sau simplu semnale aleatoare, constituite din o familie nenumarabila de variabile aleatoare $X_t(\eta)$ cu $t \in \Re$.
  1. Daca $X_t(\eta)$ pentru un $t$ oarecare este o variabila aleatoare continua, semnalul este de amplitudine continua (figura a1); un exemplu îl poate constitui tensiunea de la bornele unei prize electrice.
  2. Daca $X_t(\eta)$ pentru un $t$ oarecare este o variabila aleatoare discreta, semnalul este de amplitudine discreta (figura a2); un exemplu îl poate constitui un semnal de date intr-o transmisie asincrona, când şirul de date poate începe la orice moment de timp.
- Semnale aleatoare in timp discret sau serii aleatoare care reprezintă o mulțime numarabila de funcții aleatoare notate $X_n(\eta)$, unde $t = nT$ cu $n \in Z$.

  1. Daca pentru un $n$ oarecare, $X_n(\eta)$ este o variabila aleatoare continua, seria este de amplitudine continua (figura b1); un exemplu îl poate constitui un semnal de amplitudine continua (analogic) eşantionat.
  2. Daca pentru un $n$ oarecare, $X_n(\eta)$ este o variabila aleatoare discreta, seria este de amplitudine discreta (figura b2) si se mai numeşte si lanț aleator; un

exemplu îl poate constitui un semnal analogic eşantionat si cuantizat

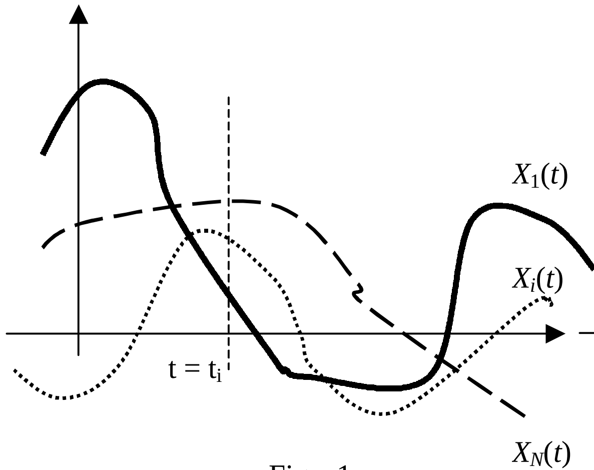



Fig. a1

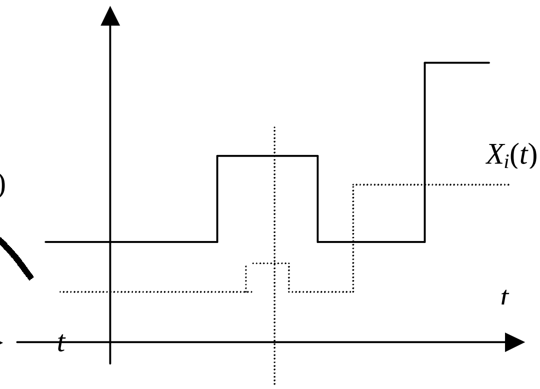



Fig. a2

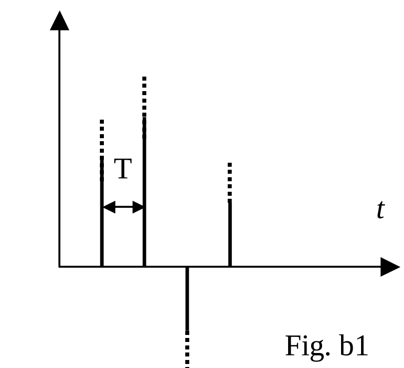



Fig. b1

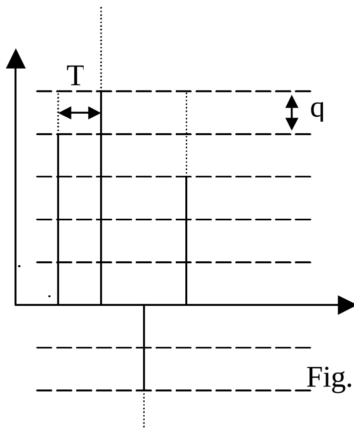



Fig. b2

## 3. Funcţii de repartiţie si densitati de probabilitate ale semnalelor aleatoare in timp continuu

- *Funcţia de repartiţie a probabilitatilor de ordinul 1* se defineşte ca pentru o variabila aleatoare continua obţinuta din semnalul aleator la un moment oarecare de timp:
  $F_X(x,t) = P(X(\eta,t) \le x)$
- *Densitatea de probabilitate de ordinul 1* se defineşte tot ca pentru o variabila aleatoare continua si este:
  $$f_X(x,t) = \frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$
- *Funcţia de repartiţie de ordinul n* se refera la *n* v.a. continue, considerate la n momente de timp diferite:

$$F_{X_1,X_2,....,X_n}(x_1,x_2,....,x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P(X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n)$$

unde am notat $X_i = X(\eta,t_i)$.

- *Densitatea de probabilitate de ordin n* este:

$$f_{X_1,..,X_n}(x_1,..,x_n;t_1,..,t_n)=\frac{\partial^n F_{X_1,..,X_n}(x_1,..x_n;t_1,..t_n)}{\partial x_1,..,\partial x_n}$$

Funcțiile de repartiție si densitatile de probabilitate ale semnalului aleator depind de momentele de timp $t_i$ la care sunt considerate variabilele aleatoare.

- *<u>Funcția de repartiție a ansamlului de doua semnale aleatoare continue in timp</u>* $X(\eta,t)$ si $Y(\eta,t)$ definite pe acelaşi spațiu al eşantioanelor este:

$$F_{XY}(x,y;t_1,t_2)=P(X(\eta,t_1)\le x, Y(\eta,t_2)\le y)$$

- *<u>Densitatea de probabilitate a ansamblului de doua semnale aleatoare continue in timp</u>* mai sus considerat este:

$$f_{XY}(x,y;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y;t_1,t_2)}{\partial x \partial y}$$

Daca doua semnale sunt definite pe acelaşi spațiu al eşantioanelor, atunci se poate verifica daca sunt statistic independente.

## 4. Semnale aleatoare statistic independente

*<u>Definiție</u>*: Doua semnale aleatoare $X(\eta,t)$ si $Y(\eta,t)$ definite pe acelaşi spațiu al eşantioanelor se numesc statistic independente daca pentru orice momente $t_{11},\ldots,t_{1i}$ din intervalul de timp pe care este definit $X(\eta,t)$ si pentru orice momente $t_{21},\ldots,t_{2j}$ din intervalul de timp pe care este definit $Y(\eta,t)$, variabilele aleatoare $X(\eta,t_{11}),\ldots, X(\eta,t_{1i})$ sunt statistic independente de variabilele aleatoare $Y(\eta,t_{21}),\ldots, Y(\eta,t_{2j})$. Atunci, cu $t_1\in T_x$, $t_2 \in T_y$ ($T_x$ si $T_y$ sunt intervalele pe care se observa semnalele aleatoare X, Y:

$$F_{XY}(x,y;t_1,t_2)=F_X(x,t_1)\cdot F_Y(y,t_2)$$

$$f_{XY}(x,y;t_1,t_2)=f_X(x,t_1)\cdot f_Y(y,t_2)$$

In interpretare fizica, intre doua semnale statistic independente nu se poate stabili nici o legătura; ele provin de regula din surse diferite si de aceea efectele lor in sistemele de prelucrare a informației pot fi luate in considerație separat.

Pentru cazul in care variabilele aleatoare $X(\eta,t_{1i})$ si $Y(\eta,t_{2j})$ sunt discrete, condiția de independenta statistica devine:

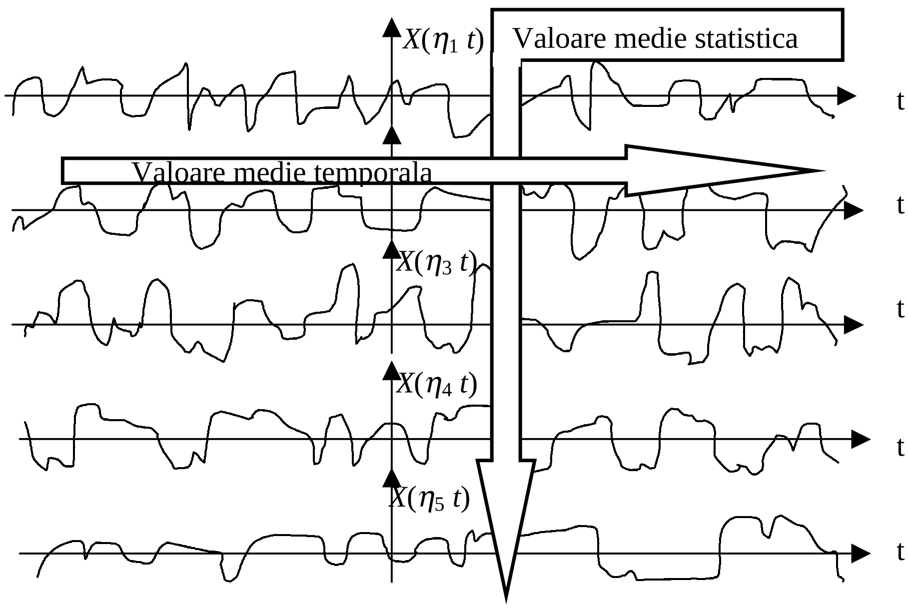
$P_{kn}=P_k P_n \quad \text{unde}: P_{kn}=P\,(X(\eta,t_{1i})=a_k, Y(\eta,t_{2j})=b_n),$

$$P_k = P(X(\eta, t_{1i}) = a_k)$$
$$P_n = P(Y(\eta, t_{2j}) = b_n)$$

iar $a_k$ si $b_n$ sunt valori ale variabilelor $X$ si $Y$, alese din şirurile de valori posibile ale acestor variabile:
$\{a_1, a_2, ..., a_{k,} ...\}$ respectiv $\{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$

## 5. Valori medii statistice ale semnalelor aleatoare

Pentru un semnal aleator, pe mulțimea realizărilor sale particulare, se pot defini doua tipuri de valori medii: valori medii statistice ale realizărilor particulare la un anumit moment de timp




si valorile medii temporale ale fiecărei realizări particulare.
Valorile medii statistice sunt de fapt valori medii ale variabilelor aleatoare considerate la un anumit moment de timp si care devin astfel funcții de timp. Aceste valori medii se definesc ca si pentru variabile aleatoare, ceea ce se vede in continuare:

- Valoarea medie liniara

$$m_x^{(1)}(t) = E\{X(\eta, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, t) dx$$

- Valoarea medie pătratica

$$m_x^{(2)}(t) = E\{X^2(\eta, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x, t) dx$$

- Varianta

$$\sigma_X^2(t) = E\{(X(\eta, t) - m_X(t))^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t))^2 f_X(x, t) dx$$

- Funcția de autocorelatie, care măsoară legătura care exista intre valorile semnalului aleator la momente de timp diferite

$$R_{X_1X_2}(t_1,t_2)=E\{X(\eta,t_1)X(\eta,t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2 f_{X_1X_2}(x_1x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- Funcția de autovariatie, care este funcția de autocorelatie a semnalului centrat pe valoarea sa medie si are expresia:

$$C_{X_1X_2}(t_1,t_2)=E\{(X(\eta,t_1)-m_x(t_1))(X(\eta,t_2)-m_x(t_2))\}=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))\,f_{X_1X_2}(x_1x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Se poate arata ca se pastreaza relatia dedusa la variabile aleatoare :

$$C_{X_1X_2}(t_1,t_2)=R_{X_1X_2}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)$$

- Functia de intercorelatie sau de corelatie mutuala intre doua semnale aleatoare $X(\eta,t_1)$ si $Y(\eta,t_2)$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(\eta,t_1)Y(\eta,t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f_{XY}(xy;t_1,t_2)dxdy$$

- Functia de covariatie sau de intervariatie

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{(X(\eta,t_1)-m_x(t_1))(Y(\eta,t_2)-m_y(t_2))\}=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x(t_1))(y-m_y(t_2))\,f_{XY}(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

- Semnale aleatoare necorelate : doua semnale aleatoare definite pe acelasi spatiu al esantioanelor sunt necorelate daca pentru toate valorile $t_1\in \mathrm{T_x}$ si $t_2 \in \mathrm{T_y}$ variabilele aleatore respective sunt necorelate, adica daca :

$$E\{X(\eta,t_1)Y(\eta,t_2)\}=E\{X(\eta,t_1)\}E\{Y(\eta,t_2)\}$$

- Semnale ortogonale : doua semnale aleatoare definite pe acelasi spatiu al esantioanelor sunt ortogonale daca pentru toate valorile $t_1\in \mathrm{T_x}$ si $t_2 \in \mathrm{T_y}$ variabilele aleatore respective sunt ortogonale, adica daca :

$$E\{X(\eta,t_1)Y(\eta,t_2)\}=0$$

- Daca doua semnale aleatoare sunt necorelate si daca cel putin unul din ele are valoarea medie nula, atunci ele sunt si ortogonale
- Daca doua semnale sunt statistic independente, atunci ele sunt si necorelate. Reciproca nu este intotdeauna adevarata!

**6. Valori medii statistice ale semnalelor aleatoare discrete**

Valorile medii statistice se calculeaza pe ansamblul realizarilor particulare considerate la momente arbritare de timp $t_1$, $t_2$, …, $t_i$, …, deci asupra variabilei aleatoare ce rezulta in aceste momente de timp. Se mai numesc valori medii pe ansamble si depind de alegerea momentelor de timp alese.
Acestea sunt:

- Valoare medie (moment de ordinul 1, media liniara)

$$m_x(n) = E[X(\eta,n)] = \sum_k a_k P_k(n)$$

unde $\{a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_N\}$ reprezinta ansamblul valorilor posibile.

- Valoarea patratica medie (moment de ordinul 2)

$$m_x^{(2)}(n) = E[X^2(\eta,n)] = \sum_k a_k^2 P_k(n)$$

- Varianta

$$\sigma^2(n) = E[X^2] - (E[X])^2$$

- Momentul de ordinul n

$$m_x^{(n)}(n) = E[X^n(\eta,n)] = \sum_k a_k^n P_k(n)$$

- Functia de autocorelatie

$$R_{xx}(n_1,n_2) = E[X(\eta,n_1)X(\eta,n_2)] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j P_{ij}(n_1,n_2)$$

$$P_{ij}(n_1,n_2) = P(X(\eta,n_1) = a_i, X(\eta,n_2) = a_j)$$

- Functia de corelatie mutuala a doua semnale aleatoare $X(\eta,t)$ si $Y(\eta,t)$

$$R_{xy}(n_1,n_2) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i b_j P_{ij}(a_i,b_j;n_1,n_2)$$

cu

$$P_{ij}(a_i,b_j;n_1,n_2) = P(X(\eta,n_1) = a_i, Y(\eta,n_2) = b_j)$$

unde $a_i$, $i=[1,N]$, sunt valorile posibile ale lui $X(\eta,n_1)$ iar $b_j$, $j=[0,N]$, sunt valorile posibile ale lui $Y(\eta,n_2)$.

- Functia de autovariatie
  $$C_{xx}(n_1,n_2)=R_{xx}(n_1,n_2)-m_x(n_1)m_x(n_2)$$
- Functia de covariatie a doua semnale $X(\eta,t)$ si $Y(\eta,t)$

$$C_{xy}(n_1,n_2)=R_{xy}(n_1,n_2)-m_x(n_1)m_y(n_2)$$

## 7. Valori medii pentru semnale aleatoare complexe

$$Z(\eta,t)=X(\eta,t)+jY(\eta,t)$$

deducem $$E[Z(\eta,t)]=E[X(\eta,t)]+jE[Y(\eta,t)]$$

- Momentul de ordinul 2
  $$M_z(t_1,t_2)=E[Z(\eta,t_1)Z(\eta,t_2)]$$
- Functia de autocorelatie continua
  $$R_{zz}(t_1,t_2)=E[Z(\eta,t_1)Z^*(\eta,t_2)]$$
- Functia de autocorelatie discreta
  $$R_{zz}(n_1,n_2)=E[Z(\eta,n_1)Z^*(\eta,n_2)]$$

cu proprietatile:

$$M_z(t_1,t_2)=M_z(t_2,t_1),\quad \forall t_1,t_2$$

simetrie hermitica $$R_{zz}(t_1,t_2)=R^*{}_{zz}(t_2,t_1),\quad \forall t_1,t_2$$

- Corelatia statistica de ordinul n
  $$R_x(t_1,t_2,...,t_n)=E[X(\eta,t_1)X(\eta,t_2)...X(\eta,t_n)]$$

**8. Medii temporale pentru semnale in timp continuu**

Mediile temporale se calculeaza pe o realizare particulara $X(\eta,t)$ si depind de parametrul $\eta$ din spatiul esantioanelor. Acestea sunt:

- Valoarea medie liniara

$$m_{x\eta} = \overline{\overline{X_\eta(t)}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(\eta,t)dt = \overline{\overline{X_\eta(t_0+t)}}$$

Deci nu depinde de originea timpului $t_0$.

Valoarea medie temporala reprezinta componenta continua a semnalului si este ea insasi o variabila aleatoare deoarece depinde de $\eta$. Valoarea sa medie statistica este:

$$E[\overline{\overline{X_\eta(t)}}] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X(\eta,t)]dt = m_x$$

Rezulta ca valoarea medie statistica a tuturor valorilor medii liniare temporale este egala cu valoarea medie liniara statistica a semnalului.

- Valoarea patratica medie (moment de ordinul 2)

$$\overline{\overline{[X_\eta(t)]^2}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [X(\eta,t)]^2 dt = \overline{\overline{[X_\eta(t_0+t)]^2}}$$

Valoarea patratica medie, nu depinde de originea timpului si reprezinta puterea medie a semnalului pe sarcina unitara.

