



# MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA

## Univerzita Karlova

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vladislav Wohlrath

## Laserová spektroskopie magneticky uspořádaných materiálů

Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Petr Němec, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Optika a optoelektronika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....  
Podpis autora

Tímto děkuji vedoucímu prof. RNDr. Petrovi Němcovi, Ph.D. za cenné zkušenosti, poskytnuté příležitosti a obecně férový přístup. Také za dohled nad prováděným experimentem a zkušené rady při tvorbě textu.

Děkuji doc. RNDr. Tomášovi Ostatnickému, Ph.D. za teoretickou podporu a mnohé plodné konzultace.

Děkuji Zeynab Sadeghi, MSc. za spolupráci při měření závěrečné sady dat se vzorkem FeRh.

Děkuji RNDr. Lukášovi Nádvorníkovi, Ph.D. za poskytnutí měřeného vzorku CoFe.

Děkuji Mgr. Jozefovi Kimákovi za uvedení do probíhajícího experimentu a také za pochopení a vstřícný přístup při mé opakovém zapomínání klíčů od laboratoře, kterým jsem ho obtěžoval.

Děkuji kolektivu pracovníků a studentů působících na pracovišti, kromě již zmíněných jmenovitě RNDr. Evě Schmoranzerové, Ph.D., Mgr. Peterovi Kubaščíkovi, Mgr. Miloslavovi Surýnkovi, Bc. Jiřímu Jechumtálovi a Deepovi Joshimu, MSc. Děkuji jim za inspiraci, občasnou pomoc při práci a hlavně za zpríjemnění stráveného času.

Děkuji rodině a přátelům za podporu. Zvláštní dík si zaslouží Bc. Jaroslav Pešek, v jehož inkubátoru diplomových prací vznikla podstatná část tohoto textu.

Název práce: Laserová spektroskopie magneticky uspořádaných materiálů

Autor: Vladislav Wohlrath

Katedra: Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Petr Němec, Ph.D., Katedra chemické fyziky a optiky

**Abstrakt:** V Laboratoři OptoSpintroniky je dlouhodobě vyvíjena experimentální metoda pro studium magnetických vzorků pomocí magneto-optických jevů kvadratických v magnetizaci vzorku, jako je například Voigtův jev. Vlivem použité experimentální geometrie je v našem případě, na rozdíl od obdobných metod, možné používat také kryostat. Díky tomu je možné příslušné vzorky studovat jak za snížené, tak i za zvýšené teploty. V rámci této diplomové práce bylo identifikováno a následně odstraněno několik problémů, které praktické využití této metody doposud znemožňovaly. Použití metody bylo demonstrováno v transmisní i reflexní geometrii pro feromagnetické vzorky CoFe a FeRh. Naše měření ukázala, že koeficient popisující kvadratickou magneto-optickou odezvu může být silně anizotropní, přičemž velikost této anizotropie i její znaménko silně závisí na použité vlnové délce světla. To má poměrně zásadní důsledky pro plánování a/nebo využití příslušných experimentů využívajících kvadratickou magneto-optiku, která v současné době přitahuje rostoucí pozornost díky nástupu zájmu o antiferomagnetickou spintroniku.

**Klíčová slova:** spintronika, kvadratická magneto-optika, Voigtův jev, CoFe, FeRh

Title: Laser spectroscopy of magnetically-ordered materials

Author: Vladislav Wohlrath

Department: Department of Chemical Physics and Optics

Supervisor: prof. RNDr. Petr Němec, Ph.D., Department of Chemical Physics and Optics

**Abstract:** For a relatively long time, a new experimental technique for the study of magnetic materials by magneto-optical effects quadratic in sample magnetization, like Voigt effect, is being developed at Laboratory of OptoSpintronics. Thanks to the used experimental geometry, in our setup, unlike in different methods, it is possible to use a cryostat. Thanks to this the investigated samples can be studied both at low and high temperatures. In this master thesis we identified and eventually solved several problems that prevented the practical utilization of this technique in the past. We successfully demonstrated the application of this method both in transmission and reflection geometries using ferromagnetic samples of CoFe and FeRh. Our measurements revealed that the coefficient describing the quadratic magneto-optical response can be strongly anisotropic with a wavelength-dependent magnitude and sign. This observation has strong consequences for the design and/or interpretation of experiments based on quadratic magneto-optics, which are gaining an increasing attention nowadays thanks to the growing interest in antiferromagnetic spintronics.

Keywords: spintronics, quadratic magneto-optics, Voigt effect, CoFe, FeRh

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>2</b>
<b>1 Klasická teorie magneto-optických jevů</b>	<b>4</b>
1.1 Maxwellovy rovnice . . . . .	5
1.2 Polarizace . . . . .	6
1.2.1 Jonesův počet . . . . .	7
1.2.2 Stokesův-Muellerův počet . . . . .	7
1.3 Optika v anizotropních multivrstvách . . . . .	10
1.4 Magneto-optické tenzory . . . . .	14
1.5 Magnetická anizotropie . . . . .	16
<b>2 Vybrané metody experimentální magneto-optiky</b>	<b>19</b>
2.1 Optický můstek . . . . .	23
2.2 Osmisměrná metoda . . . . .	25
2.3 Metoda rotujícího pole a ROTMOKE . . . . .	25
<b>3 Studované materiály</b>	<b>28</b>
3.1 CoFe . . . . .	28
3.2 FeRh . . . . .	28
<b>4 Experimentální metoda</b>	<b>31</b>
4.1 Popis a úvodní experimenty . . . . .	33
4.2 Detekce . . . . .	35
4.2.1 Kompenzace nedokonalostí a zrcadel . . . . .	35
4.2.2 Současné měření ellipticity . . . . .	42
4.3 Určení anizotropie MLD . . . . .	45
4.4 Určení magnetické anizotropie . . . . .	48
4.5 Zpracování dat . . . . .	52
<b>5 Spektroskopie anizotropie MLD</b>	<b>55</b>
5.1 Měření v transmisní geometrii: CoFe . . . . .	55
5.1.1 Měření při pokojové teplotě . . . . .	55
5.1.2 Měření při kryogenní teplotě . . . . .	56
5.2 Měření v reflexní geometrii: FeRh . . . . .	59
5.2.1 Měření feromagnetické fáze . . . . .	59
<b>Závěr</b>	<b>64</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>65</b>
<b>A Přílohy</b>	<b>70</b>
A.1 Průchod a odraz při poruchách permitivity . . . . .	70
A.2 Dodatky k magnetické anizotropii . . . . .	74
A.3 Stokesovy kovektry . . . . .	77
A.4 Detaily zpracování dat . . . . .	79

# Předmluva

Výhoda automatizovaných výpočtů je lidstvu zřejmá již po staletí. Nejdříve realizované strojekem s tužkou a papírem, od 19. století to byly ručně nebo parně poháněné stroje plné ozubených koleček zpracovávajících děrné štítky, a později s vývojem vakuových elektronek už šlo o počítače podobné těm dnešním, pouze mnohonásobně větší a poruchovější. Obzvláště během druhé světové války potřeba počítačů extrémně vynikla, protože se náhle staly nezbytnými výpočetně náročné činnosti jako luštění šifer a modelování atomových bomb. Mnoho bylo v sázce a všechny zmíněné přístupy byly využity naplno.

Jejich společná nevýhoda byla škálovatelnost, nebylo dost dobré možné počítače založené na těchto principech zmenšovat a zrychlovat. Když byl v roce 1947 vynalezen pevnolátkový elektrický spínač bez potřeby vakua – tranzistor – rychle bylo rozpoznáno, že to je právě ta součástka, na kterou všichni čekali. Teoretické limity na miniaturizaci a zrychlování transistorových počítačů byly v nedohlednu a rychlosť vývoje byla od šedesátých let dobré vystižena Moorovým zákonem: maximální technicky realizovatelný počet transistorů v integrovaném obvodu se zdvojnásobuje každé dva roky.

Dnes se píše rok 2022, Moorův zákon začíná pozbývat platnosti, technika transistorových počítačů se dotýká teoretických limitů a lidstvo se ocítá v podobné situaci jako před rokem 1947 - stávající počítače jsou na konci své vývojové linie.

Jedním z možných směrů, kudy se vydat dále, je *spintronika*. Běžná elektronika využívá pouze jednu vlastnost elektronů – jsou to elektrické monopóly – a zcela ignoruje jinou – mají spin a jsou to magnetické dipoly. Spintronika se zabývá vlivem spinu na transportní vlastnosti elektronů, s vysněným cílem obejít některé technologické potíže týkající se elektroniky. Jako velký úspěch spintroniky se považuje objevení *obří magnetorezistence* (GMR)<sup>1</sup> v roce 1988. Mikroskopický základ GMR je právě interakce spinu elektronu s magnetickým polem, jedná se proto o spintronický jev. Objev GMR umožnil výrobu dnešních hard-disků s nevidanou kapacitou a vývoj magnetoresistivních RAM (MRAM).

Protože spin elektronu souvisí s magnetickým momentem, projevuje se především v materiálech s magnetickým uspořádáním (např. feromagnetech, antiferomagnetech), spintronika proto přirozeně zahrnuje jejich vývoj a studium. Takový vývoj ovšem vyžaduje zároveň diagnostické metody, kterými se mohou nové materiály zkoumat, vybírat z nich ty nejslibnější a optimalizovat jejich parametry.

Tato práce se věnuje právě jedné takové diagnostické metodě – magneto-optické spektroskopii. Magneto-optika dovoluje zkoumat magnetismus skrze jeho projekty v optických vlastnostech. Projekty magneto-optické aktivity lze obecně rozdělit na liché a sudé, podle toho, jestli při obrácení orientace magnetického pole nebo magnetizace mění či nemění znaménko. Zatímco liché jevy jsou široce používané už desítky let, ty sudé začaly nabývat na popularitě až v nedávné době. Oproti lichým jevům existují ty sudé v širší třídě materiálů (např. v kolineárních antiferomagnetech), což z nich dělá jednu z mála dostupných metod jejich studia. V současné době jsou antiferomagnety předmětem intenzivního spintronického výzkumu.

---

<sup>1</sup>Magnetorezistence obecně znamená změnu odporu při změně směru magnetizace, příslušek obří značí jeho sílu (80 % oproti malým jednotkám procent pozorovaných před rokem 1988).

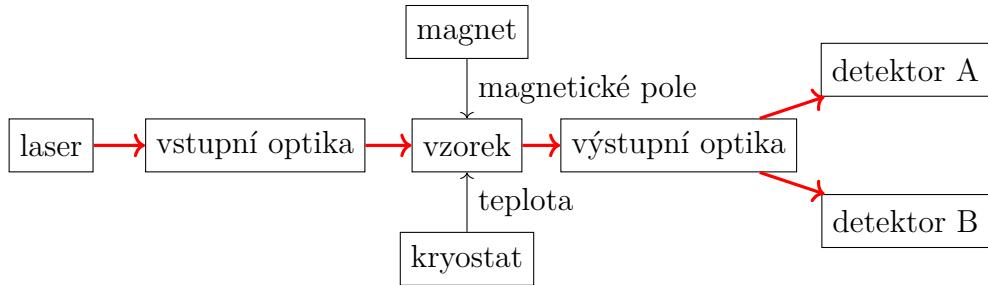
V roce 2017 byl v Laboratoři OptoSpintroniky (LOS) na Katedře CHemické Fyziky a Optiky (KCHFO) na Univerzitě Karlově (UK) uveden do provozu prototyp vektorového magnetu, jehož účelem bylo získání metody pro magnetooptickou charakterizaci vzorků v širokém rozsahu teplot a vlnových délek, včetně zaměření na studium sudých MO jevů. Metoda využívá rotující pole v rovině vzorku a je proto koncepcně příbuzná tzv. 8-směrné metodě, metodě rotujícího pole a ROTMOKE.

Metodou bylo v minulosti studováno mnoho vzorků rozličných materiálů, avšak jakékoli pokusy o kvantitativní interpretaci sudých jevů budú úplně selhávaly, nebo dávaly protiřečící si výsledky. Hlavním cílem této práce tedy bylo pochopit příčinu pozorovaných problémů a v ideálním případě metodu opravit, uvést do provozu a demonstrovat její použitelnost na vzorcích materiálů slibných pro spintroniku.

A jak ukážeme v tomto textu, tohoto cíle bylo zcela dosaženo. Výsledkem je funkční metoda, která rozšiřuje možnosti uvedených příbuzných metod, a její funkčnost byla demonstrována studiem dvou materiálů: CoFe a FeRh.

# 1. Klasická teorie magneto-optických jevů

Předkládaná práce se zabývá základním typem magneto-optického experimentu, který je schematicky znázorněn na obr. 1.1. Tato kapitola shrnuje některé fyzikální modely a jevy důležité pro jeho popis.



Obrázek 1.1: Schéma typického magneto-optického experimentu. Laserový svazek je vhodně upraven vstupní optikou, dále dopadá na vzorek, kterým je propuštěn/odražen, nakonec je upraven výstupní optikou (a případně rozdělen do více ramen) a je detekována jeho intenzita. Vzorek je umístěn v kryostatu a mezi rameny elektromagnetu, takže během experimentu je mu vnučena libovolná teplota v daném rozsahu a vnější magnetické pole.

**Světlo** považujeme za klasické a předpokládáme, že je dobře popsáno Maxwellovými rovnicemi. Je monochromatické na kruhové frekvenci  $\omega$ . K popisu polarizačního stavu používáme Jonesovy a Stokesovy vektory. Všechny optické prvky jsou lineární a nedepolarizační, takže je popisujeme Jonesovou a Muellerovou maticí[1]. Využíváme geometrické interpretace Muellerových matic metodou zobrazování Poincarého sféry<sup>1</sup> (tzv. *charakteristických elipsoidů*)[1, 2]. O interakci světla s látkou předpokládáme, že probíhá pouze skrze vektory elektrické polarizace  $\mathbf{P}$ , magnetizace  $\mathbf{M}$  a proudové hustoty  $\mathbf{j}$ .

Odezva materiálů je lineární a lokální, a je obecně anizotropní. Uvnitř tenkých<sup>2</sup> vzorků je nutné řešit Maxwellovy rovnice, výstupem výpočtu je opět Jonesova a Muellerova matice. Výpočet je proveden v rámci Berremanova formalismu[3]  $4 \times 4$  přenosových matic pro anizotropní vrstevnaté prostředí, který je ekvivalentní Yehově  $4 \times 4$  maticové algebře[4], ale netrpí některými technickými nedostatyk[5, 6, 7, 8].

**Magnetické látky** mají dodatečný magnetický termodynamický stupeň volnosti (parametr uspořádání). Magneto-optickou aktivitu modelujeme jako závislost efektivní permitivity  $\epsilon$  na magnetickém stupni volnosti.

U feromagnetů je to celková magnetizace  $\mathbf{M}$ . Feromagnety reagují na vnější magnetické pole změnou polohy rovnovážné magnetizace, která je daná magnetickou volnou energií (magnetickou anizotropií). Pro tenké magnetické filmy používáme Stonerův-Wohlfarthův model[9] pro materiál v jedno-doménovém stavu;

<sup>1</sup>Angl. Poincaré sphere mapping.

<sup>2</sup>Tak tenkých, že je nutné považovat vícenásobné odrazy za navzájem koherentní.

předpokládáme konstantní velikost magnetizace a nulový průměr do normály vzorku (magnetizace je tzv. *in-plane*). Efektivní permitivita je funkcí  $\mathbf{M}$  a je rozvedena do mocninné řady, jejíž koeficienty tvoří složky lineárního  $\mathbb{K}$  a kvadratického  $\mathbb{G}$  magneto-optického tenzoru[10].

U kolineárního antiferomagnetu FeRh (viz kap. 3.2) je magnetickým stupněm volnosti magnetizace podmížky (Néelův vektor  $\mathbf{L}$ )[11]. Podobně jako u feromagnetů je  $\epsilon$  funkcií  $\mathbf{L}$ , až na to, že lineární člen je zakázán symetrií<sup>3</sup>.

## 1.1 Maxwellovy rovnice

Pracujeme ve frekvenčním prostoru, uvažujeme elektrické pole harmonické v čase s konvencí  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \Re \{ \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}$  a stejně pro ostatní časově závislé veličiny.

Látky popisujeme fenomenologicky lokální<sup>4</sup> lineární odezvou. Navíc pokládáme nulovou magnetickou susceptibilitu na optických frekvencích (tj.  $\mathbf{M}(\omega) = 0$ ), což kromě speciálních metamateriálů platí bez výjimky[12]. Materiály jsou za těchto podmínek plně popsány komplexními frekvenčně závislými tenzory ( $3 \times 3$  matice) relativní permitivity  $\epsilon_{\text{el}}$  a vodivosti  $\sigma$

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_{\text{el}}(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}) = \sigma(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \quad (1.1b)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}). \quad (1.1c)$$

Pro přehlednost budeme dálé vynechávat argumenty s tichým předpokladem, že vztahy platí lokálně pro všechna  $\omega$  a  $\mathbf{r}$ . Jedinou výjimkou, kdy vynechání argumentu nebude znamenat složku na frekvenci  $\omega$  (jako např.  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\omega)$ ), bude statická magnetizace  $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}(\omega = 0)$  a statické externí pole, které značíme  $\mathbf{H}_{\text{ext}} \equiv \mathbf{H}(\omega = 0)$ .

Maxwellovy rovnice v uvedené situaci mají v SI tvar

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\sigma - i\omega \epsilon_0 \epsilon_{\text{el}}) \mathbf{E} \equiv -i\omega \frac{\epsilon}{c^2} \mathbf{E}. \quad (1.2b)$$

V rovnicích nevystupují  $\epsilon_{\text{el}}$  a  $\sigma$  nezávisle, ale pouze v kombinaci patrné z první rovnosti (1.2b), což souvisí s tím, že rozdelení proudů na volné a vázané je pro  $\omega \neq 0$  do jisté míry arbitrární. Zavádí se proto efektivní relativní permitivita  $\epsilon$  vztahem

$$\epsilon_0 \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_{\text{el}} + i\sigma/\omega, \quad (1.3)$$

která v sobě zahrnuje vliv všech uvažovaných proudů. Komplexní  $3 \times 3$  matici  $\epsilon$  dále nazýváme zkráceně permitivitou a jedná se o jediný materiálový parametr charakterizující optické vlastnosti na dané frekvenci. V rovnici (1.2b) jsme také užili rychlosť světla ve vakuu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

Výhodné volby rozměru rovnic dosáhneme, pokud využijeme *impedanci volného prostoru*  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  a vyjádříme Maxwellovy rovnice v ve škálovaném

---

<sup>3</sup>Podmížky s opačnou magnetizací jsou ekvivalentní, což obecně neplatí u všech antifermagnetů.

<sup>4</sup>Tzv. dipolová approximace.

magnetickém poli  $Z_0\mathbf{H} = c\mathbf{B}$

$$\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H}, \quad (1.4a)$$

$$\frac{1}{ik_0} \nabla \times Z_0 \mathbf{H} = -\varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.4b)$$

kde jsme označili  $k_0 = c/\omega = 2\pi/\lambda_0$  vlnový vektor ve vakuu. V případě rovinné vlny s prostorovou závislostí  $\propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  platí  $\nabla = i\mathbf{k}$ , a zavádíme normovaný vlnový vektor  $\mathbf{N} = \mathbf{k}/k_0$ .

“Okrajové podmínky” na rozhraní dvou materiálů, kde dochází ke skokové změně permitivity, říkají, že tečné složky  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  jsou při přechodu přes rozhraní spojité[13].

## 1.2 Polarizace

Pro popis světla ve volném prostoru ( $\varepsilon = 1$ ) se dále omezíme na reálné  $\mathbf{N}$ . Zvolíme osu  $z$  proti směru šíření, tedy  $\mathbf{N} = (0,0, -1)^T$ . Řešením jsou pole charakterizovaná libovolnými komplexními amplitudami  $E_x$  a  $E_y$ , které udávají polarizaci vlny.  $\mathbf{H}$  je pak dánovo rovnicií (1.4a).

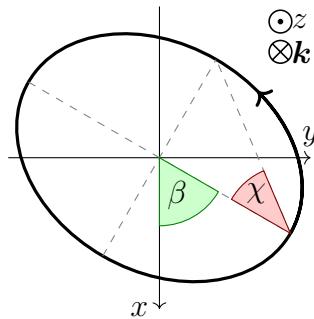
Výkon přenášený rovinou vlnou je dán časově středovaným Poyntingovým vektorem  $\mathbf{S}$ , pro vakuu[13]

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle_t = \langle \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) \rangle_t = \frac{1}{2Z_0} \mathbf{N} (E_x^* E_x + E_y^* E_y) \equiv \frac{1}{2Z_0} \mathbf{N} I, \quad (1.5)$$

kde definujeme normovanou intenzitu  $I = E_{0x}^* E_{0x} + E_{0y}^* E_{0y}$ .

Vektor  $\mathbf{E}$  opisuje v čase obecně elipsu v rovině kolmé na směr šíření, popisné parametry definujeme podle obr. 1.2. Jedná se o  $\beta$  – úhel natočení hlavní poloosy polarizace, a  $\chi$  – úhel ellipticity, zde dále nazývaný zkráceně elliptita. Pro popis ekvivalentní  $E_x$  a  $E_y$  je třeba přidat intenzitu  $I$  a časový posun  $\delta_0$ , který má význam času, ve kterém  $\mathbf{E}(t)$  protíná hlavní poloosu.

Konvenci točivosti světla používáme následující: při pohledu *od zdroje* obíhá pravotočivé světlo v dané rovině po směru hodinových ručiček. Točivost se v parametrech projevuje vzájemným znaménkem  $\chi$  a točivosti systému, ve kterém je  $\chi$  definováno (viz další oddíl 1.2.1). Viz obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Polarizační elipsa s vyznačenou souřadnou a elipsometrickými úhly  $\beta$  a  $\chi$  (na obrázku jsou oba kladné). Pro vyznačený směr svazku  $\mathbf{k}$  se jedná o levotočivé světlo (čtenář je v pozici pozorovatele od zdroje).

### 1.2.1 Jonesův počet

Jonesovy vektory[14] jsou tvořeny přímo komplexními amplitudami polí v rovině kolmé na vektor šíření

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Prostor Jonesových vektorů je přirozeně normovaný intenzitou (1.5), která je dána skalárním součinem

$$\mathcal{J}_1^\dagger \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} J_{1x}^* & J_{1y}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{2x} \\ J_{2y} \end{pmatrix}, \quad I(\mathcal{J}) = \mathcal{J}^\dagger \mathcal{J}. \quad (1.7)$$

Akci každého lineárního polarizačního prvku lze popsat jako lineární transformaci Jonesova vektoru – transformaci Jonesovou  $2 \times 2$  komplexní maticí  $\mathcal{T}$ . Jonesovy matice lze použít i pro popis polarizačního děliče: každé rameno pak má vlastní matici.

Sadě parametrů  $\beta, \chi, I, \delta$  odpovídá Jonesův vektor

$$\mathcal{J} = \sqrt{I} e^{i\delta} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \beta - i \sin \chi \sin \beta \\ \cos \chi \sin \beta + i \sin \chi \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Zde je na místě poznámka o točivosti. Předkládaná práce se zabývá studiem průchodu a odrazu světla při téměř kolmém dopadu, ve kterém navíc rovina dopadu není vždy stejná. Zároveň v žádném směru neaspiruje na určení absolutního směru točivosti (obě točivosti jsou v provedených experimentech symetrické). Proto je velice výhodné používat pro odražené světlo stejnou souřadnou soustavu Jonesových vektorů, aby reflexní matice byla přibližně jednotková. Přináší to drobnou komplikaci, odražená soustava má potom opačnou točivost vzhledem ke směru šíření světla. Zde se nevyhneme nějakému kompromisu, a proto přestože točivost světla je definovaná vždy vzhledem ke směru šíření, elipsometrické parametry definujeme vždy vzhledem k dané soustavě Jonesových vektorů, která může spolu se směrem šíření tvořit jak levotočivý, tak pravotočivý systém.  $\beta$  definujeme vzhledem k  $J_1$ , s rostoucím úhlem ve směru  $+J_2$ .  $\delta/\omega$  značí čas, ve kterém  $\mathbf{E}$  protne hlavní poloosu. Vztah mezi znaménkem  $\chi$  a točivostí je dán následující poučkou: pokud  $J_1 J_2 \mathbf{k}$  tvoří levotočivý systém jako na obr. 1.2, pak  $\chi > 0$  odpovídá levotočivé polarizaci.

Vzhledem k povaze prováděných experimentů se zřejmě jedná o daleko menší komplikaci, než které by přinesl přístup vhodný pro odraz s pevnou rovinou dopadu, kdy se odražená soustava podle ní zrcadlí.

### 1.2.2 Stokesův-Muellerův počet

Ucelený přehled, ze kterého vychází tento oddíl, lze nalézt v [1, 2]. Stokesovy parametry obecně mohou narozdíl od Jonesových vektorů popsat i nepolarizované světlo, v této práci si však vystačíme s plně polarizovaným světlem a proto je nebudeme definovat obecně, ale pomocí Jonesových vektorů

$$s_0 \equiv J_x^* J_x + J_y^* J_y \equiv \mathcal{J}^\dagger \sigma_0 \mathcal{J} = I, \quad (1.9a)$$

$$s_1 \equiv J_x^* J_x - J_y^* J_y \equiv \mathcal{J}^\dagger \sigma_1 \mathcal{J} = I \cos 2\chi \cos 2\beta, \quad (1.9b)$$

$$s_2 \equiv J_x^* J_y + J_y^* J_x \equiv \mathcal{J}^\dagger \sigma_2 \mathcal{J} = I \cos 2\chi \sin 2\beta, \quad (1.9c)$$

$$s_3 \equiv -i J_x^* J_y + i J_y^* J_x \equiv \mathcal{J}^\dagger \sigma_3 \mathcal{J} = I \sin 2\chi, \quad (1.9d)$$

kde jsme je druhými rovnostmi vyjádřili jako střední hodnoty vhodných  $2 \times 2$  hermitovských matic  $\sigma_i$ . Ty jsou

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

a můžeme je rozpoznat jako jednotkovou matici a přerovnané Pauliho matice. Tvoří komplexní bázi obecných komplexních  $2 \times 2$  matic, s omezením na reálné koeficienty pak bázi hermitovských matic.

Každý optický prvek lineární v Jonesových vektorech je zároveň lineární ve Stokesových parametrech

$$s_i^{\text{out}} = \mathcal{J}_{\text{in}}^\dagger \mathcal{T}^\dagger \sigma_i \mathcal{T} \mathcal{J}_{\text{in}} \equiv \mathcal{J}_{\text{in}}^\dagger \left( \sum_{j=0}^3 M_{ij} \sigma_j \right) \mathcal{J}_{\text{in}} = \sum_{j=0}^3 M_{ij} s_j^{\text{in}}, \quad (1.11)$$

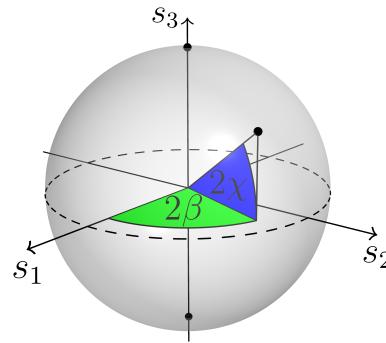
kde reálná  $4 \times 4$  matice  $\mathbb{M}$  je dána právě rozkladem hermitovských matic  $\mathcal{T}^\dagger \sigma_i \mathcal{T}$  do báze  $\sigma_j$ . Matice  $\mathbb{M}$  charakterizující optický prvek se nazývá Muellerova matice, a sloupcový vektor  $\mathcal{S}$  složený ze Stokesových parametrů se nazývá Stokesův vektor. Složky Muellerovy matice příslušející Jonesově matici  $\mathcal{T}$  je možné počítat přímo z rozkladu (1.11) díky tzv. trace-ortogonalitě  $\sigma_j$  matic:  $\text{Tr}\{\sigma_i \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\mathcal{T}^\dagger \sigma_i \mathcal{T} \sigma_j\}. \quad (1.12)$$

Pro plně polarizované světlo nejsou Stokesovy parametry nezávislé, platí totiž

$$s_0 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (1.13)$$

a tedy k vyjádření polarizačního stavu stačí třírozměrný *redukovaný* Stokesův vektor  $(s_1, s_2, s_3)^T$ , který lze graficky zanést do třírozměrného prostoru. Polarizace s jednotkovou intenzitou se zobrazují na tzv. Poincarého sféře jako na obr. 1.3. Ortogonální polarizace jsou zobrazeny na body středově souměrné podle počátku.



Obrázek 1.3: Poincarého sféra. Je vyznačen rovník lineárních polarizací (rovina  $s_3 = 0$ ,  $\chi = 0$ ) a póly kruhových polarizací  $\chi = \pm\pi/4$ .

I Muellerovy matice musí splňovat určité podmínky. Přestože libovolná myslitelná  $4 \times 4$  reálná matice je dána 16 reálnými parametry, nedepolarizační (také nazývaná čistá<sup>5</sup>) Muellerova matice je dána pouze 7 reálnými čísly<sup>6</sup>[15].

<sup>5</sup>Ve smyslu čistého (nesmíšeného, angl. pure) stavu v kvantové mechanice.

<sup>6</sup>Jonesova matice je dána 4 komplexními čísly — 8 reálných parametrů, ale při přechodu k Muellerově matici ztratíme informaci o celkové fázi.

Pro pozdější použití uvedeme totální diferenciál Stokesova vektoru (jakým způsobem se mění, při malé změně  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $I$ )

$$dS = 2I \cos 2\chi \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2\beta \\ \cos 2\beta \\ 0 \end{pmatrix} d\beta + 2I \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2\chi \cos 2\beta \\ -\sin 2\chi \sin 2\beta \\ \cos 2\chi \end{pmatrix} d\chi + \frac{1}{I} S dI. \quad (1.14)$$

Dále se zaměříme na to, jakým způsobem působí čisté Muellerovy matice, a jak jejich akci znázornit *zobrazením Poincarého sféry*[1, 2]. V případě depolarizačních prvků se ke znázornění používá trojice tzv. charakteristických elipsoidů, pro čisté prvky stačí zkoumat, jakým způsobem se změní body ležící na Poincarého sféře.

Nejdříve připomeneme větu z lineární algebry o polárním rozkladu matic[16]: Každou komplexní matici  $\mathcal{T}$  lze jednoznačně rozložit na součin unitární  $\mathcal{U}$  a pozitivně semidefinitní hermitovské  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  matice v libovolném pořadí,  $\mathcal{T} = \mathcal{U}\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2\mathcal{U}$ .

