Ecuaciones y Teoremas

Vladimir Huarachi

September 25, 2024

1 Teorema

Theorem 1.1. Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

DEMOSTRACIÓN.

Proof. Considérese el caso $f(a) > 0$, puesto que f es continua en a, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si} \quad |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$, podemos tomar a $f(a)$ como el ε. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si} \quad |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < f(a),$$

y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\varepsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. $\square$