- Momentul de ordinul n

$$\overline{\overline{[X_\eta(t)]^n}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[X(\eta,t)]^n dt = \overline{\overline{[X_\eta(t_0+t)]^n}}$$

- Functia de autocorelatie

Depinde de diferenta dintre momentele de timp considerate.

$$R_{xx,\eta}(t_1,t_2) = \overline{\overline{X_\eta(t_1+t)X_\eta(t_2+t)}} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(\eta,t_1+t)X(\eta,t_2+t)dt = R_{xx,\eta}(t_2-t_1)$$

- Functia de corelatie mutuala

$$R_{xy,\eta}(t_1,t_2) = \overline{\overline{X_\eta(t_1+t)Y_\eta(t_2+t)}} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(\eta,t_1+t)Y(\eta,t_2+t)dt = R_{xy,\eta}(t_2-t_1)$$

Se poate demonstra ca: $R_{xy,\eta}(\tau) \neq R_{xy,\eta}(-\tau)$

$$R_{xy,\eta}(\tau) = R_{yx,\eta}(-\tau); \qquad \tau = t_2 - t_1$$

- Functia de autovariatie

$$C_{xx,\eta}(t_1,t_2) = \overline{\overline{[X_\eta(t_1+t)-m_x][X_\eta(t_2+t)-m_x]}} = C_{xx,\eta}(t_2-t_1)$$

- Functia de covariatie

$$C_{xy,\eta}(t_1,t_2) = \overline{\overline{[X_\eta(t_1+t)-m_x][Y_\eta(t_2+t)-m_y]}} = C_{xy,\eta}(t_2-t_1)$$

## 9. Medii temporale pentru semnale in timp discret

Daca semnalul aleator este definit doar in momente discrete de timp, in formulele anterioare se inlocuieste indicele $t \in \Re$ prin indicele $n \in Z$, stiind ca $t_n = nT$ unde T reprezinta intervalul de timp intre doua momente de timp, iar integrarea se inlocuieste printr-o insumare. De exemplu:

- Valoarea medie liniara

$$m_{x\eta} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} X(\eta_0, i)$$

S-a notat $X(\eta_0, i)$ pentru $X(\eta_0, iT)$ sau, inca, $X(\eta_0, t_i)$. Indicele $\eta$ este un element arbritar al spatiului esantioanelor.

- Momentul de ordinul n

$$m_{X\eta}^{(n)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=-N/2}^{N/2} X^n(\eta_0, i)$$

- Functia de autocorelatie

$$R_{xx,\eta_0}(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} X(\eta_0, i) X(\eta_0, i+m)$$

Functia de corelatie mutuala

- $$R_{xy,\eta_0}(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} X(\eta_0, i) Y(\eta_0, i+m)$$

- Functia de corelatie circulara

$$r_{xy}(m) \cong \frac{1}{N+1} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} X(\eta_0, i) Y(\eta_0, i+m)$$

<u>*Observatii:*</u>

- In cazul seriilor aleatoare digitale (semnale digitale sau semnale discrete in timp cu amplitudine discreta), variabila aleatoare $X(\eta_0, i)$ (respectiv $Y(\eta_0, i)$) ia valori in alfabetul finit $\{a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n\}$ (si, respectiv, $\{b_1, b_2, ..., b_j, ..., b_m\}$). Autocorelatia ca medie temporala devine:

$$R_{xx,\eta_0}(h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_k a_{k+h}$$

Corelatia mutuala temporala a doua semnale digitale este:

$$R_{xy,\eta_0}(h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_k b_{k+h}$$

- Corelatiile temporale de ordinul n depind de realizarea particulara aleasa prin parametrul $\eta$ si de n variabile $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n-1}$ reprezentand diferentele dintre momentele de timp considerate :

$$\tau_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 1, ..., n$$

## 10. Stationaritate

<u>*Definitie:*</u> Un semnal aleator este *stationar* daca proprietatile sale statistice sunt invariante in raport cu

schimbarea originii timpului sau, echivalent, la orice translatie de timp.

Doua semnale sunt simultan stationare daca fiecare este stationar si daca proprietatile lor statistice simultane sunt invariante la orice translatie de timp.

Stationaritatea poate fi in *sens strict* sau in *sens larg*.

***Stationaritate in sens strict***

*Definitie(stationaritate in sens strict sau tare):* Un semnal este stationar tare sau in sens strict daca functia sa de repartitie (legea temporala) de orice ordin este invarianta la orice translatie de timp $\tau$.

$$F_n(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = F_n(x_1,...,x_n;t_1+\tau,...,t_n+\tau)$$

Rezulta ca densitatile de probabilitate de orice ordin n sunt invariante la orice translatie de timp.

Daca semnalul este o secventa digitala aleatoare $X(\eta,n)$ cu valori in alfabetul $\{a_1,a_2,...,a_k,...,a_N\}$, atunci stationaritatea in sens strict presupune:

- $P_i = P(X_n = a_i)$ este independenta de n
- $P(a_1,...,a_N) = P(X_1 = a_1,...,X_n = a_N)$ depinde numai de diferentele de timp.

***Stationaritate in sens larg***

*Definitie(stationaritate in sens larg sau slaba):* Un semnal este stationar in sens larg sau slab daca functiile sale de repartitie de ordinul 1 si 2 sunt invariante la orice translatie de timp $\tau$.

$$F_1(x,t) = F_1(x,t+\tau) = F_1(x)$$

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_2(x_1,x_2;t_1+t,t_2+t) = F_2(x_1,x_2;\tau),\ \tau = t_2 - t_1$$

Ca urmare densitatile de probabilitate de ordinul 1 si 2 sunt invariante la orice translatie de timp si deci:

$m_x = E[X(\eta,t)]$ - nu depinde de timp

$m_x^{(2)} = E[X^2(\eta,t)]$ - nu depinde de timp

$R_{xx}(\tau) = E[X(\eta,t)X(\eta,t+\tau)]$ - depinde de diferenta de timp

$R_{xy}(\tau) = E[X(\eta,t)Y(\eta,t+\tau)]$ - depinde de diferenta de timp

In cazul unui semnal digital, stationaritatea in sens larg se defineste prin:

- $P_i = P(X_n = a_i)$ este independenta de n
- $P_{ij}(n,k) = P(X_n = a_i, X_k = a_j) = P_{ij}(n-k)$ depinde numai de *n-k.*

Stationaritatea in sens larg se mai numeste stationaritate pana la ordinul al doilea. Spre deosebire de aceasta, stationaritatea simpla de ordinul al doilea se refera doar la invarianta in timp a proprietatilor statistice de ordinul al doilea, ceea ce nu implica si stationaritatea de ordinul intai. De exemplu, in cazul unei secvente digitale aleatoare, probabilitatea

$$P_i = P(X_n = a_i) = \sum_{j=1}^{N} P(X_n = a_i, X_k = a_j) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}(n-k)$$

nu depinde de alegerea lui $X_k$ dar poate depinde de n desi $P_{ij}(n-k)$ depinde numai de *(n-k).*

<u>*In concluzie:*</u> stationaritatea in sens larg este verificata prin relatiile:

- cazul semnalelor discrete in timp
  - $E[X_n]$ independenta de *n*
  - $E[|X_n|^2] < \infty$
  - $R_{xx}(n_1,n_2) = R_{xx}(n_2-n_1)$
- cazul semnalelor continue in timp

- $E[X(\eta,t)]$ independenta de t
- $E[|X(\eta,t)|^2] < \infty$
- $R_{xx}(t_1,t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1)$
- continuitatea in origine a functiei de autocorelatie care asigura continuitatea realizarilor particulare in medie patratica.

## 11. Ergodicitate

Stationaritatea este o proprietate a unui semnal aleator care nu poate fi determinata decât din mulțimea tuturor realizărilor particulare. Din punct de vedere practic, interesant este cazul in care o singura realizare particulara poate fi luata drept model pentru întregul proces aleator.

Un asemenea caz îl reprezintă semnalele aleatoare staționare ale căror medii statistice sunt egale cu mediile temporale corespunzătoare efectuate pe o singura realizare particulara, de care se dispune simplu. Aceste semnale se numesc ergodice.

*Definiție (ergodicitate tare):* Un semnal staționar se numeşte *ergodic tare* sau in *sens strict* daca mediile temporale pana la ordinul n ale unei realizări particulare arbitrare sunt egale, cu probabilitate 1, cu mediile statistice de acelaşi ordin, pentru orice n.

*Definiție (ergodicitate slaba):* Un semnal staționar se numeşte *ergodic slab* sau in *sens larg* daca mediile statistice de ordinul întâi si al doilea sunt egale, cu probabilitatea 1, cu mediile temporale ale unei realizări particulare arbitrare de acelaşi ordin.

Egalitatea, cu probabilitatea 1, a unei medii statistice cu o medie temporala, de exemplu, in cazul ordinului întâi, înseamnă convergenta in probabilitate:

$$m_X(t) = E\left[X(\eta,t)\right]$$

$$m_{X\eta}(\eta) = \overline{\overline{X(\eta,t)}}$$

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|m_{X\eta}(\eta) - m_X(t)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

ceea ce implica anularea variantei variabilei aleatoare $m_{X\eta}(\eta)$.

Deoarece demonstrarea ergodicitatii este, in general, anevoioasa, adesea in practica este suficienta considerarea *ergodicitatii in raport cu media liniara* (de ordinul întâi), care poate fi numita *erodicitate practica.*

*Definiție (ergodicitate practica sau in raport cu media liniara)*: Un semnal aleator staționar se numeşte practic ergodic daca varianta mediei temporale este nula:

$$\mathrm{var}\left[m_{X\eta}(\eta)\right] = \sigma^2_{m_{X\eta}} = 0$$

Interpretarea fenomenului de ergodicitate practica (sau in raport cu media liniara) este imediata. Deoarece $m_{X\eta}(\eta)$ este o variabila aleatoare obtinuta printr-un proces la limita, conditia din definitia anterioara poate fi rescrisa sub forma:

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(\eta,t)dt\right] = 0$$

sau, daca se introduce o noua variabila aleatoare:

$$m_{X\eta}(\eta,t) = \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(\eta,t)dt\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}\, m_{X\eta}(\eta,t) = 0 \quad \text{sau}$$

$$\lim_{T\to\infty} m_{X\eta}(\eta,t) = m_X$$

Considerând un şir de momente $T_n \to \infty$, fiecare dintre variabilele aleatoare $m_{X\eta}(\eta,T_n)$ are media $m_X$, varianta tinzând la zero pentru $n = \infty$ (fig. 1)

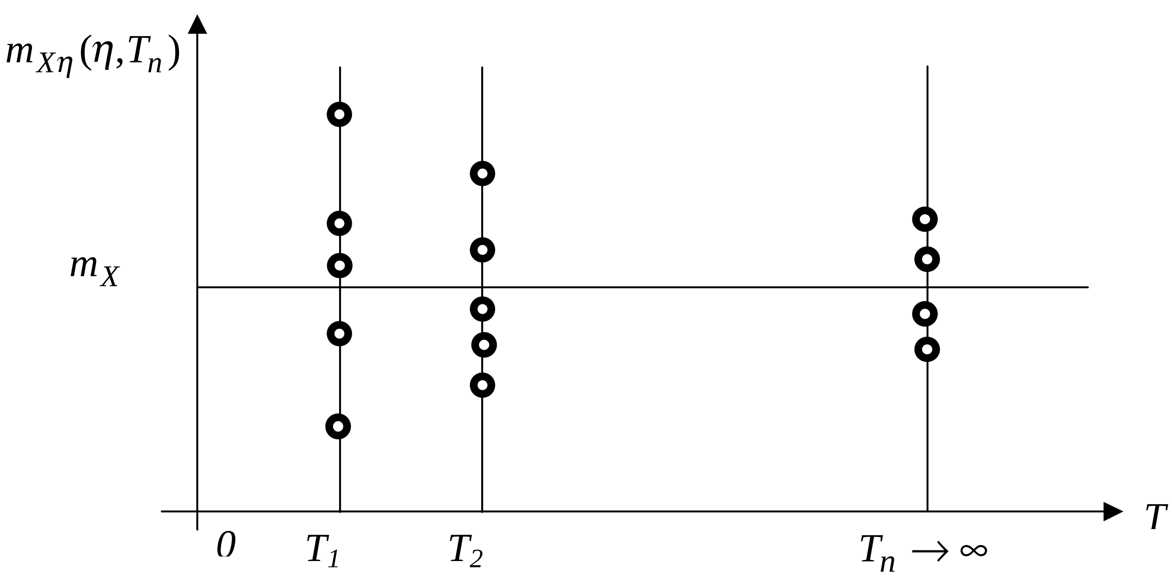



*Fig.1. Reprezentarea fenomenului de ergodicitate practica. Punctele indica valori ale variabilelor aleatoare* $m_{X\eta}(\eta,T_n)$ *oscilând in jurul mediei* $m_X$*, varianta tinzând la zero pentru* $n \to \infty$.

Un criteriu de ergodicitate util este conținut in teorema următoare:

*Teorema (criteriul de ergodicitate practica):* Fie un semnal stationar in sens larg $X(\eta,t)$ continuu in timp. Daca:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)C_{XX}(\tau)d\tau=0,$$

atunci semnalul $X(\eta,t)$ este practic ergodic.

*Demonstratie:*

Din condiția de anulare a variantei mediei temporale liniare, rezulta:

$$\sigma^2_{m_{X\eta}}=E\left\{\left[m_{X\eta}(\eta)-m_X\right]^2\right\}=E\left\{\left[m_{X\eta}(\eta)\right]^2\right\}-\left(m_X\right)^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\overline{X(\eta,v)X(\eta,u)}dvdu-(m_X)^2$$

cu schimbarea de variabile

$v-u=\tau\Rightarrow v=u+\tau$,

$v=v$,

se trece de la planul $(v,u)$ la planul $(v,\tau)$. Domeniul de integrare in planul $(v,u)$ din fig.2a se transforma in domeniul de intregrare din fig2b, limitele obtinandu-se din:

$$u=\frac{T}{2}\Rightarrow v=\tau+\frac{T}{2},$$

$$u=-\frac{T}{2}\Rightarrow v=\tau-\frac{T}{2}.$$

Cu aceasta, integrala dubla din ultima expresie a lui $\sigma^2_{m_{X\eta}}$ se transforma in integrala simpla, deoarece elementul de suprafața $(dvdu)$ din planul $(v,u)$ se transforma in elementul $(T-|\tau|)d\tau$ din planul $(v,\tau)$:

$$dvdu\to(T-|\tau|)d\tau$$

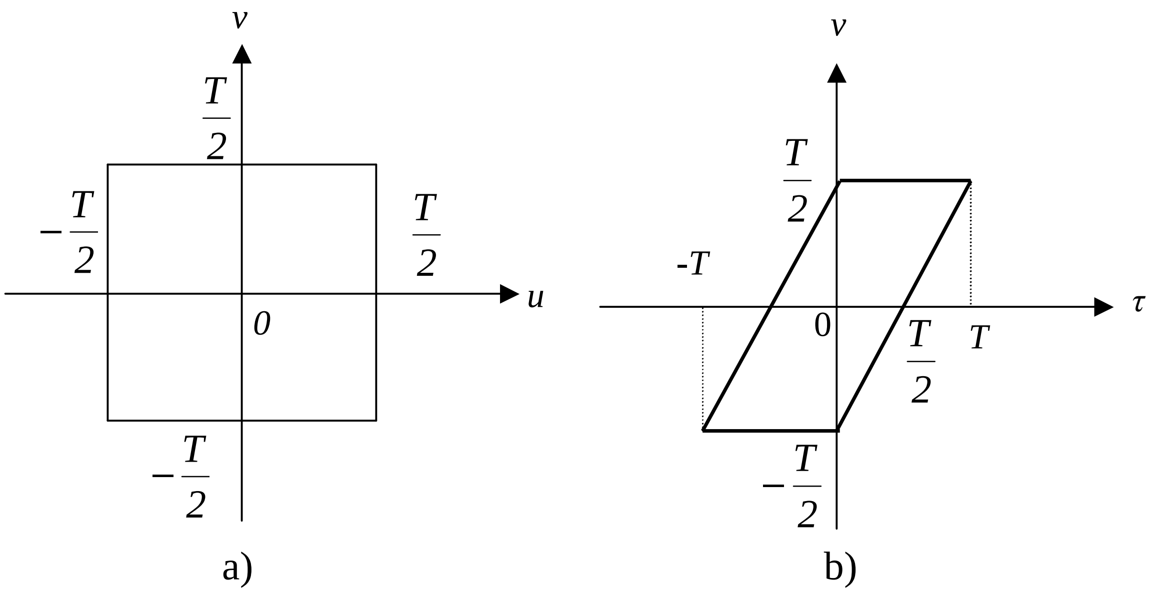



*Fig.2 transformarea domeniului de integrare prin substitutia $v-u=\tau$*

Intr-adevar, aria paralelogramului din fig.2b se obtine prin scaderea suprefetei hasurate in fig.3b din suprafata hasurata din fig.3a.

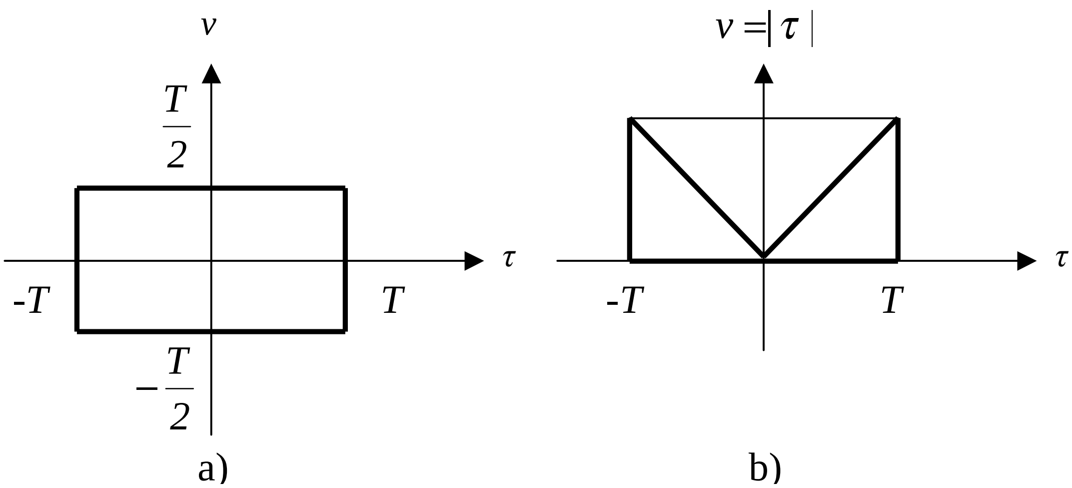



*Fig.3. Calculul elementului de suprafata in planul ( $v,\tau$ )*

Rezulta deci: $$2\int_{-T}^{T}\frac{T}{2}d\tau-\int_{-T}^{T}|\tau|\,d\tau=\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)d\tau$$

in loc de $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dvdu$

Teorema este demonstrata deoarece expresia lui $\sigma^2_{m_{x\eta}}$ devine

$$\sigma^2_{m_{x\eta}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} (1-\frac{|\tau|}{T}) C_{XX}(\tau) d\tau = 0$$

Un alt criteriu practic de recunoastere a ergodicitatii unui semnal aleator este dat de urmatorul corolar al teoremei precedente.