**Čistý retardér** Prvek reprezentovaný unitární Jonesovou maticí  $\mathcal{U}$  zachovává intenzitu a projevuje se pouze fázovým zpožděním mezi dvěma ortogonálními polarizacemi. Zachovává intenzitu, takže Poincarého sféra nebude deformovaná ani posunutá, pouze otočená či převrácená.  $\mathcal{U}$  lze diagonalizovat a její vlastní čísla jsou komplexní fázové faktory, píšeme tedy<sup>7</sup>

$$\mathcal{U} = e^{i\delta_1} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_1^\dagger + e^{i\delta_2} \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_2^\dagger. \quad (1.15)$$

Tyto dva vlastní módy mají po průchodu prvkem stejný polarizační stav, akce Muellerovy matice na Poincarého sféru má tedy za následek rotaci sféry kolem osy procházející těmito vlastními módy. Úhel rotace je dán fázovým zpožděním  $\delta' = \delta_2 - \delta_1$ . Ve speciálním případě  $\mathcal{J}_1 = (1,0)^T$  a  $\mathcal{J}_2 = (0,1)^T$  je Jonesova a Muellerova matice

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta' & -\sin \delta' \\ 0 & 0 & \sin \delta' & \cos \delta' \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

**Čistý diatenuátor** Pro prvek reprezentovaný pozitivně semidefinitní hermitovskou Jonesovou maticí  $\mathcal{H}$  existují dva ortogonální vlastní módy s reálnými nezápornými vlastními čísly – různými koeficienty útlumu. Normalizací matice tak, že větší z vlastních čísel se rovná 1, lze psát s reálným nezáporným  $\eta$

$$\mathcal{H} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_1^\dagger + \eta \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_2^\dagger. \quad (1.17)$$

Jedná se o obecný polarizátor, který  $\mathcal{J}_1$  propustí zcela a  $\mathcal{J}_2$  propustí s amplitudovou propustností  $\eta$ . Ve speciálním případě  $\mathcal{J}_1 = (1,0)^T$  a  $\mathcal{J}_2 = (0,1)^T$  je Jonesova a Muellerova matice

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{1+\eta^2}{2} & \frac{1-\eta^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-\eta^2}{2} & \frac{1+\eta^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

---

<sup>7</sup>Ve vzoreci vystupuje dyadickej součin Jonesových vektorů  $\mathcal{J}\mathcal{J}^\dagger$ , což je ortogonální projektor na  $\mathcal{J}$ , ne skalárni součin, který by byl psaný  $\mathcal{J}^\dagger\mathcal{J}$ .

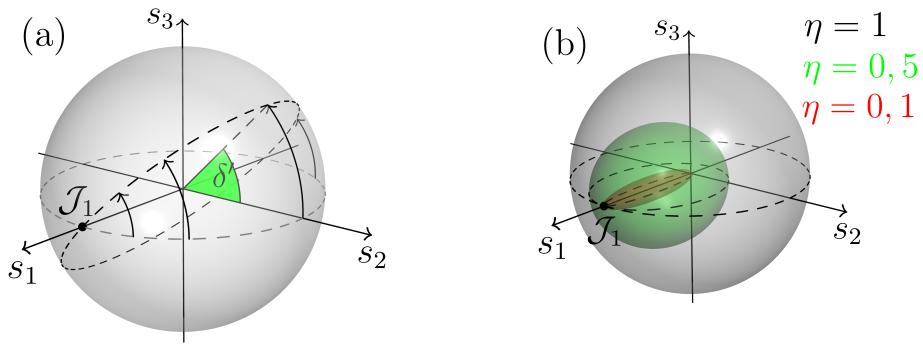
Pro body na Poincarého sféře dosadíme  $s_0^{\text{in}} = 1$  a dostaneme

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\eta^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}_{\text{in}} + \begin{pmatrix} \frac{1-\eta^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Jedná se tedy o kontrakci v rovině  $s_2s_3$  faktorem  $\eta$ , ve směru  $s_1$  faktorem  $(1+\eta^2)/2$  a zároveň posunutím o  $(1-\eta^2)/2$ . Ekvivalentně lze mluvit o kontrakci stejným faktorem se středem<sup>8</sup> v  $s_3 = 1$ . Se zmenšujícím  $\eta$  (vyšší kvalitou polarizátoru) výsledný elipsoid svým tvarem nabývá podobnosti doutníku.

Shrneme-li uvedené poznatky, akce libovolného nedepolarizačního optického prvku je ekvivalentní postupnému působení obecného diatenuátoru (protáhnutí a posunutí ve směru vlastního vektoru  $\mathcal{H}$  jako na obr. 1.4 (b)) a obecného retardéru (rotace podle směru vlastního vektoru  $\mathcal{U}$  jako na obr. 1.4 (a)), případně v opačném pořadí.

Zobrazení Poincarého sféry nachází využití především pro depolarizační Muellerovy matice, ale i v našem případě nabízí jednoduchý intuitivní způsob přemýšlení o polarizaci, který je důležitý např. při rychlých rozhodnutích v laboratoři, kdy není čas násobit komplexní matice.



Obrázek 1.4: Zobrazení Poincarého sféry čistými Muellerovými maticemi. (a) čistý retardér (rotace sféry), (b) čistý diatenuátor (protáhnutí a posunutí sféry).

### 1.3 Optika v anizotropních multivrstvách

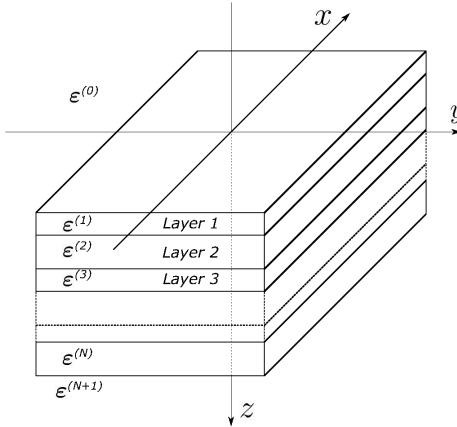
Cílem tohoto oddílu je představit teorii výpočtu transmisních a reflexních koeficientů (Jonesových matic průchodu a odrazu) obecných vrstevnatých struktur popsaných stupňovitým profilem tenzoru  $\varepsilon$ . Vrstevnatou strukturu rozumíme takovou, která je homogenní v rovině kolmé na jednu osu – tu zvolíme jako  $z$  – a rovina homogeneity a všech rozhraní bude  $xy$ , viz obr. 1.5. Stupňovitým profilem zase rozumíme, že struktura je složená z konečného počtu vrstev, ve kterých je  $\varepsilon$  konstantní.

Budeme řešit Maxwellovy rovnice (1.4). Vzhledem k homogenitě v rovině  $xy$  lze psát

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(z)e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad \mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{H}(z)e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (1.20)$$

---

<sup>8</sup> $(s_1^{\text{out}} - 1) = (s_1^{\text{in}} - 1)(1 - \eta^2)/2$ .



Obrázek 1.5: Vrstevnaté prostředí (multivrstva). Každá vrstva je homogenní v rovině  $xy$  a má konstantní tenzor permitivity  $\varepsilon$ . [17]

kde příčné složky vlnového vektoru  $k_x$  a  $k_y$  jsou konstantní podél celé struktury i mimo ní. Uvnitř každé vrstvy bude existovat i třetí složka  $k_z$ , bude se ale lišit v různých vrstvách. Obecný postup je tedy řešit Maxwellovy rovnice zvlášt v každém prostředí a řešení následně svázané pomocí okrajových podmínek.

Budeme následovat řešení Berremanovou metodou přenosových matic[3]. Po vyjádření Maxwellových rovnic (1.20) maticovou notací mají tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_z/ik_0 & N_y & -1 & 0 & 0 \\ \partial_z/ik_0 & 0 & -N_x & 0 & -1 & 0 \\ -N_y & N_x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & 0 & -\partial_z/ik_0 & N_y \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \partial_z/ik_0 & 0 & -N_x \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & -N_y & N_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ Z_0 H_x \\ Z_0 H_y \\ Z_0 H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Člen prvního řádu<sup>9</sup> nemá plnou hodnost; třetí a šestou rovnici lze přímo vyřešit a dosadit do ostatních. Nejdříve ale zavedeme úsporný blokový maticový zápis

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^\perp = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad H^\perp = \rho \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

$$\varepsilon^\perp = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^| = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^- = (\varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{32}), \quad N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Třetí a šestá rovnice mají tvar

$$N^T \rho E^\perp - Z_0 H_z = 0, \quad \varepsilon^- E^\perp + N^T H^\perp + \varepsilon_{33} E_z = 0, \quad (1.24)$$

vyřešením, dosazením do (1.21) a úpravou dostáváme

$$\partial_z \mathbf{G} = ik_0 \Delta \mathbf{G} \equiv ik_0 \begin{pmatrix} -\frac{N\varepsilon^-}{\varepsilon_{33}} & 1 - \frac{NN^T}{\varepsilon_{33}} \\ \varepsilon^\perp - \frac{\varepsilon^| \varepsilon^-}{\varepsilon_{33}} - \rho N(\rho N)^T & -\frac{\varepsilon^| N^T}{\varepsilon_{33}} \end{pmatrix} \mathbf{G}. \quad (1.25)$$

pro vektor příčných polí  $\mathbf{G} = (E_x, E_y, H_y, -H_x)^T$  a označili jsme Berremanovu matici  $\Delta$ . Složky  $\mathbf{G}$  jsou právě ty, jejichž spojitost na rozhraní diktují okrajové

---

<sup>9</sup>Prvního řádu  $\partial_z$ .

podmínky, takže není třeba se jimi zabývat zvlášť; stačí řešit rovnici (1.25). Uvnitř každé vrstvy (v oblasti s konstantním  $\varepsilon$  a tedy maticí  $\Delta$ ) je řešením maticová exponenciála

$$\mathbf{G}(z_2) = e^{ik_0\Delta(z_2-z_1)} \mathbf{G}(z_1), \quad (1.26)$$

která lze spočítat diagonalizací<sup>10</sup> obecně nehermitovské  $4 \times 4$  matice  $\Delta$ . Matice má 4 komplexní vlastní čísla odpovídající vlnovým vektorům příslušných vlastních módů, které lze rozdělit do dvou skupin: dva módy šířící se ve směru  $+z$  mají<sup>11</sup>  $\Re\{N_z\} \geq 0$ ,  $\Im\{N_z\} \geq 0$ ,  $S_z \geq 0$ ; zbylé dva se šíří ve směru  $-z$  a platí pro ně opačné nerovnice.

Velmi důležitým rozdílem Berremanova přístupu oproti Yehově maticové algebře je, že zatímco v Yehově metodě je diagonalizace a hledání vlastních mód nedílnou součástí již definice základních pojmu formalismu (tzv. dynamické a propagační matice), v Berremanově metodě se uplatňuje pouze jako pomocný výpočet jinak již dobře definované maticové exponenciály (1.26). Diagonalizace a hledání vlastních mód jsou vysoko nelineární operace, jsou singulární v okolí degenerací (limita izotropního  $\varepsilon$ , či směr paprsku shodný s optickou osou) a někdy v nich dokonce selhávají[5, 6, 7, 8].

Tento rozdíl je zásadní v magneto-optice, kde nás často zajímají právě drobné odchylky od izotropní  $\varepsilon$ , a výsledky jsou vyjádřeny do prvního řádu v těchto odchylkách. V Yehově formalismu je obtížné počítat derivace podle složek  $\varepsilon$ ; v (1.26) je to však jednoduché[8]. Z uvedených důvodů v této práci používáme Berremanův formalismus, přestože magneto-optice z velké části dominuje Yehův.

Poruchová teorie v Berremanově formalismu je rozvedena v dodatku A.1.

## Odraz a průchod

Předpokládejme, že se nám podařilo vyřešit (1.25) a tedy najít matici  $\mathfrak{M}$ , která svazuje příčná pole na začátku ( $L$ ) a na konci ( $R$ ) multivrstvy, viz obr. 1.6

$$\mathbf{G}_{(L)} = \mathfrak{M} \mathbf{G}_{(R)}. \quad (1.27)$$

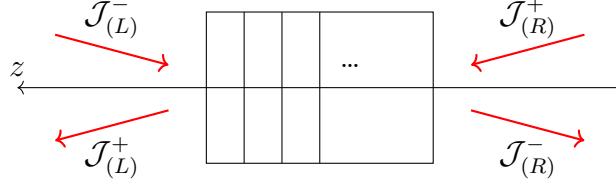
Úloha průchodu a odrazu je typicky zadána tak, že na strukturu posvíťme svazkem s definovaným vlnovým vektorem a polarizací, takže jsou zadány amplitudy dvou módů na levé straně s  $k_z < 0$  (svítíme zleva). Druhou podmínu volíme, že nikdo jiný na strukturu nesvítí, takže amplitudy všech zbylých módů, které přinášejí energii směrem ke struktuře, jsou nulové; to jsou dva módy na pravé straně s  $k_z > 0$ . Na každé straně nám tedy zbývají dva módy, jejichž amplitudy zvýbá určit. Vstupní a výstupní prostředí je nutné v tomto kontextu definovat jako to první, u kterého již nelze zpětné odrazy považovat za koherentní s dopadajícím svazkem (např. kvůli prostorovému oddělení). Např. pro odraz od vzorku na tlustém substrátu je nutné uvažovat jako výstupní prostředí substrát.

Na obou stranách si zvolíme pro  $-z$  i  $+z$  šířící se módy bázi lineárních polarizací, kterými definujeme Jonesovi vektory pro příslušné svazky (pro ilustraci

---

<sup>10</sup>Obecně vzato nemusí být diagonalizovatelná, dovoluje však maximálně dvounásobnou degeneraci (dva módy postupně  $+z$  a dva  $-z$ ), takže v nejpatologičtějším případě má Jordanův tvar dvou  $2 \times 2$  bloků.

<sup>11</sup>Podle (1.5)  $S_z \propto E_x H_y - E_y H_x$ .



Obrázek 1.6: Průchod a odraz od vrstevnatého prostředí. ( $L$ ), resp. ( $R$ ), značí veličiny na levé, resp. pravé straně multivrstvy. Polarizační stav dvojice módů šířících se ve směru  $+z$ , resp.  $-z$ , jsou popsány Jonesovými vektory  $\mathcal{J}^+$ , resp.  $\mathcal{J}^-$ .

viz obr. 1.6)

$$\mathbf{G}_{(L)} = \mathfrak{D}_{(L)} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{(L)}^- \\ \mathcal{J}_{(L)}^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{(R)} = \mathfrak{D}_{(R)} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{(R)}^- \\ \mathcal{J}_{(R)}^+ \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

kde  $\mathfrak{D}$  diagonalizuje  $\Delta$  ve smyslu, že  $\mathfrak{D}^{-1}\Delta\mathfrak{D}$  je diagonální. V Yehově formalismu se nazývají dynamické matice a obsahují ve sloupcích příčná pole jednotlivých módů. V případě degenerace není  $\mathfrak{D}$  jednoznačné – volbou  $\mathfrak{D}$  volíme bázi Jonesových vektorů.

Častá volba  $\mathfrak{D}$  v izotropním prostředí je báze lineárního příčného (TE, s-polarizace) a podélného (TM, p-polarizace) módu. Zde ji uvedeme tak, abychom si usnadvnili práci s téměř kolmým dopadem, nese to však s sebou přechod do báze odraženého světla s opačnou točivostí. Opačný přístup volí opačné znaménko odražené p-polarizace, čímž se zachová točivost (viz např. [17]). Souřadnou soustavu volíme tak, aby rovina dopadu byla rovnoběžná s jednou ze souřadních os, zde zvolíme  $yz$ , takže  $N_x = 0$ ,  $N_y = \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel dopadu. Jako bázi módů volíme lineární polarizace příčné  $J_s$  a podélné  $J_p$  k rovině dopadu, viz. obr. 1.6. Pro prostředí s indexem lomu  $n$  má dynamická matice v této situaci explicitně tvar

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ Z_0 H_y \\ -Z_0 H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_t & 0 & \cos \alpha_t \\ -n \cos \alpha_t & 0 & n \cos \alpha_t & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_s^- \\ J_p^- \\ J_s^+ \\ J_p^+ \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

kde jsme označili  $\cos \alpha_t = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha/n^2}$  úhel lomu.

Při řešení průchodu a odrazu tedy pokládáme  $\mathcal{J}_{(R)}^+ = 0$  a snažíme se vyjádřit zbylé prošlé  $\mathcal{J}_{(R)}^- \equiv \mathcal{J}^t$  a odražené  $\mathcal{J}_{(L)}^+ \equiv \mathcal{J}^r$  pomocí známého dopadajícího  $\mathcal{J}_{(L)}^- \equiv \mathcal{J}^i$ , což lze pomocí matic  $\mathfrak{M}$  a  $\mathfrak{D}$  jednoduše z

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}^i \\ \mathcal{J}^r \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_{(L)}^{-1} \mathfrak{M} \mathfrak{D}_{(R)} \begin{pmatrix} \mathcal{J}^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

což vede na Jonesovy transmisní a reflexní matice Fresnelových koeficientů v bázi s- a p-polarizací

$$\begin{pmatrix} J_s^r \\ J_p^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ss} & r_{sr} \\ r_{ps} & r_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_s^i \\ J_p^i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_s^t \\ J_p^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ss} & t_{sp} \\ t_{ps} & t_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_s^i \\ J_p^i \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Multivrstva složená pouze z izotropních vrstev nemírá s- a p-polarizaci, mimodiagonální členy jsou nulové. Pokud je jedna nebo více vrstev pouze slabě anizotropní, projeví se to malými nenulovými mimodiagonálními členy. Při dopadu např. s-polarizace pak prošlé a odražené světlo nabýde malé amplitudy p-polarizace, v elipsometrických parametrech se to projeví stočením hlavní roviny polarizace  $\Delta\beta$  a ellipticitou  $\chi$ ; podobně pro dopadající p-polarizaci. Oba jevy souhrnně popisuje tzv. komplexní parametr stočení[17], v reflexi s naší konvencí

$$\Psi_s \equiv \Delta\beta_s + i\chi_s \approx \frac{r_{ps}}{r_{ss}}, \quad \Psi_p \equiv \Delta\beta_p + i\chi_p \approx -\frac{r_{sp}}{r_{pp}}. \quad (1.32)$$

V průchodu jsou reflexní koeficienty nahrazeny transmisními. Komplexní parametr stočení se používá při popisu magneto-optických Kerrových jevů.

## 1.4 Magneto-optické tenzory

Všechny magneto-optické (MO) jevy lze v principu vysvětlit závislostí optických parametrů na magnetickém stavu[17]. V našem modelu je jediným materiálovým parametrem tenzor relativní permitivity  $\varepsilon$ . Zaměříme se na feromagnety, závislost na magnetickém stavu značíme  $\varepsilon(\mathbf{M})$ . Obecně je možné rozdělit závislost do tří příspěvků

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(-)}(\mathbf{M}) + \varepsilon^{(+)}(\mathbf{M}), \quad (1.33)$$

kde  $\varepsilon^{(0)}$  je nemagnetická/strukturální permitivita<sup>12</sup>,  $\varepsilon^{(-)}(\mathbf{M}) = -\varepsilon^{(-)}(-\mathbf{M})$  je permitivita lichá v magnetizaci a  $\varepsilon^{(+)}(\mathbf{M}) = \varepsilon^{(+)}(-\mathbf{M})$  je permitivita sudá v magnetizaci.

Z termodynamických úvah plynou Onsagerovy relace reciprocity[18, 19] pro  $\varepsilon(\mathbf{M})$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{M}) = \varepsilon_{ji}(-\mathbf{M}), \quad (1.34)$$

takže  $\varepsilon^{(0)}$  a  $\varepsilon^{(+)}$  jsou symetrické, zatímco  $\varepsilon^{(-)}$  je antisymetrický.

Magnetická závislost permitivity se obvykle rozvíjí do mocninné řady v  $\mathbf{M}$  [10]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{M}) &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial M_k} \right]_{\mathbf{M}=0} M_k + \sum_{k,l=1}^3 \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial M_k \partial M_l} \right]_{\mathbf{M}=0} M_k M_l + \dots \\ &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^3 K_{ijk} M_k + \sum_{k,l=1}^3 G_{ijkl} M_k M_l + \dots = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.35)$$

kde jsme explicitně uvedli první dva řády, které definují *lineární MO tenzor*  $\mathbb{K}$  a *kvadratický MO tenzor*  $\mathbb{G}$ . Vyšší řády se většinou zanedbávají. Je dobré ale mít na paměti, že zakončením rozvoje na určitém řádu nejen snižujeme přesnost, ale také uměle zvyšujeme symetrii  $\varepsilon(\mathbf{M})$  [17]. To je nejlépe nahlédnout např. u materiálu se šesterečnou symetrií v rovině  $xy$ :  $\mathbb{G}$  tenzor je v rovině  $xy$  izotropní, ale permitivita 6. řádu už má “správnou” šesterečnou symetrii. MO tenzory  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{G}$  nedokáží popsat Voigtův jev (viz kap. 2) se šesterečnou symetrií, proto je třeba

---

<sup>12</sup>“Jako kdyby  $\mathbf{M} = 0$ .”

mít se na pozoru a v případě takového kvalitativního důkazu do rozvoje přidat další členy.

MO tenzory se musí podřizovat stejným symetriím jako materiál, který popisuje, což je spolu s Onsagerovými relacemi poměrně silně omezuje. Tvar  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{G}$  pro všechny krystalografické třídy je uveden v [10]. Dále uvedeme MO tenzory pro izotropní a kubický (krystalové třídy  $\bar{4}3m$ ,  $432$ ,  $m3m$ ) materiál s krystalografickými osami ve směrech souřadných os [20, 10]. Izotropní i kubický materiál mají izotropní nemagnetickou permitivitu (index lomu  $n$ )

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

oba také mají izotropní  $\mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{yz}^{(1)} = -\varepsilon_{zy}^{(1)} \\ \varepsilon_{zx}^{(1)} = -\varepsilon_{xz}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} = -\varepsilon_{yx}^{(1)} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = K \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y \\ -M_z & 0 & M_x \\ M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

ale v druhém řádu už se liší. Pro kubický materiál s hlavními krystalografickými směry ve směrech souřadných os platí (používáme 2-indexovou notaci jako [20])

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ \varepsilon_{yz}^{(2)} = \varepsilon_{zy}^{(2)} \\ \varepsilon_{zx}^{(2)} = \varepsilon_{xz}^{(2)} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} = \varepsilon_{yx}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{11} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{12} & G_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x^2 \\ M_y^2 \\ M_z^2 \\ M_y M_z \\ M_z M_x \\ M_x M_y \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

pro izotropní navíc  $\Delta G \equiv G_{11} - G_{12} - 2G_{44} = 0$ . Pro pozdější použití uvedeme pro speciální případ  $M_z = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(2)} &= G_{12} |\mathbf{M}|^2 \\ &+ \frac{G_s}{2} \begin{pmatrix} M_x^2 & M_x M_y & 0 \\ M_x M_y & M_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta G}{2} \begin{pmatrix} M_x^2 & -M_x M_y & 0 \\ -M_x M_y & M_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

kde  $G_s = G_{11} - G_{12} + 2G_{44}$ . Pro úplnost připomeneme, že složky MO tenzorů jsou stejně jako relativní permitivita  $\varepsilon$  komplexní, bezrozměrné a frekvenčně závislé. Pokud je materiál dobře popsaný MO tenzory, lze pro libovolné  $\mathbf{M}$  dosazením do (1.35) získat  $\varepsilon$ , aplikovat metodu z oddílu 1.3 a tak spočítat všechny myslitelné transmisní a reflexní koeficienty.

Uvedený přístup není možné použít v případě, že osvětlované místo vzorku není tvořené homogenním  $\mathbf{M}$ , ale je tvořené více doménami, ve kterých se  $\mathbf{M}$  liší.  $\mathbf{M}$  je ve více-doménovém stavu dané průměrem přes domény. Pro  $\mathbb{K}$  to nečiní problém, protože pro průměrné  $\mathbf{M}$  dostaneme průměrné  $\varepsilon$ , ale pro  $\mathbb{G}$  to již neplatí.

## 1.5 Magnetická anizotropie

Magnetizace  $\mathbf{M}$  materiálu není veličina, která by se dala v experimentu přímo ovládat. V experimentu můžeme aplikovat vnější pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  a materiál si sám najde rovnovážnou polohu  $\mathbf{M}$ . Na druhou stranu magnetooptické vlastnosti, jak je patrné z předchozího oddílu, závisí od  $\mathbf{M}$ . Tento oddíl se věnuje vztahu mezi  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ .

Pro ilustraci budeme uvažovat systém s homogenní magnetizací. Z vnitřní energie vyčleníme energii samotného vnějšího magnetického pole, které by bylo přítomno i při absenci systému, a zahrneme pouze magnetickou energii spojenou se systémem tak, jak je popsáno v dodatku učebnice [21]. Vnější pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  tedy uvažujeme jako čistě pole tvořené externími zdroji a nezahrnuje demagnetizační pole. Magnetický příspěvek hustoty vnitřní energie pak má tvar[21]

$$dU_{\text{mag}} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{M} . \quad (1.40)$$

Pokud je udržovaný na teplotě  $T$ , udává jeho termodynamické vlastnosti hustota volné energie  $F(T, \mathbf{M})$ [21]. Aby mohl být systém v rovnováze při konkrétním  $\mathbf{M}$ , musí externí pole jakožto přidružený intenzivní parametr splňovat

$$\mu_0 H_{\text{ext}}(\mathbf{M}) = \nabla_{\mathbf{M}} F(\mathbf{M}) . \quad (1.41)$$

Radši bychom ale znali rovnovážné  $\mathbf{M}$  v situaci, kdy je systém obklopen magnetickým polem  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  tvořeným např. cívkami elektromagnetu. Mezi magnetem a studovaným systémem dochází k výměně energie prostřednictvím magnetického pole, systém je v kontaktu s "magnetickým rezervoárem" a v rovnováze proto dochází k minimalizaci celkové volné energie. V souladu s teorií termodynamických potenciálů tedy přejdeme k Legendrově transformaci v  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  – hustotě "magnetické entalpie"<sup>13</sup> systému[22]

$$\Omega(T, \mathbf{H}_{\text{ext}}) = -\mu_0 \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{H}_{\text{ext}}) + F(\mathbf{M}(\mathbf{H}_{\text{ext}})) . \quad (1.42)$$

Princip minima termodynamických potenciálů nám říká, že pro libovolné pevné  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  bude  $\mathbf{M}$  nabývat takové hodnoty, která minimalizuje  $\Omega$ . V obecné situaci, kdy magnetizace není homogenní a jednotlivá místa systému spolu interagují, může volná energie být obecným nelokálním funkcionálem prostorového rozložení magnetizace. Hustota  $F(\mathbf{M})$  se proto nazývá *funkcionál volné energie*.

Široce používaný model feromagnetů v jedno-doménovém stavu je tzv. Stoner-Wohlfarthův model[9]. Předpokládá, že funkcionál  $F(\mathbf{M})$  má význam pouze lokální hustoty a  $\mathbf{M}$  je tedy dána minimalizací (1.42). Ve formě, v jaké SW model budeme používat, zahrnujeme do volné energie 4 příspěvky[23, 24, 25]

$$F = F^{\text{exchange}} + F^{\text{magnetocrystalline}} + F^{\text{shape}} + F^{\text{strain}} . \quad (1.43)$$

První člen, způsobený výměnnou interakcí, má na svědomí feromagnetismus; závisí na celkové velikosti magnetizace  $|\mathbf{M}|$  a má ostré minimum pro saturovanou magnetizaci  $|\mathbf{M}| = M_S$  – všechny mikroskopické magnetické momenty jsou orientované stejným směrem. Magnetokrystalická anizotropie  $F^{\text{magnetocrystalline}}$  popisuje interakci s krystalickou mřížkou, tvarová anizotropie  $F^{\text{shape}}$  popisuje vliv tvaru

---

<sup>13</sup>Někdy označované jako magnetický Gibbsův potenciál.

vzorku a strainová anizotropie  $F^{\text{strain}}$  popisuje anizotropie způsobené mechanickým napětím (např. když je vzorek nanesen na substrátu s odlišnou mřížkovou konstantou).

Dále se omezíme na situaci relevantní pro tuto práci. Vzorek je feromagnetický a vlivem výměnné interakce je magnetizace vždy saturovaná. Vzorek je kubický tenký film s krystalografickými směry [100], [010] a [001] shodnými s kladnými poloosami  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Tvarová anizotropie silně potlačuje out-of-plane magnetizaci a vzhledem k tomu, že budeme přikládat magnetické pole přibližně v rovině  $xy$  s maximální velikostí 207 mT, zanedbáváme třetí složku magnetizace  $M_z$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = M_S \begin{pmatrix} \cos \varphi_M \\ \sin \varphi_M \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Magnetokrystalická anizotropie se rozvine do mocninné řady v  $\mathbf{M}$  a ponechá se pouze nejnižší člen respektující kubickou symetrii, s uvážením (1.44)

$$\frac{F^{\text{magnetocrystalline}}}{M_S} = k_4 \sin^2 \varphi_M \cos^2 \varphi_M, \quad (1.45)$$

čímž jsme definovali kubickou anizotropní konstantu  $k_4$ . Pro  $k_4 > 0$  má minima – snadné osy – ve směrech [100] a [010] (tj.  $\varphi_M = 0^\circ, 90^\circ$ ), pro  $k_4 < 0$  jsou to [110] a [1-10] (tj.  $\varphi_M = 45^\circ, 135^\circ$ ).

Navíc povolíme uniaxiální strainovou anizotropii. Také ji rozvineme do řady a podpoření tím, že mechanické napětí v rovině má principiálně uniaxiální charakter, ponecháme pouze první člen a opět vydělíme  $M_S$  pro definici uniaxiální anizotropní konstanty  $k_u$  a směru  $\varphi_u$ .

$$\frac{F^{\text{strain}}}{M_S} = k_u \sin^2 (\varphi_M - \varphi_u). \quad (1.46)$$

$\varphi_u$  je takto definováno vzhledem ke krystalografickému směru [100]. Je dostačující omezit se na  $k_u \geq 0$ , snadné směry jsou pak ve  $\varphi_M = \varphi_u, \varphi_u + 180^\circ$ . Obě hodnoty  $\varphi_u$  a  $\varphi_u + 180^\circ$  popisují stejné  $F^{\text{strain}}$ , takže pokud v konkrétním případě nemáme důvod konat jinak (např. z důvodu spojitosti), omezujeme se na  $\varphi_u \in [0^\circ, 180^\circ]$ .