*Corolar (alt criteriu de ergodicitate practica):* Daca funcția de autocovarianta a unui semnal aleator $X(\eta,t)$ staționar tinde către zero

$\lim_{\tau\to\infty} C_{XX}(\tau) = 0$,

atunci semnalul $X(\eta,t)$ este practic ergodic.

*Demonstrație:*

Pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate alege un $\tau' > 0$ astfel incat:

$|C_{XX}(\tau)| < \varepsilon, \quad \tau > \tau'$.

Rezulta, atunci, pentru $T > \tau'$:

$$|\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})C_{XX}(\tau)d\tau| \le \frac{\varepsilon}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau = 2\varepsilon.$$

Deci: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})C_{XX}(\tau)d\tau = 0$

si din teorema anterioara rezulta ca semnalul $X(\eta,t)$ este practic ergodic.

- Prin urmare, pentru a verifica ergodicitatea unui semnal aleator in raport cu valoarea sa medie liniara, trebuie calculata funcția sa de autocovarianta $C_{XX}(\tau)$, deci o valoare medie de ordinul al doilea.

In general, pentru verificarea ergodicitatii unei valori medii de ordinul *k* este necesar sa se dispună de o valoare medie de ordinul *2k*.

Demonstrarea ergodicitatii unui proces aleator este dificila si, ca atare, se efectuează numai in cazuri speciale, altminteri proprietatea de ergodicitate este doar presupusa.

- Ergodicitatea implica întotdeauna proprietatea de stationaritate ca o condiție necesara, dar insuficienta. Ierarhizarea claselor semnalelor staționare si ergodice este reprezentata in fig.4.

*Observație:*

Doua semnale aleatoare sunt *simultan ergodice* daca ambele sunt ergodice si daca momentele lor mutuale (corelația mutuala si covarianța) statistice sunt egale cu cele temporale.

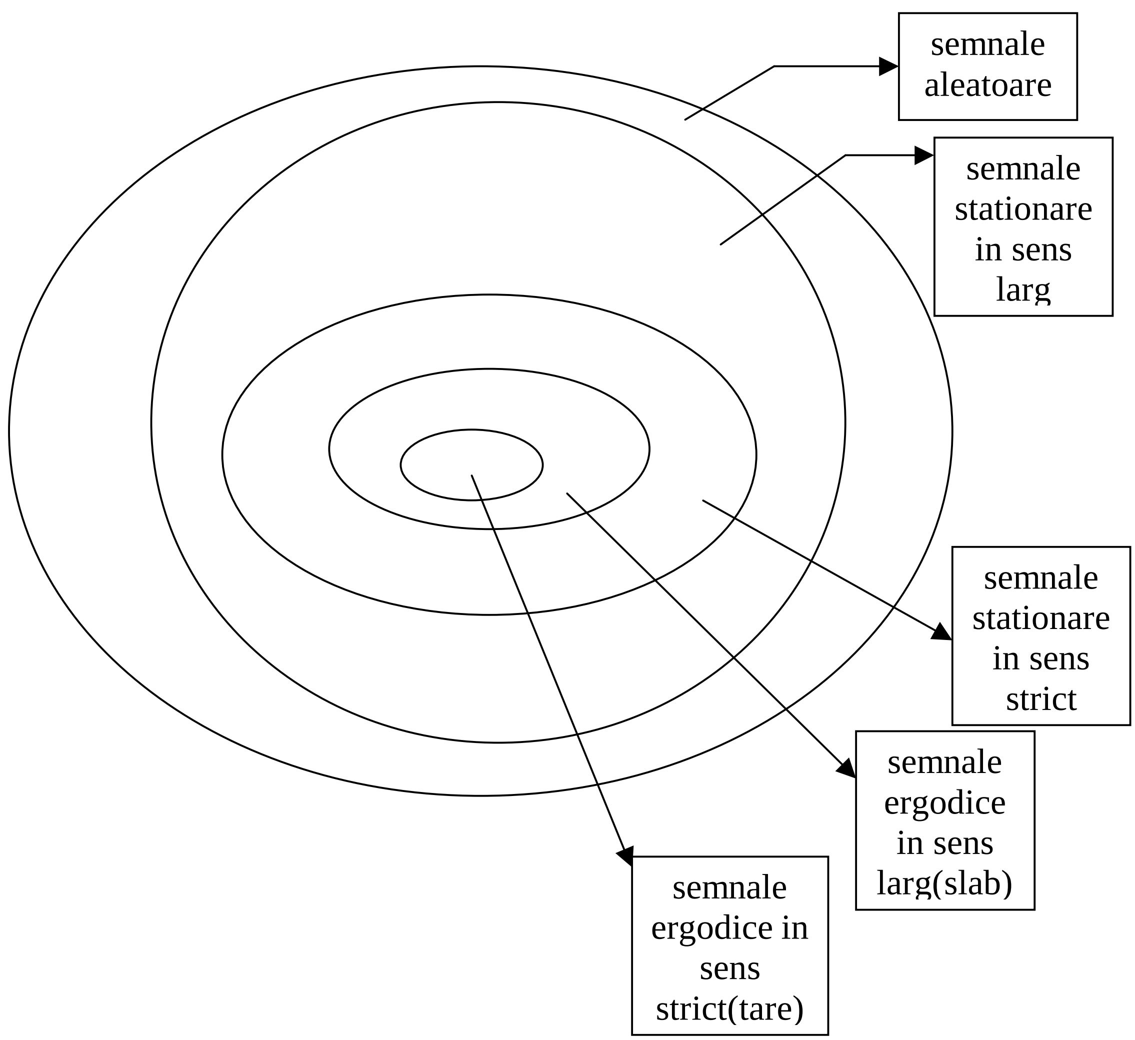



*Fig.4. Ierarhizarea semnalelor aleatoare dupa proprietatile de stationaritate si ergodicitate.*

***Exemplu:***

Fie un semnal aleator sinusoidal cu amplitudinea, frecventa si faza aleatoare:

$X(\eta,t) = A(\eta)sin[\omega(\eta)t + \varphi(\eta)$,

unde $A(\eta),\omega(\eta) si \varphi(\eta)$ sunt variabile aleatoare independente; $A(\eta) si \omega(\eta)$ au aceeaşi funcție de repartiție si iau valorile $A \geq 0$ si, respectiv, $\omega \geq 0$.

In schimb,$\varphi(\eta)$ are o repartiție uniforma, $f(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}$, in intervalul $[0,2\pi]$.

Realizările particulare (traiectoriile) semnalului aleator dat sunt semnale sinusoidale uzuale (fig.5).

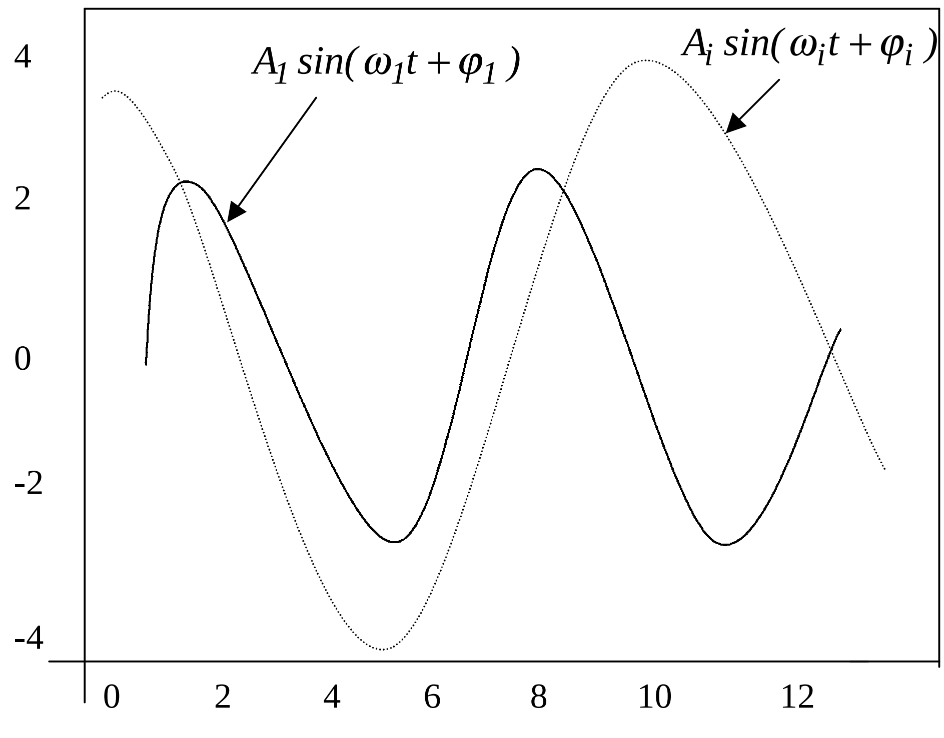



*Fig.5. Realizari particulare sinusoidale ale unui semnal aleator cu amplitudinea, frecventa si faza aleatoare.*

a) Acest semnal este staționar deoarece are repartițiile, respectiv densitatile de probabilitate, invariante la translațiile de timp:

$$f_n\{Asin(\omega t_1 + \omega\tau + \varphi),...,Asin(\omega t_n + \omega\tau + \varphi)\} =$$

$$= f_n\{Asin(\omega t_1 + \varphi),...,Asin(\omega t_n + \varphi)\}$$

Daca se noteaza:

$\psi = \varphi + \alpha\tau,$

$\hat{\psi} = \psi + 2\pi k, \quad k = int\,reg\,,$

atunci ramane de demonstrat egalitatea:

$$f(A,\omega,\hat{\psi}) = f(A,\omega,\varphi),$$

unde s-au definit evenimentele simultane

$$A(\eta) \le A, \omega(\eta) \le \omega, \hat{\psi}(\eta) \le \varphi.$$

Dar $A,\omega,\varphi$ sunt variabile aleatoare independente, de unde rezulta si independenta v.a. $A,\omega,\hat{\psi}$. Egalitatea anterioara se reduce atunci la:

$$f(A)f(\omega)f(\hat{\psi}) = f(A)f(\omega)f(\varphi)$$

sau la: $f(\hat{\psi}) = f(\varphi)$

Dar $\hat{\psi}$ se obtine din $\varphi$ prin translatia cu $\alpha\tau$ si reducere modulo $2\pi$. Deoarece repartitia lui $\varphi$ este uniforma, aceasta nu se modifica prin translatie.

Prin urmare, ultima egalitate este demonstrata.

b) Media statistica liniara este constanta, semnalul fiind stationar; pentru $\tau = -t$, rezulta:

$$m_X^{(1)}(t) = m_X^{(1)}(t+\tau) = m_X^{(1)}(0),$$

$$m_X^{(1)}(0) = m_X^{(1)}\{A\sin\varphi\} = m_A^{(1)}\{A\}m_\varphi^{(1)}\{\sin\varphi\} = \overline{A}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0$$

c) Functia de autocovarianta, egala cu functia de autocorelatie deoarece valoarea medie este nula, se calculeaza dupa cum urmeaza:

$$C_{XX}(t,s) = R_{XX}(t,s) = E[A^2\sin(\omega t+\varphi)\sin(\omega s+\varphi)] =$$

$$= \frac{1}{2}\{E[A^2\cos\omega(t-s)] - E[A^2\cos(\omega t+\omega s+2\varphi)]\}$$

Notand densitatea de probabilitate a lui $\omega$ prin $f(\omega)$, rezulta:

$$E[A^2\cos\omega(t-s) = \overline{A^2}E[\cos\omega(t-s)] = \overline{A^2}\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega(t-s)d\omega$$

Similar, se deduce:

$$E[A^2\cos(\omega t+\omega s+2\varphi) = E[A^2]E[\cos(\omega t+\omega s+2\varphi)] =$$

$$= \overline{A^2}E[\cos(\omega t+\omega s)E[\cos 2\varphi]] - \overline{A^2}E[\sin(\omega t+\omega s)E[\sin 2\varphi]] = 0$$

S-a tinut cont ca $E[\cos 2\varphi] = E[\sin 2\varphi] = 0$

Datorita faptului ca $\varphi$ este v.a. uniform repartizata pe intervalul $[0,2\pi]$.

Rezulta, prin urmare:

$$C_{XX}(t,s) = C_{XX}(t-s) = \frac{1}{2}\overline{A^2}\int_0^{2\pi} f(\omega)\cos\omega(t-s)d\omega,$$

ceea ce confirma stationaritatea semnalului.

In cazul densitatii de probabilitate particulare de forma (distribuții Cauchy):

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}u(\omega),$$

unde $u(\omega)$ este funcția treapta unitate, se obține

$$C_{XX}(t) = C_{XX}(t,0) = R_{XX}(t,0) = \frac{1}{\pi}\overline{A^2}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2}\overline{A^2}e^{-|t|}$$

Funcția de autocorelatie este reprezentata in fig.6 si este tipica pentru un proces aleator staționar.

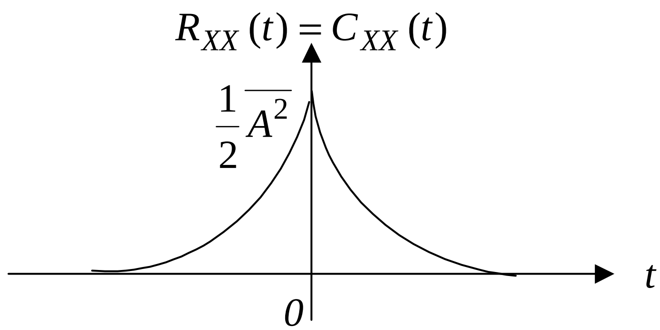



*Fig.6. Funcția de autocorelatie (autocovarianta) a semnalului $X(\eta,t)$sinusoidal cu amplitudine, frecventa si faza aleatoare.*

# 12. Analiza spectrala a semnalelor aleatoare stationare in sens larg

- **Densitatea spectrala de putere**

$$X(\eta,t) \Rightarrow \quad X^{\eta}(t) \Rightarrow \quad X_T^{\eta}(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

proces aleator — realiz. particular. a procesului — realizare trunchiat. a procesului, definita ca mai jos:

$$X_T^{\eta}(t) = \left\{X^{\eta}(t)\right\}, \quad |t| \le T/2$$

$$X_T^{\eta}(t) = 0, \qquad \text{in rest}$$

$X_T^{\eta}(t)$ admite transformata Fourier:

$$X_T^{\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X^{\eta}(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} X^{\eta}(t)\exp(-j\omega t)dt$$

care este tot proces aleator. Energia normata (pe R $=1\,\Omega$) este:

$$E_T^{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[X_T^{\eta}(t)\right]^2 dt \overset{Parseval}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[X_T^{\eta}(\omega)\right]^2 d\omega$$

si este de asemenea proces aleator. Energia medie normata este:

$$\overline{E_T} = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left[X_T^{\eta}(t)\right]^2} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left|X_T^{\eta}(\omega)\right|^2} d\omega$$

Puterea medie normata este:

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left[X_T^{\eta}(t)\right]^2} dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left|X_T^{\eta}(\omega)\right|^2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\overline{\left|X_T^{\eta}(\omega)\right|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q_{XX}(\omega)d\omega \quad \text{unde}$$

$$q_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\overline{\left|X_T^{\eta}(\omega)\right|^2} \quad \text{este densitatea spectrala de putere}$$

- **Teorema Wiener – Hincin**

Teorema: pentru un semnal aleator stationar in sens larg, densitatea spectrala de putere $q_{XX}(\omega)$ este transformata Fourier a functiei de autocorelatie $R_{XX}(\tau)$ .

$$\left.\begin{aligned} q_{XX}(\omega) &= \mathrm{F}\{R_{XX}(\tau)\} \\ R_{XX}(\tau) &= \mathrm{F}^{-1}\{q_{XX}(\omega)\} \end{aligned}\right\rangle \quad q_{XX}(\omega) \underset{\mathrm{F}}{\overset{\mathrm{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} R_{XX}(\tau)$$

$$q_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\left| X_T^{\eta}(\omega) \right|^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{[X_T^{\eta}(\omega)]^* \cdot X_T^{\eta}(\omega)} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} X_T^{\eta}(t_1) \exp(j\omega t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} X_T^{\eta}(t_2) \exp(-j\omega t_2) dt_2} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X_T^{\eta}(t_1) X_T^{\eta}(t_2)} \exp(-j\omega(t_2 - t_1)) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{X_T^{\eta}(t_1) X_T^{\eta}(t_2)} \exp(-j\omega(t_2 - t_1)) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t_1, t_2) \exp(-j\omega(t_2 - t_1)) dt_1 dt_2$$

Daca semnalul este stationar in sens larg, $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1)$

Daca se noteaza $\varphi(t_2 - t_1) = R_{XX}(t_2 - t_1) \exp(-j\omega(t_2 - t_1))$ rezulta

$$q_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t_2 - t_1) dt_2 dt_1$$

Cu schimbarea de variabila $t_2 - t_1 = \tau$,

$$q_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \varphi(\tau) \left[T - |\tau|\right] d\tau = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} R_{XX}(\tau) \exp(-j\omega\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \mathrm{F}\{R_{XX}(\tau)\}$$

**Densitatea spectrala de putere de interactiune (mutuala)**.

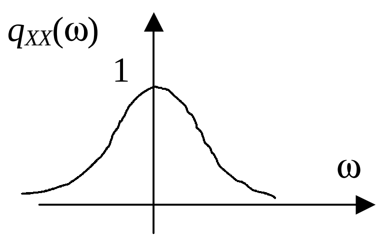
$$\begin{array}{lcc} & X(\eta, t) & Y(\eta, t) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Fie doua semnale aleatoare:} & X_T^{\eta}(t) & Y_T^{\eta}(t) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & X_T^{\eta}(\omega) & Y_T^{\eta}(\omega) \end{array}$$

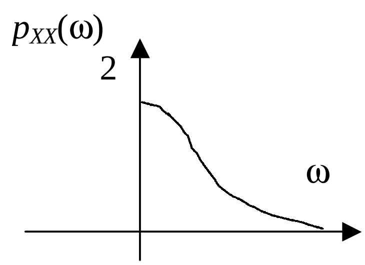
$$q_{XY}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\{\frac{1}{T}[X_T^{\eta}(\omega)]^* \cdot Y_T^{\eta}(\omega)\} = \mathrm{F}\{R_{XY}(\tau)\}$$

$$q_{YX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\{\frac{1}{T}X_T^{\eta}(\omega)\cdot[Y_T^{\eta}(\omega)]^*\} = \mathrm{F}\{R_{YX}(\tau)\}$$

- **Proprietatile densitatii spectrale de putere**

1. $q_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\overline{|X_T(\omega)|^2} > 0, \quad \forall\omega:$ este o functie pozitiv definita
2. $q_{XX}(\omega) = q_{XX}(-\omega):$ este o functie para
3. $q_{XX}(\omega) =$ este reala pentru $\forall\omega$
4. $P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)d\omega$ este puterea medie a semnalului




$p_{XX}(\omega)$ este densitatea spectrala de putere pentru $\omega > 0$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} p_{XX}(\omega)d\omega$$

$$p_{XX}(\omega) = 2q_{XX}(\omega)\cdot U(\omega)$$

$$U(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

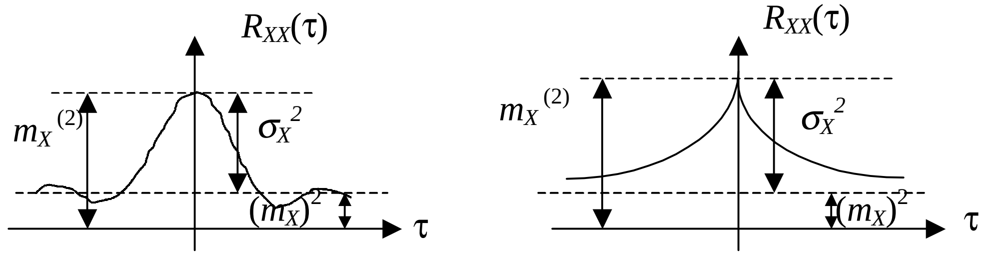
- **Proprietatile densitatii spectrale de putere de interactiune si ale functiilor de intercorelatie**

$$q_{XY}(\omega) = q_{YX}(-\omega)$$

$$q_{XY}(\omega) = [q_{XY}(-\omega)]^*$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

- **Proprietatile functiei de autocorelatie**




$$R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) = R_{XX}(\tau) = E\{X(\eta,t_1)\cdot X(\eta,t_2)\}$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega$$

1. $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau) = E\{X(\eta,t_1)\}\cdot E\{X(\eta,t_2)\} = (m_X)^2$

2. $R_{XX}(0) = m_X^{(2)} = P$

$$\lim_{\tau\to 0} R_{XX}(\tau) = E\{X(\eta,t)\cdot X(\eta,t\} = E\left\{X^2(\eta,t)\right\} = m_X^{(2)}$$

$$\lim_{\tau\to 0} R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)d\omega = P$$

3. $\sigma_X^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 = R_{XX}(0) - \lim\limits_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau)$

4. $R_{XX}(0) \geq R_{XX}(\tau) \qquad \forall\tau:$ fctia de autocorelatie este maxima in 0

$$\overline{[X(\eta,t) - X(\eta,t+\tau)]^2} \geq 0$$

$$\overline{X^2(\eta,t) + X^2(\eta,t+\tau) - 2X(\eta,t)X(\eta,t+\tau)} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2X^2(\eta,t) - 2\overline{X(\eta,t)X(\eta,t+\tau)} \geq 0$$

$$\Rightarrow R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau) \geq 0$$

$$\Rightarrow R_{XX}(0) \geq R_{XX}(\tau), \quad \forall\tau$$

5. $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ fctia de autocorelatie este para

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)\cos(\omega\tau)d\tau$$

6. functia de autocorelatie a unui semnal periodic este un semnal periodic de aceeasi perioada $T_0 = 2\pi/\omega_0$

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n\omega_0)\exp(jn\omega_0 t)$$

$$P \overset{Parseval}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C(n\omega_0)\right|^2$$

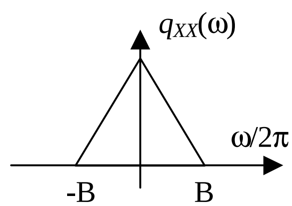
$$\Rightarrow q_{XX}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C(n\omega_0)\right|^2 \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{un spectru de linii}$$

$$\Rightarrow R_{XX}(\tau) = \mathrm{F}^{-1}\{q_{XX}(\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C(n\omega_0)\right|^2 \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

- **Banda de frecvente a semnalelor aleatoare**

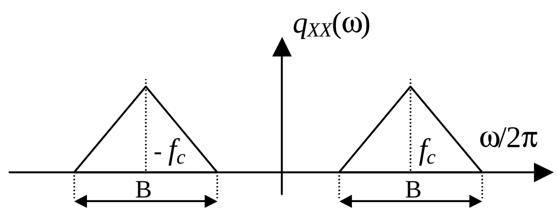
a) Semnale aleatoare trece-jos, al caror spectru se intinde intre 0 si frecventa maxima $f_{max}$ care si determina largimea de banda $B$ a acestor semnale: $B = f_{max}$.

*Exemple*: semnale in banda de baza:




- Sunet:
  - de calitate telefonica, avand $f_{max}$= 3,4 kHz
  - de calitate radio, avand $f_{max}$=7 kHz
  - de inalta fidelitate (Hi-Fi), avand $f_{max}$=20 kHz
- Imagine:
  - alb – negru, avand $f_{max}$= 5,5 MHz
  - color, avand $f_{max}$= 7,5 MHz
- Date: B = 0,7 $f_T$ , unde $f_T$ este frecventa de tact

b) Semnale aleatoare trece banda care ocupa o banda de frecvente B in jurul unei frecvente centrale $f_c$

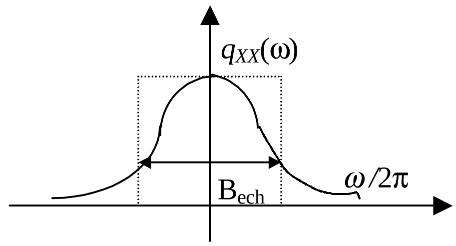



*Exemple*: semnale modulate in amplitudine, semnale esantionate

c) Semnale aleatoare cu banda de frecvente echivalenta

$$2\pi B_{ech} \cdot q_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega) d\omega$$

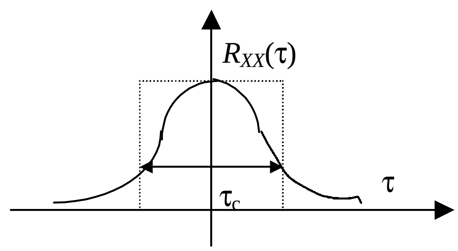
$$B_{ech} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega) d\omega}{q_{XX}(0)}$$




- **Timp de corelatie $\tau_c$**

$$\tau_c \cdot R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) d\tau$$

$$\tau_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) d\tau}{R_{XX}(0)}$$




Daca $R_{XX}(\tau) = \mathrm{F}^{-1}(q_{XX}(\omega))$

atunci

$$\tau_c = \frac{q_{XX}(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi B_{ech}}$$

- **Functia de coerenta** a doua semnale aleatoare X(η, t) si Y(η,t) poate preciza gradul de dependenta intre procese:

  $$\rho_{XY}^2(\omega) = \frac{|q_{XY}(\omega)|^2}{q_{XX}(\omega) \cdot q_{YY}(\omega)}$$

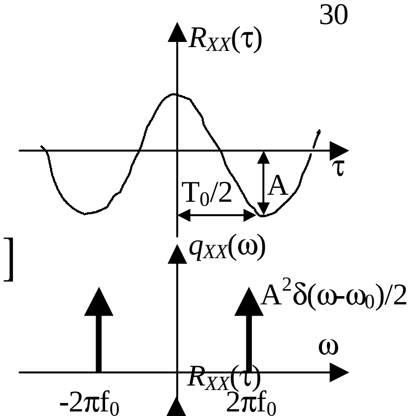
  pentru $\rho_{XY}^2(\omega_0) = 0$ semnalele sunt incoerente la frecventa $\omega_0$

  pentru $\rho_{XY}^2(\omega_0) = 1$ semnalele sunt coerente la frecventa $\omega_0$

## 13. Exemple de funcții de autocorelație

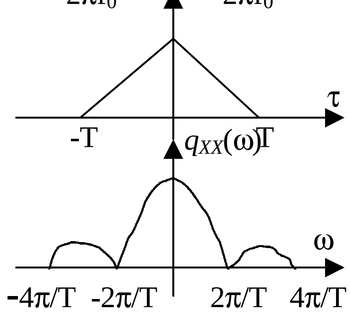
a) $R_{XX}(\tau) = A\cos\omega_0\tau$

$$q_{XX}(\omega) = \frac{A}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$



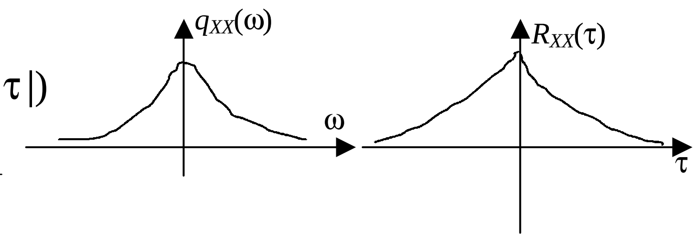

b) $R_{XX}(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau|/T, & \text{pentru } |\tau|<T \\ 0, & \text{pentru rest} \end{cases}$

$$q_{XX}(\omega) = T\cdot\left(\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2}\right)^2$$



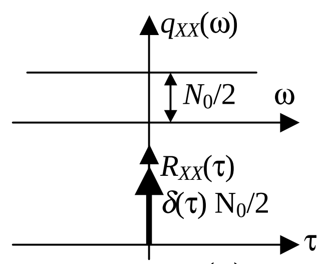

c) $R_{XX}(\tau) = A\exp(-\alpha\,|\,\tau\,|)$

$$q_{XX}(\omega) = \frac{2A\alpha}{\alpha^2+(\omega)^2}$$



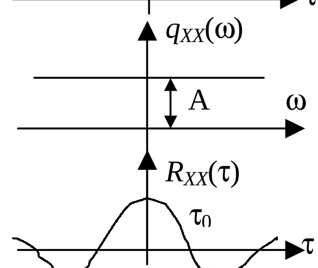

d) $q_{XX}(\omega) = \frac{N_0}{2}$ $\quad\forall\omega$ real $\qquad B_{ech}\to\infty$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad\qquad \tau_c\to 0$$



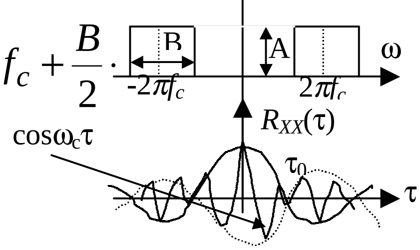

e) $q_{XX}(\omega) = A \qquad \forall|\omega|\le\omega_0 \quad B_{ech} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A\omega_0}{\pi}\operatorname{sinc}\omega_0\tau \qquad \tau_c = \tau_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$$




f) $q_{XX}(\omega) = A \qquad \forall\ \mp f_c - \frac{B}{2} \le \frac{\omega}{2\pi} \le \mp f_c + \frac{B}{2}$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{B}{2\pi}\cdot A\operatorname{sinc}\frac{B\tau}{2}\cdot\cos 2\pi f_c\tau$$



## 14. Aplicații la funcția de corelație

a) Detectia semnalelor slabe, acoperite de perturbatii

Fie un semnal aleator

$$\begin{array}{ccccc} X(\eta,t) & = & S(\eta,t)+ & & N(\eta,t) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{semnal receptionat} & & \text{semnal util} & & \text{perturbatie} \end{array}$$

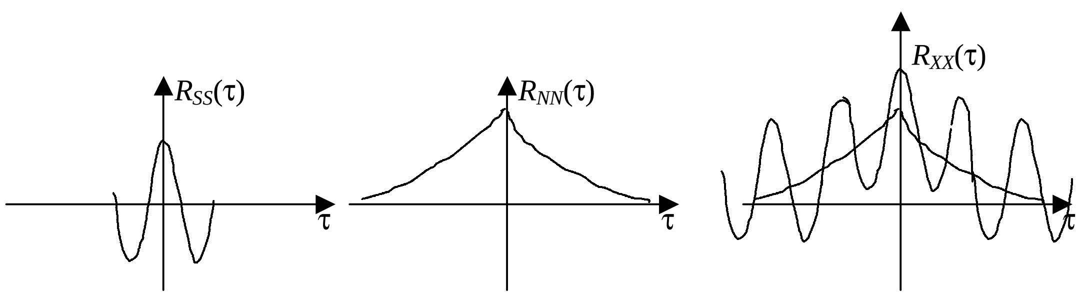
$S(\eta,t)$ si $N(\eta,t)$, fiind produse de surse diferite, sunt independente statistic, deci sunt decorelate si daca $E\{N(\eta,t)\}=0$, sunt si ortogonale:

$R_{SN}(\tau)=R_{NS}(\tau)=0$ de unde:

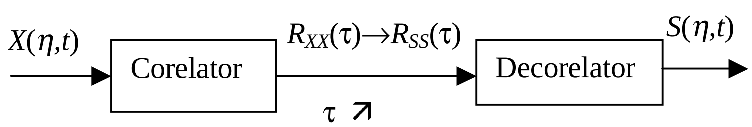
$$R_{XX}(\tau)=E\{X(\eta,t)\cdot X(\eta,t+\tau)\}=$$

$$E\{[S(\eta,t)+N(\eta,t)]\cdot[S(\eta,t+\tau)+N(\eta,t+\tau)]\}=$$

$$R_{SS}(\tau)+R_{SN}(\tau)+R_{NS}(\tau)+R_{NN}(\tau)=R_{SS}(\tau)+R_{NN}(\tau)$$




$$\lim_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau)=R_{SS}(\tau)$$

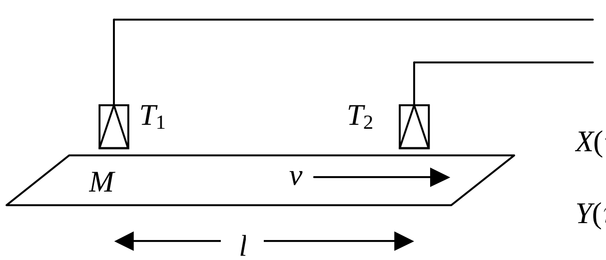


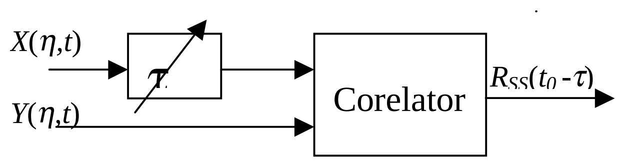

b) Masurarea vitezelor de deplasare

Exemplu: masurarea vitezei $v$ a unui mediu mobil $M$ fata de doua traductoare fixe $T_1$, $T_2$, situate la o distanta cunoscuta $l$ unul de altul.

$$X(\eta,t)=S(\eta,t)+N_1(\eta,t)$$

$$Y(\eta,t)=S(\eta,t-t_0)+N_2(\eta,t)$$



Functionare: se regleaza $\tau$ pana cand $R_{SS}(t_0 - \tau)$ este maxim. Atunci $t_0 - \tau = 0$ sau $t_0 = \tau = l/v \Rightarrow v = l/\tau$. Se pot masura astfel viteze de deplasare ale laminatelor, vehicolelor, etc.

c) Determinarea continuitatii unui semnal aleator

Semnalul aleator stationar in sens larg $X(\eta, t)$ este continuu, in sensul mediei patratice, daca :

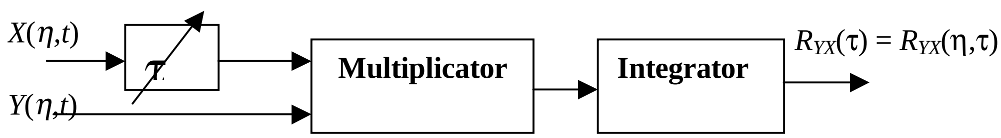
$$\lim_{\tau\to 0} \overline{[X(\eta,t+\tau) - X(\eta,t)]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to 0} \left[\overline{X^2(\eta,t+\tau) + X^2(\eta,t) - 2X(\eta,t+\tau)\cdot X(\eta,t)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to 0} [2R_{XX}(0) - 2R_{XX}(\tau)] = 0 \Rightarrow \lim_{\tau\to 0} [R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau)] = 0$$

deci daca functia sa de autocorelatie este continua in origine.