Kanonický tvar funkcionálu volné energie tenkého kubického filmu v rovině  $xy$  orientovaného [100] =  $x$  tedy píšeme

$$\frac{F(\varphi_M)}{M_S} = k_4 \sin^2 \varphi_M \cos^2 \varphi_M + k_u \sin^2 (\varphi_M - \varphi_u). \quad (1.47)$$

Pro  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  v rovině  $xy$

$$\mathbf{H}_{\text{ext}} = H_{\text{ext}} \begin{pmatrix} \cos \varphi_H \\ \sin \varphi_H \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

je  $\varphi_M(\varphi_H)$  dáno minimalizací hustoty magnetické entalpie (vydelené konstantním  $M_S$ )

$$\frac{\Omega}{M_S} = -\mu_0 H_{\text{ext}} \cos (\varphi_M - \varphi_H) + k_4 \sin^2 \varphi_M \cos^2 \varphi_M + k_u \sin^2 (\varphi_M - \varphi_u). \quad (1.49)$$

Dělení  $M_S$  zavádíme, aby anizotropní konstanty  $k_4$  a  $k_u$  měly dimenzi magnetického pole a byly přímo porovnatelné s experimentálně ovladatelným  $\mu_0 H_{\text{ext}}$ , bez nutnosti znalosti  $M_S$ .

Pro praktické účely je výhodné vyjádřit (1.47) ekvivalentním způsobem pro vzorek obecně natočený v rovině  $xy$  o úhel  $\gamma$ , tzn. [100] je ve směru vektoru  $(\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ . Pak až na bezvýznamnou aditivní konstantu

$$\frac{F(\varphi_M)}{M_S} = -\frac{k_4}{8} \cos 4(\varphi_M - \gamma) - \frac{k_u}{2} \cos 2(\varphi_M - \gamma - \varphi_u) \quad (1.50a)$$

$$= \tilde{k}_4 \frac{-e^{-i4\varphi_M}}{16} + \tilde{k}_u \frac{-e^{-i2\varphi_M}}{4} + \text{c. c.}, \quad (1.50b)$$

kde c. c. značí komplexně sdružený předešlý výraz a neobvyklá normalizace je volena tak, aby

$$\tilde{k}_4 = k_4 e^{i4\gamma}, \quad \tilde{k}_u = k_u e^{i2(\gamma+\varphi_u)}. \quad (1.51)$$

Pro in-plane magnetickou anizotropii se zavádí tzv. *torque*<sup>14</sup> jako derivace volné energie  $L = -dF/d\varphi_M$ . Podmínka minima  $\Omega$  má pak tvar

$$L(\varphi_M) = \mu_0 H_{\text{ext}} M_S \sin(\varphi_M - \varphi_H). \quad (1.52)$$

Existence volné energie klade netriviální požadavky na průběh  $\mathbf{M}(\mathbf{H}_{\text{ext}})$  – podmínku integrability. Pro relevantní situaci saturované in-plane magnetizace a rotujícího vnějšího pole konstantní velikosti má tvar

$$\mu_0 H_{\text{ext}} M_S \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} \sin(\varphi_M - \varphi_H) d\varphi_H = 0, \quad (1.53)$$

za podmínky, že  $\varphi_M$  je spojitou funkcí  $\varphi_H$  – nedochází k přeskokům magnetizace.

Důsledkem je např. intuitivní fakt, že z myslitelných průběhů  $\varphi_M(\varphi_H) = \varphi_H + c$  je jediný možný ten, pro který  $c = 0$ ; není možné, aby magnetizace konzistentně “předbíhala” nebo se “opožďovala” za přiloženým polem. Pokud z experimentu dokážeme určit pouze  $d\varphi_M/d\varphi_H$ , podmínka (1.53) nám dovoluje určit integrační konstantu. Podrobnosti jsou uvedeny v dodatku A.2.

---

<sup>14</sup>Česky točivý moment.

## 2. Vybrané metody experimentální magneto-optiky

V této kapitole se zaměříme na magnetooptické (MO) jevy – jakým způsobem se tenzor permitivity závislý na magnetickém stavu projevuje v experimentu. Změna permitivity se přirozeně projeví změnou transmisních a reflexních koeficientů, a tím pádem i v polarizačním stavu prošlého a odraženého světla. Typický magnetooptický experiment tedy zkoumá polarizační stav světla po průchodu či odrazu od magnetooptického materiálu, měřenou veličinou je obvykle buď úhel natočení hlavní roviny polarizace  $\beta$ , ellipticitu  $\chi$  nebo méně často intenzitu  $I$ , v závislosti na magnetickém stavu. Magnetooptické experimenty mají společné to, že u měřené veličiny většinou nelze prakticky určit absolutní hodnotu a je nutné měřit pouze rozdíly[17]. Navíc se tato absolutní hodnota mění při změně většiny parametrů experimentu (např. posunutí/otočení čehokoliv), a jako nejčastější z mála možností je měřit rozdíl signálu při různých magnetických stavech. To se realizuje např. změnou přiloženého vnějšího pole, současným pozorováním regionů v různých magnetických stavech (MO mikroskopie), nebo časově rozlišeným pozorováním po aplikaci silného krátkého laserového pulzu (pump-probe metody).

Jediná podmínka na zkoumaný materiál je, aby existoval v různých magnetických stavech. Ty jsou nejčastěji charakterizované magnetizací  $\mathbf{M}$  – MO jevy byly pozorovány v diamagnetikách, paramagnetikách, feromagnetikách – není to ale podmínkou, existují i v kompenzovaných antiferomagnetech (AFM)[26], ve kterých celková magnetizace vymizí.

MO jevy lze pozorovat v transmisi i v refleksi. Reflexní jevy se souhrnně nazývají MO Kerrový jevy (MOKE). Pro Kerrový jevy existuje ustálená notace výsledků měření[17]. Kvůli praktickým účelům bývá nenulový úhel dopadu a jako vstupní polarizace se zpravidla volí buď s- nebo p-polarizace. Změna polarizačního stavu po odrazu je popsána tzv. Kerrovou rotací a Kerrovou ellipticitou vyjádřenými společně komplexní Kerrovou rotací  $\Psi_{s/p}$  jako v (1.32).

Dalším přirozeným dělením MO jevů je třídění na liché a sudé v magnetizaci, což vzhledem k běžnému zanedbání jevu třetího a vyššího řádu splývá s dělením na lineární a kvadratické. Tradičně však toto dělení nerozlišuje magnetickou závislost permitivity (vyjádřenou MO tenzory  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{G}$ ), ale pozorovaných veličin (např.  $\beta$ ,  $\chi$ , příp. transmisní/reflexní koeficienty). Závislost měřitelných veličin na  $\varepsilon$  je nelineární, a proto mohou být kvadratické jevy způsobeny i lineárním tenzorem  $\mathbb{K}$ : např. v kvadratickém Voigtově jevu (viz níže) vystupuje i člen  $(\varepsilon^{(1)})^2 \propto \mathbb{K}^2 \mathbf{M}^2$ , který je někdy označovaný jako *beam walk-off*[27]. Lineární jevy mohou naopak být způsobeny jedině lineárním  $\mathbb{K}$ .

Zmíníme ještě jedno dělení MO jevů: na základě toho, jaký druh optické anizotropie do vzorku zavádí magnetická permitivita[28]. Anizotropie může mít charakter dvojlomu (anizotropie  $\Re \{n\}$  – rozdílná fázová rychlosť) nebo dichroismu (anizotropie  $\Im \{n\}$  – rozdílný absorpční koeficient). Druhou charakteristikou optické anizotropie jsou vlastní módy, pro které se daná vlastnost liší – v nejjednodušším případě jsou to lineární<sup>1</sup> nebo kruhové polarizace. Kombinací těchto

<sup>1</sup>Slovo lineární má zde význam lineární polarizace; nesouvisí s dělením na lineární a kvadratické jevy výše. MLD je kvadratický jev.

charakteristik dělíme jevy na magnetický lineární/kruhový dvojlom/dichroismus: MLB, MLD, MCB, MCD<sup>2</sup>. Toto dělení se ale v reflexi používá z “pedantského” pohledu chybným způsobem: jako MLD se někdy označuje anizotropie reálné části *reflexního koeficientu*, která je však spjatá s anizotropií reálné i imaginární části indexu lomu – tj. MLB i MLD[29].

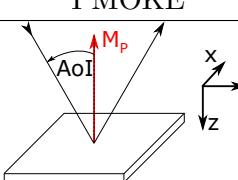
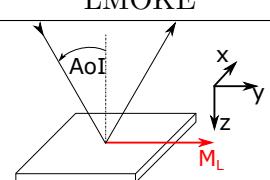
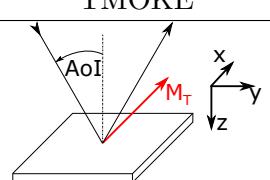
Poznamenáme, že pro intuitivní a dokonce i kvantitativní pochopení vlivu průchodu světla vzorkem vykazujícím jednu z uvedených anizotropií je dostačující grafické znázornění Muellerových matic zavedené v oddílu 1.2.2. Dvojlomný vzorek (obecný retardér) provádí otáčení a dichroický (obecný diatenuátor) protahování a posouvání ve směru osy procházející příslušnými lineárními/kruhovými módy.

**Lineární jevy** Jsou obecně silnější a navíc mají tu výhodu, že díky opačným znaménkám signálu pro opačné směry magnetizace lze často jednoduše oddělit signál od nemagneto-optického pozadí. V reflexi se lineární Kerrovovy jevy rozlišují podle toho, na jaké složky magnetizace jsou citlivé, viz obr. 2.1[17].

- Polární (PMOKE) -  $\mathbf{M}$  kolmé na rozhraní.
- Longitudinální (LMOKE) -  $\mathbf{M}$  v rovině rozhraní a rovině dopadu.
- Transverzální (TMOKE) -  $\mathbf{M}$  v rovině rozhraní a kolmo na rovinu dopadu.

LMOKE a TMOKE jsou nulové při kolmém dopadu, a při téměř kolmém dopadu jejich amplituda roste lineárně s úhlem dopadu. PMOKE je nenulový i při kolmém dopadu.

V transmisi se vyskytují podobné jevy, z nichž samostatný název má jako jediný polární - Faradayův jev (MCB) objevený jako první už v roce 1845, ještě před formulací Maxwellových rovnic[28].

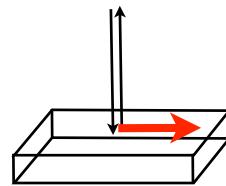
PMOKE	LMOKE	TMOKE
		
$\begin{bmatrix} \varepsilon_d & -\varepsilon_1(M_z) & 0 \\ \varepsilon_1(M_z) & \varepsilon_d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_d & 0 & \varepsilon_1(M_y) \\ 0 & \varepsilon_d & 0 \\ -\varepsilon_1(M_y) & 0 & \varepsilon_d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_d & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_d & -\varepsilon_1(M_x) \\ 0 & \varepsilon_1(M_x) & \varepsilon_d \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} r_{ss} & r_{sp}(M_z) \\ r_{ps}(M_z) & r_{pp} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r_{ss} & r_{sp}(M_y) \\ r_{ps}(M_y) & r_{pp} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r_{ss} & 0 \\ 0 & r_{pp} + \Delta r_{pp}(M_x) \end{bmatrix}$

Obrázek 2.1: Lineární Kerrovovy jevy. Předposlední řádek uvádí tvar permitivity  $\varepsilon$  izotropního materiálu s danou magnetizací. Poslední řádek výslednou reflexní Jonesovu matici. [17]

<sup>2</sup>Angl. Magnetic Linear/Circular Birefringence/Dichroism.

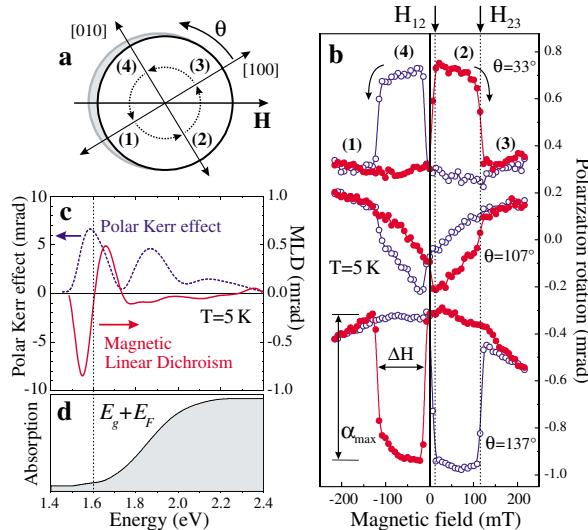
**Kvadratické jevy** Zatímco lineární magnetooptika se stala užitečným nástrojem v mnoha oborech, kvadratická dlouho unikala pozornosti. Prakticky jediná situace, ve které je díky vymízení lineárních jevů možné pozorovat čistě kvadratické jevy, je kolmý dopad s transverzální magnetizací<sup>3</sup>, jak znázorňuje obr. 2.2. Poprvé byl kvadratický jev pozorován v transmisi – Voigt v roce 1902 pozoroval v plynech stočení kvadraticky závislé na transverzálním magnetickém poli a v roce 1907 to samé v kapalinách nezávisle pozorovali Cotton a Mouton[28]. Z pohledu třídění magneto-optických anizotropií se jedná o MLD, jev se často nazývá Voigtův či Cottonův-Moutonův. V reflexi se kvadratické jevy nazývají souhrnně jako kvadratické MOKE (QMOKE), případně reflexní Voigtův, Cotton-Moutonův jev nebo reflexní analogie MLD.

Transmisní i reflexní verze tohoto jevu jsou ústředním tématem této práce a pro jednoduchost je dále budeme nazývat souhrnně MLD.



Obrázek 2.2: Voigtova geometrie. Světlo dopadá kolmo na rozhraní a magnetizace je transverzální (v rovině rozhraní). [29]

Kvadratické jevy se postupem času ukázaly jako obecně téměř všudypřítomné a nezanedbatelné. V roce 2005 byl v magnetickém polovodiči GaMnAs pozorován v reflexi při téměř kolmém dopadu *obří* MLD - kvadratické stočení polarizace, které bylo svou velikostí srovnatelné s lineárními jevy[30]. K pozorování bylo využito chování hysterezních smyček v materiálech se čtyřmi snadnými osami, viz obr. 2.3.



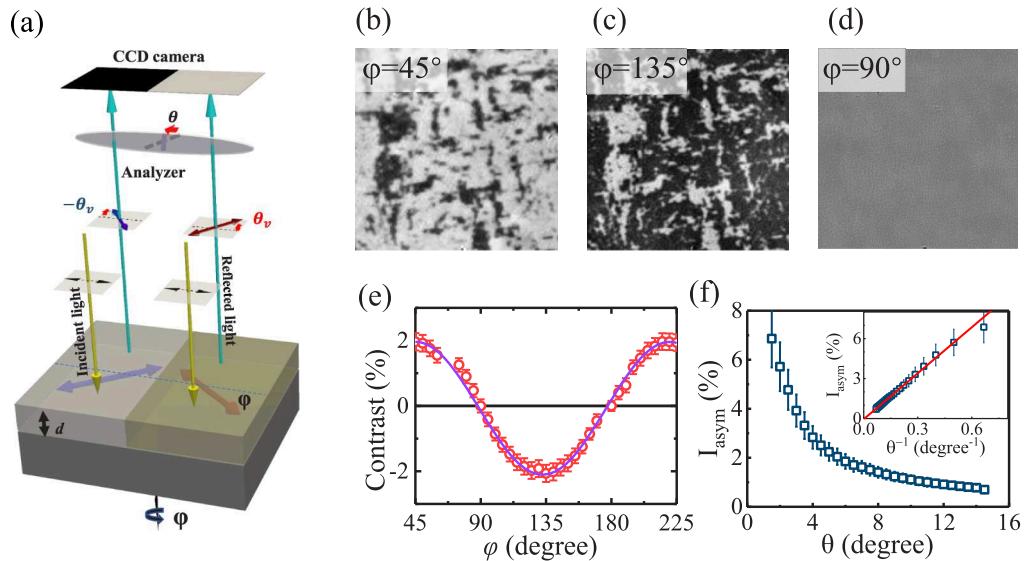
Obrázek 2.3: Obří MLD v GaMnAs. (a) Snadné osy magnetizace označené čísly (1)–(4). (b) Stočení polarizace v při aplikaci vnějšího pole ve směru  $\theta$ . Spektrální závislost (c) síly MO jevů a (d) absorpcie. [30]

<sup>3</sup>Nebo nulový  $\mathbb{K}$  tenzor jako v případě kolineárních AFM.

Silné MLB a MLD bylo také pozorováno při nízkých teplotách v paramagnetickém terbium-galiovém granátu (TGG)[27] a obecně jsou často silné v Heuslerových sloučeninách[31]. V roce 2020 byl pozorován obří QMOKE v tenkém filmu (Eu,Gd)O dosahující stočení až  $1^\circ$ [32].

Jedním z důvodů, proč se v současné době kvadratické jevy těší vysoké popularitě, je skutečnost, že kvadratický tenzor  $\mathbb{G}$  dovoluje výrazně širší třídu symetrií materiálů než lineární  $\mathbb{K}$ ; mezi ně se řadí např. zmíněné kolineární AFM. AFM byly již dříve předmětem intenzivního spintronického výzkumu [33, 34], s objevem nové třídy magnetických materiálů – *altermagnetů*[35] – se opět dostávají na výsluní.

Co se týče praktického použití kvadratických jevů pro studium AFM, byly využity např. pro určení Néelova vektoru v CuMnAs[26], pro mikroskopii AFM domén[36] tenkých filmů NiO (viz obr. 2.4) a pro pozorování reakcí Fe<sub>2</sub>As na ultrarychlé změny teploty[37].



Obrázek 2.4: Pozorování antiferomagnetických domén v tenkém filmu NiO. (a) Schéma experimentu: je zkoumán rozdíl stočení polarizace při odraze od domén s vzájemně kolmou orientací Néelova vektoru. (b–e) Závislost pozorovaného odrazu na natočení vstupní lineární polarizace. [36]

V nejjednodušším případě Voigtovy geometrie, kdy má navíc magnetická závislost permitivity plnou symetrii prázdného prostoru ( $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{G}$  i všechny vyšší rády jsou izotropní), má stočení polarizace vlivem Voigtova jevu jednoduchý tvar s fenomenologickým parametrem  $P$  popisujícím amplitudu jevu[38]

$$\Delta\beta = P \sin(2(\varphi_M - \beta)) . \quad (2.1)$$

Ani kubické krystaly však obecně nemají izotropní  $\mathbb{G}$ [20], a navíc pro měření odrazu se často používá malý, ale nenulový úhel dopadu, který vnese do signálu i lineární MOKE, takže je třeba využít plného formalismu představeného v kap. 1. To je sice v principu možné pro každou konkrétní situaci, ale pro interpretaci experimentu je nutné mít nějaký fenomenologický vzorec typu (2.1), který je platný pro širší třídu situací.

Šíkmý odraz na polonekonečném (bulk) [001]-normálově orientovaném kubickém vzorku s omezením na in-plane magnetizaci byl spočítán pomocí Yehovy metody v [39]. Jiná situace byla spočítána Berremanovou metodou v [40]: odraz na struktuře tvořené izotropním polonekonečným substrátem, ultra-tenkým<sup>4</sup> filmem se zcela obecně anizotropním tenzorem permitivity, a izotropní nadvrstvou. Dosazením magnetické permitivity pro [001] orientovaný kubický vzorek in-plane otočený o úhel  $\gamma$ , jako v (1.50), je pak reprodukován stejný tvar vzorce jako pro polonekonečný vzorek

$$\begin{aligned}\Psi_{s/p} = A_{s/p} & \left[ 2G_{44} - \frac{K^2}{\varepsilon^0} + \frac{\Delta G}{2}(1 - \cos 4\gamma) \right] M_x M_y \\ & + A_{s/p} \left[ \frac{\Delta G}{4} \sin 4\gamma \right] (M_x^2 - M_y^2) \pm B_{s/p} K M_y, \quad (2.2)\end{aligned}$$

kde  $A_{s/p}$  a  $B_{s/p}$  jsou vážící konstanty závisející na úhlu dopadu a na parametrech substrátu a nadvrstvy.  $A_{s/p}$  je sudou a  $B_{s/p}$  lichou funkcí úhlu dopadu, jejich konkrétní tvar je uveden v příslušných původních článcích [39, 40]. Detaily ohledně konvencí lze také nalézt v [17]. Vliv izotropního substrátu a nadvrstvy je diskutován metodou efektivních rozhraní v [41].

V uvedeném vzorci (2.2) jsou patrné dva druhy příspěvků: lineární v  $\mathbf{M}$ , který vymizí při kolmém dopadu a kvadratický v  $\mathbf{M}$ , který je nenulový i při kolmém dopadu. Jak bylo avizováno, kvadratický člen v sobě zahrnuje i lineární permitivitu  $K^2$ . Lze také vidět, že při kolmém dopadu  $B_{s/p} = 0$  a izotropním  $\mathbb{G}$  ( $\Delta G = 0$ ) nezáleží signál na natočení vzorku a dostaneme

$$\Psi_{s/p} = A_{s/p} \left[ 2G_{44} - \frac{K^2}{\varepsilon^0} \right] M_x M_y, \quad (2.3)$$

což je ekvivalentní (2.1).

Při nekolmém dopadu se lineární i kvadratický člen sčítají a pro kvantitativní analýzu je třeba je nějakým způsobem oddělit. Metodám, které se tím zabývají, se věnujeme v dále uvedených částech této kapitoly.

## 2.1 Optický můstek

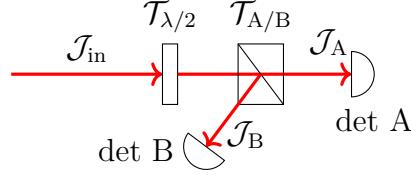
V MO experimentech, ve kterých se měří stočení hlavní roviny polarizace či elipticita, se často využívá schéma optického můstku<sup>5</sup> [17]. V jednoduché formě je znázorněn na obr. 2.5.

Ústředním prvkem je polarizační dělič (často typu Glan Laser či Wollastonův hranol), který rozdělí svazek do dvou lineárně polarizovaných ramen. Při měření je nejprve nastaven úhel rotace půlvlnné destičky  $\theta_{\lambda/2}$  (tzv. "vyvážení můstku") tak, aby oba detektory naměřily stejnou intenzitu. Pro ideální prvky platí v Jonesově

---

<sup>4</sup> $nd/k_0 \ll 1$ , kde  $n$  je index lomu a  $d$  tloušťka vrstvy.

<sup>5</sup>Angl. *optical bridge*, také *differential intensity measurement*.



Obrázek 2.5: Optický můstek. Naznačeny jsou Jonesovy vektory v určitých místech a matice jednotlivých prvků.

formalismu

$$\mathcal{J}_A = \mathcal{T}_A \mathcal{T}_{\lambda/2} \mathcal{J}_{in}, \quad \mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4a)$$

$$\mathcal{J}_B = \mathcal{T}_B \mathcal{T}_{\lambda/2} \mathcal{J}_{in}, \quad \mathcal{T}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4b)$$

$$\mathcal{T}_{\lambda/2} = \mathcal{R}(\theta_{\lambda/2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{R}(-\theta_{\lambda/2}), \quad \mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.4c)$$

Dosazením Jonesova vektoru (1.8) pro natočení hlavní roviny polarizace  $\beta$  a ellipticitu  $\chi$  dostaneme rozdíl intenzit

$$I_A - I_B \equiv \mathcal{J}_A^\dagger \mathcal{J}_A - \mathcal{J}_B^\dagger \mathcal{J}_B = -I \cos 2\chi \cos(2\beta - 4\theta_{\lambda/2}), \quad I_A + I_B = I \quad (2.5)$$

Vyvážením můstku nastavíme  $\cos(2\beta - 4\theta_{\lambda/2}) = 0$ . V řeči diferenciálních forem pak pro malé změny  $\mathcal{J}_{in}$  (vyjádřené pomocí  $d\beta, d\chi, dI$ ) platí

$$d(I_A - I_B) = \pm 2I \cos(2\chi) d\beta, \quad (2.6)$$

kde znaménko je určeno tím, jaký konkrétní uzel  $\cos(2\beta - 4\theta_{\lambda/2})$  byl vyvážením můstku nastaven. V měřeném signálu se tedy neprojeví změny ellipticity ani intenzity. Pro vstupní lineární polarizaci ( $\chi = 0$ ) můžeme měřený rozdílový signál normovat součtovým a dostat

$$\frac{1}{2} \frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} = \Delta\beta, \quad (2.7)$$

kde jsme označili  $\Delta\beta$  stočení polarizace. Vhodným vložením čtvrtvlnné destičky lze měřit i ellipticitu[17].

Optický můstek vždy měří pouze relativní změny  $\Delta\beta$  (příp.  $\Delta\chi$ ) vůči vyváženému stavu, který se nemusí shodovat s “referenčním”<sup>6</sup> stavem, vůči kterému je  $\Delta\beta$  modelováno. Tuto skutečnost vyjadřujeme neznámou aditivní konstantou  $\xi$  ( $\Delta\beta_{měřený} = \Delta\beta_{model} + \xi$ ).

Optický můstek zlepšuje úroveň šumu dvěma způsoby. Zaprvé se neprojevují fluktuace intenzity (jsou stejné v obou ramenech); zadruhé pak dochází k odečítání blízkých signálů již na úrovni předzesilovače. Detailnějšímu popisu optického můstku se věnuje oddíl 4.2.

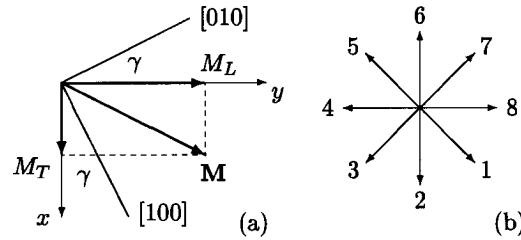
---

<sup>6</sup>Většinou nedosažitelný stav  $M = 0$ .

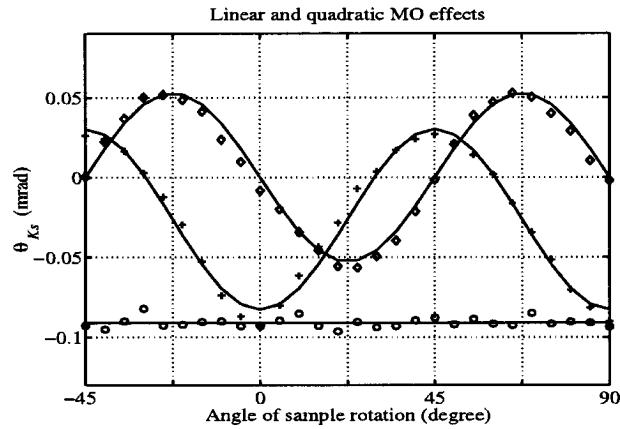
## 2.2 Osmisměrná metoda

Základem osmisměrné metody[39] je vzorec (2.2). Všechny tři členy mají různou závislost na směru magnetizace, takže měřením signálu pro různé směry in-plane magnetizace je možné je od sebe oddělit. V praxi se měří stočení polarizace, případně ellipticity pro 8 směrů vnějšího pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  jako na obr. 2.6 (b). Koeficienty jednotlivých členů (2.2) se pak získají vhodnými součty a odečty signálu v různých směrech. Podmínkou je však striktní magnetická saturace, tj. pole musí být dostatečně silné, aby magnetizace byla pro všechny směry saturovaná ve směru pole (aby vždy platilo  $\varphi_M = \varphi_H$  a  $|\mathbf{M}| = M_S$ ).

Měření je opakováno pro různé natočení vzorku  $\gamma$ , změřené koeficienty pak sledují závislost podle vzorce (2.2), viz obr. 2.7. Vzorec (2.2) v tomto tvaru platí pouze pro [001] orientované vzorky, nicméně metoda byla rozšířena pro [011] a [111]-normálově orientované kubické vzorky, ve kterých má podobný tvar[17, 20].



Obrázek 2.6: Osmisměrná metoda. (a) Vzorek je otáčen v rovině  $xy$  o úhel  $\gamma$ . (b) Osm pevných směrů, ve kterých je přikládáno magnetické pole. [39]



Obrázek 2.7: Naměřená závislost koeficientů MO jevů na natočení vzorku (epitaxní vrstva Fe na MgO). (o) koeficient lineárního jevu, (+) koeficient  $M_x M_y$ , (◊) koeficient  $M_x^2 - M_y^2$ . Harmonická závislost potvrzuje platnost vzorce (2.2) a striktní magnetickou saturaci v daném případě. [39]

## 2.3 Metoda rotujícího pole a ROTMOKE

Metoda rotujícího pole[42, 43] rozšiřuje osmisměrnou metodu na Stoner-Wohlfarthův model: Předpokládá se, že  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  je dostatečně silné na to, aby vzorek

byl v jednodoménovém stavu a magnetizace byla saturovaná  $|\mathbf{M}| = M_S$ , ale nedostatečně na to, aby se neprojevila magnetická anizotropie, tj.  $\varphi_M \neq \varphi_H$ .