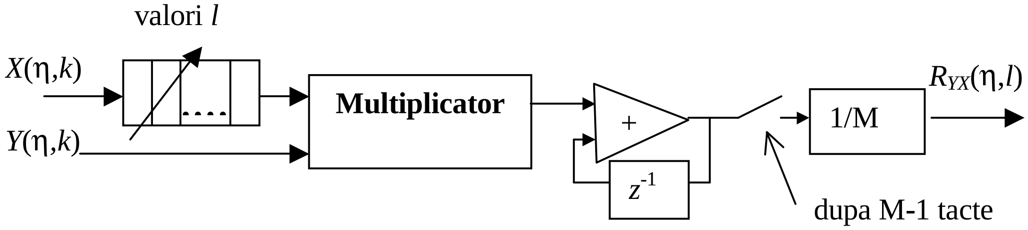
Obs.: structura generala a unui corelator, pentru semnale analogice ergodice, este data in fig. de mai jos:




unde $R_{YX}(\eta,\tau) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} X(\eta,t+\tau)Y(\eta,t)\,dt$

Pentru semnale digitale

$$R_{YX}(\eta, l) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(\eta,k+l)Y(\eta,k)$$

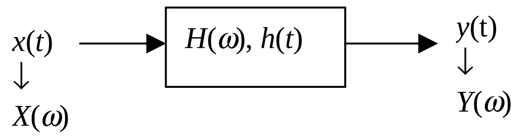


# 15. Prelucrarea liniara a semnalelor aleatoare (filtrare)

- **Notiuni fundamentale**

Se considera ca semnalele aleatoare $x(t) = X_\eta(t) = X^\eta(t)$ trec prin sisteme liniare, invariante in timp si cauzale (SLITC), la care functia pondere respecta relatia: $h(t) = 0, \quad t<0$

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = [x * h](t)$$

$$q_{YY}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|Y_T(\omega)|^2}}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|X_T(\omega)\cdot H(\omega)|^2}}{T} = |H(\omega)|^2 \lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|X_T(\omega)|^2}}{T} =$$

$$= |H(\omega)|^2\cdot q_{XX}(\omega) = H(\omega)H^*(\omega)\cdot q_{XX}(\omega)$$

$$E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\{E[x(t-\tau)]\}h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} m_X(t-\tau)h(\tau)d\tau =$$

$$= m_X\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_X\cdot H(0)$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = E\{y(t_1)\cdot y(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1\cdot x(t_2-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

$$R_{YY}(t_1-t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1-\tau_1-t_2+\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

$$\begin{cases} R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \\ q_{YY}(\omega) = q_{XX}(\omega)\cdot H(\omega)H^*(\omega)\end{cases} \quad \mathrm{F}\,[R_{YY}(\tau)] = q_{YY}(\omega);\ \mathrm{F}^{-1}[q_{YY}(\omega)] = R_{YY}(\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{q_{YY}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)\cdot|H(\omega)|^2\exp(j\omega\tau)d\omega$$

$$E\{y^2(t)\} = R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_{XX}(\omega)\cdot|H(\omega)|^2 d\omega$$

$$q_{XY}(\omega) = q_{XX}(\omega)\cdot H(\omega) \qquad \Rightarrow R_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

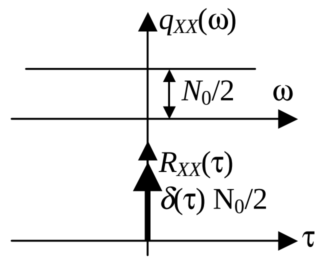
$$q_{YX}(\omega) = q_{XX}(\omega)\cdot H^*(\omega) \qquad \Rightarrow R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$q_{YY}(\omega) = q_{YX}(\omega)\cdot H(\omega) = q_{XY}(\omega)\cdot H^*(\omega) \Rightarrow R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

$$q_{XX}(\omega)\cdot H(\omega)H^*(\omega) = q_{YY}(\omega)$$

- Trecerea zgomotului alb prin sisteme liniare

Pentru zgomot alb:




Pentru zg. alb

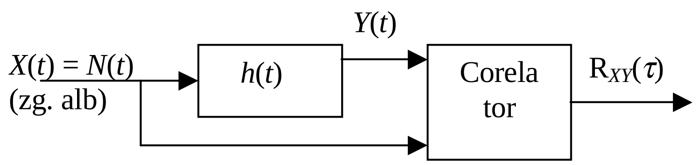
$$\begin{cases} q_{XX}(\omega) = \dfrac{N_0}{2}, \quad \forall \omega \in \Re \\ R_{XX}(\tau) = \dfrac{N_0}{2}\,\delta(\tau) \\ m_X = 0 \\ \text{coeficientul de autocorelatie este:} \\ \rho_{XX}(\tau) = \dfrac{R_{XX}(\tau)}{R_{XX}(0)} = 0 \end{cases}$$

Pentru semnalul de la iesire:

$$\begin{cases} q_{YY}(\omega) = \dfrac{N_0}{2}\cdot A^2(\omega) \\ R_{YY}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} q_{YY}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega = \dfrac{N_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \\ m_Y = H(0)\cdot m_X = 0 \\ \text{coeficientul de autocorelatie este:} \\ \rho_{YY}(\tau) = \dfrac{R_{YY}(\tau)}{R_{YY}(0)} = \dfrac{\dfrac{N_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega}{\dfrac{N_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega} \neq 0 \end{cases}$$

Obs.: orice sistem liniar produce un semnal de iesire cu un grad de corelare mai mare decat gradul de corelare al semnalului de intrare.

- Determinarea lui $h(t)$ pentru SLITC, prin metoda de autocorelatie




Pentru zgomot alb la intrare:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau), \quad \forall\omega \in \Re$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_{XX}(\tau - u) du = \frac{N_0}{2} h(\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \frac{N_0}{2} \delta(\tau - u) du = \frac{N_0}{2} h(\tau)$$

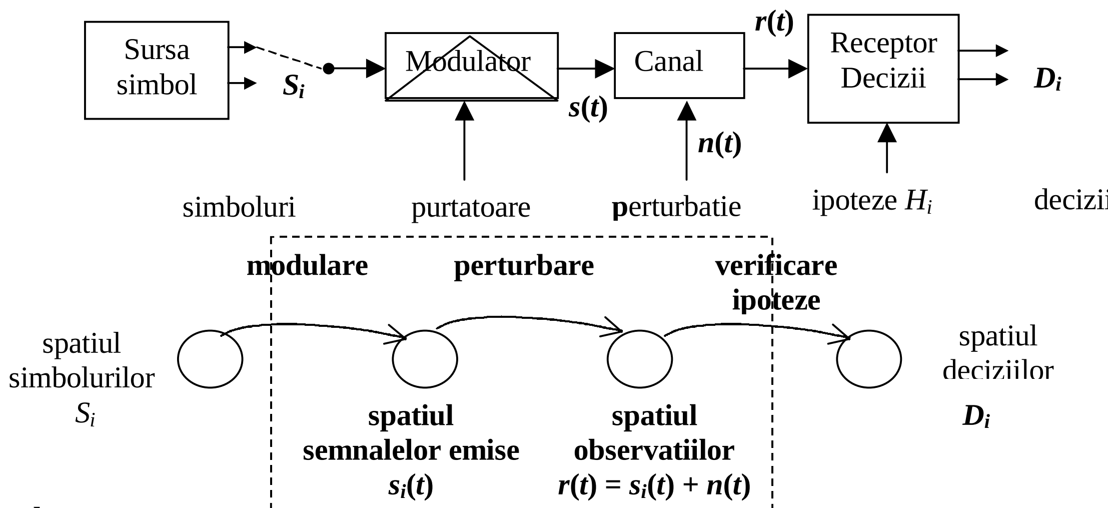
$$\Rightarrow h(\tau) = \frac{2}{N_0} \cdot R_{XY}(\tau)$$

unde $R_{XY}(\tau)$ se obtine cu montajul de mai sus

# Detectia semnalelor

Detectia semnalelor presupune determinarea prezentei sau absentei unui semnal cu semnificatie (exemple: ecoul in radar sau in sonar, la transmisii de date prezenta sau absenta unor simboluri dintr-un alfabet finit si cunoscut ).

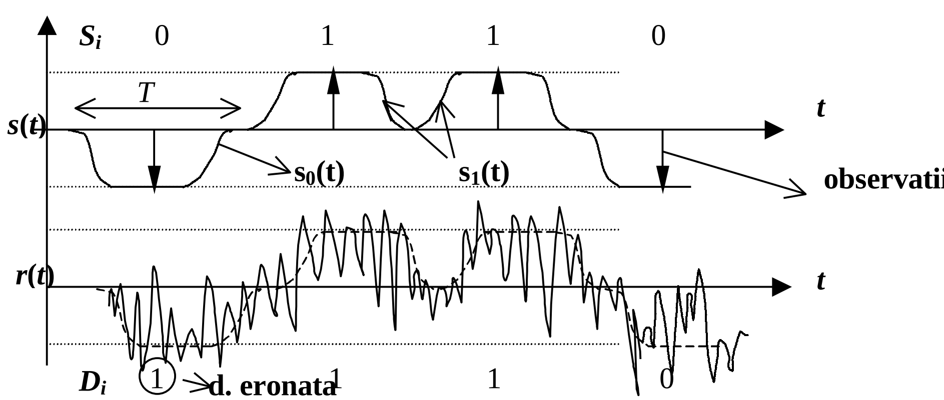
**1.** Modelul sistemelor de detectie a semnalelor




Obs.:

- la receptie se verifica toate ipotezele relative la simbolurile $S_i$ si daca ipoteza $H_i$ este adevarata se ia decizia $D_i$ ca semnalul receptionat r(t) corespunde simbolului $S_i$.
- ipotezele pot fi simple ($S_i \Leftrightarrow s_i(t)$ ca punct in spatiul semnalelor) sau compuse ($S_i \Leftrightarrow s_i(t)$ ca domeniu in spatiul semnalelor)
- observatiile pot fi discrete (esantioane ale r(t)) sau continue (pentru intregul semnal r(t)).

**2.** Detectie binara (i = 0,1) cu observatii discrete (o singura observatie pe simbol)



In detectia binara avem doua simboluri ($S_0$ si $S_1$) si doua ipoteze ($H_0$ si $H_1$):

$H_0$: a fost transmis 0 ($S_0$)

$H_1$: a fost transmis 1 ($S_1$)

Se urmareste gasirea unui criteriu de stabilire a ipotezei corecte, pe baza unei singure observatii asupra R. Se presupun cunoscute densitatile de probabilitate ale R in cele doua ipoteze: $f_{R|H_0}(r\,|\,H_0)$ şi $f_{R|H_1}(r\,|\,H_1)$. Dacă $P(H_i\,|\,r)$ cu $i = 0{,}1$ reprezinta probabilitatea ipotezei $H_i$ la receptia r:

$$\text{se alege } H_0 \text{ dacă} \quad P(H_0\,|\,r) > P(H_1\,|\,r)$$

$$\text{se alege } H_1 \text{ dacă} \quad P(H_1\,|\,r) > P(H_0\,|\,r) \quad \text{sau, concis:}$$

$$\frac{P(H_1\,|\,r)}{P(H_0\,|\,r)} \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} 1$$

- Criteriul de decizie MAP (maximum a posteriori probability). Criteriul dedecizie duce la partitia spatiului observatiilor in doua regiuni $R_0$ si $R_1$ si se alege $H_0$ daca r este continut in $R_0$ si $H_1$ daca $r$ este continut in $R_1$. Cu regula Bayes se poate scrie:

$$P(H_i \mid r) = \frac{f_{R|H_1}(r \mid H_i)P(H_i)}{f_R(r)}$$ şi atunci criteriul de

mai sus se rescrie :

$$\frac{f_{R|H_1}(r \mid H_1)P(H_1)}{f_{R|H_0}(r \mid H_0)P(H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$ sau :

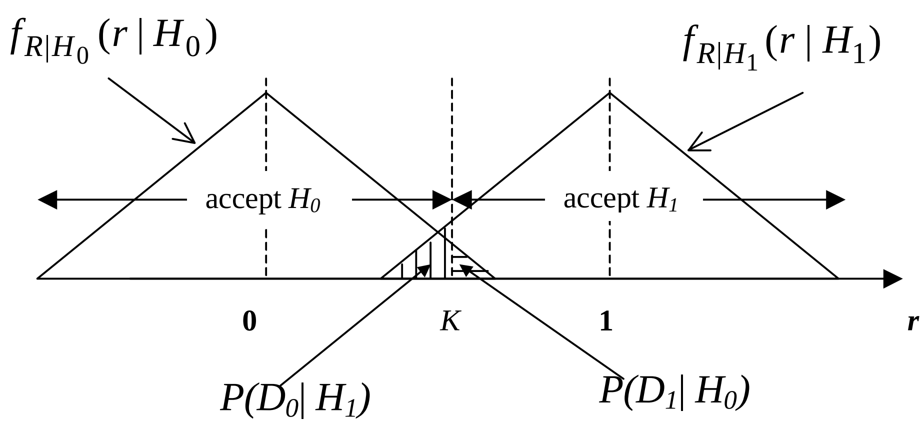
$$\frac{f_{R|H_1}(r \mid H_1)}{f_{R|H_0}(r \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$ sau :

$$\Lambda(r) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

daca se notează raportul de plauzibilitate $\Lambda(r)$

si pragul testului $K$ cu :

$$\Lambda(r) = \frac{f_{R|H_1}(r \mid H_1)}{f_{R|H_0}(r \mid H_0)} \qquad K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$




Din cauza zgomotului se pot lua decizii eronate. Pot fi urmatoarele situatii:

a) se decide $D_0$ cand $H_0$ este adevarat
b) se decide $D_1$ cand $H_1$ este adevarat
c) se decide $D_0$ cand $H_1$ este adevarat
d) se decide $D_1$ cand $H_0$ este adevarat

primele doua decizii sunt corecte iar ultimele doua sunt eronate. Eroarea de tip c) se numeste eroare de pierdere (miss) si are probabilitatea $P_M = P(D_0| H_1)$. Eroarea de tip d) se numeste alarma falsa (false alarm) si are probabilitatea $P_F = P(D_1| H_0)$. Ca masura a performantei sistemului se alege probabilitatea medie de eroare :

$$P_e = P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1)$$

- Criteriul de decizie Bayes

Acest criteriutine cont de “costurile” deciziilor in procesul de detectie binara. In acest proces apar perechi ($D_i$, $H_j$). Fiecarei perechi i se poate asocia un cost $C_{ij}$. Criteriul de decizie Bayes minimizeza costul mediu. Costul mediu se defineste cu relatia:

$$\overline{C} = \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=0,1}}\sum C_{ij} P(D_i , H_j) = \sum_{\substack{i=0,1 \\ j=0,1}}\sum C_{ij} P(H_j)P(D_i | H_j)$$

$$\begin{aligned}
\overline{C} &= C_{00}P(D_0 | H_0)P(H_0) + C_{10}P(D_1 | H_0)P(H_0) + \\
&+ C_{01}P(D_0 | H_1)P(H_1) + C_{11}P(D_1 | H_1)P(H_1) = \\
&= C_{00}P(H_0)\int_{R_0} f_{R|H_0}(r | H_0)dr + C_{10}P(H_0)\int_{R_1} f_{R|H_0}(r | H_0)dr + \\
&+ C_{01}P(H_1)\int_{R_0} f_{R|H_1}(r | H_1)dr + C_{11}P(H_1)\int_{R_1} f_{R|H_1}(r | H_1)dr
\end{aligned}$$

se face prezumția rezonabilă că decizia incorectă costă mai mult decât cea corecta :

$C_{10} > C_{00}$ si $C_{01} > C_{11}$

si se face uz de faptul ca $R_1 \cup R_0 = (-\infty, \infty)$ si $R_1 \cap R_0 = \phi$ si atunci :

$$\overline{C} = C_{10}P(H_0) + C_{11}P(H_1) + \int_{R_0} \{[P(H_1)(C_{01} - C_{11}) f_{R|H_1}(r | H_1)] - \\ [P(H_0)(C_{10} - C_{00}) f_{R|H_0}(r | H_0)]\}dr$$

Cea mai mica valoare a costului mediu se obtine cand integrandul ecuatiei de mai sus este negativ pentru toate valorile lui $r \in R_0$. Se poate accepta ipoteza $H_0$ daca:

$$P(H_1)(C_{01}-C_{11})\,f_{R|H_1}(r\,|\,H_1) < P(H_0)(C_{10}-C_{00})\,f_{R|H_0}(r\,|\,H_0)$$

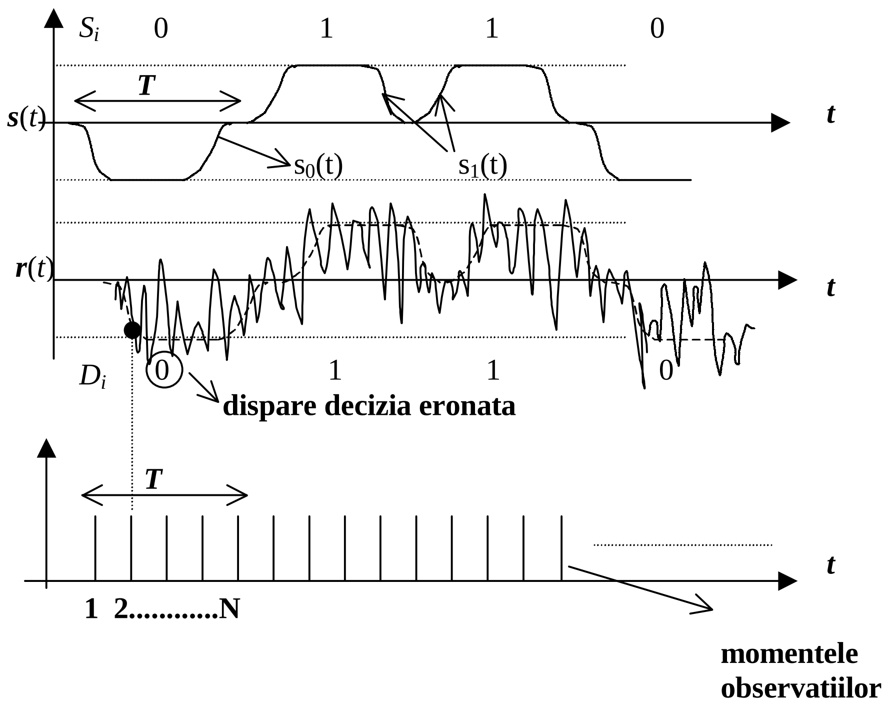
sau concis:

$$\Lambda(r)=\frac{f_{R|H_1}(r\,|\,H_1)}{f_{R|H_0}(r\,|\,H_0)}\ \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}=K$$

Se vede ca pentru $C_{10}$ - $C_{00}$ = $C_{01}$ - $C_{11}$, criteriul Bayes devine criteriul MAP.

Se poate arata ca daca: $C_{00}$ = $C_{11}$= 0 si $C_{10}$ = $C_{01}$ =1, atunci criteriul Bayes minimizeaza probabilitatea deciziilor eronate.

## 3. Detectia binara ($i$ = 0, 1) cu observatii multiple pe simbol (daca $r > 0 \Rightarrow 1$, daca $r < 0 \Rightarrow 0$)

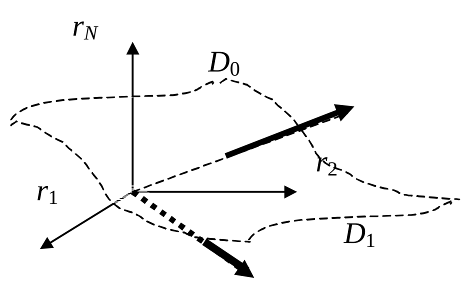



Daca receptorul observa $N$ esantioane ale $r(t)$ in intervalul (0, $T$), notate $r_1, r_2, ..., r_N$, se defineste vectorul

$\vec{r} = [r_1, r_2, ..., r_N]^T$ ca si densitatile de probabilitate :

$$f(r_1, r_2, ..., r_N / H_0) = f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} / H_0)$$

$$f(r_1, r_2, ..., r_N / H_1) = f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} / H_1)$$




Se urmareste gasirea unor decizii corecte, pe baza mai multor observatii asupra $\vec{R}$. Se presupun cunoscute densitatile de probabilitate ale $\vec{R}$ in cele doua ipoteze:

$f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)$ şi $f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)$.

Criteriile de decizie deduse pentru o singura observatie se pot rescrie pentru $N$ observatii, dupa cum urmeaza:

$$\Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

unde pentru MAP:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} \qquad K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

pentru plauzibilitate maxima:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} \qquad K = 1$$

pentru Bayes:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} \qquad K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \cdot \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}}$$

pentru Neyman-Pearson:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} \qquad K \text{ se alege din conditia } P_F \le \alpha$$

Daca se noteaza cu
$f_{R_i|H_0}(r_i \mid H_0)$ si $f_{R_i|H_0}(r_i \mid H_0)$ densitatile de probabilitate ale observatiei $r_i$ in ipotezele $H_0, H_1$ si daca observatiile sunt statistic independente, avem:

$$f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r}|H_0) = \prod_{i=1}^{N} f_{R_i|H_0}(r_i \mid H_0)$$

$$f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r}|H_1) = \prod_{i=1}^{N} f_{R_i|H_1}(r_i \mid H_1)$$

*Exemplu*: detectia a doua semnale de forma cunoscuta

$$s_0(t) = a_0 s(t) \quad 0 \le t \le T$$

$$s_1(t) = a_1 s(t) \quad 0 \le t \le T$$

$$r(t) = \vec{a}s(t) + n(t) \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_0 \Leftarrow H_0 \\ a_1 \Leftarrow H_1 \end{cases}$$

Se presupune ca zgomotul este gaussian, de valoare medie nula si de varianță $\sigma^2$.

Densitata de probabilitate pentru un esantion de semnal receptionat este:

$$f_{R_i|H_0}(r_i \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_0 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_0$$

$$f_{R_i|H_1}(r_i \mid H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_1 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_1$$

densitatea de probabilitate pentru vectorul receptionat este:

$$f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_0 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_0$$

$$f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(r_i - a_1 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_1$$

sau:

$$f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a_0 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_0$$

$$f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(r_i - a_1 s_i)^2\right] \quad \Leftarrow H_1$$

raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left[(r_i - a_1 s_i)^2 - (r_i - a_0 s_i)^2\right]\right\}$$

$$\ln\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left[(r_i - a_1 s_i)^2 - (r_i - a_0 s_i)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[(a_0 - a_1)\left(-2\sum_{i=1}^{N} r_i s_i + (a_0 + a_1)\sum_{i=1}^{N} s_i^2\right)\right]$$

Criteriul plauzibilitatii maxime se poate scrie:

$$\ln\Lambda(\vec{r}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln K = \ln 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_i s_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_0 + a_1}{2} \sum_{i=1}^{N} s_i^2$$

pentru $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ s_i = s$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s}{2} \quad \text{si daca } N = 1 \quad r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s}{2}$$

pentru $a_0 = -1,\ a_1 = 1,\ s_i = s$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \quad \text{si pentru } N = 1: \quad r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

Probabilitatea de eroare este:

$$P_e = P(D_0, H_1) + P(D_1, H_0) =$$

$$P(H_1)\int_{R_0} f_{\vec{R}|H_1}(r \mid H_1)dr + P(H_0)\int_{R_1} f_{\vec{R}|H_0}(r \mid H_0)dr$$

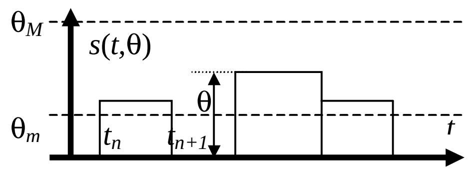
Observatie: Desi problema de detectie pe care ne-am propus sa o solutionam este formulata pentru un spatiu multidimensional, decizia se ia dupa o singura coordonata, care este, pentru cazul general: $\sum_{i=1}^{N} r_i s_i$, iar pentru cazurile particulare mentionate $m_R = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$

Aceasta unica coordonata dupa care se poate lua decizia se numeste "Statistica suficienta".

## 4. Detectie binara cu observatii multiple in ipoteza compusa

In ipoteza compusa, simbolului $S_i$ ii corespunde in spatiul semnalului nu un punct $s_i(t)$ ci un domeniu $\Sigma_i$ .

*Exemplu*: Semnal de amplitudine variabila




$$H_0 \Rightarrow \quad r(t) = s_0(t,\theta) + n(t) = n(t)$$
$$H_1 \Rightarrow \quad r(t) = s_1(t,\theta) + n(t)$$

unde $\theta$ este un parametru care ia valori in domeniul $\Pi = (\theta_m, \theta_M)$

in timp ce semnalul $s_1(t,\theta)$ este cuprins in domeniul $\Sigma_1$

$$P\{\vec{s_1} \in \Sigma_1\} = P\{\theta \in \Pi\}$$

$$f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1) = f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r} \mid \theta)$$

$$f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1) = f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid \vec{s_1} \in \Sigma_1) = f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r} \mid \theta \in \Pi) = \int_\Pi f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r}, \theta) d\theta =$$
$$= \int_\Pi f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r} \mid \theta) f_\Theta(\theta) d\theta$$

Raportul de plauzibilitate este :

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{f_{\vec{R}|H_1}(\vec{r} \mid H_1)}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)} = \frac{\int_\Pi f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r} \mid \theta) f_\Theta(\theta) d\theta}{f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0)}$$

Pentru cazul particular al unui semnal de amplitudine variabila, cu amplitudinile uniform distribuite:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\theta_M - \theta_m}$$

$$f_{\vec{R}|\theta}(\vec{r} \mid \theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \prod_{i=1}^{N} \exp\left( -\frac{(r_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$f_{\vec{R}|H_0}(\vec{r} \mid H_0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \prod_{i=1}^{N} \exp\left( -\frac{(r_i)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{\theta_M - \theta_m} \int\limits_{\theta_m}^{\theta_M} \exp\left( -\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (r_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) d\theta}{\exp\left( -\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^2}{2\sigma^2} \right)}$$ iar pt. $N = 1$:

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{\theta_M - \theta_m} \int\limits_{\theta_m}^{\theta_M} \exp\left( -\frac{(r - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) d\theta}{\exp\left( -\frac{(r)^2}{2\sigma^2} \right)}$$

daca se noteaza :

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left( -\frac{1}{2} u^2 du \right); \quad x = \frac{\theta - r}{\sigma}$ atunci raportul devine :

$$\Lambda(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\theta_M - \theta_m} \exp\left( \frac{n^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \left[ F\left( \frac{\theta_M - r}{\sigma} \right) - F\left( \frac{\theta_m - r}{\sigma} \right) \right]$$

iar daca pragul testului este $K = 1$, atunci testul Bayes este :

$$\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\theta_M - \theta_m} \exp\left( \frac{n^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \left[ F\left( \frac{\theta_M - r}{\sigma} \right) - F\left( \frac{\theta_m - r}{\sigma} \right) \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

**5. Detectia secventiala**

Daca este necesar sa reducem timpul de decizie, se lucreaza cu un numar *m* de observatii variabil, cautandu-se reducerea acestuia.

Pentru vectorul $\overrightarrow{r_m} = (r_1, ..., r_m)$ raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\overrightarrow{r_m}) = \frac{f_{\overrightarrow{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m}|H_1)}{f_{\overrightarrow{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m}|H_0)}$$

Algoritmul de testare este:

a) pentru prima observatie $m = 1$, $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{r_1}$, se calculeaza $\Lambda(\overrightarrow{r_1})$, care se compara cu doua praguri $A, B$ cu $A > B$:

- daca $\Lambda(\overrightarrow{r_1}) \geq A \Rightarrow D_1$
- daca $\Lambda(\overrightarrow{r_1}) \leq B \Rightarrow D_0$
- daca $\mathrm{B} < \Lambda(\overrightarrow{r_1}) < A \Rightarrow$ nu se ia decizie si se trece la la a doua obsevare $\overrightarrow{r_2}$

b) se calculeaza si se testeaza $\Lambda(\overrightarrow{r_2})$; daca din nou nu se ia nici o decizie se calculeaza $\Lambda(\overrightarrow{r_3})$ s. a. m. d. pana cand $\Lambda(\overrightarrow{r_m}) \geq A \Rightarrow D_1$ sau $\Lambda(\overrightarrow{r_1}) \leq B \Rightarrow D_0$

Pentru determinarea $A, B$ se procedeaza astfel:

- daca se ia decizia $D_1$ avem:

$$\Lambda(\overrightarrow{r_m}) = \frac{f_{\overrightarrow{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1)}{f_{\overrightarrow{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0)} \geq A \quad \text{sau} \quad f_{\overrightarrow{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1) \geq A f_{\overrightarrow{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0)$$

- daca se ia decizia $D_0$ avem:

$$\Lambda(\overrightarrow{r_m}) = \frac{f_{\overline{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1)}{f_{\overline{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0)} \le B \quad \text{sau} \quad f_{\overline{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1 \le B f_{\overline{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0)$$

daca $R_1$ cuprinde observatiile $\overrightarrow{r_m}$ carora le corespunde $D_1$ :

$$\int_{R_1} f_{\overline{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1) dR_m \ge A \int_{R_1} f_{\overline{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0) dR_m \quad \text{sau} \quad P_D \ge A P_F$$

de unde :

$$A \le \frac{P_D}{P_F}$$

daca $R_0$ cuprinde observatiile $\overrightarrow{r_m}$ carora le corespunde $D_0$ :

$$\int_{R_0} f_{\overline{R_m}|H_1}(\overrightarrow{r_m} \mid H_1) dR_m \le B \int_{R_0} f_{\overline{R_m}|H_0}(\overrightarrow{r_m} \mid H_0) dR_m \quad \text{sau} \quad P_M \le B(1 - P_F)$$

de unde :

$$B \ge \frac{P_M}{1 - P_F}$$

in cele de mai sus reamintim ca :

$P_D \rightarrow$ probabilitatea de detectie

$P_F \rightarrow$ probabilitatea deciziei eronate, de alarma falsa (prob. deciziei $D_1$ cand sursa a emis $S_0$)

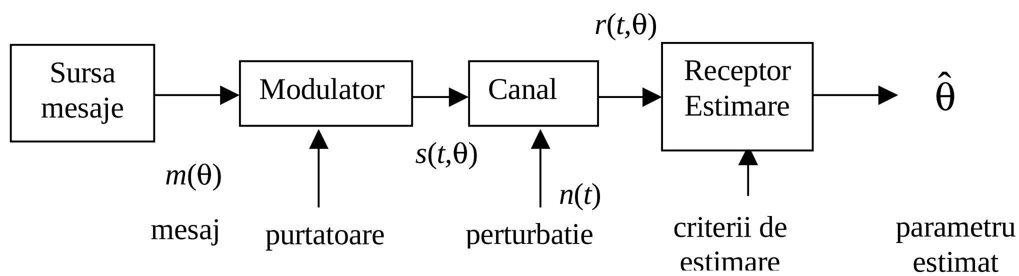
$P_M \rightarrow$ probabilitatea deciziei eronate, de pierderea tintei (prob. deciziei $D_0$ cand sursa a emis $S_1$)

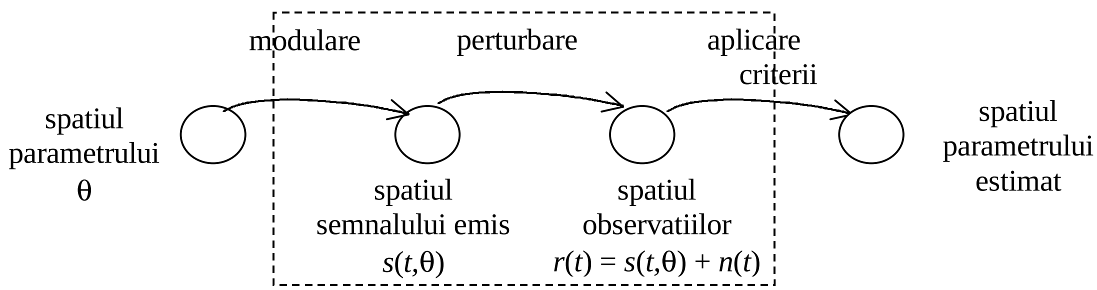
# Estimarea parametrilor semnalului

## 1. Introducere

Prin estimare se determina valoarea estimata $\hat{\theta}$ a unui parametru $\theta$ (purtator de informatie) al semnalului afectat de perturbatie.

Schema bloc care modeleaza procesul de estimare a unui parametru si graful prelucrarii semnalelor sunt date mai jos.




*Exemple de aplicatii*:

- in receptia semnalelor: estimarea intarzierilor, a amplitudinilor de semnal, a deviatiilor de frecventa;
- in sisteme de comunicatii: estimarea functiilor de transfer, a functiilor pondere, a rapoartelor semnal / zgomot in canale de comunicatii;
- in sisteme de masura si comanda la distanta: estimarea marimii comandate (acceleratie, viteza, pozitie, temperatura, debit, etc)
- in prelucrari de semnale: estimarea unor parametri statistici ai semnalului (medii, variante)

Obs.: in aceste aplicatii se estimeaza parametri continui sau discreti, constanti sau variabili in timp; estimarea parametrilor discreti face legatura cu domeniul detectiei semnalelor (deciziei statistice) iar estimarea parametrilor variabili in timp face legatura cu estimarea formei semnalelor. Estimarea se poate face prin observare discreta sau prin observare continua.

## 2. Observarea discreta a unui parametru aleator

Semnalul receptionat este:

$$r(t) = s(t,\theta) + n(t)$$

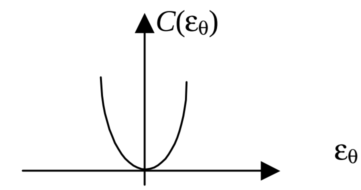
unde $\theta$ este un parametru aleator scalar, continand informatia. In intervalul $0 \le t \le T$ se fac $N$ observatii $r_1, ...., r_N$, constituite in vectorul $\vec{r}$. Se folosesc densitatile de probabilitate $f_{\vec{R}|\Theta}(\vec{r} \mid \theta)$, $f_{\Theta|\vec{R}}(\theta \mid \vec{r})$ si $f_{\Theta}(\theta)$; se determina valoarea estimata $\hat{\theta}(\vec{r})$ a lui $\theta$.

Eroarea estimarii este data de $\varepsilon_\theta = \theta - \hat{\theta}(\vec{r})$. Pentru a evalua eroarea se defineste o functie de cost.