Přiložené pole se při konstantí velikosti otáčí v rovině vzorku a je měřeno stočení polarizace (příp. elipticitu), viz obr. 2.8. Předpokladem pro oddělení lineárního a kvadratického příspěvku, který supluje striktní magnetickou saturaci osmisměrné metody, je zde symetrie in-plane inverze magnetické anizotropie, tj.  $\mathbf{M}(-\mathbf{H}_{\text{ext}}) = -\mathbf{M}(\mathbf{H}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow \varphi_M(\varphi_H + 180^\circ) = \varphi_M(\varphi_H) + 180^\circ$ . Pokud není narušená, lineární  $\Psi^L$ , resp. kvadratický  $\Psi^Q$  příspěvek signálu je lichý, resp. sudý nejen v  $\mathbf{M}$ , ale i v  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ ; proto je možné je jednoduše oddělit<sup>7</sup>

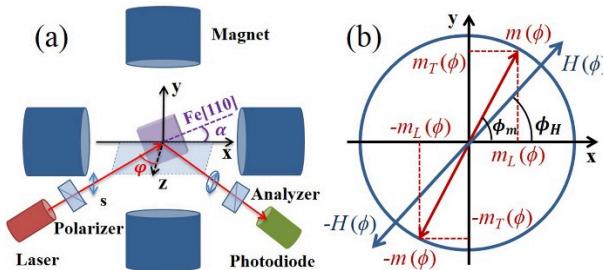
$$\Psi^L(\varphi_H) = \frac{1}{2} [\Psi(\varphi_H + 180^\circ) - \Psi(\varphi_H)] , \quad (2.8a)$$

$$\Psi^Q(\varphi_H) = \frac{1}{2} [\Psi(\varphi_H + 180^\circ) + \Psi(\varphi_H)] . \quad (2.8b)$$

Lineární signál má podle (2.2) jednoduchou závislost na směru magnetizace, takže z něj lze odečíst magnetickou anizotropii, tj.  $\varphi_M(\varphi_H)$

$$\Psi^L(\varphi_H) \propto \cos(\varphi_M(\varphi_H)) , \quad \cos \varphi_M = \Psi^L(\varphi_H) / \Psi_{\max}^L , \quad (2.9)$$

kde  $\Psi_{\max}^L$  je maximální naměřený lineární signál pro  $\varphi_M = 0^\circ$ .



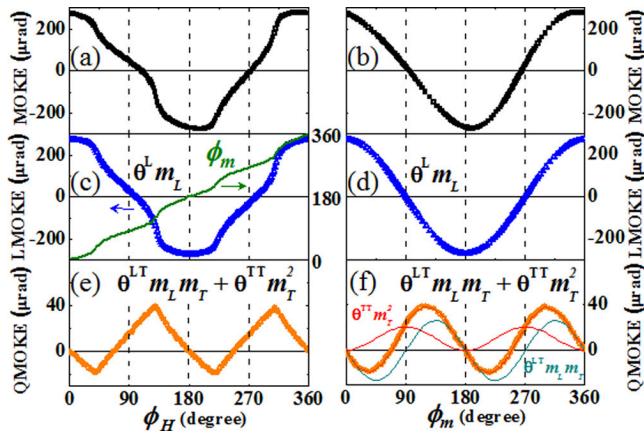
Obrázek 2.8: Metoda rotujícího pole. Při šikmém dopadu je měřeno stočení polarizace během otáčení magnetického pole v rovině vzorku  $xy$ . [43]

Celá metoda tedy spočívá ve třech krocích, pro ilustraci výsledků viz obr. 2.9

1. Změřený signál je rozdělen na  $\Psi^L$  a  $\Psi^Q$  pomocí (2.8).
2. Z  $\Psi^L$  je pomocí (2.9) určena magnetická anizotropie, tj. hodnota  $\varphi_M$  pro každé  $\varphi_H$ .
3. Stejný krok jako u osmisměrné metody, tj. opakování postupu pro každé natočení vzorku  $\gamma$  a určení koeficientů jednotlivých členů v (2.2), tentokrát však už podle známého  $\varphi_M$ .

Metoda rotujícího pole je velmi podobná metodě ROTMOKE[44] z roku 1999, která také v rotujícím in-plane vnějším poli separuje lineární a kvadratické jevy stejným způsobem. Narozdíl od metody rotujícího pole je však cílem pouze magnetometrie pomocí lineárního jevu (tj. je vynechán krok č. 3), kvadratické jevy jsou zde považovány za artefakty a jsou tedy odstraněny ze zpracování.

<sup>7</sup>V původních článcích je Kerrova rotace  $\Psi$  značena  $\Phi$ .



Obrázek 2.9: Ilustrace dat změřených metodou rotujícího pole se vzorkem Fe(12nm)/GaAs(001). (a) Měřené stočení polarizace v závislosti na experimentálně ovladatelném  $\varphi_H$ , rozdělené na (c) lineární a (e) kvadratický příspěvek. (b, d, f) Stejná stočení vynesená v závislosti na  $\varphi_M$  určeném z (c). Skutečnost, že se (a, c, e) a (b, d, f) navzájem výrazně liší, dokazuje, že magnetická anizotropie není zanedbatelná a materiál nebylo možné měřit osmisměrnou metodou. [42]

# 3. Studované materiály

## 3.1 CoFe

Vzorek byl poskytnut prof. Y. Z. Wu z *Department of Physics, State Key Laboratory of Surface Physics, Fudan University, Shanghai* v Číně a jedná se o jeden ze skupiny vzorků studovaných v [45]. Tento oddíl je souhrnem relevantních informací z původního článku [45], poskytnutých doprovodných dokumentů k tomuto článku a naší korespondence s pracovníky tohoto pracoviště [46].

Ve slitině  $\text{Co}_x\text{Fe}_{1-x}$  byl z prvních principů předpovězen intrinsický mechanismus anizotropní magnetoresistence (AMR): dochází ke křížení energetických pásů, které je závislé na orientaci magnetizace. Změnou poměru Co a Fe je navíc možné posouvat tyto body křížení vzhledem k Fermiho hladině a tak ludit velikost AMR. Po vypěstování monokrystalu metodou MBE bylo provedeno magneto-transportní měření a předpověď silného AMR byla potvrzena[45]. AMR je projevem magnetické závislosti tenzoru vodivosti a do jisté míry je možné ho považovat za  $\omega \rightarrow 0$  limitu Voigtova jevu[29].

CoFe je z hlediska reálných spintronických aplikací perspektivní zejména z toho důvodu, že Co i Fe jsou velice snadno dostupné materiály a samotné CoFe je již jinými způsoby široce používané v současných technologiích.

Vzorek studovaný v této práci je v původním článku označen  $x = 0.5$ , je to 10 nm vrstva monokrystalu  $\text{Co}_{0.5}\text{Fe}_{0.5}$  na substrátu  $\text{MgO}(001)$ , s 3 nm nadvrstvou  $\text{MgO}(001)$ . Vzorek má kubickou mřížku. Fotografie vzorku s vyznačenými krystalografickými osami a definicí úhlů je na obr. 3.1 (a).

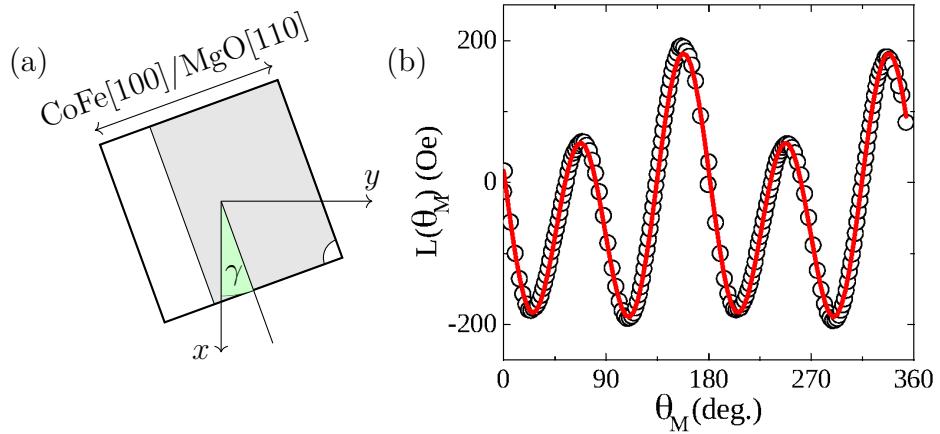
Metodou *torque-metry* byla pro vzorek změřena in-plane magnetická anizotropie, změřený torque je na obr. 3.1 (b). Torque byl fitovaný SW modelem (1.47) s výsledkem  $H_4 = 605 \text{ Oe}$ ,  $H_u = 126 \text{ Oe}$ ,  $\varphi_u = 114^\circ$ . Natočení snadného směru uniaxiální anizotropie  $\varphi_u$  je odečítáno od jednoho z hlavních krystalografických směrů [100] nebo [010], z naší korespondence s autory článku [45] však není zřejmé od kterého a jakým směrem. V našem značení (1.47) a jednotkách SI to odpovídá (záporné znaménko  $k_4$  značí snadnou osu pootočenou oproti [100] o  $45^\circ$ )

$$k_4 = -30,25 \text{ mT}, \quad k_u = 6,3 \text{ mT}. \quad (3.1)$$

## 3.2 FeRh

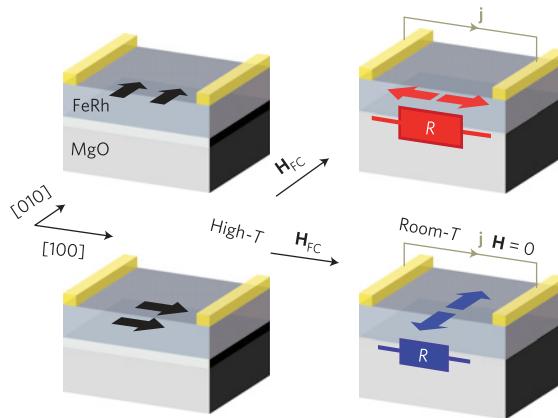
Vzorek FR06 patří do sady vzorků slitiny FeRh připravených naprašováním na *University of California, Berkley* v USA, jejichž studiu se na KChFO MFF UK již věnovaly práce [47, 11, 48, 49]. Konkrétně vzorek FR06 byl podrobně studován v [11, 48]. Tento oddíl je čistou komplikací uvedených referencí.

FeRh se vyznačuje magnetickým fázovým přechodem AFM–FM při změně teploty. Takový fázový přechod sám o sobě není jedinečný, u FeRh k němu však dochází přibližně při 370 K, takže při pokojové teplotě je v AFM fázi a pro přechod do FM stačí mírný ohřev. To je velice žádanou vlastností pro spintronické aplikace: v navrhovaných AFM pamětech by informace byla uchovávána při pokojové teplotě v AFM stavu robustním vůči vnějším magnetickým polím, což by mimo



Obrázek 3.1: (a) Měřený vzorek CoFe, zavedení úhlu in-plane rotace  $\gamma$ . Neexpovaná hrana a roh dovolují snadnou orientaci. Při pohledu čtenáře je vzorek nahoře, substrát dole. (b) Výsledek torque-metrie, fitem byly určeny anizotropní konstanty (3.1). [46]

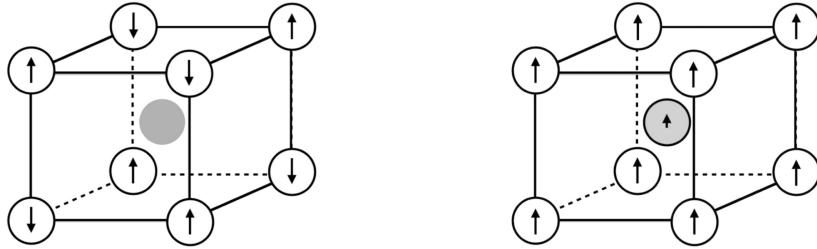
jiné umožnilo rozsáhlější miniaturizaci. Teplotní “blízkost” FM fáze pak dovoluje tzv. *heat-assisted magneto-recording* (HAMR): materiál je nejprve ohřát, pak je přiloženo zapisovací magnetické pole a následně je materiál opět zchlazen. Tímto způsobem je možné ovlivnit magnetický stav v AFM fázi, a tím do něj zapsat informaci. Tento jev se označuje jako *field cooling*. Princip FeRh AFM paměti a field cooling ilustruje obr. 3.2. Z ekonomických důvodů však FeRh není perspektivní pro komerční aplikace, protože Rh je příliš málo dostupné.



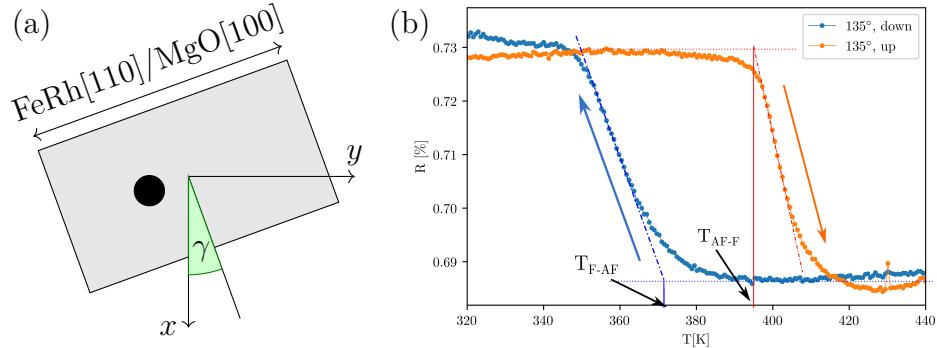
Obrázek 3.2: Ilustrace principu antiferomagnetické FeRh paměti. Ve FM stavu při vysoké teplotě (vlevo) magnetizace (černé šipky) následuje přiložené pole  $\mathbf{H}_{FC}$ . Při zchlazení dojde k přechodu do různý AFM magnetických uspořádání (barevné šipky). To se projeví změnou odporu. [50]

FeRh má kubickou prostorově centrovánou mřížku. Struktura a uspořádání mikroskopických momentů jsou znázorněny na obr. 3.3. Fázový přechod do FM je doprovázen několika projevy: izotropně se zvýší objem krystalu o cca 1 % a změní se reflektivita[49]. Při přechodu dochází také ke skokové změně entropie, což vede k teplotní hysterezi, viz obr. 3.4 (b).

Námi experimentálně studovaný vzorek FeRh, který má označení FR06, je



Obrázek 3.3: Struktura FeRh ve AFM (vlevo) a FM (vpravo) fázi. Šipky naznačují orientaci magnetických momentů jednotlivých atomů Fe (bílá) a Rh (šedá). [49]



Obrázek 3.4: (a) Vzorek FR06, zavedení úhlu in-plane rotace  $\gamma$  a vyznačené krystalografické osy. Na vzorku je patrný defekt (černý kruh), který umožňuje snadnou orientaci. (b) Měření odrazivosti při AFM-FM přechodu, měřeno s FR06 v [48].

tvořen 18 nm vrstvou  $\text{Fe}_{0,5}\text{Rh}_{0,5}$  na substrátu  $\text{MgO}(001)$  a s krycí vrstvou tantalu o tloušťce 1,5 nm. Hrana vzorku je shodná s  $\text{FeRh}[110]/\text{MgO}[100]$ , viz obr. 3.4 (a).

V práci [47] byla (pro jiný vzorek ze sady – 36 nm tlustý vzorek FR04) údajně měřením MO hysterezních smyček určena poloha snadných os, které jsou  $45^\circ$  a  $135^\circ$  pootočené od směru  $\text{MgO}[100]$ , tj. jsou ve směru  $\text{FeRh}[100]$ .

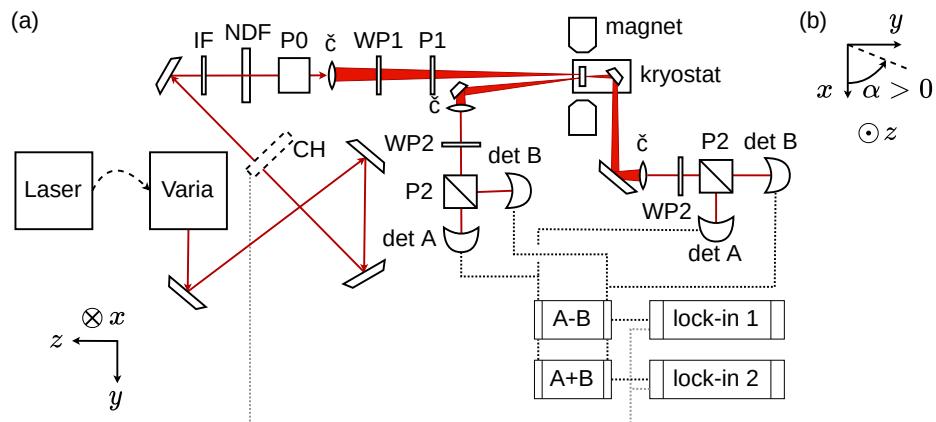
V práci [48] bylo ve vzorku FR06 měřeno spektrum MLD v rotujícím poli. Tam uvedené výsledky, které nebyly vnitřně konzistentní, byly jednou z motivací vzniku této práce (viz kap. 4).

## 4. Experimentální metoda

Předkládaná práce se zabývá jedním z magneto-optických experimentů probíhajících v Laboratoři OptoSpintroniky (LOS), společném pracovišti MFF UK a FZU AV ČR.

Nejvíce je možné vyvíjet metodu popsat jako *spektroskopii anizotropních kvadratických MO jevů* (MLD/Voigtova/Cotton-Moutonova jevu) a přidruženou *in-plane magneto-metrie* tenkých feromagnetických filmů v téměř kolmém dopadu a rotujícím poli. Schéma aparatury je na obr. 4.1 (a). Používáme několik vektorových veličin v rovině  $xy$  ( $\beta$  – vstupní lineární polarizace,  $\varphi_H$  – vnější magnetické pole,  $\varphi_M$  – magnetizace vzorku,  $\gamma$  – in-plane rotace vzorku, aj.), úhel odebíráme vždy od poloosy  $+x$  v kladném směru k poloosě  $+y$ , viz obr. 4.1 (b).

Následuje popis jednotlivých komponent tohoto experimentálního uspořádání.



Obrázek 4.1: (a) Schéma základní formy experimentu a definice experimentální souřadné soustavy. Laserové světlo vychází z filtrálního modulu Varia a prochází přes řadu sklopových zrcadel, jejichž účelem je umožnit měření i v jiných geometriích. Následuje přerušovač svazku (chopper, CH), interferenční filtr (IF) (pouze v části spektrálního rozsahu), nastavitelný šedý filtr (NDF) a hlavní fixní polarizátor P0 definující lineární polarizaci  $\beta = 0^\circ$ . Do tohoto místa je aparatura vždy identická a předchozí část tedy nekreslíme ve schématech jednotlivých experimentů (čočky také dále nebudeme kreslit). Následuje rotační půlvlnná destička WP1 a polarizátor P1 nastavující požadované  $\beta$ . Svazek je fokusován na vzorek v komoře kryostatu (se skleněnými okénky) mezi pólovými nástavci vektorového elektromagnetu. Odražený/procházející (znázorněny oba) svazek je odkloněn zrcadly, kolimován a detekován schématem optického můstku. Signál z obou detektorů je zpracován rozdílovým a součtovým předzesilovačem a zpracován lock-in zesilovači na frekvenci chopperu. (b) Definice úhlů v rovině  $xy$ .  $\alpha$  zde zastupuje libovolný z  $\beta$ ,  $\varphi_H$ ,  $\varphi_M$ ,  $\gamma$ , aj.

**Vektorový magnet** V laboratoři sestavený elektro-magnet, který je tvořený dvěma páry nezávislých cívek, dokáže vytvořit libovolně orientované vnější magnetické pole  $\mathbf{H}_{ext}$  v rovině  $xy$  o maximální velikosti 210 mT. V praxi jsou kvůli hysterezi magnetu použity pouze definované charakterizované procedury (posloupnosti proudů). Vývojem příslušných proudových tabulek se zabývají práce [51, 52].

V této práci používáme pouze dvě možnosti: rotaci pole o velikosti  $H_{\text{ext}} = 207 \text{ mT}$  a  $50 \text{ mT s}$  krokem v úhlu pole  $\varphi_H$  minimálně  $1^\circ$ .

**Kryostat** Kryostat (výrobce AR) s uzavřeným cyklem a topením dovoluje udržovat vzorek v rozmezí teplot cca  $15\text{--}800 \text{ K}$ . Vzorek je nalepen na tzv. *cold-finger* a v kryogenické komoře, která je vyčerpána turbomolekulární vývěvou, je umístěn mezi pólové nástavce magnetu. Komora je opatřena zpředu a ze stran skleněnými okénky. Magneto-optická aktivita okének (Faradayův jev) byla zkoumána v práci [53].

**Super-kontinuální laser** Používaný laser *SuperK EXTREME* (NKT Photonics) generuje široko-spektrální pulzy, které jsou dále filtrovány pro získání pulzů s šírkou pásma  $10 \text{ nm}$ . V rozmezí  $460\text{--}845 \text{ nm}$  k filtraci používáme laditelný filtr *SuperK VARIA*, v rozmezí  $845\text{--}1600 \text{ nm}$  pak sadu pásmových interferenčních filtrů. V úvodních měřeních jsme jednou využili také externí laser MatchBox (Integrated Optics) s vlnovou délkou  $405 \text{ nm}$ .

**Polarizační optika** Pevně umístěné polarizátory P0 a P2 jsou širokospektrální polarizátory typu Glan Laser (Thorlabs). Polarizátor v motorizovaném rotačním držáku P1 je absorpční, daný rozsah vlnových délek je pokryt polarizátory s označením P-VIS ( $400\text{--}700 \text{ nm}$ ) (Edmund Optics) a P-IR ( $600\text{--}2000 \text{ nm}$ ) (Thorlabs). Širokospektrální půlvlnné destičky WP1, WP2 (Newport) jsou také umístěny v motorizovaných otočných držácích (Thorlabs a Newport) a vyskytují se ve třech sadách: VIS1, VIS2 ( $400\text{--}700 \text{ nm}$ ); NIR1, NIR2 ( $700\text{--}1000 \text{ nm}$ ); IR1, IR2 ( $1000\text{--}1600 \text{ nm}$ ). Posloupnost prvků P0, WP1, P1 má za úkol vytvořit vysoko kvalitní lineární polarizaci s definovaným natočením  $\beta$ , která dále dopadá na vzorek. Destička WP2 slouží k vyvažování můstku.

**PEM** Foto-elastický modulátor (není na schématu) je zařízení, ve kterém vlivem zvukové vlny dochází k modulaci síly lineárního dvojhlomu, takže se chová jako retardér (fázová destička) s periodicky modulovaným fázovým zpožděním (viz (1.16))  $\delta_{\text{PEM}}(t) \propto \cos(\omega_{\text{PEM}} t)$ . Charakterizaci a detailnímu popisu se věnuje práce [54].

**Berekův kompenzátor** Berekův kompenzátor (není na schématu) je laditelný retardér tvořený dvojhlomným krystalem, jehož naklápněním lze dosáhnout libovolného (v daném rozsahu) fázového zpoždění  $\delta$  mezi kolmými lineárními polarizacemi. Charakterizaci se věnuje práce [55].

**Detektory** V rozsahu  $460\text{--}1100 \text{ nm}$  používáme křemíkové diody. V infračervené oblasti  $1000\text{--}1600 \text{ nm}$  používáme detektory na bázi InGaAs, které byly studovány v práci [56].

**Optický můstek** K měření je využito schéma optického můstku popsané v oddílu 2.1.

**Přerušovač svazku** Ve dráze svazku je vždy umístěn intenzitní modulátor (*chopper*), který dovoluje přesnější měření pomocí fázově citlivých zesilovačů (*lock-in*).

## 4.1 Popis a úvodní experimenty

Stejnou metodou (se stejnou aparaturou) se zabývaly i dřívější práce vzniklé na pracovišti. První MO experimenty byly provedeny v [57]. Aparatura byla vylepšena a využita ke studiu AFM materiálů v [48, 52].

Dosavadní získané výsledky však nebyly uspokojující. V rámci této práce byla pro ověření zopakována měření vzorku FR06 ve FM fázi v reflexní geometrii, provedena dříve v [48]. Měření byla úspěšně replikovaná, ale problémy (ilustrované níže v této kapitole) přetrvaly. Jako druhá sada úvodních měření byl měřen vzorek CoFe v transmisní geometrii.

Průběh námi prováděného experimentu je následující. Komora kryostatu je vyčerpána a udržována na požadované konstantní teplotě (kromě měření teplotních přechodů). Některým spektrálním filtračním prvkem je vlnová délka laserového záření nastavena na požadovanou hodnotu a správným natočením polarizátoru P1 a půlvlnné destičky WP1 je nastavena lineární polarizace v požadovaném směru  $\beta$ . Natočením WP2 je pak vyvážen optický můstek.

Následuje měřící procedura. Dvěma nezávislým párem cívek elektromagnetu jsou postupně zadávány dvojice kalibrovaných proudů, které vytváří magnetické pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  o konstantní velikosti  $H_{\text{ext}}$  (zde vždy 50 nebo 207 mT), a otáčí ho (diskrétními kroky) o  $360^\circ$  v rovině  $xy$ . V každém kroku (daném směrem pole  $\varphi_H$ ) je zaznamenána hodnota rozdílového  $U_{\text{A-B}}$  a součtového  $U_{\text{A+B}}$  napětí na detektorech. Signál je zpracován a s předpokladem idealizovaného můstku (viz oddíl 2.1) dosazen do vzorce (2.6). Výsledkem je tedy průběh stočení polarizace  $\Delta\beta(\varphi_H)$ . V praxi měříme více cyklů, způsob získání  $\Delta\beta(\varphi_H)$  z měřených dat je detailně popsán v dodatku A.4.

Měřící procedura je pak opakována pro více  $\beta$ ,  $\lambda$  a případně  $T$ . Při změně  $\beta$  či  $\lambda$  je však třeba znova vyvažovat můstek, čímž se mění aditivní konstanta vyjadřující neznámé vyvážení můstku  $\xi$ . Změřené  $\Delta\beta$  pro různé  $\beta$  a  $\lambda$  tedy není možné přímo porovnávat. Zatímco měření různých  $\beta$  spolu úzce souvisí, různé  $\lambda$  považujeme za nezávislé, a píšeme tedy výsledek měření pro každou vlnovou délku zvlášt  $\Delta\beta(\varphi_H, \beta)$  s neznámými aditivními  $\xi(\beta)$ .

Při změně teploty není nutné můstek znova vyvažovat, což bylo využito k měření teplotních přechodů v práci [48]. Pak máme  $\Delta\beta(\varphi_H, \beta, T)$  a  $\xi(\beta)$ .

Základem původní metody zpracování, která byla použita v [57, 48, 52], byl vzorec (2.1) platný pro kolmý odraz od izotropního vzorku se saturovanou<sup>1</sup> in-plane magnetizací popsanou úhlem  $\varphi_M$  závisejícím na  $\varphi_H$ . V tuto chvíli nepředpokládáme, že by magnetická anizotropie  $\varphi_M(\varphi_H)$  byla diktována magnetickou volnou energií Stonerova-Wohlfarthova modelu popsaného v oddílu 1.5, naopak předpokládáme libovolnou závislost. Vzorec (2.1) byl dále rozšířen pro anizotropní MLD v [57] pomocí  $\varphi_M$ -závislého koeficientu  $P$

$$\Delta\beta(\varphi_H, \beta) = P(\varphi_M(\varphi_H)) \sin[2(\varphi_M(\varphi_H) - \beta)] + \xi(\beta). \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Nepožadujeme striktní saturaci, takže  $|\mathbf{M}| = M_S$ , ale  $\varphi_M \neq \varphi_H$ .

Zpracování pak spočívalo ve fitování metodou nejmenších čtverců změřeného  $\Delta\beta$  neznámými funkciemi<sup>2</sup>  $P(\varphi_M)$ ,  $\varphi_M(\varphi_H)$ ,  $\xi(\beta)$ . Metodou nejmenších čtverců rozumíme hledání parametrů minimalizujících cílovou funkci

$$\mathcal{L} = \sum_{\varphi_H, \beta} (\Delta\beta_{\text{měření}} - \Delta\beta_{\text{model}})^2, \quad (4.2)$$

kde v tomto případě  $\Delta\beta_{\text{měření}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{model}}$ , značí levou, resp. pravou stranu (4.1).

Problém lze jednoduchou transformací pomocí součtových vzorců převést na lineární

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \xi(\beta) + P(\varphi_M(\varphi_H)) \sin(2\varphi_M(\varphi_H)) \cos(2\beta) \\ &\quad - P(\varphi_M(\varphi_H)) \cos(2\varphi_M(\varphi_H)) \sin(2\beta), \end{aligned} \quad (4.3)$$

který lze vyřešit rozvedením  $\Delta\beta$  a  $\xi$  do Fourierových řad<sup>3</sup> v  $\beta$

$$\Delta\beta(\varphi_H, \beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\beta_k(\varphi_H) e^{ik\beta}, \quad (4.4a)$$

$$\xi(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e^{ik\beta}. \quad (4.4b)$$

Řešením je pak

$$\xi_k = \overline{\Delta\beta_k} \quad \text{pro } k \neq \pm 2, \quad (4.5a)$$

$$\frac{1}{2} P(\varphi_M(\varphi_H)) e^{\mp i 2\varphi_M(\varphi_H)} + \xi_{\pm 2} = \Delta\beta_{\pm 2}(\varphi_H), \quad (4.5b)$$

kde  $\overline{\Delta\beta_k}$  značí průměr přes  $\varphi_H$ . Z (4.5) je vidět, že úloha je degenerovaná: existují různé sady parametrů, které produkují stejná naměřená data. Dimenze degenerace je 2 a odpovídá reálné a imaginární části  $\xi_2 = \xi_{-2}^*$ .

Nicméně pro každou sadu naměřených dat existuje maximálně jedno řešení s čtyřčetnou rotační symetrií v rovině  $xy$ , tj.  $P(\varphi_M) = P(\varphi_M + 90^\circ)$  a  $\varphi_M(\varphi_H + 90^\circ) = \varphi_M(\varphi_H) + 90^\circ$ . Jinými slovy, pro kubické vzorky fit degenerovaný není, platí pro ně totiž vždy  $\overline{P e^{i 2\varphi_M}} = 0$ , takže  $P e^{\pm i 2\varphi_M} = \Delta\beta_{\pm 2}(\varphi_H) - \overline{\Delta\beta_{\pm 2}}$ . Tak lze z měřených dat určit kýžené závislosti  $P(\varphi_M)$  a  $\varphi_M(\varphi_H)$ .

Na úvodních datech naměřených ve vzorku CoFe ilustrujeme nedostatky původní verze experimentu. Měření proběhlo při pokojové teplotě v transmisní geometrii podle schématu na obr. 4.1 (a) s tím rozdílem, že chyběl “čistící” polarizátor P1 a vnější komora kryostatu, takže svazek neprocházel přes skleněná okénka. Ilustrace změřených dat je na obr. 4.2 (a).

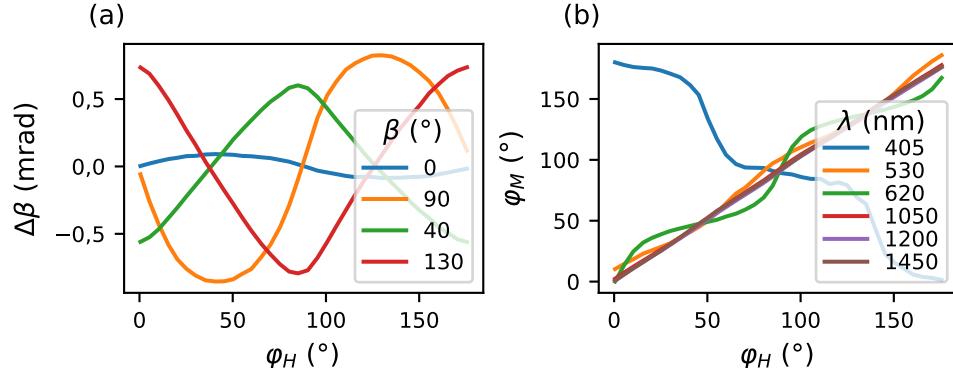
Z obrázku je na první pohled patrný první problém. Změřené křivky pro  $\beta$  a  $\beta + 90^\circ$  by měly podle (4.1) být shodné s opačným znaménkem, což v některých případech zjevně neplatí. Metoda v takových případech zjevně selhává.

Druhý problém je méně zjevný. U některých vlnových délek (především v infračervené oblasti) jsou změřená data dobře popsaná modelem (4.1) a je možné provést fit (4.5). Zatímco  $P(\varphi_M)$  je v principu spektrálně závislé, od  $\varphi_M(\varphi_H)$

<sup>2</sup>Vzorkování  $\varphi_H$  a  $\beta$  je konečné, takže např. pro 72 změřených  $\varphi_H^i$  rozumíme jako fitování  $\varphi_M(\varphi_H)$  určení 72 parametrů  $\varphi_M^i \equiv \varphi_M(\varphi_H^i)$ .

<sup>3</sup>S konečným vzorkováním se jedná o diskrétní Fourierovu trasformaci, obor  $k$  je omezený.

očekáváme, že na všech vlnových délkách popisuje tu samou skutečnost. Výsledky pro některé vlnové délky, na kterých byl fit jinak zdánlivě úspěšný, jsou ale zcela odlišné, viz obr. 4.2 (b). V některých případech (např. 405 nm) fit dokonce selhává úplně, protože domnělé  $\varphi_M$  se točí na opačnou stranu než  $\varphi_H$ .



Obrázek 4.2: Úvodní měření CoFe,  $H_{\text{ext}} = 207$  mT. (a) Měřené stočení na vlnové délce 1050 nm při vybraných polarizacích. Data neodpovídají modelu (4.1):  $\beta = 0^\circ$  a  $\beta = 90^\circ$  jsou zcela odlišné, přestože by měla pouze změnit znaménko. (b) Magnetická anizotropie určená různými vlnovými délkami se neshoduje.

Podstata problémů byla odhalena dvojí: v prvotních experimentech byl zcela ignorován vliv zrcadel mezi vzorkem a optickým můstkom a anizotropie MLD byla nedostatečně pochopena. Jejich řešením a popisem konečné verze metody se věnuje zbytek této kapitoly.

## 4.2 Detekce

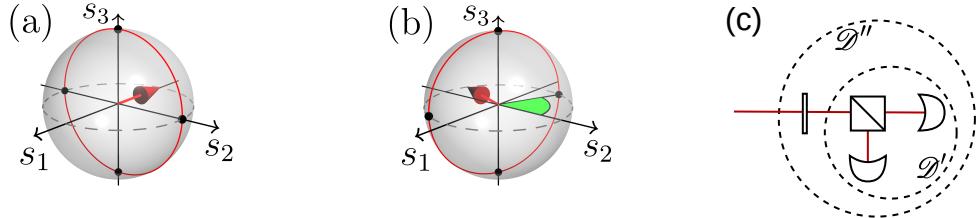
V tomto oddílu se zaměříme na první z problémů, který je způsobený tím, že v uspořádání na obr. 4.1 neměříme přímo stočení polarizace vzorkem, tj. neplatí vzorec (2.7):  $U_{\text{A-B}}/2U_{\text{A+B}} \neq \Delta\beta$ . Příčiny jsou dvě: zrcadla mezi vzorkem a můstkom mění polarizaci, a nedokonalost vlnové destičky a děliče v můstku.

V tomto oddílu naplno využijeme formalismus *Stokesových kovektorů* – lineárních forem na prostoru Stokesových vektorů, které popisují detektory a složitější detekční systémy složené z detektorů a optických prvků – rozvinutý v dodatku A.3. Pomocí něj vysvětlíme podstatu problémů a popíšeme několik způsobů, jakými vliv zrcadel a nedokonalostí prvků kompenzovat. Nakonec v oddílu 4.2.2 popíšeme způsob využití Berekova kompenzátoru v můstku, který umožňuje současné měření stočení i ellipticity.

Pro další použití v následujících oddílech na obr. 4.3 vykreslujeme kovektory můstku s idealizovanými prvky (jako v oddílu 2.1).  $\mathcal{D}'$  značíme kovektory vzhledem ke světlu před děličem,  $\mathcal{D}''$  vzhledem ke světlu před destičkou.

### 4.2.1 Kompenzace nedokonalostí a zrcadel

Jedna z výhod formalismu Stokesových kovektorů je snadné uvažování o tom, jak se detekční aparatura chová při malých změnách (nedokonalostech) optických prvků. Zaměříme se na tři druhy nedokonalostí, z nichž se nakonec jediná vyplatí kompenzovat – nepřesné fázové zpoždění půlvlnné destičky.



Obrázek 4.3: Stokesovy kovektory ideálního můstku. (a) Vzhledem ke světlu před děličem. (b) Vzhledem ke světlu před destičkou. Zeleně je vyznačen úhel  $4\theta_{\lambda/2}$ . (c) Ilustrace významu kovektorů  $D'$  a  $D''$  v optickém můstku.

Pro vyvažovací půlvlnnou destičku uvažujeme dva druhy nedokonalosti: rozdílnou propustnost obou módů a fázové zpoždění lišící se od přesné hodnoty  $\pi/2$ . Kvůli symetrii však stále požadujeme, aby destička měla dvě navzájem kolmé optické osy – dva vlastní módy navzájem ortogonálních lineárních polarizací.

Experimentálně bylo ověřeno, že polarizační dělič v optickém můstku (P2) vysoce kvalitně dělí svazek na dvě ortogonální lineární polarizace. Při dopadu svazku na dělič je vertikální polarizace zcela odražena a v prošlém svazku je zastoupena tedy pouze horizontální polarizace. Horizontální polarizace je ale také malou měrou odražena, takže odražený svazek není tvořen čistou vertikální polarizací. Nicméně každá z dvou ortogonálních polarizací je odražena mírně odlišným směrem a po určité dráze a průchodu čočkou se prostorově oddělí, takže detektorem B snímáme pouze průměr polarizace do vertikálního směru.

Vložením polarizátoru před dělič a jeho vhodným otáčením bylo možné ho zkřížit vzhledem k oběma ramenům (zvlášť) s extinkčním poměrem  $I_{\min}/I_{\max}$  přibližně  $1 \cdot 10^{-4}$ . Díky tomu, že v každém rameni je polarizace takto kvalitně filtrovaná, se nijak neprojeví ani případná polarizační závislost detektorů. Jediná nedokonalost zbytku můstku (nezahrnující půlvlnnou destičku) je tedy rozdílná citlivost obou ramen na příslušné lineární polarizace. Ta je souhrnně způsobena jak rozdílnou propustností/odrazivostí děliče, tak nevyváženou citlivostí a zesílením obou detektorů.

Všechny tři zmíněné nedokonalosti uvažujeme zvlášť a zanedbáváme jejich vzájemné působení. Nakonec se zaměříme na to, co se stane, když před můstek umístíme zrcadlo, které je nezbytné pro oddělení dopadajícího a odraženého svazku v reflexní geometrii, a pro vyvedení svazku ven z komory kryostatu v transmisní geometrii.

### Nevyváženost ramen optického můstku

Rozdíl citlivostí ramen je vyjádřen  $\eta$ , takže vzhledem ke světlu před děličem

$$\mathcal{D}'^A = \frac{1 - \eta}{2}(1, -1, 0, 0), \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{D}'^B = \frac{1 + \eta}{2}(1, 1, 0, 0), \quad (4.6b)$$

$$\mathcal{D}'^{A-B} = -(\eta, 1, 0, 0), \quad (4.6c)$$

$$\mathcal{D}'^{A+B} = (1, \eta, 0, 0) \quad (4.6d)$$

a vzhledem ke světlu před destičkou

$$\mathcal{D}''^{A-B} = -(\eta, \cos 4\theta_{\lambda/2}, \sin 4\theta_{\lambda/2}, 0), \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{D}''^{A+B} = (1, \eta \cos(\theta_{\lambda/2}), \eta \cos(\theta_{\lambda/2}), 0). \quad (4.7b)$$

Prvním z projevů je polarizační závislost součtového signálu ( $d_1''^{A+B} = \eta \neq 0$ ). To není velký problém, protože se ve vzorci  $\Delta\beta = U_{A-B}/2U_{A+B}$  používá pouze pro normalizaci signálu, která lze určit i jiným způsobem (viz např. oddíl 4.2.2). Pro malé  $\eta$  není od věci tento vliv ignorovat.

Druhou známkou nevyvážených ramen je nenulové  $d_0''^{A-B}$ , které se projeví posunutím nulové kružnice jako na obr. A.1. Po průchodu ideální destičkou se pouze otočí v rovině  $s_1 s_2$ . Důležitým rysem je, že nulová kružnice je vždy kolmá na rovník lineárních polarizací, což znamená, že  $\partial U_{A-B}/\partial\chi = 0$ , a tedy v měřeném signálu se neprojeví změny ellipticity<sup>4</sup>. I druhý projev neideálnosti optického můstku tedy v důsledku pouze mění konstantu úměrnosti, pro  $\chi = 0$  platí

$$dU_{A-B} = 2I\sqrt{1-\eta^2}d\beta, \quad (4.8)$$

což pro malé  $\eta$  ignorujeme.

### Anizotropie amplitudové propustnosti destičky

Jonesova a Muellerova matice destičky s přesným fázovým zpožděním  $\pi/2$ , ale rozdílnou propustností obou lineárních polarizací je (pro úhel natočení destičky  $\theta_{\lambda/2} = 0$ )

$$\mathcal{T}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} \frac{1+\eta^2}{2} & \frac{1-\eta^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-\eta^2}{2} & \frac{1+\eta^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

kde nedokonalost destičky je vyjádřena  $\eta$  (ideální destička má  $\eta = 1$ ). Akce takové Muellerovy matice je kombinace otočení o  $180^\circ$  a protáhnutí/posunutí kolem té stejné osy (viz oddíl 1.2.2)<sup>5</sup> – procházející lineárními polarizacemi ve směru optické osy  $\theta_{\lambda/2}$ .

Výsledkem je stejně jako v případě nevyvážených ramen posunutí nulové kružnice ( $d_0''^{A-B} \neq 0$ ), které v souladu s diskuzí v předešlém oddílu pro malé  $\eta$  ignorujeme.

### Nepřesné fázové zpoždění destičky

Jonesova a Muellerova matice je (pro  $\theta_{\lambda/2} = 0$ )

$$\mathcal{T}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\delta & \sin\delta \\ 0 & 0 & -\sin\delta & -\cos\delta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

---

<sup>4</sup>Pokud do můstku vstupuje lineárně polarizované světlo.

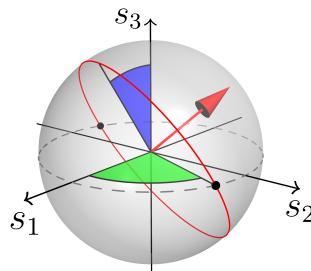
<sup>5</sup>To lze nahlédnout z toho, že lze Jonesovu matici psát jako součin unitární a pozitivně semi-definitní hermitovské matice, které spolu komutují:  $\mathcal{T}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ .

kde nedokonalost je vyjádřena dodatečným fázovým zpožděním  $\delta$  (ideální destička má  $\delta = 0$ ). Muellerova matice působí jako rotace o  $180^\circ + \delta$  kolem osy vlastních módů. Kvůli  $\delta \neq 0$  již nejsou obě osy destičky ekvivalentní. Pozice destičky  $\theta_{\lambda/2}$  a  $\theta_{\lambda/2} + 90^\circ$  tedy také nejsou ekvivalentní, odpovídají rotacím kolem té stejné osy o  $180^\circ + \delta$ , ale opačným směrem<sup>6</sup>. Pozice  $\theta_{\lambda/2}$  a  $\theta_{\lambda/2} + 180^\circ$  zůstávají nadále ekvivalentní.

Transformací kovektoru ideálního můstku  $\mathcal{D}'^{A-B} = (0, 1, 0, 0)$  neideální Muellерovou maticí  $\mathbb{M}_{\lambda/2}$  je zachováno  $d_0''^{A-B} = 0$ . Oproti předchozím případům však již není zachovaná kolmost nulové kružnice a rovníku lineárních polarizací, tj.  $d_3''^{A-B} \neq 0$ . Ve sférických souřadnicích ( $d_1''^{A-B} + d_2''^{A-B} + d_3''^{A-B} = 1$ )

$$\mathcal{D}''^{A-B} \equiv (0, -\sin 2\zeta_1 \cos 2\zeta_1, \cos 2\zeta_1 \cos 2\zeta_2, \cos 2\zeta_2), \quad (4.11)$$

kde jsme označili úhel průsečíku kružnice s rovníkem  $2\zeta_1(\theta_{\lambda/2})$  a úhel vzájemného natočení  $2\zeta_2(\theta_{\lambda/2})$ , viz obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Kovektor můstku s destičkou s nepřesným fázovým zpožděním (vzhledem ke světlu před destičkou). Zeleně úhel  $2\zeta_1$ , modře  $2\zeta_2$ .

Při vyvažování můstku (hledání  $\theta_{\lambda/2}$  takového, aby  $U_{A-B} = 0$ ) pro dané  $\beta$  je nalezena pozice, pro kterou platí  $\beta = \zeta_1(\theta_{\lambda/2})$ . Dosazením vyvažujícího  $\zeta_1$  pak (viz (1.14) pro tvar  $dS$ )

$$dU_{A-B} = \mathcal{D}''^{A-B} \cdot dS^{\text{in}} = 2I (\cos 2\zeta_2 d\beta + \sin 2\zeta_2 d\chi). \quad (4.12)$$

Zde však už narázíme na závažný problém: v měřeném signálu, který by měl odpovídat pouze otočení polarizace, se nám projevují i změny ellipticity neznámým faktorem  $\sin 2\zeta_2$ , který navíc závisí (i jeho znaménko) na  $\beta$ . Řešení nám poskytuje skutečnost<sup>7</sup>, že  $\zeta_2$  je pro každé  $\beta$  lichou funkcí nedokonalosti destičky  $\delta$  – mění znaménko při vyvážení polohami  $\theta_{\lambda/2}$ , resp.  $\theta_{\lambda/2} + 90^\circ$ . V praxi tedy měříme každé  $\beta$  s oběma polohami destičky a bereme jejich aritmetický průměr

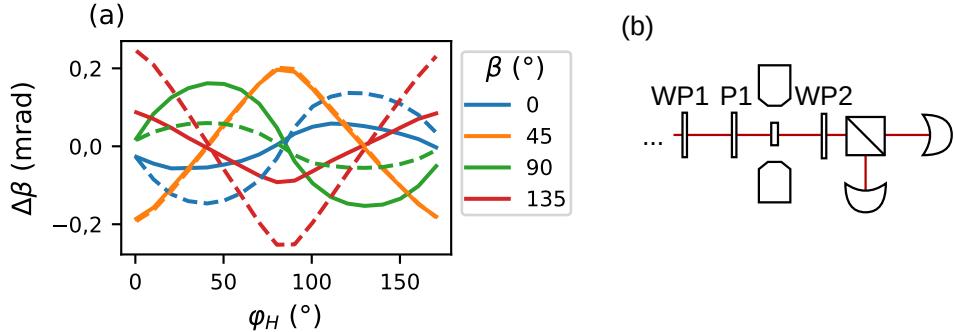
$$\frac{1}{2} (U_{A-B}^{\theta_{\lambda/2}} + U_{A-B}^{\theta_{\lambda/2}+90^\circ}) = 2I \cos 2\zeta_2 d\beta. \quad (4.13)$$

Změny ellipticity se odečetly a jediný zbývající vliv nedokonalosti je v dodatečném faktoru  $\cos 2\zeta_2$ , který pro malé  $\delta$  (a tedy malé  $\zeta_2$ ) zanedbáváme. Pokud není explicitně uvedeno jinak (v oddíle 4.2.2), provádíme tento krok vždy. Ilustrace dat, která ukazují na nutnost provádět popsanou kompenzací nedokonalého fázového zpoždění půlvlnné destičky, je na obr. 4.5. Potvrzením správnosti provedených kroků jsou ovšem až výsledky dosažené v kap. 5.

<sup>6</sup>Ekvivalentně s opačným znaménkem  $\delta$ .

<sup>7</sup>Lze nahlédnout ze symetrie vůči obrácení točivosti světla či přímým výpočtem.

Poznamenejme, že uvedená procedura funguje pouze za předpokladu, že do destičky dopadá přibližně lineárně polarizované světlo, protože jenom pak jsou obě vyvažující polohy destičky posunuté přesně o  $90^\circ$ . Při dopadu eliptického světla je situace výrazně složitější a dále se jí nezábýváme.



Obrázek 4.5: Ilustrace potřeby provádět kompenzaci nepřesného fázového zpoždění vyvažovací půlvlnné fázové destičky. (a) Změřená data na  $\lambda = 810$  nm, která se liší pro dvě o  $90^\circ$  otočené polohy destičky (plnou a přerušovanou čarou). (b) Schéma experimentu: CoFe, pokojová teplota, transmisní geometrie, žádná zrcadla mezi vzorkem a můstkom.

## Zrcadla

Ve schématu experimentu na obr. 4.1 se v transmisní i reflexní geometrii vyskytují v dráze svazku mezi vzorkem a můstkom zrcadla. Důvody jsou čistě geometrické, v reflexi je nutné odražený svazek prostorově oddělit od dopadajícího, v transmisi je nutné svazek po průchodu vzorkem vyvést v kolmém směru z kryogenní komory. V obou případech svazek dopadá na zrcadlo přibližně pod úhlem  $45^\circ$ .

Experimentálně bylo zjištěno, že odraz od použitých zrcadel (stříbrné pokrytí s označením P01 od firmy Thorlabs) není izotropní. Ve studovaném spektrálním rozsahu dosahuje světlo po jednom odrazu od zrcadla ellipticity až  $10^\circ$ . Zrcadlo modelujeme jako retardér s Jonesovou maticí

$$\mathcal{T}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_m} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Vzhledem k nutnosti kompenzace nedokonalosti destičky, které vyžaduje, aby do ní vstupovala přibližně lineární polarizace, se úsilí k řešení tohoto problému soustředilo na fyzickou kompenzaci vlivu zrcadla na polarizaci detekovaného svazku pomocí vložení dalšího optického prvku, který působí inverzně. Nejprve však uvedeme, jaký by mělo zrcadlo vliv na ideální můstek. Mohli bychom zavádět kovektor  $\mathcal{D}''$  vzhledem ke světlu před zrcadlem, který by měl stejný tvar jako (4.12), ale s rozdílnou závislostí  $\zeta_1$  a  $\zeta_2$  na  $\theta_{\lambda/2}$ . Pro kvalitativní pochopení je v tomto případě ale názornější zústat u  $\mathcal{D}''$  a namísto kovektoru zrcadlem zobrazit vstupní Stokesovy vektory.

Pro ideální můstek je nulová kružnice  $\mathcal{D}''$  tvořena poledníkem, který je během vyvažování otáčen kolem osy  $s_3$  tak, aby procházel bodem odpovídajícím vstupní polarizaci. Zrcadlo je retardér s osou podél  $s_1$ , takže podél ní otočí rovník lineárních

polarizací o úhel  $\delta_m$ . Zároveň se Stokesovým vektorem však musíme zobrazit i jeho diferenciál (změna  $\beta$  před zrcadlem se projeví i změnou  $\chi$  za zrcadlem). Viz obr. 4.6 (a).

Ze vzájemné orientace nulové kružnice a diferenciálu Stokesova vektoru lze graficky určit, jakými faktory se do měřeného signálu promítne  $d\beta$  a  $d\chi$ . Pro význačné  $\beta$  lze odečíst přímo z obrázku 4.6 (a)

$$dU_{A-B}(\beta = 0^\circ) = 2I (\cos(\delta_m)d\beta + \sin(\delta_m)d\chi) , \quad (4.15)$$

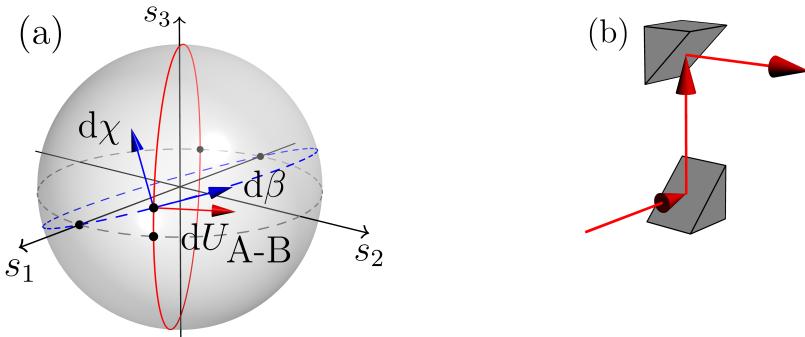
$$dU_{A-B}(\beta = 90^\circ) = 2I (\cos(\delta_m)d\beta - \sin(\delta_m)d\chi) , \quad (4.16)$$

$$dU_{A-B}(\beta = 45^\circ) = 2Id\beta , \quad (4.17)$$

$$dU_{A-B}(\beta = 135^\circ) = 2Id\beta . \quad (4.18)$$

Zde je jasné vidět původ prvního popsánoho problému, kterým trpí např. data na obr. 4.2 (a), totiž že změřená data pro  $\beta$  a  $\beta + 90^\circ$  jsou zcela odlišná. Problém se zrcadly dlouho unikal pozornosti, především z toho důvodu, že jsou to právě polarizace  $\beta = 0^\circ, 90^\circ$ , které jsou nejvíce ovlivněny, zatímco  $\beta = 45^\circ, 135^\circ$  jsou ovlivněny jen minimálně. Na první pohled by se mohlo zdát, že s- a p-polarizace jsou přece na zrcadlech odraženy beze změny...

Náhodou je tento neduh zdánlivě "vyřešen", pokud světlo po odrazu od vzorku projde ještě jednou půlvlnnou destičkou WP1, jako v [57, 48, 52]. Pak je pro všechna  $\beta$  následně měřen stejný mix stočení a ellipticity, takže vypadají věrohodně.



Obrázek 4.6: (a) Vliv zrcadla mezi vzorkem a optickým můstkom. Je znázorněn Stokesův kovektor  $\mathcal{D}''^{A-B}$  vzhledem ke světlu před můstkem (červeně) a rovník lineárních polarizací po odrazu zrcadlem (modře). Zároveň je naznačen vzájemný směr diferenciálů, který určuje kofaktory stočení a ellipticity v měřeném signálu. (b) Zkřížená zrcadla, která společně působí přibližně jako neutrální prvek.

Nejjednoduší způsob, jakým zanesenou ellipticitu vlivem zrcadla kompenzovat, je přidat ještě jedno identické zrcadlo, ve kterém je role s- a p- polarizace prohozena (odraz nahoru a do strany jako na obr. 4.6 (b)). Obě polarizace pak po dvou odrazech nabýdou stejného fázového faktoru. Dvojici zrcadel v následujícím textu nazýváme *zkřížená zrcadla* a chovají se z hlediska polarizace jako neutrální prvek. Tato jejich optická neutralita byla experimentálně ověřena v celém používaném spektrálním rozsahu (460–1600 nm): ellipticita lineárně polarizovaného světla po průchodu zkříženými zrcadly nepřesahuje  $3^\circ$ , a to poněkud překvapivě i v případě, kdy je jedno ze zrcadel uvnitř kryostatu zchlazené na teplotu 15 K a druhé je na pokojové teplotě. Trik zkřížených zrcadel je použit ve všech experimentech uvedených v kap. 5.

Nicméně experimentálně byla v rámci řešení této práce otestována ještě jedna metoda kompenzace vlivu odrazu na zrcadle, kterou zde popíšeme – pomocí Berekova kompenzátoru. Berekův kompenzátor je laditelný retardér a je proto možné jeho správným nastavením zrcadlo kompenzovat. Jedinou komplikací je právě nutnost nalézt jeho správné nastavení. To jsme provedli dvěma způsoby.

První způsob, který označujeme jako *statický*, se snaží nastavit fixní polohu, která zrcadlo zcela kompenzuje pro všechna  $\beta$ . Procedura je zdlouhavá a probíhá iteračně: nejdříve je správně zorientovaná optická osa Berekova kompenzátoru, a poté nastavené správné fázové zpoždění, zatímco je pomocí rotačního analyzátoru za kompenzátem měřena elipticitu pro vybrané hodnoty vstupního  $\beta$  (především  $45^\circ$  a  $135^\circ$ ). Správné nastavení je dosaženo, když je elipticitu za kompenzátem nulová pro všechna  $\beta$  – každá lineární polarizace před zrcadlem je lineární i za kompenzátem.

Druhý způsob označujeme jako *dynamický*, protože neaspiruje na kompenzacii vlivu zrcadla, ale je nastavován pro každé  $\beta$  zvlášť. Princip je založen na tom, že není striktně vzato nutné zrcadlo kompenzovat. Vždyť (4.17), (4.18) jsou v pořadku i se zrcadlem – můstek dokáže měřit čisté stočení  $d\beta$ , i když do něj vstupuje eliptické světlo. Toto rozvolnění ubírá jeden stupeň volnosti Berekova kompenzátoru, který je nutno přesně nastavit, a tím proceduru výrazně usnadňuje. Ve dvoudimenzionálním stavovém prostoru Berekova kompenzátoru (poloha osy a fázové zpoždění) existuje pouze jeden bod, který ho správně nastaví staticky, ale celá křivka, která ho nastaví dynamicky.

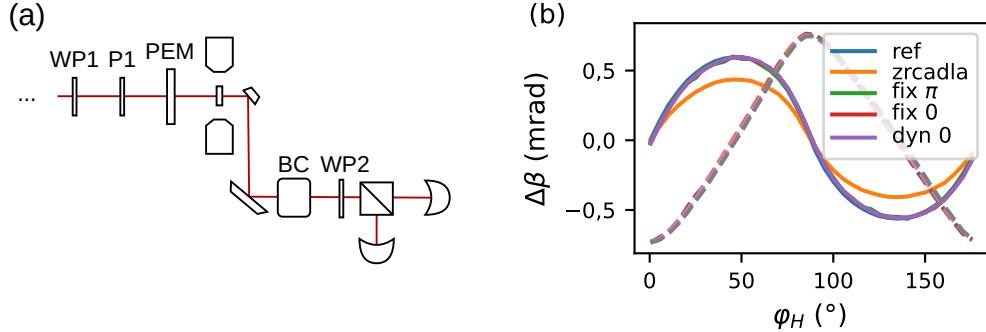
Cílem je nastavit pro každé  $\beta$  Berekův kompenzátor tak, aby se vynuloval koeficient  $d\chi$  v  $U_{A-B}$  a platilo prosté  $dU_{A-B} = 2Id\beta$ . Za účelem zpětné vazby byl využit PEM umístěný před vzorek, viz obr. 4.7 (a). Amplituda fázového zpoždění  $\delta_{PEM}$  byla nastavována v rozsahu hodnot přibližně  $0$ – $10^\circ$ . Osa PEMu by měla být ideálně otočená o  $45^\circ$  oproti  $\beta$ , ale není to nutností. Pro malé zpoždění dochází totiž pouze k periodickému kmitání  $\chi$  s frekvencí  $\omega_{PEM}$ , zatímco  $\beta$  kmitá s amplitudou až v druhém rádu  $\propto \delta_{PEM}^2$  a s frekvencí  $2\omega_{PEM}$  (viz obr. 1.4 (a)), a toto platí pro všechny lineární polarizace neprocházející přímo osou PEMu. Rozdílové napětí na frekvenci  $\omega_{PEM}$  by tedy mělo být úměrné koeficientu  $d\chi$ .

Dynamické nastavení tedy spočívá v současném/střídavém točení vyvažovací destičky, osy a zpoždění kompenzátoru, zatímco na dvou lock-inech jsou sledovány hodnoty  $U_{A-B}(\omega = 0)$  a  $U_{A-B}(\omega = \omega_{PEM})$  s cílem obě současně vynulovat. Tímto způsobem jsme se mimoděk vyhnuli problému s nedokonalými destičkami, protože nulovaný koeficient  $d\chi$  není specifický pro zrcadla, ale zahrnuje v sobě celou detekční aparaturu. S dynamickým Berekovým kompenzátem není třeba měřit MO signál pro obě polohy vyvažovací destičky.

Oběma způsoby je Berekův kompenzátor vždy nastaven do polohy jedné ze dvou tříd lišících se v tom, jestli se dvojice zrcadlo-kompenzátor dohromady chová jako neutrální prvek (“nedotáčivý mód”,  $\delta_m + \delta_B = 0$ ) či půlvlnná destička (“přetáčivý mód”,  $\delta_m + \delta_B = \pi$ ).

Obě metody nastavení byly vyzkoušeny na vzorku CoFe v transmisní geometrii při pokojové teplotě (bez vakuové komory kryostatu), viz obr. 4.7 (b). Z obrázku je patrné, že obě metody kompenzace fungují spolehlivě. Při měření byly mezi vzorkem a můstekem umístěny dvě zrcadla jako na obr. 4.1. Zrcadla byla umístěna paralelně, takže se dá očekávat, že se chovají jako retardér s dvojnásobným fázovým zpožděním. Dále jsme se kompenzací zrcadel Berekovým kompenzátem

nevěnovali.