### 2.1 Functii de cost $C(\varepsilon_\theta)$

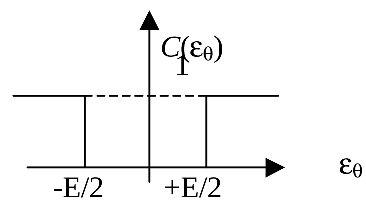
- patratul erorii

$$C(\varepsilon_\theta) = \varepsilon_\theta^{\ 2}$$



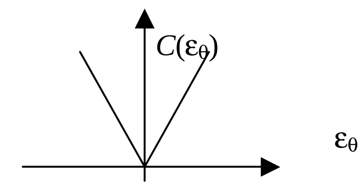

- uniforma:

$$C(\varepsilon_\theta) = \begin{cases} 0 & |\varepsilon_\theta| \le E/2 \\ 1 & |\varepsilon_\theta| \ge E/2 \end{cases}$$




- modulul erorii:

$$C(\varepsilon_\theta) = |\varepsilon_\theta|$$




Valoarea medie a functiei de cost se numeste *risc*.

$$R = E\{C(\varepsilon_\theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \int_\Delta C(\varepsilon_\theta) \cdot f_{\Theta,\vec{R}}(\theta, \vec{r})\, dR$$

$\Delta \Rightarrow$ domeniul in care ia valori $\vec{r}$

Valoarea estimata a parametrului se obtine minimizand riscul.
Se pune riscul sub o forma in care se poate face minimizarea acestuia functie de observatiile efectuate:

$$R = E\{C(\varepsilon_\theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \int_\Delta C(\varepsilon_\theta)\cdot f_{\Theta,\vec{R}}(\theta,\vec{r})dR =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \int_\Delta C(\varepsilon_\theta)\cdot f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})\, f_{\vec{R}}(\vec{r})dR =$$

$$= \int_\Delta f_{\vec{R}}(\vec{r})dR \cdot \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon_\theta)\cdot f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta$$

Minimizarea riscului se face minimizand in raport cu $\hat{\theta}$ integrala definita:

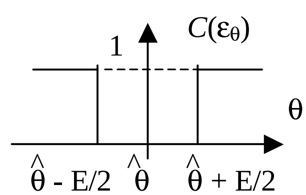
$$I(\hat{\theta},\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon_\theta)\cdot f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} C(\theta-\hat{\theta})\cdot f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I(\hat{\theta},\vec{r}) = 0$$

- pentru patratul erorii : $I(\hat{\theta},\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta-\hat{\theta})^2 \cdot f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I(\hat{\theta},\vec{r}) = 2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta - 2\int_{-\infty}^{\infty} \theta f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta = 0 \text{ sau}$$

$$\hat{\theta}_p = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta \quad \text{deoarece} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Theta/\vec{R}}(\theta/\vec{r})d\theta = 1$$




- pentru functia de cost uniforma:

$$I(\hat{\theta},\vec{r}) = 1 - \int_{\hat{\theta}-E/2}^{\hat{\theta}+E/2} f_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})d\theta = 1 - I_u(\theta,\vec{r}) \approx 1 - Ef_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})$$

este minima pentru $I_u(\theta,\vec{r})$ maxima. Se prefera sa se caute maximul pentru $\ln f_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})$ deoarece $f_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})$ are in general o forma exponentiala; ca urmare :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\Theta(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_{\vec{R}|\Theta}(\vec{r}|\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0$$

daca se are in vedere $\dfrac{f_{\Theta|\vec{R}}(\theta|\vec{r})\cdot f_{\vec{R}}(\vec{r})}{f_\Theta(\theta)} = f_{\vec{R}|\Theta}(\vec{r}|\theta)$

unde $\theta_{MAP}$ este estimatul maximum a posteriori.

- Pentru functia de cost modulul erorii:

$$I(\hat{\theta},\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\theta - \hat{\theta}_M\right| f_{\Theta/\overline{R}}(\theta/\vec{r})d\theta \text{ si pentru minimizarea ei :}$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I(\hat{\theta},\vec{r}) = 0, \text{respectiv :}$$

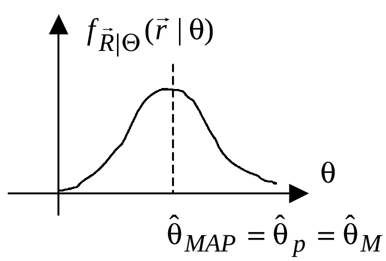
$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{\hat{\theta}_M}^{+\infty} (\theta - \hat{\theta}_M) f_{\Theta/\overline{R}}(\theta/\vec{r})d\theta - \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_M} (\theta - \hat{\theta}_M) f_{\Theta/\overline{R}}(\theta/\vec{r})d\theta = 0$$

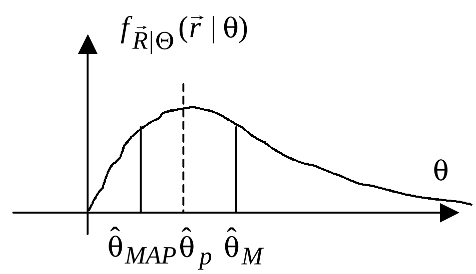
Rezulta pentru calculul estimatului $\hat{\theta}_M$

$$\int_{\hat{\theta}_M}^{+\infty} f_{\Theta/\overline{R}}(\theta/\vec{r})d\theta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_M} f_{\Theta/\overline{R}}(\theta/\vec{r})d\theta$$

$\hat{\theta}_M$ se numeste estimatul de eroare minima.

**Obs**.: O situare a celor trei estimati, pentru densitati de probabilitate conditionate, de forma simetrica si nesimetrica, este data in figurile de mai jos.



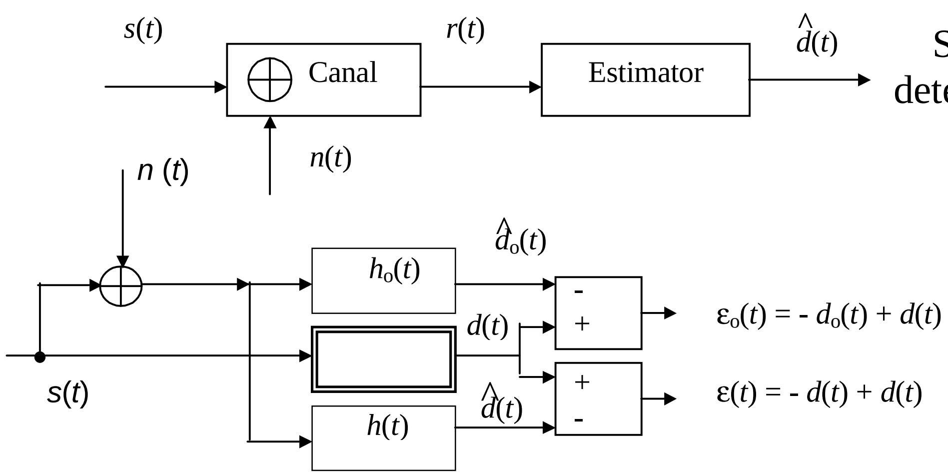
# Estimarea formei semnalului

Ipotezele de lucru:

- estimarea este liniara;
- semnalul receptionat si zgomotul sunt stationare in sens larg;
- criteriul de optim: minimul erorii medii patratice.

## 1. Filtrarea optimala a semnalelor continue. Ecuatia Wiener – Hopf

Ce se urmareste: estimarea formei lui $s(t)$ se face prin prelucrarea liniara a semnalului receptionat $r(t) = s(t) + n(t)$, astfel incat sa se obtina un semnal cat mai apropiat de semnalul dorit $d(t)$ (filtrare optimala in sens Wiener – Kolmogorov).




Se urmareste determinarea functiei pondere a unui filtru liniar $h_o(t)$, a carui iesire, daca la intrare se aplica $r(t)$, aproximeaza cu eroare medie patratica minima, semnalul dorit $d(t)$. In schema de mai sus $h(t)$ corespunde unui filtru neoptimal, care furnizeaza un semnal care aproximeaza semnalul dorit cu eroare medie patratica mai mare ca cea minima. Ar trebui: $\overline{[\varepsilon_o(t)]^2} = \min \overline{[\varepsilon(t)]^2}$

$$\overline{[\varepsilon(t)]^2} = \overline{\left(d(t) - \hat{d}(t)\right)^2}$$

$$\hat{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) r(t-\tau) d\tau = \mathcal{L}[r(t)]$$

$$\overline{[\varepsilon_o(t)]^2} = \overline{\left(d(t) - \hat{d}_o(t)\right)^2}$$

$$\hat{d}_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\tau) r(t-\tau) d\tau = \mathcal{L}_0[r(t)]$$

$$\overline{[\varepsilon_o(t)]^2} = \min \overline{[\varepsilon(t)]^2}$$

$$\overline{[\varepsilon(t)]^2} = \overline{\left(d-\hat{d}\right)^2} = \overline{\left[\left(d-\hat{d}_o\right)-\left(\hat{d}-\hat{d}_o\right)\right]^2} = \overline{[\varepsilon_o(t)]^2} + \delta^2 -$$

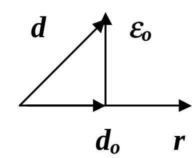
$-2\overline{\left[\left(d-\hat{d}_o\right)\left(\hat{d}-\hat{d}_o\right)\right]}$ unde $\delta = \hat{d}-\hat{d}_o$. Ultimul termen devine:

$$2\overline{\left[\left(d-\hat{d}_o\right)\left(\hat{d}-\hat{d}_o\right)\right]} = 2\overline{\left[d-\mathcal{L}_0\{r(t)\}\right]\left[\mathcal{L}\{r(t)\}-\mathcal{L}_0\{r(t)\}\right]} =$$

$$= 2\overline{\varepsilon_o(t)\mathcal{L}'\{r(t)\}} = 2\overline{\mathcal{L}'\{r(t)\}\varepsilon_o(t)} = 2\overline{\mathcal{L}'\{r(t)\cdot\varepsilon_o(t)\}}$$

Pentru filtru optimal $\varepsilon_o(t)$ si $r(t)$ sunt ortogonale deci au loc relatiile:

$\overline{\varepsilon_o(t)\cdot r(u)} = 0$ si $c_{\varepsilon_o r}(t,u) = 0 \quad \forall t,u$ deci:




$\overline{r\cdot\varepsilon_o(t)} = \overline{\left[d(t)-\hat{d}_o(t)\right]r} = 0$ de unde:

$\overline{d(t)r(u)} = \overline{\hat{d}_o(t)r(u)} \quad \forall t,u$ si deoarece $\hat{d}_o = \int_{-\infty}^{\infty} h_{on}(\tau)r(t-\tau)d\tau$

$$c_{dr}(t-u) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{on}(\tau)\overline{r(t-\tau)r(u)}d\tau \text{ sau:}$$

$$c_{dr}(t-u) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{on}(\tau)c_{rr}(t-\tau-u)d\tau$$ sau, introducand variabila $\theta = t-u$:

$$c_{dr}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{on}(\tau)c_{rr}(\theta-\tau)d\tau$$ care este ecuatia Wiener - Hopf;

aceasta permite determinarea lui $h_{on}(t)$. Aplicand transformata Fourier:

$q_{dr}(\omega) = H_{on}(\omega)q_{rr}(\omega) \Rightarrow$

$$H_{on}(\omega) = \frac{q_{dr}(\omega)}{q_{rr}(\omega)} = \frac{q_{dr}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)} = \frac{q_{ss}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)}$$

pentru semnale $s(t)$ si $n(t)$ independente.

Se obtine astfel functia de transfer a unui filtru nerealizabil (nu s-a impus ca $h(t) = 0$ pentru $t < 0$) care se poate aproxima insa cu filtre realizabile.

*Exemplu*: Fie $d(t) = s(t+\alpha)$ unde $s(t)$ este mesajul transmis. Daca:

- $\alpha = 0$, avem o filtrare simpla (estimarea se face pt. toate valorile trecute ale timpului)
- $\alpha < 0$, avem o filtrare cu intarziere (netezire): estimarea se face cu intarziere dar se utilizeaza mai multe date, deci eroarea este mai mica.
- $\alpha > 0$, avem o filtrare cu predictie (anticipare): estimarea se face in avans dar se utilizeaza mai putine date, deci eroarea este mai mare.

In domeniul frecventa, vom avea respectiv, urmatoarele functii de transfer ale unor filtre optimale nerealizabile:

$$H_{on}(\omega)=\frac{q_{ss}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)}$$

$$H_{on}(\omega)=\frac{q_{ss}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)}\exp(-j\omega\alpha)$$

$$H_{on}(\omega)=\frac{q_{ss}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)}\exp(+j\omega\alpha)$$

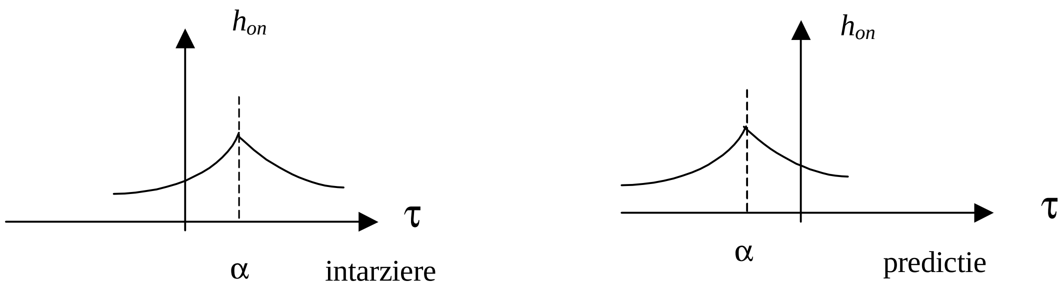
*Exemplu*: Filtru optimal nerealizabil, continuu in timp. Sunt valabile:

$$q_{ss}(\omega)=\frac{q_s}{1+a^2\omega^2}, \quad q_{nn}(\omega)=q_0$$

$$H_{on}(\omega)=\frac{q_{ss}(\omega)}{q_{ss}(\omega)+q_{nn}(\omega)}\exp(-j\omega\alpha)=\frac{2AB}{B^2+\omega^2}\exp(-j\omega\alpha) \quad \text{cu}$$

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2\mathrm{a}}\sqrt{\frac{q_s}{q_0}\frac{q_s}{q_s+q_0}}, \quad B=\frac{1}{a}\sqrt{1+\frac{q_s}{q_0}}$$

$$h_{on}(\tau)=A\exp(-B|\tau-\alpha|)$$



**Filtru optimal realizabil**

Daca se fac schimbarile de variabile $t - u \to \tau,\ \ \tau \to t$, avem:

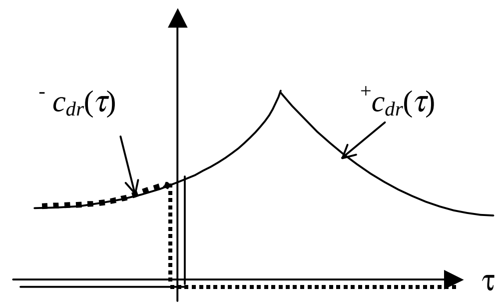
$$c_{dr}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{on}(t) c_{rr}(\tau - t) dt = {}^{+}c_{dr}(\tau) + {}^{-}c_{dr}(\tau)$$

$$^{+}c_{dr}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h_{on}(t) c_{rr}(\tau - t) dt =$$

$$= \begin{cases} c_{dr}(\tau), & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

$$^{-}c_{dr}(\tau) = \int_{-\infty}^{0} h_{on}(t) c_{rr}(\tau - t) dt =$$

$$= \begin{cases} c_{dr}(\tau), & \tau < 0 \\ 0 & \tau \geq 0 \end{cases}$$




Filtrul optimal realizabil (cauzal) poate fi obtinut numai din $^{+}c_{dr}(\tau)$. Functia de transfer se obtine prin transformarea Fourier inversa a acestuia:

$$H_o(\omega) \cdot q^{+}{}_{rr}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^{+}c_{dr}(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau = {}^{+}q_{dr}(\omega)$$

$$H_o(\omega) = \frac{^{+}q_{dr}(\omega)}{q_{rr}(\omega)}$$

## 1.1. Filtre optimale pentru zgomot alb (FOW)

$$r(t) = z(t)$$

$$c_{rr}(\tau) = c_{zz}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(t);\ \text{daca se considera } \frac{N_0}{2} = 1:$$

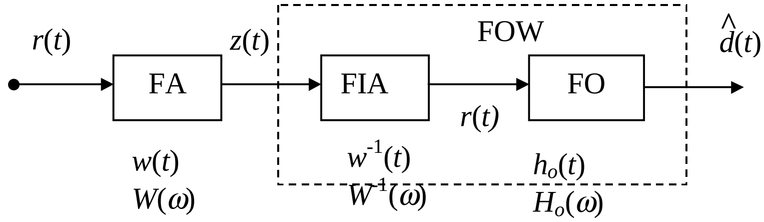
$$c_{dr}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h_{ow}(t)\, c_{rr}(\tau - t) dt = \int_{0}^{\infty} h_{ow}(t)\, \delta(\tau - t) dt = h_{ow}(\tau) = c_{dz}(\tau)$$

Obs: la filtrul optimal pentru zgomot alb, functia pondere este covariatia dintre semnalul dorit si zgomot.