Obrázek 4.7: (a) Schéma pro testování Berekova kompenzátoru (BC). V případě dynamického nastavení je před vzorek umístěn PEM. (b) Změřená data CoFe při pokojové teplotě,  $\lambda = 1050$  nm, po symetrizaci v poli a filtraci frekvencí  $2\beta$  (viz oddíl 4.3). Polarizace  $\beta = 0^\circ$  (plná čára),  $\beta = 45^\circ$  (přerušovaná čára). Pro porovnání jsou zobrazena i data měřená bez zrcadel (ref) a s nimi. fix/dyn značí fixní/dynamické nastavení,  $0/\pi$  značí nedotáčivý/přetáčivý mód. Vykreslená data nejsou přímo měřená, ale je z nich vybraná frekvence  $2\beta$  (viz oddíl 4.3).

#### 4.2.2 Současné měření ellipticity

Měření MO dat pro dvě polohy vyvažovací destičky je časově náročné a v jistém smyslu slova zahazuje polovinu dat. Metoda kompenzace pomocí (4.13) se zajímá pouze o průměr signálů v obou polohách a nebude v potaz jejich rozdíl, který v sobě nese informaci o ellipticitě – druhý člen (4.12)  $\sin 2\zeta_2 d\chi$ . Změnu ellipticity od vzorku  $\Delta\chi$  však nelze takto jednoduše ze signálu extrahovat, protože je vážena neznámým faktorem  $\sin 2\zeta_2$ , který je navíc malý.

Vyvinuli jsme proto metodu charakterizace Stokesova kovektoru můstku, která nám dodá neznámé faktory stočení i ellipticity v měřeném signálu. Základem metody je studium měřeného signálu pro všechny vstupní lineární polarizace. Pokud vyvážíme můstek pro vstupní  $\beta_0$  a celkový kovektor označíme  $\mathcal{D}^{\beta_0}$ , pak

$$\begin{aligned} U_{A-B} &= \mathcal{D}^{\beta_0} \cdot S \\ &= I \left[ d_0^{\beta_0} + \cos 2\chi \left( d_1^{\beta_0} \cos 2\beta + d_2^{\beta_0} \sin 2\beta \right) + d_3^{\beta_0} \sin 2\chi \right] \\ &\equiv I \left[ d_0^{\beta_0} + \cos 2\chi \left( d_\perp^{\beta_0} \sin (2\psi^{\beta_0} - 2\beta) \right) + d_3^{\beta_0} \sin 2\chi \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

kde jsme zavedli cylindrické souřadnice kovektoru pomocí  $d_\perp^{\beta_0}$  a  $\psi^{\beta_0}$ . Ve vyváženém můstku platí (pro  $\chi = 0$ )

$$d_0^{\beta_0} + d_\perp^{\beta_0} \sin (2\psi^{\beta_0} - 2\beta_0) = 0. \quad (4.20)$$

Výpočtem gradientu v tomto vyváženém bodě pak dostaneme pro malé změny (způsobené vzorkem) polarizačního stavu (a intenzity)

$$dU_{A-B}(\beta_0) = 2I \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_0^{\beta_0}}{d_\perp^{\beta_0}} \right)^2} d\beta + d_3^{\beta_0} d\chi \right). \quad (4.21)$$

Pokud dokážeme charakterizovat všechny složky kovektoru, dokážeme určit oba kofaktory  $d\beta$  i  $d\chi$ . Po provedení dvou měření, ve kterých se kofaktory liší, je pak možné určit stočení i elipticitu od vzorku.

### Charakterizace kovektoru

Předkládaná metoda charakterizace visí na předpokladu, že jsme schopni do můstku svítit světlem s libovolně natočenou lineární polarizací  $\beta$ . V praxi to provádíme tak, že s danou polarizací svítíme na vzorek a předpokládáme, že se po průchodu/odrazu příliš nezmění. V prvním ze zkušebních experimentů – tenký film CoFe v transmisní geometrii při pokojové teplotě – byl tento předpoklad experimentálně ověřen. V druhém – FeRh v transmisní geometrii při 420 K – nebyl ověřen, ale vzhledem k úhlu dopadu  $< 0,5^\circ$  mu stejně věříme. S tímto předpokladem lze složky  $d_0^{\beta_0}, d_1^{\beta_0}, d_2^{\beta_0}$  snadno určit z  $\beta$ -závislosti (4.19).

Poslední složku  $d_3^{\beta_0}$  nelze určit přímo, aniž bychom dokázali definovaně měnit vstupní elipticitu. K jejímu určení je potřeba splnit dvojici předpokladů. Zaprvé již zmíněný experimentálně ověřený fakt, že oba z detektorů lze vynulovat vhodnou lineární polarizací před děličem. To znamená, že vzhledem ke světlu před můstkem předpokládáme<sup>8</sup>

$$\mathcal{D}'^A = d'_0^A(1, -1, 0, 0), \quad (4.22a)$$

$$\mathcal{D}'^B = d'_0^B(1, 1, 0, 0). \quad (4.22b)$$

Druhým předpokladem, který zřejmě není splněn zcela, je alespoň přibližná unitarita celé soustavy optických prvků před děličem (zachování intenzity při průchodu přes zrcadlo, destičku, ...). Pak totiž 3-kovektor  $(d_1, d_2, d_3)$  zachovává svoji normu a vzhledem ke světlu od vzorku lze třetí složku (až na znaménko) určit pomocí

$$d_1^{A/B^2} + d_1^{A/B^2} + d_3^{A/B^2} = d_0^{A/B^2}, \quad (4.23)$$

pokud změříme průběh napětí na každém detektoru zvlášť

$$U^{A/B}(\beta) = I \left( d_0^{A/B} + d_1^{A/B} \cos 2\beta + d_2^{A/B} \sin 2\beta \right). \quad (4.24)$$

Z  $\beta$ -závislosti napětí na obou detektorech lze klasicky určit jejich  $d_0, d_1, d_2$ , ale díky unitaritě lze navíc určit absolutní hodnotu  $d_3$ : Znaménko  $d_3$  touto metodou určit nedokážeme. Nicméně vzhledem k tomu, že 3-kovektory obou detektorů před můstkem (4.22) mají opačnou orientaci, musí i před celou soustavou mít opačné znaménko:  $d_3^A \times d_3^B < 0$ .

Když máme určeny kovektory jednotlivých detektorů, vrátíme se k rozdílovému napětí  $U_{A-B}$ . Předpokládáme, že je dáno jednoduše rozdílem napětí na obou detektorech, avšak každé může být zesíleno mírně odlišným faktorem. V každém případě by pořád mělo platit

$$\frac{d_3^{A-B}}{d_\perp^{A-B}} = \frac{d_3^A}{d_\perp^A} = \frac{d_3^B}{d_\perp^B}, \quad (4.25)$$

---

<sup>8</sup>Vyjádřenou v souřadné soustavě děliče, takže  $d'_2 = 0$  nezahrnuje předpoklad přesné shodnosti se souřadnou soustavou světla před můstkom.

takže jsme již schopní určit  $d_3^{A-B}$ . Hodnoty pro A a B by měly při splnění všech předpokladů být stejné, ale v praxi se samozřejmě mírně liší. Pak bereme nějakou jejich vhodnou kombinaci, my jsme zvolili bez dalšího zdůvodnění geometrický průměr.

Pokud nelpíme na určení absolutního znaménka ellipticity, stačí znát pouze relativní znaménko  $d_3$  mezi různými vyváženými můstku, tj. mezi různými  $\beta_0$ . Absolutní hodnota znaménka pak už jen udává, jestli měříme  $+\Delta\chi$  či  $-\Delta\chi$ . Relativní znaménko lze spolehlivě určit z přibližného teoretického výpočtu, viz např. oddíl o kompenzaci zrcadel výše ( $\beta_0 = 0^\circ$  a  $\beta_0 = 90^\circ$  mají opačná znaménka).

Přesto jsme však při zkušebním experimentu s CoFe provedli pokus o jeho experimentální určení. Postup je následující. Nejdříve je vyvážen můstek pro dané  $\beta_0$ . Dále je před celou měřící soustavu (nejlépe za vzorek, v našem případě před vzorek) umístěna čtvrtvlnná destička s definovanou osou zorientovanou přibližně ve směru  $\beta_0$ . Je nalezena přibližná poloha čtvrtvlnné destičky, která vyvažuje můstek (teoreticky by to měla být přesně poloha, kdy její osa splývá s  $\beta_0$ ). Destička je drobně vychýlena do definovaného *kladného* směru a je zaznamenáno znaménko  $U_{A-B}$ . Protože toto kladné vychýlení zanáší pro všechna  $\beta_0$  malou ellipticitu stejněho znaménka, jsou tím relativní znaménka určena. Pro určení absolutního znaménka by pak stačilo zjistit, zda je definovaná osa destičky pomalá či rychlá. Čtvrtvlnná destička je samozřejmě opět vyjmuta pro samotné měření.

Ve všech vzorcích pro  $U_{A-B}$  jsme explicitně psali faktor  $I$ , protože pochází ze Stokesova vektoru a ne kovektoru. Při měření  $\beta$ -závislosti napětí je ale již zahrnut, což nám usnadňuje práci. S fitovanými parametry  $a$  v  $\beta$ -závislostech

$$U^A(\beta) = a_0^A + a_1^A \cos 2\beta + a_2^A \sin 2\beta, \quad (4.26a)$$

$$U^B(\beta) = a_0^B + a_1^B \cos 2\beta + a_2^B \sin 2\beta, \quad (4.26b)$$

$$U^{A-B}(\beta) = a_0^{A-B} + a_1^{A-B} \cos 2\beta + a_2^{A-B} \sin 2\beta \quad (4.26c)$$

jsou pak kofaktory stočení a ellipticity (s geometrickým průměrem faktorů od A a B)

$$dU_{A-B} = \sqrt{1 - \frac{a_0^{A-B 2}}{a_1^{A-B 2} + a_2^{A-B 2}}} d\beta + \sqrt[4]{\left( \frac{a_0^{A 2}}{a_1^{A 2} + a_2^{A 2}} - 1 \right) \left( \frac{a_0^{B 2}}{a_1^{B 2} + a_2^{B 2}} - 1 \right)} d\chi. \quad (4.27)$$

Změření celé závislosti  $U^{A-B}(\beta)$  vyžaduje změnu zesílení, aby nedošlo k překročení měřícího rozsahu lock-inů. Proto používáme (4.27) pouze k určení poměru obou kofaktorů

$$dU_{A-B} = g \left( d\beta + \frac{\sqrt[4]{\left( \frac{a_0^{A 2}}{a_1^{A 2} + a_2^{A 2}} - 1 \right) \left( \frac{a_0^{B 2}}{a_1^{B 2} + a_2^{B 2}} - 1 \right)}}}{\sqrt{1 - \frac{a_0^{A-B 2}}{a_1^{A-B 2} + a_2^{A-B 2}}}} d\chi \right). \quad (4.28)$$

Kofaktor stočení  $g$  určíme přímo: změříme několik  $\beta$  v malém okolí  $\beta_0$  (např.  $\pm 1^\circ$  a body proložíme přímkou;  $g$  je pak její směrnicí).

Pro přesné určení obou kofaktorů je žádoucí, aby měly oba přibližně stejnou velikost. Toho lze docílit vložením Berekova kompenzátoru mezi vyvažovací půlvlnnou destičku a polarizační dělič v optickém můstku. Osa kompenzátoru je nastavena diagonálně vzhledem k dvoum hlavním módům děliče a fázové zpoždění je nastaveno  $\pi/4$ .

### 4.3 Určení anizotropie MLD

Snaha o vystížení anizotropie MLD pomocí vzorce (4.1) založeného na (2.1) nebyla úspěšná. Výskyt  $\varphi_M$  v argumentu sinu se zakládá na argumentech symetrie; pro plně rotačně symetrické prostředí v rovině rozhraní je jediný význačný směr dán magnetizací, takže osa zanesené magneto-optické anizotropie s ní pak musí splývat. Tento argument však selhává už i pro čtyřčetnou rotační symetrii, pak totiž není důvod, aby např.  $\varphi_M = 10^\circ$  zanášelo magneto-optickou anizotropii ve stejném směru.

Správné rozšíření vzorečku by mělo tvar

$$\Delta\beta = P(\varphi_M) \sin(2\varphi_O(\varphi_M) - 2\beta) \quad (4.29)$$

se směrem optické osy  $\varphi_O$ , které se už pro neúplnou rotační symetrii nemusí rovnat  $\varphi_M$ . V takovém tvaru postihuje MO jevy všech řádů (stejně jako původní izotropní vzorec) a trpí stejnou degenerací jako (4.1), takže lze  $P$  a  $\varphi_O$  určit pouze s nějakým přepokladem (např. kubické symetrie), který degeneraci sejme.

Se vzorečkem (4.29) je ještě jeden problém:  $\varphi_M$  v něm vystupuje pouze skrze libovolné funkce  $P$  a  $\varphi_O$ , a bez přidaných požadavků na jejich tvar nelze určit magnetickou anizotropii  $\varphi_M(\varphi_H)$ . Shodná magnetická anizotropie určená z měření na různých vlnových délkách je ale ve výsledku jediným spolehlivým kritériem, které nás dokáže přesvědčit o správnosti změřených dat. Přídavný požadavek na  $P$  a  $\varphi_O$ , který zde přijmeme, je takový, že měřené stočení je MO jevem maximálně kvadratickým v magnetizaci vzorku  $\mathbf{M}$ . Uvidíme, že tento požadavek je k určení magnetické anizotropie dostačující (viz oddíl 4.4), tj. zajišťuje vzájemnou jednoznačnost  $\Delta\beta$  a  $\varphi_M$ . Pro kvalitativní analýzu je vyjádření (4.29) užitečné, protože dovoluje posoudit, zda se v měřeném signálu neobjevují MO jevy vyšších řádů<sup>9</sup>.

Vzhledem k libovolnosti funkcí  $P$  a  $\varphi_O$  je jediná informace obsažená v ansatzu (4.29) vzájemná závislost signálu pro různá  $\beta$ . Ta je založena na dvou předpokladech. Zaprvé musí být průchod/odraz přibližně izotropní, tj. nultý člen rozvoje transmisní/reflexní Jonesovy matice (zde obě značíme  $\mathcal{R}$ ) musí být přibližně úměrný jednotkové matici. V praxi to znamená téměř kolmý dopad a přibližně izotropní tenzor permitivity vzorku. Označíme odchylku od jednotkové matice  $\mathcal{R}'$  a rozdělíme ji na “nemagnetickou” a “magnetickou” část (po vytáhnutí celkového faktoru  $R_0$ ).

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{M}) &= R_0 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{R}'(\mathbf{M}) \right] \\ &= R_0 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{R}'_0 + \mathcal{R}'_M(\mathbf{M}) \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pro jednoduchost zápisu dále vypustíme celkový faktor  $R_0$  (pokládáme  $R_0 = 1$ ), který se ve výpočtu nijak neprojeví. Pokud je  $\mathcal{R}'$  malé, je rozumné uvažovat, že můstek je vyvážen pro stejnou lineární polarizaci, jako je ta dopadající. Díky tomu je pak možné spočítat, na které prvky reflexní matice je měřený signál citlivý. Pokud toto splněno není, pak je můstek pro každé  $\beta$  citlivý na jiný mix prvků  $\mathcal{R}'_M$ ,

---

<sup>9</sup>Např. v případě [111]-normálově orientovaných kubických vzorků, jako bylo pozorováno v [17].

a tento mix je složitou funkcí nemagnetické  $\mathcal{R}'_0$ ; vzorec pak nemá jednoduchou  $\beta$ -závislost (4.29). Po případném elipsometrickém změření  $\mathcal{R}'_0$  je možné správnou  $\beta$ -závislost dopočítat a dosadit do nového ansatzu, my se tím však v této práci nezabýváme, protože uvedený předpoklad malosti  $\mathcal{R}'$  splňujeme.

Pomocí Stokesových kovektorů lze jednoduše vyjádřit stočení a ellipticitu do prvního řádu v  $\mathcal{R}'$ . Pro dané vstupní  $\beta$  (Stokesův vektor  $\mathcal{S}(\beta)$ ) zavedeme kovektory<sup>10</sup>  $\mathcal{D}^\beta(\beta) = \frac{1}{2}(0, -\sin 2\beta, \cos 2\beta, 0)$ , resp.  $\mathcal{D}^\chi(\beta) = \frac{1}{2}(0, 0, 0, 1)$ , které měří stočení, resp. ellipticitu vyjádřenou změnou Stokesova vektoru  $d\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{D}^\beta(\beta) \cdot \mathcal{S}(\beta) = 0, \quad d\beta = \mathcal{D}^\beta \cdot d\mathcal{S} \quad (4.31a)$$

$$\mathcal{D}^\chi(\beta) \cdot \mathcal{S}(\beta) = 0, \quad d\chi = \mathcal{D}^\chi \cdot d\mathcal{S}. \quad (4.31b)$$

Rozvedeme Muellerovu matici (1.12) vzorku do prvního řádu<sup>11</sup> v  $\mathcal{R}'$  (vyjádřeného diferenciálem  $d\mathcal{R}$  v okolí jednotkové matice<sup>12</sup>)

$$dM_{00} = \Re \operatorname{Tr}\{d\mathcal{R}\} \quad (4.32a)$$

$$dM_{i0} = dM_{0i} = \Re \operatorname{Tr}\{\sigma_i d\mathcal{R}\} \quad (4.32b)$$

$$dM_{ij} = \delta_{ij} \Re \operatorname{Tr}\{d\mathcal{R}\} + \epsilon_{ijk} \Im \operatorname{Tr}\{\sigma_k d\mathcal{R}\} \quad (4.32c)$$

pro  $i, j = 1, 2, 3$ .

Stočení

$$d\beta = \frac{1}{2} (-\sin 2\beta \quad \cos 2\beta) \begin{pmatrix} dM_{10} & dM_{11} & dM_{12} \\ dM_{20} & dM_{21} & dM_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

a ellipticia

$$d\chi = \frac{1}{2} (dM_{30} \quad dM_{31} \quad dM_{32}) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

jsou po dosazení (4.32) kompaktně

$$d\beta + i d\chi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\{(-\sigma_1 \sin 2\beta + \sigma_2 \cos 2\beta + i\sigma_3) d\mathcal{R}\}. \quad (4.35)$$

Vidíme, že v okolí izotropního odrazu/průchodu jsou jediné povolené  $\beta$ -závislosti stočení a ellipticity dané třemi členy:  $\cos 2\beta$ ,  $\sin 2\beta$  a konstantou<sup>13</sup>. Konstantní členy  $\propto \operatorname{Tr}\{\sigma_3 d\mathcal{R}\}$  jsou navíc často vyloučeny symetrií, konkrétně ve všech případech studovaných v této práci: při kolmém dopadu na [001]-normálově orientovaný kubický vzorek s in-plane magnetizací. Pak jsou povolené jen členy harmonické s frekvencí  $2\beta$ , které se složí do vzorečku (4.29).

Poznamenejme, že nemagnetická část reflexní matici  $\mathcal{R}'_0$  zanáší do měřeného signálu pouze konstantu, kterou můstek měřit nedokáže.

---

<sup>10</sup>Argument  $\beta$  zde značí, pro jaké  $\beta$  je daný kovektor platný. Horní index  $\beta$  či  $\chi$  značí, jestli kovektor měří stočení či ellipticitu.

<sup>11</sup>Striktně vzato po tomto kroku již nejde o mocninný rozvoj měřeného signálu v  $\mathbf{M}$ , protože zahazujeme některé kvadratické členy a ponecháváme jiné. Pro malá stočení jsou však zahozené členy silně potlačeny.

<sup>12</sup>Příseme  $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\mathcal{R}$ .

<sup>13</sup>Stočení konstantní pro všechna  $\beta$ . Např. Faradayův jev je způsoben tímto členem.

Dále se budeme věnovat situaci relevantní pro tuto práci, tzn. měřeno je pouze stočení a na základě předpokládané kubické symetrie, kolmého dopadu a in-plane magnetizace neuvažujeme konstantní člen v (4.35).

Předpokládáme, že vzorek je v jedno-doménovém stavu se saturovanou in-plane magnetizací (Stonerův-Wohlfarthův model z oddílu 1.5). Díky tomu se každý člen řádu  $k$  mocninného rozvoje v  $\mathbf{M}$  redukuje na harmonickou funkci  $k\varphi_M$ . Do druhého řádu se tedy vyskytují členy  $\cos \varphi_M$ ,  $\sin \varphi_M$ ,  $\cos 2\varphi_M$ ,  $\sin 2\varphi_M$  a konstanta, kterou nedokážeme změřit kvůli vyvažování můstku ( $\xi(\beta)$ ). První dva členy jsou lineární MO jevy a většinou jsou kvůli témař kolmému dopadu ( $< 1^\circ$ ) poměrně malé.

Zajímáme se pouze o kvadratické jevy, proto je od lineárních oddělíme stejným způsobem jako metoda rotujícího pole (rovnice (2.8)). Předpokládáme in-plane magnetickou anizotropii s dvoučetnou rotační symetrií, pak platí  $\varphi_M(\varphi_H + 180^\circ) = \varphi_M(\varphi_H) + 180^\circ$  a symetrizaci podle  $\mathbf{M}$  můžeme provést pomocí symetrizace podle  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ :

$$\Delta\beta^Q(\varphi_H) = \frac{1}{2} (\Delta\beta(\varphi_H) + \Delta\beta(\varphi_H + 180^\circ)) . \quad (4.36)$$

V dalším předpokládáme, že symetrizace byla provedena a  $\Delta\beta^Q$  značíme bez indexu jako  $\Delta\beta$ . Poznamenáme však, že tato symetrizace teoreticky není nezbytná. V konečném důsledku jsou fitovány koeficienty mocninného rozvoje a principiálně není problém fitovat o několik parametrů navíc. V této práci jsme se o to ale nepokoušeli.

Pro každé změřené  $\beta$  máme tedy dva neznámé koeficienty funkcí  $\cos 2\varphi_M$  a  $\sin 2\varphi_M$ . Za splnění předpokladů vedoucích na (4.35) je pak  $\beta$ -závislost této dvojice koeficientů také popsána dvojicí koeficientů  $\cos 2\beta$  a  $\sin 2\beta$ , celkem máme pro celou sadu měření 4 koeficienty. Používaný model je tedy

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= (P_{11} \cos 2\varphi_M + P_{12} \sin 2\varphi_M) \cos 2\beta \\ &\quad + (P_{21} \cos 2\varphi_M + P_{22} \sin 2\varphi_M) \sin 2\beta \\ &\equiv P_+ \sin 2 [+(\varphi_M - \pi_+) - \beta] \\ &\quad + P_- \sin 2 [-(\varphi_M - \pi_-) - \beta] \end{aligned} \quad (4.37)$$

s vyjádřením parametrů dvěma ekvivalentními způsoby. Pro účely fitu používáme vyjádření první rovnosti, protože je v parametrech lineární. Pro prezentování výsledků používáme druhý způsob<sup>14</sup>.

Odpovídající Jonesova matice je

$$\begin{aligned} d\mathcal{R}_M &= P_+ [\sigma_1 \cos 2(\varphi_M - \pi_+) + \sigma_2 \sin 2(\varphi_M - \pi_+)] \\ &\quad + P_- [\sigma_1 \cos 2(\varphi_M - \pi_-) - \sigma_2 \sin 2(\varphi_M - \pi_-)] , \end{aligned} \quad (4.38)$$

vidíme tedy, že člen úměrný  $P_+$  otáčí svou optickou osu spolu s magnetizací, člen  $P_-$  opačným směrem.

Při otáčení vzorku v rovině  $xy$  jsou  $P_+$ ,  $P_-$ ,  $\pi_+$  nezávislé na úhlu natočení  $\gamma$ . Jediný  $\pi_-$  se transformuje způsobem  $\pi_-(\gamma') = \pi_-(\gamma) + 2(\gamma' - \gamma)$ . Čtyři parametry  $P_+$ ,  $P_-$ ,  $\pi_+$ ,  $(\pi_- - 2\gamma)$  lze tedy považovat za parametry vzorku, nezávislé na souřadné soustavě. Člen úměrný  $P_+$  je nezávislý na natočení vzorku a v izotropních

---

<sup>14</sup>Vztah obou vyjádření je v principu stejný jako vyjádření polarizace světla v bázi kolmých lineárních polarizací ( $P_{ij}$ ) nebo kruhových polarizací ( $P_{+/ -}$ ).

materiálech se přímo jedná o  $P$  ze vzorce 2.1. Naopak  $P_-$  je v izotropních vzorcích zakázán symetrií.

Při kolmém dopadu jsou Jonesovy matice úměrné  $\varepsilon^\perp - \varepsilon^\parallel \varepsilon^- / n^2$  (viz oddíl 1.3, dodatek A.1). Pro [100]-normálově orientovaný kubický vzorek můžeme dosadit tvar magnetické permitivity a dostat (pro  $\gamma$  značící směr jedné z hlavních krystalografických os)

$$P_+ = P_0 \left( \frac{G_s}{2} - \frac{K^2}{n^2} \right) \frac{M_S^2}{2}, \quad \pi_+ = 0, \quad (4.39a)$$

$$P_- = P_0 \left( \frac{\Delta G}{2} \right) \frac{M_S^2}{2}, \quad \pi_- = 2\gamma \quad (4.39b)$$

s "extrakčním faktorem"  $P_0$ , který vyjadřuje, jakou měrou se v Jonesově matici projevují změny permitivity, a závisí na nemagnetických parametrech vzorku, tj. tloušťce vrstev, jejich indexech lomu, atd. Po dosazení do (4.37) je vzorec ekvivalentní (2.2) v kolmém dopadu ( $P_0$  je obdobou konstanty  $A_{s/p}$ ).

Prestože pro kubický [100]-normálově orientovaný vzorek platí  $\pi_+ = 0$  a  $\pi_- - 2\gamma = 0$ , ve zpracování oba úhly připouštíme. Souřadné soustavy polarizace ( $\beta$ ) a magnetu ( $\varphi_H, \varphi_M$ ) byly totiž stanoveny zcela nezávislými způsoby a pravděpodobně jsou proto spojeny vzájemnou rotací o malý úhel ( $< 5^\circ$ ). Oběma úhlům  $\pi_+ \equiv \pi_- - 2\gamma$  tedy přikládáme nový význam zmíněného offsetu. Úhel rotace vzorku  $\gamma$  se pak určí jako  $2\gamma = \pi_- - \pi_+$ .

Pro kubické vzorky používáme v soustavě spojené se vzorkem ještě jednu parametrizaci. Označíme  $\gamma$  úhel natočení [100], [110] nebo některý z jím ekvivalentních krystalografických směrů magnetické vrstvy. Parametry  $P_\gamma$ , resp.  $P_{\gamma+45^\circ}$  pak vyjadřují sílu kvadratického jevu při magnetizaci ve význačných směrech  $\gamma$  a  $\gamma + 45^\circ$  a lze je vizuálně přibližně odečítat z měřených dat. Dosazením (4.39) do (4.37) platí

$$\Delta\beta = -P_\gamma \cos 2(\varphi_M - \gamma) \sin 2(\beta - \gamma) + P_{\gamma+45^\circ} \sin 2(\varphi_M - \gamma) \cos 2(\beta - \gamma). \quad (4.40)$$

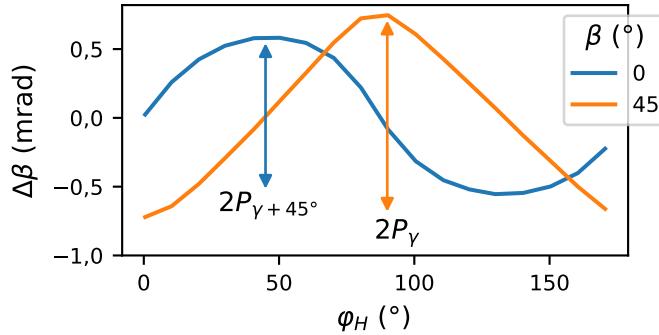
Při orientaci polarizace  $\beta = \gamma$  je amplituda změřené křivky  $\Delta\beta(\varphi_H)$  přímo  $P_{\gamma+45^\circ}$ , při polarizaci ve směru  $\beta = \gamma + 45^\circ$  je amplituda  $P_\gamma$ , viz obr. 4.8. Platí

$$P_\gamma = P_+ + P_-, \quad P_{\gamma+45^\circ} = P_+ - P_-. \quad (4.41)$$

Pro určení síly kvadratického MO jevu (popsanou fenomenologickými parametry  $P$ ) je nutné znát měřený signál v závislosti na  $\varphi_M$ . V praxi vždy během analýzy určujeme i magnetickou anizotropii, která nám převod  $\varphi_H \mapsto \varphi_M$  poskytne. Pokud není magnetická anizotropie srovnatelná s vnějším polem, pak je možné poměrně přesně určit  $P$  i z dat s předpokladem  $\varphi_M = \varphi_H$ .

## 4.4 Určení magnetické anizotropie

Určení magnetické anizotropie z měřených dat je do jisté míry oddělené od určení síly MO jevů. Předpokládáme, že  $\varphi_H$ -závislost měřeného rozdílového napětí  $U_{A-B}$  je pouze skrze  $\varphi_M(\varphi_H)$  udávajícího směr saturované in-plane magnetizace  $\mathbf{M}$ . Znamená to, že ve vzorku je jediná MO aktivní vrstva, případně ve všech vrstvách je  $\varphi_M(\varphi_H)$  totožné. Zároveň je také nutné odstranit všechny příspěvky do signálu,



Obrázek 4.8: Určení MLD koeficientů  $P$ . Měřená data s CoFe, pokojová teplota, 1050 nm,  $\gamma \approx 0^\circ$ . Hodnoty  $P$  lze odečítat přímo z grafu, na obrázku jsou oba vyznačené koeficienty kladné.

které nepochází přímo od vzorku (např. MO jevy v okénkách kryostatu, či pohyb čehokoliv v experimentálním uspořádání vlivem změny směru magnetického pole). Tento požadavek je naprosto zásadní.

Dále předpokládáme, že signál je dobře popsáný konečným počtem členů mocninného rozvoje v  $\mathbf{M}$ . V této práci se omezujeme na kvadratické členy (po odstranění lineárních jevů způsobem popsáném v předešlém oddílu – viz vztah (4.37)), které mají vzhledem k magnetické saturaci tvar

$$U_{A-B}(\varphi_H) = b_0 + b_c \cos 2\varphi_M(\varphi_H) + b_s \sin 2\varphi_M(\varphi_H). \quad (4.42)$$

Omezení na kvadratické členy však není nezbytné. Pokud z předpokládané symetrie problému vycházejí i jiné členy (např. pro [111]-normálově orientované kubické vzorky členy harmonické v  $3\varphi_M$ ,  $6\varphi_M$ ), není problém je do (4.42) zahrnout. Stejně tak není nutné provádět symetrizaci v  $\mathbf{H}_{ext}$  pro odstranění lineárních jevů, a místo toho zahrnout členy harmonické v  $1\varphi_M$ . Nižší popsána metoda teoreticky (ověřeno na simulacích bez šumu) funguje s libovolným počtem členů, který nepřesáhne určitou mez, za kterou je fit degenerovaný. Jediný problém, který s sebou přidávání parametrů přináší, je zřejmé zvyšování jejich počtu. V této práci se však dále venujeme pouze kvadratickým členům s rozvojem (4.42).

Pokud naměříme  $U_{A-B}$  pro sadu  $\varphi_H$ , a signál je skutečně dán vzorcem (4.42), je možné z něj extrahovat závislost  $\varphi_M(\varphi_H)$ . Nejprve uvedeme páár poznámek o degeneraci. Pokud změříme  $n$  různých (s lineárně nezávislými koeficienty  $b$ ) závislostí  $U_{A-B}(\varphi_M)$  (například pro různé polarizace  $\beta$ ) pro  $m$  hodnot  $\varphi_H$ , pak je naším cílem zjistit celkem  $m + 3n$  parametrů –  $m$  hodnot  $\varphi_M(\varphi_H)$  a  $3 \times n$  parametrů (4.42) – z  $n \times m$  změřených bodů. Pro  $n = 1$  je vždy parametrů více než dat, pro  $n \geq 2$  je situace v pořádku (typicky  $m >$  počet členů v rozvoji). Rozdíl mezi  $n = 1, 2$  lze intuitivně pochopit na jiné formálně ekvivalentní úloze. Po vykreslení bodů ( $U_{A-B}^{(1)}(\varphi_H), U_{A-B}^{(2)}(\varphi_H)$  do roviny<sup>15</sup> leží podle (4.42) body na nějaké elipse. V této analogii je naším úkolem elipsu identifikovat, a zároveň pro každý bod určit, v které části elipsy leží (což odpovídá  $\varphi_M(\varphi_H)$ ). Pro obyčejnou elipsu to je jednoznačné, pokud však  $n = 1$ , nebo jsou trojice parametrů  $b$  pro obě měření lineárně závislé, je elipsa redukována na přímku. U té řešení jednoznačné není – délka úsečky může být libovolná delší než nejvzdálenější naměřené body. To s sebou nese i nejednoznačnost v  $\varphi_M(\varphi_H)$ .

<sup>15</sup>Pokud měříme jen  $U_{A-B}^{(1)}$ , pak pokládáme  $U_{A-B}^{(2)} = 0$ .

Problém trpí ještě jedním typem nezávažné degenerace – celkové pootočení  $\varphi_M$  oproti  $\varphi_H$ . Pokud bychom měli dva průběhy magnetizace, které se liší pouze celkovým pootočením, tj.  $\varphi_M^2(\varphi_H) = \varphi_M^1 + \text{konst.}$ , pak je možné vhodnou lineární transformací (“ootočením”) parametrů  $b_1, b_2$  dosáhnout toho, aby model (4.42) dával totožné hodnoty. To znamená, že fitem naměřených dat nelze rozlišit mezi  $\varphi_M^1$  a  $\varphi_M^2$  – je možné pouze určit třídu ekvivalence průběhu  $\varphi_M(\varphi_H)$ , jejíž prvky se navzájem liší aditivní konstantou (celkovým pootočením). Naštěstí nám však v tuto chvíli spěchá na pomoc termodynamika s podmínkou integrability (1.53), která z každé takové třídy vybírá právě jedno  $\varphi_M(\varphi_H)$ , pro které existuje volná energie.

Výhoda odděleného zpracování magnetické anizotropie a určení anizotropie MO koeficientů je taková, že je možné ho provést i v případě, kdy nejsou splněny požadavky pro určení síly MO jevů. Konkrétně např. není nutné kompenzovat zrcadla ani nepřesnosti vlnových destiček, tj. můžeme měřit libovolný mix stočení a ellipticity. Také je možné měřit v situacích, kdy měřený signál nemá správnou  $\beta$ -závislost (4.37), tj. nekolmý dopad či vzorek s nezanedbatelnou strukturální anizotropií (tj. když konstantní člen transmisní/reflexní matice se výrazně liší od jednotkové matice). Není ani nutné mít při vstupu do vzorku lineárně polarizované světlo – dokonce není ani nutné polarizační stav znát. Jediným předpokladem je, že reflexní matice vzorku je dobře popsaná mocninným rozvojem v  $\boldsymbol{M}$ .

Nyní již přistoupíme k samotnému procesu extrakce  $\varphi_M(\varphi_H)$ . Základem je opět aplikace metody nejmenších čtverců – hledání parametrů, které minimalizují cílovou funkci  $\mathcal{L}$  tvaru (4.2) s modelem (4.42). Narozdíl od všech předchozích popsaných aplikací však tentokrát fit nelze zcela linearizovat, proto používáme některou z dostupných vícedimenzionálních minimalizačních metod, např. *gradientní sestup*. Část fitu odpovídající parametru  $b$  linearizovat lze. Postupujeme tedy tak, že cílovou funkci  $\mathcal{L}$  považujeme pouze za funkci  $\varphi_M(\varphi_H)$ , s předpokladem, že jsou dosazeny optimální parametry  $b$  pro dané  $\varphi_M(\varphi_H)$ , určené lineární regresí<sup>16</sup>. Gradientní sestup je pak aplikován pouze na parametry  $\varphi_M(\varphi_H)$ . Jako startovní bod iterací zpravidla volíme nulovou magnetickou anizotropii  $\varphi_M(\varphi_H) = \varphi_H$ .

V této podobě není výhodné aplikovat podmínky integrability již během fitu, protože gradient cílové funkce je kolmý na směr, který způsobuje celkové pootočení magnetizace – gradientní sestup ji přirozeně dodržuje. Přesto je však jistější jí po provedení fitu aplikovat a vybrat tu správnou aditivní konstantu.

V praxi je měřeno mnoho hodnot  $\varphi_H$ , a přestože je uvedená metoda zcela spolehlivá v simulacích, v přítomnosti šumu zpravidla nelze spoléhat na výsledky fitů s více než 20 parametry. Proto závislost  $\varphi_M(\varphi_H)$  parametrizujeme menším počtem parametrů než  $\varphi_M$  pro každé měřené  $\varphi_H$ . V případě námi měřených vzorků používáme parametrizaci Stonerova-Wohlfarthova modelu (1.47) s kubickou  $k_4$  a uniaxialní  $k_u$  anizotropní konstantou, jimi svíraným úhlem  $\varphi_u$  a in-plane rotací vzorku  $\gamma$ . Pro potřeby fitu je výrazně výhodnější místo nich používat ekvivalentní parametrizaci pomocí  $\tilde{k}_4$  a  $\tilde{k}_u$ <sup>17</sup> (viz (1.50)), která ale navíc zachovává přirozenou topologii parametrického prostoru<sup>18</sup> a místo  $\varphi_u$  používá  $\gamma + \varphi_u$ , tedy směr uniaxialní anizotropie v experimentální souřadné soustavě. To umožňuje její směr spolehlivě určit např. v případě, kdy je kubická anizotropie z nějakého důvodu zatížena

---

<sup>16</sup>Do (4.42) je dosazeno konkrétní  $\varphi_M$  a jsou fitovány parametry  $b$ .

<sup>17</sup>Jejich reálné a imaginární části.

<sup>18</sup>V tomto vyjádření např. splývají  $\varphi_u$  a  $\varphi_u + 180^\circ$ , nebo  $k_u = 0$  pro všechna  $\varphi_u$ .

velkou chybou (např. je mnohem slabší než uniaxiální).

V této podobě výpočet cílové funkce  $\mathcal{L}(\Re \tilde{k}_4, \Im \tilde{k}_4, \Re \tilde{k}_u, \Im \tilde{k}_u)$  probíhá ve třech krocích

1. Pro pevně danou sadu  $\varphi_H$  je minimalizací magnetické entalpie (1.49) spočítaná sada  $\varphi_M$ .
2. Tato  $\varphi_M$  jsou dosazena do (4.42) a metodou lineární regrese jsou spočítány parametry  $b$ .
3. Je spočítaná celková kvadratická odchylka měřených dat od (4.42) s dosazenými  $b$ .

Libovolnou metodou je pak numericky nalezeno globální minimum  $\mathcal{L}$ .

Popsaná optimalizační úloha je poměrně výpočetně náročná, a proto zmíníme pár vypozorovaných rysů, které mohou pomoci s její optimalizací. Hlavním problémem je zřejmě výpočet  $\varphi_M$  s danými anizotropními konstantami. V ideálním případě je provedena úloha hledání minima či nuly pro každou hodnotu  $\varphi_H$ . Pro předběžné hledání minima  $\mathcal{L}$  lze ale využít přibližných výpočtů popsaných v dodatku A.2. Numerickému počítání gradientu  $\mathcal{L}$  se lze vyhnout pomocí analytických derivací  $\varphi_M$  podle anizotropních konstant, takéž popsaných v dodatku A.2. Dále pro nulovou anizotropii je vždy Hessova matice cílové funkce diagonální<sup>19</sup>. To znamená, že pro slabou anizotropii jsou linearizované parametry ( $\Re \tilde{k}_4, \dots$ ) bez vzájemných korelací.

Pokud rozvoj signálu v  $\mathbf{M}$  sestává pouze z jediné frekvence  $\varphi_M$  (v našem zaměření na kvadratické jevy to je  $2\varphi_M$ ), pak má metoda poměrně přímočarou geometrickou interpretaci, a z dat lze vizuálně přímo odečítat přibližné polohy snadných a těžkých os. Toto ilustrujeme na sadě dat naměřených se vzorkem CoFe při pokojové teplotě v transmisní geometrii bez zrcadel mezi vzorkem a detektorem. S daty byla provedena procedura kompenzace nedokonalostí destiček (viz oddíl 4.2.1) a symetrizace v  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  pro odstranění lineárních jevů (viz vztah (4.36)).

Měřený signál je harmonickou funkcí v  $2\varphi_M$ , viz obr. 4.9 (b)<sup>20</sup>. Experimentální data přirozeně vykreslujeme v závislosti na  $\varphi_H$ , jakékoli odchylky tvaru od harmonické funkce jsou způsobeny magnetickou anizotropií  $\varphi_M \neq \varphi_H$ , viz obr. 4.9 (a) a (c). Provedená transformace mezi oběma grafy ( $\varphi_H \mapsto \varphi_M$ ) má význam lokálního škálování vodorovné osy, na obrázcích znázorněno svislými čarami s konstantními rozestupy ve  $\varphi_M$ . Míra škálování je přibližně dána (viz dodatek A.2)

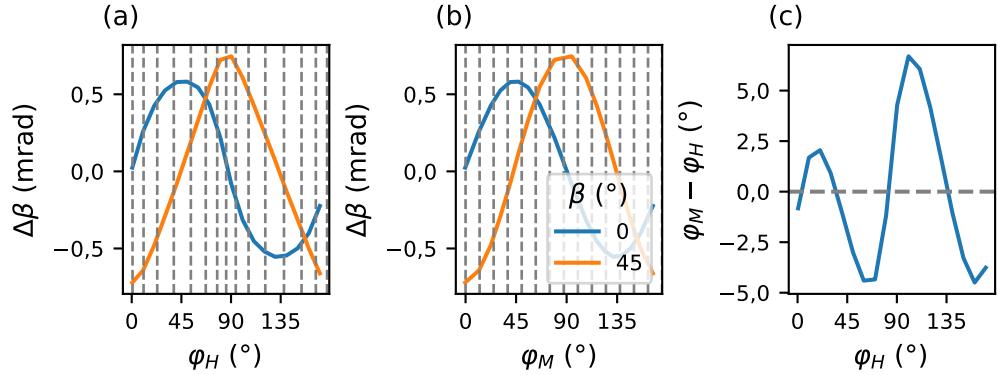
$$\frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} = \frac{1}{1 + \frac{d^2F}{d\varphi_M^2} \frac{1}{\mu_0 H_{\text{ext}} M_S \cos(\varphi_M - \varphi_H)}}. \quad (4.43)$$

Snadná osa se vždy nachází v regionu  $d^2F/d\varphi_M^2 > 0$  a dochází k natahování ( $d\varphi_M/d\varphi_H < 1$ , na obrázku v oblasti  $\varphi_H \approx 45^\circ$ ), těžká osa v regionu s opačnou nerovnicí a dochází ke smršťování ( $\varphi_H \approx 90^\circ$ ).

---

<sup>19</sup>Derivace regresorů podle anizotropních konstant (sloupce Jacobiho matice) jsou ortogonální.

<sup>20</sup>Tento obrázek je však až výsledkem analýzy.  $\varphi_M$  apriori neznáme.



Obrázek 4.9: Ilustrace určení magnetické anizotropie. Měřená data s CoFe v závislost na (a) přikládaném poli, (b) průběhu magnetizace získaném z analýzy. Zvýrazněné čáry jsou ekvidistantní ve  $\varphi_M$ . Jejich snížená hustota značí snadnou osu, zvýšená těžkou osu magnetizace. (c) Závislost  $\varphi_M(\varphi_H)$  (vykreslen rozdíl  $\varphi_M - \varphi_H$ ).

## 4.5 Zpracování dat

Zde shrneme přesný postup zpracování dat v takové podobě, v jaké byl použit pro získání výsledků uvedených v kap. 5. V této formě lze metodu aplikovat pro téměř kolmý průchod/odraz od kubického [001]-normálově orientovaného vzorku s téměř izotropní nemagnetickou permitivitou, se saturovanou in-plane magnetizací, jejíž chování je dobře modelováno Stonerovým-Wohlfarthovým modelem s uniaxialní a kubickou in-plane anizotropií. Případné zrcadlo mezi vzorkem a můstkom je již kompenzováno druhým identickým zrcadlem.

Při zpracování dat provádíme určení síly MO jevů i magnetické anizotropie současně. Pro vybrané polarizace  $\beta$  změříme průběh  $U_{A-B}$  a  $U_{A+B}$  při otáčení vnějšího pole v plném rozsahu  $\varphi_H \in 0-360^\circ$ . Vždy měříme několik navazujících cyklů, které předzpracujeme způsobem popsaným v dodatku A.4, abychom dále měli pouze jednu křivku  $U_{A-B/A+B}(\varphi_H)$  pro každé  $\beta$ .

Dalším krokem je převedení průběhu napětí na průběh stočení polarizace pomocí vzorce  $\Delta\beta = U_{A-B}/2U_{A+B}$ . Poté provedeme kompenzaci půvlnné destičky můstku podle oddílu 2.1: každé  $\beta$  je měřeno s oběma polohami vyvažovací destičky před optickým můstkem, výsledné  $\Delta\beta$  je aritmetickým průměrem obou křivek.

Doposud tedy máme matici hodnot  $\Delta\beta(\varphi_H, \beta)$ . V tento moment je nutné odstranit všechny případné  $\varphi_H$ -závislé signály, které nepochází přímo od vzorku. Na tento problém jsme narazili při měření CoFe za nízké teploty, kdy světlo prochází okénkem komory kryostatu s polárním směrem magnetického pole, takže v něm dochází k Faradayově jevu (s konkrétními okénky byl tento jev studován v [53]). Neexistuje sice univerzální řešení, ale v uvedeném případě jsme signál od okénka a vzorku oddělili na základě předpokladu odlišné  $\varphi_H$  a  $\beta$ -závislosti (Faradayův jev je lichý v  $\mathbf{H}_{ext}$  a konstantní v  $\beta$ ), viz příslušný oddíl 5.1.2.

Ze signálu jsou následně odděleny lineární MO jevy pomocí symetrizace ve vnějším poli  $\mathbf{H}_{ext}$ , viz (4.36).

V následujícím kroku máme na výběr: můžeme a nemusíme uplatnit předpokládanou  $\beta$ -závislost (vzorec (4.29)) a sadu křivek redukovat na dvě –  $\varphi_H$ -závislé koeficienty  $\cos 2\beta$  a  $\sin 2\beta$ . Jinými slovy, provést na křivkách Fourierovu trans-

formaci v  $\beta$  a ponechat pouze frekvence  $2\beta$ . Výsledek metody je na tomto kroku teoreticky nezávislý. Odstraněná data jsou nepopsatelná fitovaným modelem a v jistém smyslu jsou “ortogonální”, takže pouze mění tvar cílové funkce  $\mathcal{L}$ , ale ne polohu jejích minim. Na druhou stranu je ale tato úprava  $\mathcal{L}$  nežádoucí: data si “přizpůsobujeme” modelu a uměle tím snižujeme nejistotu. V některých případech (jako odstranění Faradayova jevu v okénkách) je ale krok nezbytný, a proto ho v zájmu konzistence provádíme vždy. V budoucnu bude použití tohoto kroku v námi vyvážené metodě pravděpodobně ještě předmětem diskuze.

Následuje srdce celé metody – současný nelineární fit parametrů  $P$  charakterizujících sílu kvadratického MO jevu a magnetických anizotropních konstant. Jak bylo vyloženo v předchozím oddílu, cílovou funkci považujeme za funkci pouze vhodně parametrizovaných anizotropních konstant  $\mathcal{L}(k_4, \tilde{k}_u)$  s tichým předpokladem, že za parametry  $b$  v (4.42) jsou dosazeny ty optimální určené lineární regresí. Oproti (4.42) však nyní anonymní parametry  $b$  mají význam MO koeficientů  $P$  z (4.37). Jednou z metod nelineární optimalizace je nalezeno globální minimum. Celkové optimální parametry  $P$  jsou pak rovny těm optimálním v minimu  $\mathcal{L}$ .

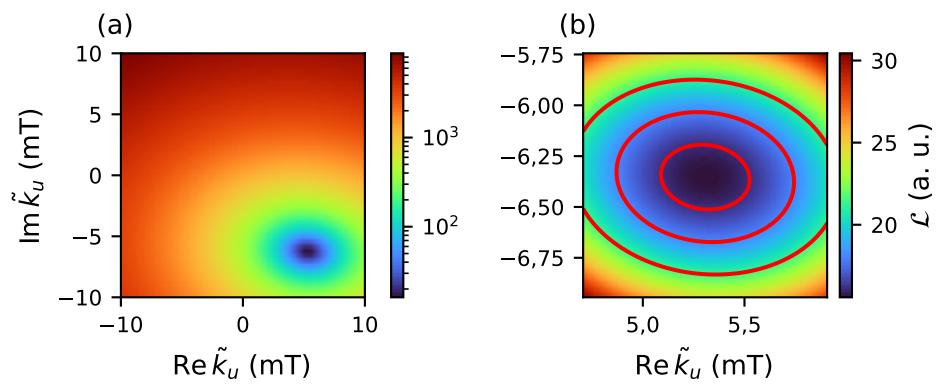
Na závěr jsou parametry  $\tilde{k}_4$ ,  $\tilde{k}_u$  převedeny do parametrizace pomocí  $k_4$ ,  $k_u$ ,  $\varphi_u$  a natočení vzorku  $\gamma_{\text{sw}}$ ; a parametry  $P$  jsou vyjádřeny pomocí  $P_+$ ,  $P_-$ ,  $\pi_+$ ,  $\gamma_{\text{MO}} = (\pi_- - \pi_+)/2$ .

Úhel in-plane rotace  $\gamma$  máme určen dvěma způsoby: jako osu magnetické anizotropie a jako osu anizotropie MLD. Jejich porovnání nám poskytuje kontrolu, že metoda zcela neselhala. Oba úhly ve fitu držíme oddělené především kvůli pohodlí.

Další kontrolu nám poskytuje  $\pi_+$ , které má význam vzájemné rotace souřadné soustavy polarizace a magnetického pole, a proto zřejmě nemůže přesáhnout přesnost, s jakou byly stanoveny, tj. cca  $5^\circ$ .

Takto jsou určeny všechny parametry modelu, zbývá ještě určit jejich nejistoty. Volíme ten nejjednodušší přístup: bez ověření předpokládáme nezávislé normálně rozdělené experimentální chyby a cílovou funkci  $\mathcal{L}$  v okolí minima přibližujeme kvadratickým rozvojem ve fitovaných parametrech. Spočítáme matici druhých derivací (Hessova matice), její inverzí vznikne kovarianční matice a na její diagonále jsou variance jednotlivých parametrů. Vzhledem k tomu, že fit magnetických anizotropních konstant a konstant  $P$  provádíme odděleně, i kovarianční matice z pohodlnosti počítáme odděleně (zanedbáváme např. vzájemné korelace  $P_+$  a  $k_u$ ). V obrázcích označujeme koeficient  $\cos 2\beta$  jako  $\beta = 0^\circ$  a  $\sin 2\beta$  jako  $\beta = 45^\circ$ .

Výsledky fitu anizotropních konstant zobrazujeme pomocí oblastí spolehlivosti s hladinou spolehlivosti 95 % ( $2\sigma$ ), viz obr. 4.10.



Obrázek 4.10: Ilustrace výsledků fitu anizotropních konstant. (a) Cílová funkce  $\mathcal{L}$  v závislosti na uniaxiální anizotropní konstantě  $\tilde{k}_u$ . (b) Detail minima. Jsou naznačeny  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  a  $3\sigma$  oblasti. Při vyhodnocení zobrazujeme  $2\sigma$  (prostřední).

# 5. Spektroskopie anizotropie MLD

Funkčnost metody jsme ověřili jak v transmisní, tak reflexní geometrii. Uvádíme pouze finální sady měření.

## 5.1 Měření v transmisní geometrii: CoFe

### 5.1.1 Měření při pokojové teplotě

Měření v transmisní geometrii při pokojové teplotě je ze všech testovaných verzí metody nejjednodušší, protože nevyžaduje žádných zrcadel mezi vzorkem a můstkom. Aparatura byla použita ve stejném stavu jako je znázorněna schématem na obr. 4.5 (b). Velikost pole byla pro vzorek CoFe vždy použita  $H_{\text{ext}} = 207 \text{ mT}$ .

Ilustrace změrených dat je na obr. 5.1 (a). Z obrázku jsou patrné oba dva rysy MLD, tj. změna znaménka při otočení  $\beta \mapsto \beta + 90^\circ$  a sudost v magnetickém poli  $\Delta\beta(\varphi_H) = \Delta\beta(\varphi_H + 180^\circ)$  (lineární jevy jsou v námi používané experimentální geometrii zanedbatelné). Po provedení standardní procedury předzpracování dat (obr. 5.1 (b)) je výsledný signál téměř identický s originálně naměřenými daty.

Takto předzpracovaná data následně fitujeme modelem popsaným v oddílech 4.3, 4.4 a 4.5, tj. souběžně určímě MO koeficienty  $P_{ij}$  a magnetické anizotropní konstanty. Na obr. 5.1 (b) jsou vykreslené naměřené body společně s nafigovaným modelem (čáry).

Takto byly určeny magnetické anizotropní konstanty pro všechny měřené vlnové délky.  $2\sigma$  oblasti komplexních konstant  $\tilde{k}_{u/4}$  jsou vykresleny na obr. 5.2. Z obrázků je patrné, že se určená anizotropie velice dobře shoduje pro většinu vlnových délek (jen modrý konec viditelného spektra nedává dobré výsledky, v experimentálních datech je zde přítomný výrazně vyšší šum). Zároveň je vidět, že nejistota určená způsobem popsaným v dodatku A.4 je pouze velmi mírně podhodnocena (elipsy se většinou téměř překrývají).

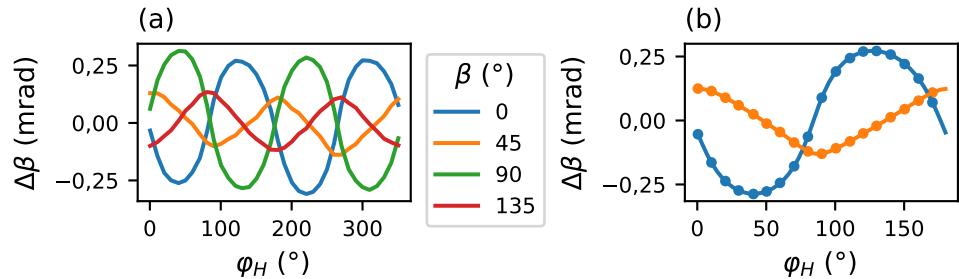
Po převedení do reálných konstant  $k_4$ ,  $k_u$  a  $\varphi_u$  jsou výsledky zaneseny do tabulky 5.1. Velikosti konstant  $k_4$  a  $k_u$  se dobře shodují s těmi určenými autory článku [45] metodou torque-metry (viz oddíl 3.1). Co se týče směru uniaxální anizotropie  $\varphi_u$ , autoři článku [45] v korespondenci [46] připustili, že naše výsledky se shodují s jejich, pokud se použije trochu jiná definice směru  $\varphi_u$ . (Tato zdánlivá nekonzistence byla pravděpodobně způsobena tím, že při jejich charakterizaci byl vzorek pravděpodobně uchycen do držáku vzorků s charakterizovanou tenkou CoFe vrstvou umístěnou na druhé straně substrátu, než bylo původně plánováno.) S touto opravou uvádíme výsledky torque-metrie také do tabulky 5.1 a příslušné funkcionálny magnetické volné energie jsou vykresleny na obr. 5.3.

Konzistence určené magnetické anizotropie v celém studovaném spektrálním rozsahu a zároveň s výsledky torque-metry<sup>1</sup> považujeme za nesporný důkaz funkčnosti metody. Vzhledem k rozmanité spektrální závislosti MO koeficientů  $P$  (viz obr. 5.4) je velice nepravděpodobná představa, že by měřený signál v sobě zahrnoval podstatnou část nějakého parazitního jevu, který by výsledky zkresloval. Případný dodatečný signál by totiž musel mít podobnou spektrální závislost.

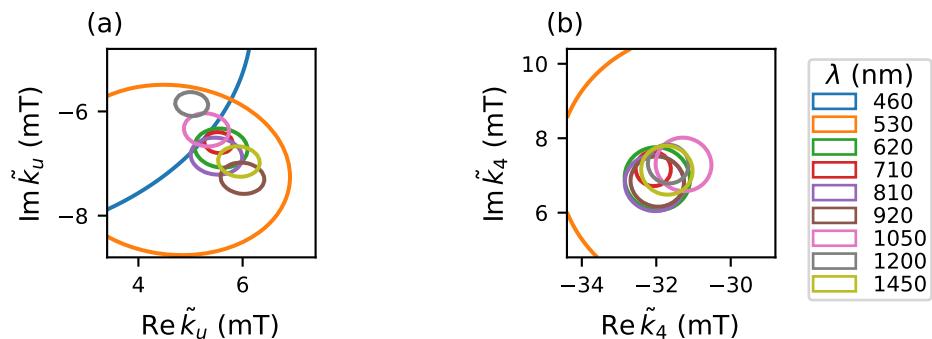
<sup>1</sup>Naše výsledky ve skutečnosti souhlasí s výsledky torque-metry jen přibližně. Důvod, proč tomu tak je, je vysvětlen v oddíle 5.2.1.

Spektrální závislost určených MO koeficientů  $P$  je vynesena na obr. 5.4. Nejistota  $P$  určená standardním způsobem je však zřejmě nesmyslně nízká ( $< 2 \mu\text{rad}$ ), což je pravděpodobně způsobeno přizpůsobením dat modelu (symetrizace v poli a filtrování frekvencí  $2\beta$ ). Proto realisticky odhadujeme  $2\sigma$  nejistotu jako hodnotou  $20 \mu\text{rad}$ .

Ve spektrální oblasti 1000–1450 nm dominuje izotropní člen  $P_+$ , v oblasti 460–1000 nm jsou naopak  $P_+$  a  $P_-$  srovnatelné a oba koeficienty zde mění své znaménko. Pro kvantifikaci míry anizotropie MLD můžeme v zásadě postupovat dvěma způsoby. Buďto jako poměr  $P_-$ , které je dovoleno symetrií pouze u anizotropních vzorků, vůči izotropní části  $P_+$ , nebo pragmaticky jako poměr amplitud při měření se vstupní polarizací ve význačných směrech  $\beta = \gamma$  a  $\beta = \gamma + 45^\circ$ , tj. pomocí koeficientů  $P_\gamma$  a  $P_{\gamma+45^\circ}$  z (4.41). Ve obou případech dosahuje vzorek CoFe v měřeném spektrálním rozsahu i maximální možné anizotropie MLD, tzn. existují vlnové délky splňující  $P_+ = 0$ ,  $P_\gamma = 0$  i  $P_{\gamma+45^\circ} = 0$ , a tedy příslušný poměr po dělení 0 diverguje. Připomínáme, že u tohoto vzorku byla změřena[45] také vysoká anizotropie AMR, které odpovídá stejnosměrné limitě MLD, takže není překvapivé, že vykazuje i silnou anizotropii MLD.



Obrázek 5.1: CoFe v transmisní geometrii při pokojové teplotě,  $\lambda = 620 \text{ nm}$ . (a) Hrubá měřená data. (b) Stejná data po symetrizaci v poli a filtrování frekvencí  $2\beta$  (body) a proložený model (čára).



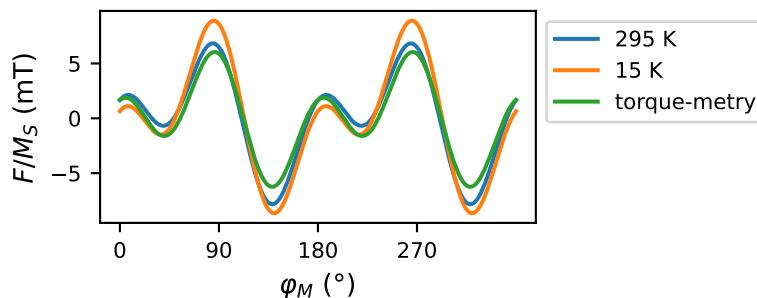
Obrázek 5.2: Výsledky určení magnetických anizotropních konstant CoFe při pokojové teplotě pomocí různých vlnových délek. (a) Uniaxální. (b) Kubická (chybí 460 nm). Zobrazeny jsou  $2\sigma$  oblasti měřené jednotlivými vlnovými délkami.