In domeniul frecventa, deoarece $q_{zz} = 1$:

$$H_{ow}(\omega) = {}^{+}q_{dz}(\omega)$$

## 1.2. Filtre optimale Wiener pentru un semnal oarecare




$$q_{zz}(s) = W(s)\cdot W(-s)q_{rr}(s)$$

$$W(s)\cdot W(-s) = \frac{1}{q_{rr}^{+}(s)q_{rr}^{-}(s)}$$

daca se iau numai partile realizabile:

$$W(s) = \frac{1}{q_{rr}^{+}(s)}$$

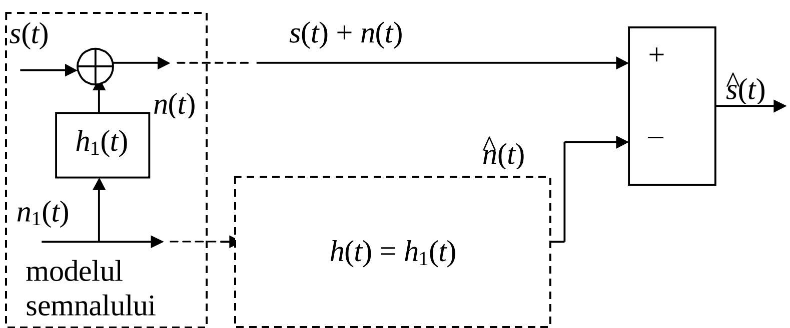
$$H_{ow}(s) = W^{-1}(s)H_{or}(s)$$

$$H_{o}(s) = \frac{H_{ow}(s)}{W^{-1}(s)}$$

FA: filtrul de albire
FIA: filtrul invers de albire
FO: filtrul optimal pentru *r*(*t*)
FOW: filtrul optimal pentru zgomot alb

## 1.3. Filtrarea optimala Wiener prin extragerea zgomotului

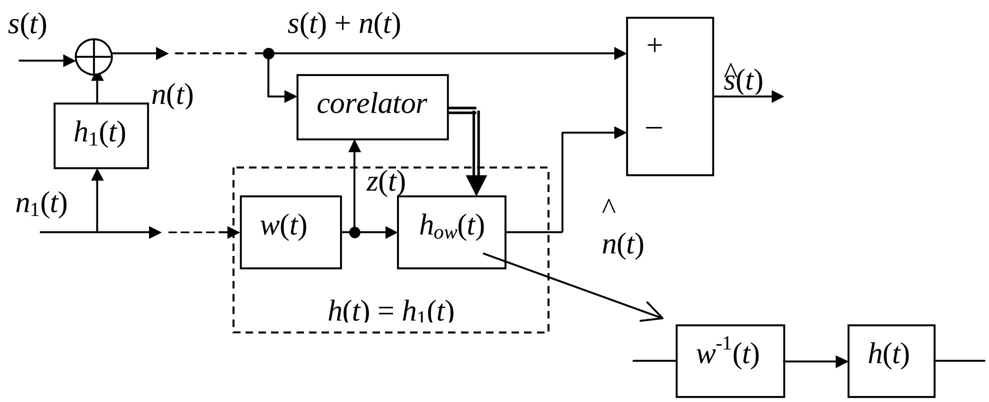
Ce se urmareste: estimarea formei lui $s(t)$ se face prin estimarea lui $n(t)$ si extragerea acestuia din $r(t)$. Schema de extragere se da mai jos, unde:




$n_1(t)$ = zgomotul captat din semnal
$n(t)$ = zgomotul filtrat
$h_1(t)$ = functia pondere a legaturii dintre cele doua componente captate $s(t)$ si $n_2(t)$ ale semnalului. Deoarece $h_1(t)$ este necunoscut, $h(t) = h_1(t)$ poate fi determinat numai indirect printr-un procedeu de optimizare.

$$H_1(s) = \frac{q_{nn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)} = \frac{q_{rn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)} \cong H(s)$$

O metoda de calcul rapid a lui $H(s)$ este cea de mai jos in care se face apel la un corelator a lui $r(t)$ cu zgomotul alb $z(t)$:




$$H_1(s) = \frac{q_{nn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)} = \frac{q_{rn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)} = \frac{q_{zn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)}\frac{q_{rz}(s)}{q_{zz}(s)} \approx$$

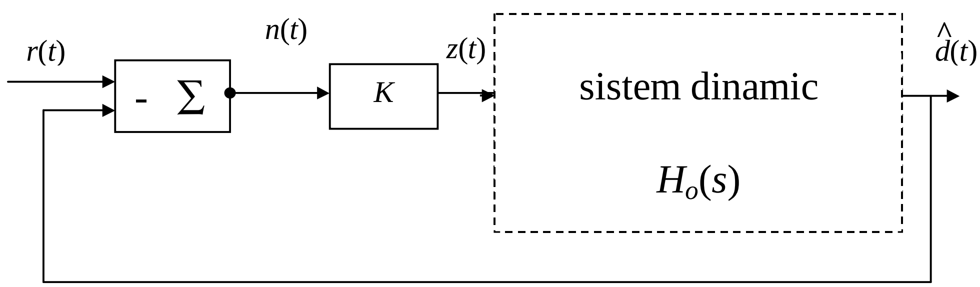
$$\approx \frac{q_{zn_1}(s)}{q_{n_1n_1}(s)}\frac{q_{nz}(s)}{q_{zz}(s)} = W(s)H_{ow}(s) = H(s)$$

unde $H_{ow}(s) = W^{-1}(s)H(s)$ este dat de corelator.

## 2. Filtrul optimal Kalman – Bucy

**a)** Cazul ideal: $\hat{d}(t) = s(t)$

Este o varianta de filtru optimal Wiener in care se relizeaza FOW printr-un sistem dinamic iar intrarea filtrului de albire este diferenta dintre semnalul receptionat si estimatul semnalului dorit. Aici sistemele




dinamice sunt generatoare de semnale aleatoare, fiind excitate de zgomot alb. Problema este de a determina functia de transfer a sistemului de asa natura incat la iesire lui sa se obtina un semnal a carui densitate spectrala de putere este cea a semnalului dorit:

$$q_{zz}(s)H_o(s)H_o(-s) = q_{ss}(s)$$

Obs.: daca $n(t) = z(t)$, $K$ = const.

*Exemplu*: Se doreste:

$$q_{ss}(s) = \frac{K_0}{\alpha^2 - s^2};$$

Deoarece $q_{zz}(s) = \frac{1}{2} N_0 = K$ :

$$H_o(s)H_o(-s) = \frac{K_0}{K}\frac{1}{\alpha^2 - s^2} = \frac{K_0}{K}\frac{1}{\alpha - s}\frac{1}{\alpha + s}$$

Pentru filtru realizabil se ia numai partea realizabila $H_o(s) = \sqrt{\frac{K_0}{K}}\frac{1}{\alpha + s}$

Daca $q_{ss}(s)$ dorit se descrie cu o aproximatie Butteworth de ordin mai mare va fi necesar un sistem dinamic de ordin superior, descris de :

- ecuatie diferentiala liniara cu coeficienti constanti :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + ... + b_0 u(t)$$

- functie de transfer corespunzatoare :

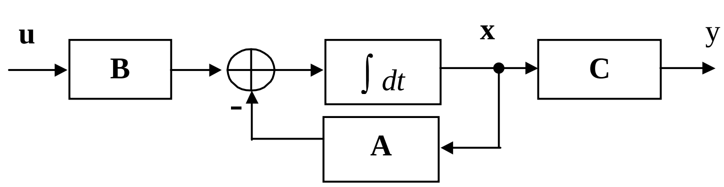
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}$$

- ecuatii de stare si de iesire corespunzatoare :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

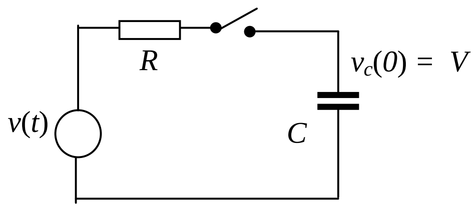
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_1 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ ... \\ b_0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 10...0 \end{vmatrix} \text{ (o singura iesire)}$$




Modelul sistemului dinamic generator de semnal aleator este dat alaturat ( $\mathbf{u}(t)$ = $\mathbf{z}(t)$ si $\mathbf{x}(t)$ = $\mathbf{d}(t)$)

*Exemplu*: fie schema din figura de mai jos, in care variabila de stare este tensiunea la bornele condensatorului, $v_c(t)$.




Se cere:

1. modelul matematic, respectiv ecuatia de stare a circuitului
2. structura sistemului dinamic generator al semnalului $s(t) = v_c(t)$
3. $s(t)$ pentru $v(t) = 0$ si $v_c(0) = V =$ v.a.
4. structura sistemului dinamic generator al semnalului $s(t) = v_c(t)$ in cazul (3).
5. sa se arate ca in cazul (3) $s(t)$ este un proces aleator nestationar
6. functia de transfer a sistemului dinamic generator pentru $v_c(0) = V = 0$ si $v(t) = z(t)$, adica zgomot alb
7. sa se arate ca $s(t)$ obtinut in conditiile de la (6) este un proces aleator stationar; care este relatia dintre D.S.P. a lui $v(t) = z(t)$ si varianta $\sigma_y^2$

Solutie:

1. $v_R(t) + v_C(t) = v(t)$

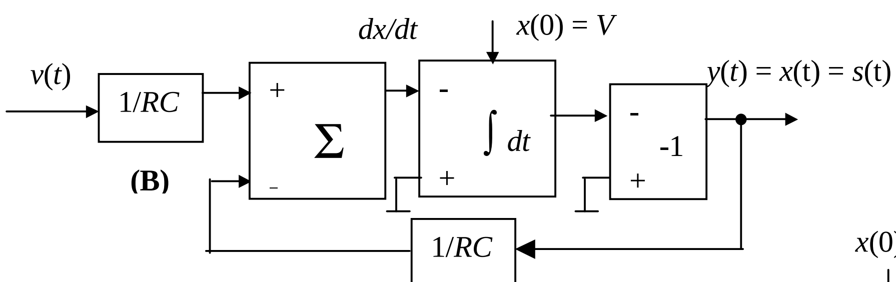
$$x(t) = v_C(t) = s(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}v(t)$$

$$y(t) = s(t)$$

$$\mathbf{A} = \left|-\frac{1}{RC}\right|; \quad \mathbf{B} = \left|\frac{1}{RC}\right|; \quad \mathbf{C} = |1|$$

2. $X(s) = \left[-\frac{1}{RC}X(s) + x(0)\right]\frac{1}{s} + \frac{1}{RC}\frac{1}{s}V(s)$

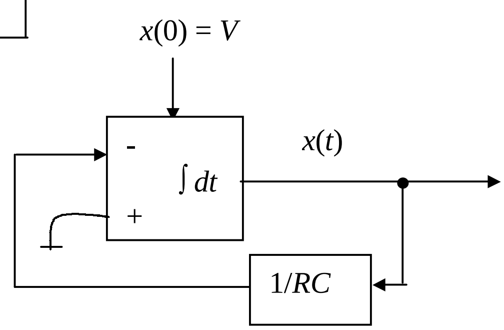



(A)

3. $s(t) = y(t) = x(t) =$

$$= V\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$

4.



5. daca $v(t) = 0$ si $v_c(0) = V$= v.a. cu densitate de probabilitate $f_V(V)$, atunci la momentul $t = t_1$: $f_y(y,t_1) = f_V(V)\exp\left(-\frac{1}{RC}t_1\right)$ deci rezulta ca $y(t)$ este un proces aleator nestationar deoarece densitatea de probabilitate variaza cu timpul.

6. $H(s) = \frac{k}{s+k}$ $\quad$ unde : $k = 1/RC$

7.

$$q_{vv}(s) = N_0/2$$

$$q_{yy}(s) = H(s)H(-s)q_{vv}(s) = \frac{k^2 N_0/2}{k^2 - s^2} \qquad q_{yy}(\omega) = \frac{k^2 N_0/2}{k^2 + \omega^2}$$

Obs.: deoarece $q_{yy}(\omega)$ este o fractie rationala patratica, *y(t)* este proces aleator stationar.

Daca se ia partea realizabila a lui $q_{yy}(s)$ care este : ${}^{+}q_{yy}(s) = \frac{kN_0/4}{k+s}$

$$\sigma_y^2 = R(0) - R(\infty) = \lim_{s\to\infty} s \cdot {}^{+}q_{yy}(s) - \lim_{s\to 0} s \cdot {}^{+}q_{yy}(s) = kN_0/4 - 0 = kN_0/4$$

Deci pentru ca semnalul generat sa aiba varianta $\sigma_y^2$ trebuie ca zgomotul alb care excita sistemul dinamic generator sa se caracterizeze prin :

$$N_0/2 = 2\sigma_y^2/k$$

**b)** Cazul general ($\hat{s}(t) \neq s(t)$)

Sistemul dinamic (sursa) care genereaza semnalul aleator este:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \xi$$

Se noteaza:

$$\overline{\xi} = \mathbf{x_0}$$

$$E[\mathbf{u}(t)] = \overline{\mathbf{u}}(t)$$

$$E[\mathbf{n}(t)] = \overline{\mathbf{n}}(t)$$

Avem urmatoarele relatii pentru covariante ($\mathbf{u}(t)$ si $\mathbf{n}(t)$ sunt zgomote albe):

$$\overline{[\xi - \mathbf{x_0}][\xi - \mathbf{x_0}]^{\mathbf{T}}} = \mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon 0}$$

$$\overline{[\mathbf{u}(t) - \overline{\mathbf{u}}(t)][\mathbf{u}(\tau) - \overline{\mathbf{u}}(\tau)]^{\mathbf{T}}} = \mathbf{c_{uu}}(t-\tau) = \mathbf{Q}\delta(t-\tau) \quad \forall t,\tau \geq 0$$

$$\overline{[\mathbf{n}(t) - \overline{\mathbf{n}}(t)][\mathbf{n}(\tau) - \overline{\mathbf{n}}(\tau)]^{\mathbf{T}}} = \mathbf{c_{nn}}(t-\tau) = \mathbf{P}\delta(t-\tau) \quad \forall t,\tau \geq 0$$

si urmatoarele necorelari:

$$\overline{[\xi - \mathbf{x_0}][\mathbf{u}(t) - \overline{\mathbf{u}}(t)]^{\mathbf{T}}} \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\overline{[\xi - \mathbf{x_0}][\mathbf{n}(t) - \overline{\mathbf{n}}(t)]^{\mathbf{T}}} \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\overline{[\mathbf{n}(t) - \overline{\mathbf{n}}(t)][\mathbf{u}(t) - \overline{\mathbf{u}}(t)]^{\mathbf{T}}} = \mathbf{c_{nu}}(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

Se urmareste gasirea unui observator de stare optimal de forma:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{m}(t)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

cu cerintele de optimalitate:

1. estimare fara eroare sistematica:

$$\overline{\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)} \equiv 0$$

2. covarianta matriciala a erorii de estimare este minimala:

$$\mathbf{c}_{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon} opt}(t) \leq \mathbf{c}_{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}}(t) = \overline{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]^T}$$

Se propune solutia:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{y}(t) - \overline{\mathbf{n}}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x_0}$$

sau, pentru $E[\mathbf{n}(t)] = 0 = E[\mathbf{u}(t)]$ si sistem invariant in timp:

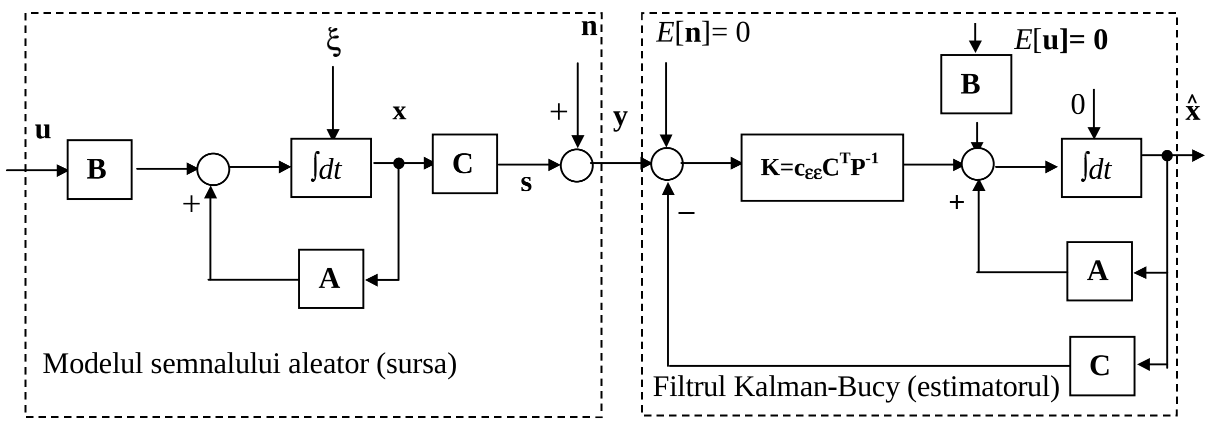
$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\left[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x_0}$$

unde $\mathbf{K} = \mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{-1}$ se numeste castigul filtrului in regim permanent iar $\mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}$ se determina din ecuatia Riccati[1] pentru regimul permanent:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} - \mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{d\mathbf{c}_{\varepsilon\varepsilon}}{dt} = 0$$

Schema fluxului de semnal la filtrul optimal Kalman-Bucy se da mai jos:




Pentru un sistem stochastic de ordinul 1:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

$$u(t) : \{0; Q\}$$

$$n(t) : \{0; P\}$$

unde matricile *A*, *B*, *P*, *Q* au cate un singur element.

---

[1] Pentru justificarea ecuatiei Riccati vezi NOTA

$$2Ac_{\varepsilon\varepsilon} - \frac{c_{\varepsilon\varepsilon}^{\ 2}}{P} + B^2Q = 0 \quad \text{este ecuatia Riccati, solutia pozitiva fiind:}$$

$$c_{\varepsilon\varepsilon\ opt} = AP + \sqrt{A^2P^2 + B^2QP};$$

Filtrul Kalman este:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \sqrt{A^2 + \frac{B^2Q}{P}}\hat{x}(t) + \left(A + \sqrt{A^2 + \frac{B^2Q}{P}}\right)y(t)$$

*Exemplu*: prin canalul cu zgomot aditiv $n(t)$, avand $c_{nn} = N_0/2$ (zgomot alb) se transmite un semnal $s(t) = x(t)$, avand:

$q_{ss}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$ si sistemul dinamic generator al $s(t) = x(t)$, are functia de transfer: $H(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$ sau $H(s) = \dfrac{1}{a + s}$ rezulta:

$q_{xx}(\omega) = q_{ss}(\omega) = q_{vv}(\omega)|H(\omega)|^2$ de unde $q_{vv}(\omega) = 2a$ iar modelul de sistem dinamic este de forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + u(t);$$

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

deci rezulta: $A = [-a]; \quad B = [1]; \quad C = [1];$

la care se aduga:

$Q = [2a]; \quad P = [N_0/2]$, vom avea ecuatia Riccati de forma:

$$-2ac_{\varepsilon\varepsilon} - \frac{c_{\varepsilon\varepsilon}^{\ 2}}{N_0/2} + 2a = 0 \quad \text{, solutia pozitiva fiind:}$$

$$c_{\varepsilon\varepsilon} = -aN_0/2 + \sqrt{a^2(N_0/2)^2 + 2a};$$

Filtrul Kalman este de forma:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -\sqrt{a^2 + \frac{4a}{N_0}}\,\hat{x}(t) + \left(-a + \sqrt{a^2 + \frac{4a}{N_0}}\right)y(t)$$

Castigul filtrului in regim permanent are expresia:

$$K = -a + \sqrt{a^2 + \frac{4a}{N_0}} = \frac{c_{\varepsilon\varepsilon}}{N_0/2}$$

Obs.: In regim tranzitoriu, $c_{\varepsilon\varepsilon} \Rightarrow c_{\varepsilon\varepsilon}(t)$ si ecuatia Riccati devine:

$$-2ac_{\varepsilon\varepsilon}(t)-\frac{c_{\varepsilon\varepsilon}^{\ 2}(t)}{N_0/2}+2a=\frac{dc_{\varepsilon\varepsilon}(t)}{dt}$$ , ecuatie care se poate modela computational, iesirea modelului actualizand permanent castigul filtrului.