### 5.1.2 Měření při kryogenní teplotě

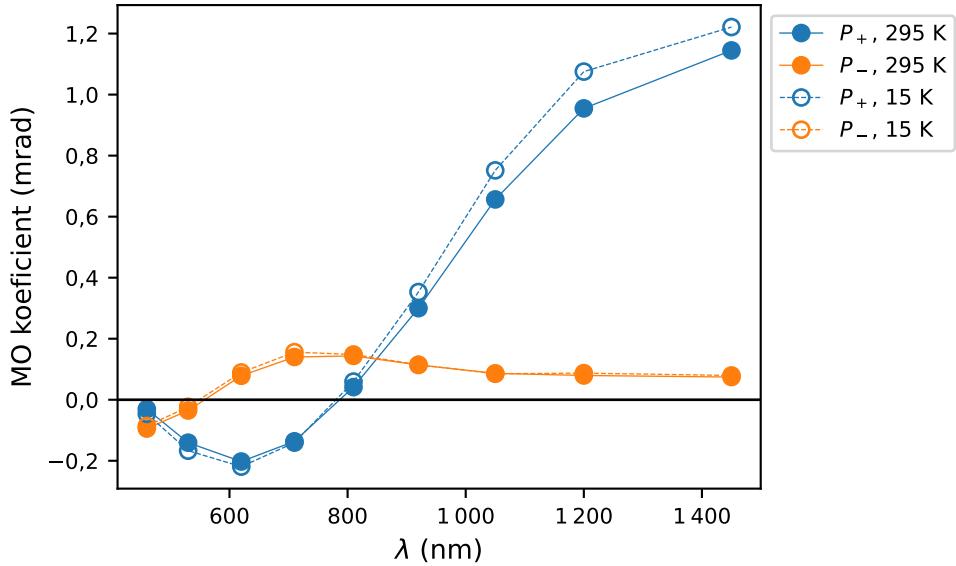
Po úspěchu měření při pokojové teplotě jsme přistoupili k měření s kryostatem, protože možnost jeho použití je jednou z hlavních předností naší metody oproti

$\Lambda$ (nm)	$k_4$ (mT)	$k_u$ (mT)	$\varphi_u$ ( $^\circ$ )	$\gamma_{SW}$ ( $^\circ$ )
460	-34,6	3,9	128,2	-3,7
530	-31,6	8,7	154,6	-3,3
620	-32,7	8,7	158,1	-3,1
710	-32,9	8,6	158,2	-3,1
810	-32,6	9,0	157,9	-3,1
920	-32,7	9,4	157,9	-3,0
1050	-32,1	8,3	158,1	-3,3
1200	-32,5	7,7	158,4	-3,2
1450	-32,5	9,1	158,4	-3,2
295 K	-32,6(2)	8,7(5)	158,1(5)	-3,1(1)
15 K	-37,0(5)	10,8(6)	162,0(13)	-1,7(3)
torque-metry	-30,25	6,3	156	—

Tabulka 5.1: Magnetická anizotropie CoFe určená pro jednotlivé vlnové délky pro pokojovou teplotu. Směr uniaxiální anizotropie  $\varphi_u$  je odečítán od směru CoFe[100] daného průměrným  $\gamma_{SW}$  (tedy ne  $\gamma_{SW}$  určeným konkrétní vlnovou délkou). Pod čarou jsou uvedené námi určené hodnoty anizotropních konstant při dvou teplotách spolu s hodnotami určenými výrobcem vzorku.



Obrázek 5.3: Funkcionál magnetické volné energie vzorku CoFe při pokojové teplotě určený naší metodou a metodou torque-metry provedenou autory článku [45].



Obrázek 5.4: Určené magneto-optické koeficienty  $P$  vzorku CoFe v transmisní geometrii při pokojové a snížené teplotě.

příbuzným dostupným metodám [31, 43, 58]. Měření proběhlo při nejnižší teplotě dosažitelné kryostatem, tj. přibližně 15 K, v transmisní geometrii podle schématu na obr. 5.5.

Oproti měření při pokojové teplotě se při zchlazeném kryostatu vyskytuje podstatně více “artefaktů”. Pro vyvedení svazku z komory kryostatu je nutné použít zrcadla, které je nutné kompenzovat druhým zrcadlem (viz oddíl 4.2.1). První ze zkřížených (stříbrných) zrcadel je umístěno uvnitř komory kryostatu, druhé – kompenzační – je venku. Není proto apriori zřejmé, zda se zrcadla skutečně kompenzují, když jsou udržovány na tak rozdílných teplotách. Překvapivě tomu tak ale je: i při zběžném nastavení zrcadel byla po obou odrazech naměřena v celém spektru ellipticita  $< 1^\circ$  pro vstupní polarizaci  $\beta = 45^\circ, 135^\circ$  (kdy je v polarizaci přítomen rovnoměrný mix s- a p-polarizace).

Druhá nepřijemnost je způsobena okénkem komory kryostatu, světlo totiž prochází i postranním okénkem, ve kterém má magnetické pole pro jistá  $\varphi_H$  polární směr, viz obr. 5.5 (b). V měřeném signálu pak pozorujeme příspěvek Faradayovy rotace v okénku, který je téměř nezávislý na vstupní polarizaci  $\beta$ , viz obr. 5.6 (a).

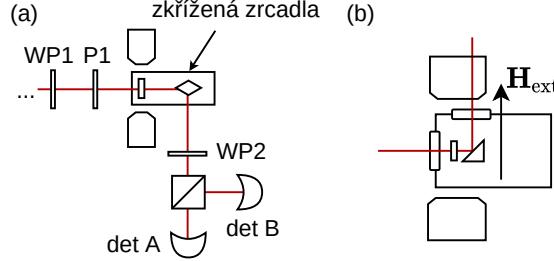
Je ale poměrně jednoduché oddělit Faradayův jev od MLD na základě jejich symetrie. Faradayův jev v okénku kryostatu je lichý v magnetizaci a je nezávislý na natočení vstupní lineární polarizace<sup>2</sup>. Standardním postupem bychom tedy měli být schopni oba příspěvky oddělit, stočení po symetrizaci ve vnějším poli a filtraci frekvencí  $2\beta$  je na obr. 5.6 (b). Výsledný signál je již vizuálně velmi podobný tomu změřenému při pokojové teplotě (viz obr. 5.1 (b)).

Dále postupujeme stejně jako v případě měření při pokojové teplotě. Výsledné  $2\sigma$  oblasti spolehlivosti magnetických anizotropních konstant jsou vykresleny na obr. 5.7. I zde se magnetické anizotropní konstanty určené pomocí různých vlnových

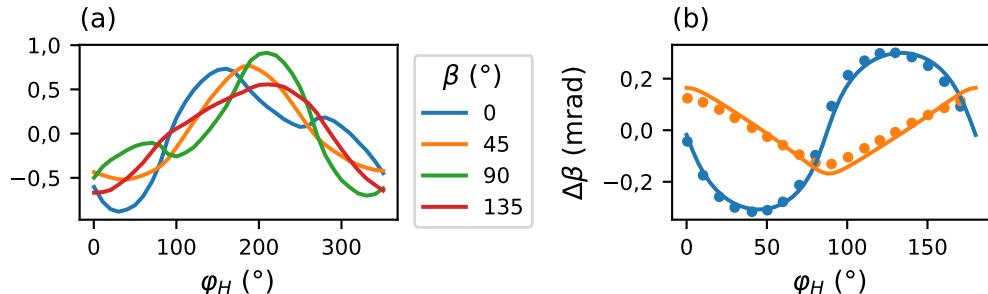
<sup>2</sup>V aparatuře se okénko vyskytuje až za prvním zrcadlem, takže není striktně pravda, že by stočení okénkem bylo nezávislé na  $\beta$ . Je nezávislé na natočení lineární polarizace vstupující do okénka.

délek dobře shodují, což nám dodává jistotu, že uvedený způsob odstranění Faradayovy rotace okének kryostatu je spolehlivý. Shrnutí určených hodnot je opět uvedeno v tabulce 5.1. Spektrální závislost výsledných MO koeficientů  $P$  je vynesena na obr. 5.4 společně s těmi měřenými při pokojové teplotě.

Souhrnem je možné říci, že v námi studovaném teplotním rozsahu ani magnetická anizotropie ani spektrální závislost MO koeficientů téměř nezávisí na teplotě, což je pochopitelné pro materiál s Curieovou teplotou  $T_C \approx 950$  K[59].



Obrázek 5.5: Schéma aparatury pro měření v transmisní geometrii za použití kryostatu. (a) Půdorys. Rozměr půlových nástavců je ve skutečnosti natolik veliký, že v generovaném magnetickém poli se nachází nejen studovaný vzorek, ale i obě okénka kryostatu, kterými světlo prochází – viz část (b). (b) Bokorys, detail na komoru kryostatu. Světlo prochází také horním okénkem, ve kterém se vlivem polárního magnetického pole indukuje Faradayův jev.



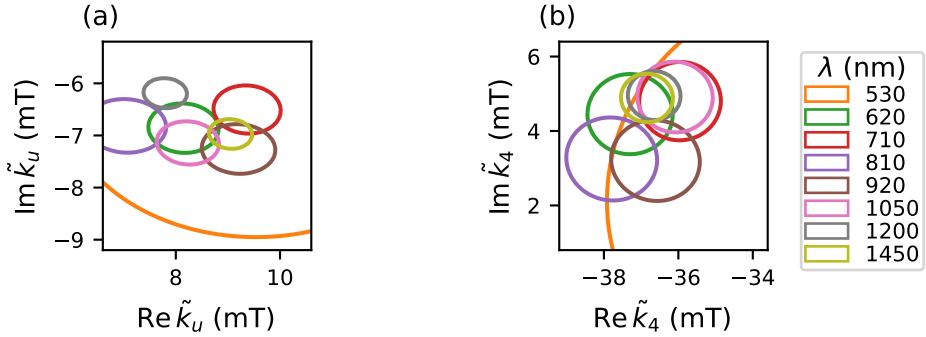
Obrázek 5.6: CoFe v transmisní geometrii při teplotě 15 K,  $\lambda = 620$  nm. (a) Hrubá měřená data. (b) Stejná data po symetrizaci v poli a filtraci frekvencí  $2\beta$  (body) a proložený model (čára).

## 5.2 Měření v reflexní geometrii: FeRh

### 5.2.1 Měření feromagnetické fáze

Měření proběhlo při teplotě 420 K v reflexní geometrii podle schématu na obr. 5.8. Úhel dopadu byl  $0,5^\circ$ . Orientace vzorku byla vždy přibližně  $\gamma \approx 0^\circ$  (viz obr. 3.4 (a)), kromě jednoho kontrolního měření při  $\lambda = 1600$  nm, ve kterém bylo  $\gamma \approx -90^\circ$ . Všechny vlnové délky byly změřeny s velikostí pole  $H_{\text{ext}} = 50$  mT, některé navíc s  $H_{\text{ext}} = 207$  mT.

Příklad změřených dat je na obr. 5.9. Opět jako v případě měření CoFe není patrný žádný příspěvek lineárních jevů (mezi daty před a po symetrizaci v  $H_{\text{ext}}$



Obrázek 5.7: Výsledky určení magnetických anizotropních konstant CoFe při 15 K pomocí různých vlnových délek. (a) Uniaxální. (b) Kubická. Zobrazeny jsou  $2\sigma$  oblasti měřené jednotlivými vlnovými délkami.

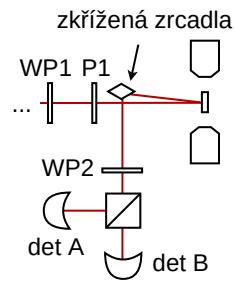
není přílišný rozdíl). Pro úplnost poznamenáme, že celá sada dat byla změřena ještě jednou s úhlem dopadu  $1^\circ$  (výsledky zde neuvádíme). Zjistili jsme, že už takto malý úhel dopadu byl dostačující na to, aby amplituda lineárních MO jevů byla porovnatelná s MLD a výsledky následné analýzy pak zdaleka nebyly tak přesvědčivé.

Standardní procedurou jsme určili MO koeficienty  $P$  a magnetickou anizotropii vzorku. Spektrální závislost  $P$  je vynesena na obr. 5.10. Zde musíme však mít na paměti, že u tohoto vzorku máme úhel natočení  $\gamma$  definován vzhledem ke směru FeRh[1-10] (viz obr. 3.4 (a)), takže (4.39b) platí s opačným znaménkem<sup>3</sup>. Spektrum je velice pestré, oba koeficienty několikrát mění znaménko. Tak silná anizotropie a spektrální závislost MO koeficientu, pokud je nám známo[31, 43, 58], dosud nebyla pozorována v žádném materiálu. Poznamenáváme, že takto silná anizotropie kvadratického MO koeficientu, která navíc velice silně závisí na vlnové délce, má významné důsledky pro metody studia materiálů pomocí MLD (např. měřením hysterézních smyček[29] nebo pomocí metody excitace a sondování[26]). Běžně je totiž předpokládáno, že experimentálně detekovaná změna velikosti MO signálu je určena výhradně změnou polohy[29] nebo velikosti[26] magnetizace. Naše měření ale ukazuje, že je potřeba uvážit také případnou změnu velikosti (resp. i znaménka) příslušného MO koeficientu, což celou interpretaci naměřených dat značně komplikuje. Případně je velice vhodné provést příslušná MO měření na vlnové délce, kde je tento koeficient zcela izotropní, tj. když  $P_- = 0$ . Současný požadavek na co největší hodnotu  $P_+$  následně určuje nejvhodnější vlnovou délku pro příslušné experimenty – v případě FeRh ve feromagnetické fázi se jedná o vlnovou délku 600 nm (viz obr. 5.10).

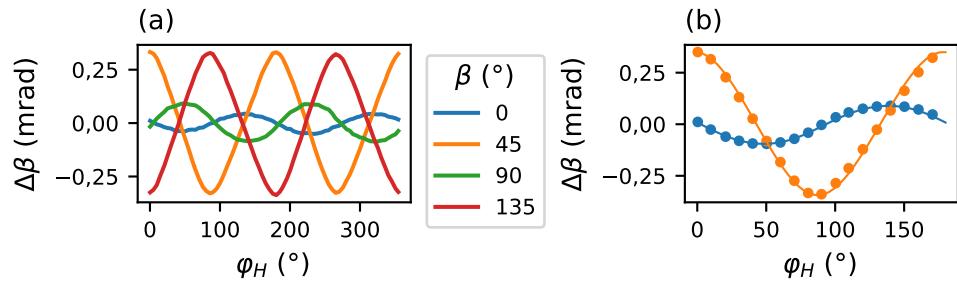
### Určení magnetické anizotropie v nepřesném poli

V rámci našeho experimentu byl vzorek měřen s dvěma velikostmi magnetického pole  $H_{\text{ext}} = 50, 207$  mT a pro dva úhly in-plane rotace vzorku  $\gamma \approx 0, -90^\circ$ . Výsledná magnetická anizotropie je znázorněná na obr. 5.11. Souhrn pro všechny

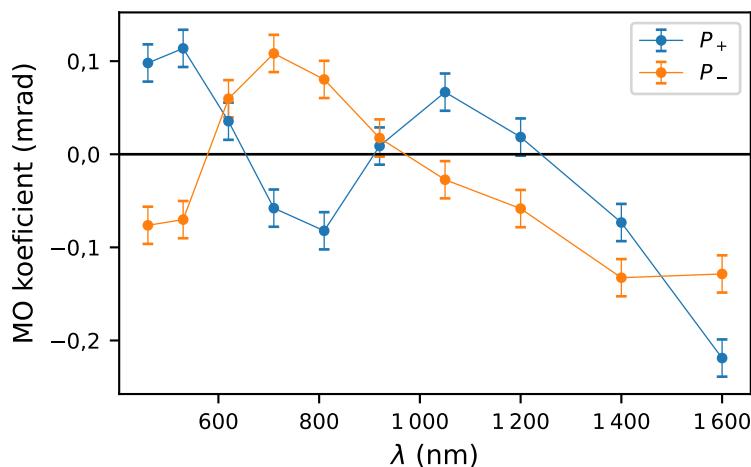
<sup>3</sup>Koeficient  $P_-$  definujeme vzhledem k úhlu natočení  $\gamma$  tak, aby platil vzorec (4.37). Jiná situace je u magnetických anizotropních konstant, které jsou definovány pevně vzhledem ke směru FeRh[100], nezávisle na tom, jakou krystalografickou osu označujeme úhlem  $\gamma$ . Proto do definice vlnkových  $\tilde{k}_4, \tilde{k}_u$  (1.51) musíme za  $\gamma$  dosazovat místo  $0^\circ$ , resp.  $-90^\circ$  směry FeRh[100], tzn.  $45^\circ$ , resp.  $-45^\circ$ .



Obrázek 5.8: Schéma aparatury pro měření v reflexní geometrii za použití kryostatu.



Obrázek 5.9: Měření FeRh v reflexní geometrii,  $\lambda = 1600$  nm,  $H_{\text{ext}} = 50$  mT. (a) Hrubá změřená data. (b) Stejná data po symetrizaci v poli a filtrování frekvencí  $2\beta$  (body) a proložený model (čára).



Obrázek 5.10: Spektrální závislost izotropní ( $P_+$ ) a anizotropní ( $P_-$ ) části kvadratického MO koeficietu vzorku FeRh v reflexní geometrii při teplotě 420 K,  $H_{\text{ext}} = 50$  mT.

$H_{\text{ext}}$ (mT)	$\gamma$ ( $^{\circ}$ )	$k_4$ (mT)	$k_u$ (mT)	$\varphi_u + \gamma_{\text{SW}}$ ( $^{\circ}$ )	$\gamma_{\text{SW}}$ ( $^{\circ}$ )
50	0	5,3(4)	1,7(1)	126(4)	-1,9(5)
207	0	5(1)	5,7(3)	130(1)	-3,5(1)
50	-90	4,9	1,6	132	-97
207	-90	5,9	5,7	127	-97

Tabulka 5.2: Změřená magnetická anizotropie FeRh. Úhel  $\varphi_u + \gamma_{\text{SW}}$  značí směr osy uniaxiální anizotropie v souřadné soustavě magnetu.

čtyři kombinace  $H_{\text{ext}}$  a  $\gamma$  je uveden v tabulce 5.2. I zde musíme mít na paměti definici  $\gamma$  pro vzorek FeRh, protože kubická anizotropní konstanta  $k_4$  je definovaná vzhledem k FeRh[100]. Snadné osy jsou ve směru FeRh[100] (“experimentální” směr  $45^{\circ}$ ), takže  $k_4 > 0$ . “Experimentální” směr uniaxiální anizotropie je dán  $\varphi_u + \gamma$ .

Narážíme na zajímavý problém. Magnetická anizotropie je dobře konzistentní pro danou měřící proceduru (posloupnost nastavovaných proudů v cívkách elektro-magnetů) a danou orientaci vzorku. Potom jsou anizotropní konstanty určeny různými vlnovými délками v dobré shodě (obr. 5.11 (a, b), modré body). Problém však nastává při porovnání různých měřicích procedur či pozic vzorku.

Uvedeme několik poznatků. Směr osy<sup>4</sup> kubické anizotropie vyjádřený úhlem  $\gamma_{\text{SW}}$  je nezávislý na  $H_{\text{ext}}$ , ale při otočení vzorku o  $90^{\circ}$  se konzistentně změnil o  $\approx 4^{\circ}$ <sup>5</sup>, takže pravděpodobně reflektuje skutečné pootočení o  $94^{\circ}$ . Velikost  $k_4$  je poměrně nezávislá na  $H_{\text{ext}}$  i  $\gamma$ .

Zcela jiná situace je ale u uniaxiální anizotropie. Při rotaci vzorku  $\gamma \mapsto \gamma + 90^{\circ}$  by podle (1.51) mělo dojít ke změně znaménka  $\tilde{k}_u$ . Jednoduššími slovy, osa uniaxiální anizotropie se musí otáčet zároveň se vzorkem, což se ale neděje, viz obr. 5.11 a tabulka 5.2. Naopak, osa uniaxiální anizotropie zůstává ve stejném “experimentálním” směru popsaném úhlem  $\varphi_u + \gamma_{\text{SW}}$ . Navíc síla uniaxiální anizotropie  $k_u$  je přímo úměrná použitému poli  $H_{\text{ext}}$ .

Uvedené poznatky nás vedou k závěru, že vlastní metoda je sice velice citlivá a spolehlivá, ale skutečná magnetická pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  realizovaná v experimentu jsou (vlivem neideálně kompenzované hystereze jednotlivých pólových nástavců cívek v elektromagnetu) mírně odlišná od nominálních hodnot použitých při analýze. Pokud je magnetická anizotropie, jako v případě FeRh, slabá (tj. na úrovni několika mT), tak měříme dominantně anizotropii magnetického pole (viz obr. 6.12 v práci [52]) a ne vzorku.

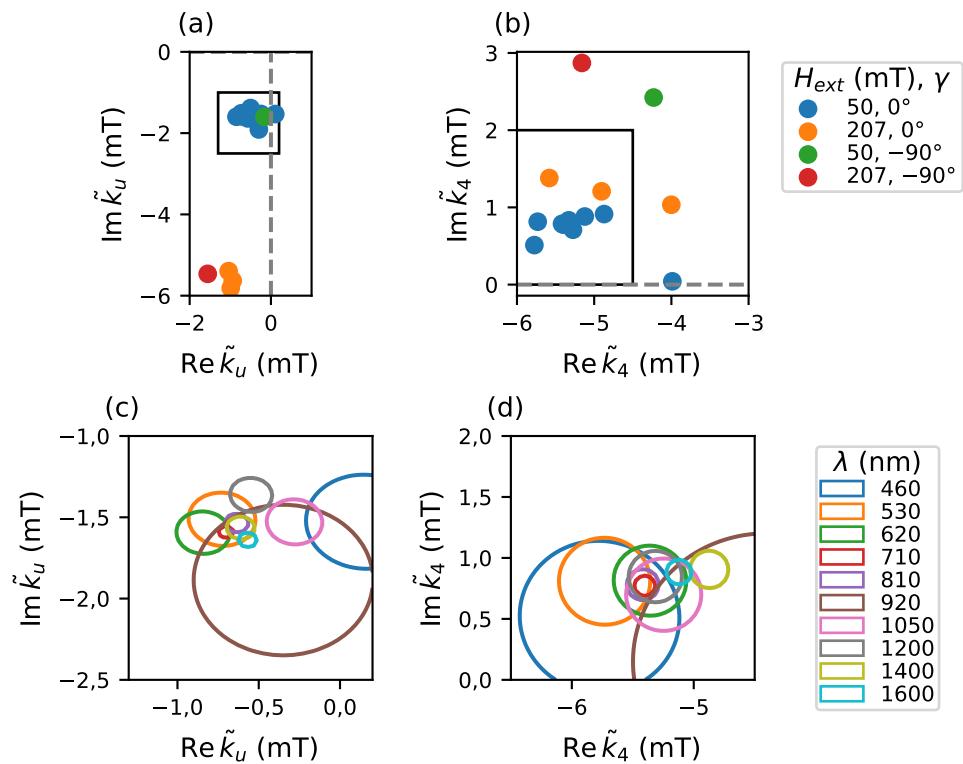
V době odevzdání této práce jsou v přípravě dodatečná zpřesňující měření magnetického pole, které umožní z již naměřených dat určit správnou magnetickou anizotropii. Důsledky odlišnosti reálného a nominálního magnetického pole pro analýzu magnetické anizotropie se mimo jiné věnuje dodatek A.2.

Nicněmě určení kubické anizotropní konstanty považujeme za spolehlivé. Ve vzorku FR06 tedy

$$k_4 = 5,3(4) \text{ mT}. \quad (5.1)$$

<sup>4</sup>Kvůli definici  $\gamma$  se zde jedná o těžkou osu magnetizace.

<sup>5</sup>Z hlediska kubické anizotropie jsou  $\gamma = 0^{\circ}$  a  $\gamma = 90^{\circ}$  ekvivalentní.



Obrázek 5.11: Výsledky magnetických anizotropních konstant FeRh. (a, c) Uniaxialní. (b, d) Kubická. Na (a, b) jsou zobrazeny pouze střední hodnoty odhadů pro čtyři kombinace různých velikostí pole a rotace vzorku, čtverci jsou naznačeny oblasti zobrazené v (c, d). (c, d) Zaměření na  $H_{\text{ext}} = 50$  mT,  $\gamma = 0^\circ$ , zobrazeny  $2\sigma$  oblasti měřené jednotlivými vlnovými délками.

# Závěr

V naší laboratoři dlouhodobě vyvíjíme metodu studia kvadratických magneto-optických jevů, která dokáže současně určit jejich sílu a anizotropii a zároveň pomocí nich určit in-plane magnetickou anizotropii vzorku.

Díky velice malému úhlu dopadu ( $\approx 0,5^\circ$ ) je v naší geometrii možné použít vstupní světlo s libovolně orientovanou polarizací a tím suplovat otáčení vzorku, které je nezbytnou součástí postupu měření obdobných metod (viz kap. 2). To v důsledku umožňuje měření s kryostatem, což doposud nebylo u téhoto obdobných metod možné. V našem experimentálním uspořádání je možné vlastnosti studovaných vzorků měřit v širokém teplotním intervalu (od 15 do 800 K) a širokém oboru vlnových délek světla (od 460 do 1600 nm).

V rámci této diplomové práce byly identifikovány a následně odstraněny dva experimentální problémy, které praktické použití naší metody zatím znemožňovaly. Oba problémy způsobují, že v měřeném signálu se nedefinovaným poměrem míchá stočení i ellipticita způsobená vzorkem. Konkrétně se jedná o:

1. Nedokonalost  $\lambda/2$  fázové destičky před optickým můstkem. Řešením je měření pro dvě neekvivalentní polohy popsané v oddíle 4.2.1.
2. Změna polarizace při odrazu od zrcadla umístěným mezi vzorkem a optickým můstkem. Řešením je kompenzace pomocí druhého zrcadla popsaná taktéž v oddíle 4.2.1, či kompenzace jinou metodou tam popsanou.

Třetí problém byl v použitém zpracování dat a pro jeho odstranění bylo dosaženo podstatně hlubšího porozumění různých aspektů experimentu. Je kláden důraz (oddíly 4.3, 4.4 a dodatek A.1) na explicitní vymezení nutných předpokladů metody, aby bylo případně usnadněno její rozšíření na širší třídu vzorků než jsou [001]-normálově orientované tenké filmy s kubickou mříží.

Použití této metody bylo demonstrováno jak v transmisní geometrii (vzorek CoFe, oddíl 5.1), tak v reflexní geometrii (vzorek FeRh, oddíl 5.2). Naše měření ukázala, že koeficient popisující kvadratickou magneto-optickou odezvu může být silně anizotropní, přičemž velikost této anizotropie i její znaménko silně závisí na použité vlnové délce světla. To má poměrně zásadní důsledky pro plánování a/nebo využití příslušných experimentů využívajících kvadratickou magneto-optiku, která v současné době přitahuje rostoucí pozornost díky nástupu zájmu o antiferomagnetickou spintroniku.

# Seznam použité literatury

1. GIL, J. J. Review on Mueller Matrix Algebra for the Analysis of Polarimetric Measurements. *Journal of Applied Remote Sensing*. 2014, vol. 8, no. 1, s. 081599. ISSN 1931-3195. Dostupné z DOI: [10.1117/1.JRS.8.081599](https://doi.org/10.1117/1.JRS.8.081599).
2. OSSIKOVSKI, R.; GIL, J. J.; SAN JOSÉ, I. Poincaré Sphere Mapping by Mueller Matrices. *Journal of the Optical Society of America A*. 2013, vol. 30, no. 11, s. 2291. ISSN 1084-7529, ISSN 1520-8532. Dostupné z DOI: [10.1364/JOSAA.30.002291](https://doi.org/10.1364/JOSAA.30.002291).
3. BERREMAN, D. W. Optics in Stratified and Anisotropic Media:  $4 \times 4$ -Matrix Formulation. *JOSA*. 1972, vol. 62, no. 4, s. 502–510. Dostupné z DOI: [10.1364/JOSA.62.000502](https://doi.org/10.1364/JOSA.62.000502).
4. YEH, P. Electromagnetic Propagation in Birefringent Layered Media. *Journal of the Optical Society of America*. 1979, vol. 69, no. 5, s. 742. ISSN 0030-3941. Dostupné z DOI: [10.1364/JOSA.69.000742](https://doi.org/10.1364/JOSA.69.000742).
5. XU, W.; WOOD, L. T.; GOLDING, T. D. Optical Degeneracies in Anisotropic Layered Media: Treatment of Singularities in a  $4 \times 4$  Matrix Formalism. *Physical Review B*. 2000, vol. 61, no. 3, s. 1740–1743. ISSN 0163-1829, ISSN 1095-3795. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.61.1740](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.1740).
6. WU, X. The Singularities in the  $4 \times 4$  Matrix Formalisms. *Optik*. 2018, vol. 168, s. 10–12. ISSN 00304026. Dostupné z DOI: [10.1016/j.ijleo.2018.04.081](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.04.081).
7. GARIBELLO, B.; AVILÁN, N.; GALVIS, J. A., et al. On the Singularity of the Yeh  $4 \times 4$  Transfer Matrix Formalism. *Journal of Modern Optics*. 2020, vol. 67, no. 9, s. 832–836. ISSN 0950-0340, ISSN 1362-3044. Dostupné z DOI: [10.1080/09500340.2020.1775905](https://doi.org/10.1080/09500340.2020.1775905).
8. BERTRAND, P.; HERMANN, C.; LAMPEL, G., et al. General Analytical Treatment of Optics in Layered Structures: Application to Magneto-Optics. *Physical Review B*. 2001, vol. 64, no. 23, s. 235421. ISSN 0163-1829, ISSN 1095-3795. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.64.235421](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.235421).
9. STONER, E.; WOHLFARTH, E. A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1991, roč. 27, č. 4, s. 3475–3518. ISSN 1941-0069. Dostupné z DOI: [10.1109/TMAG.1991.1183750](https://doi.org/10.1109/TMAG.1991.1183750).
10. VIŠŇOVSKÝ, Š. *Optics in Magnetic Multilayers and Nanostructures*. Boca Raton: CRC Press, 2018. ISBN 978-1-315-22124-3. Dostupné z DOI: [10.1201/9781420019193](https://doi.org/10.1201/9781420019193).
11. SAIDL, V. *Ultrarychlá Laserová Spektroskopie Antiferomagnetů*. Praha, 2018. Disertační Práce. Univerzita Karlova.
12. LINDEN, S.; ENKRICH, C.; DOLLING, G., et al. Photonic Metamaterials: Magnetism at Optical Frequencies. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2006, vol. 12, no. 6, s. 1097–1105. ISSN 1077-260X. Dostupné z DOI: [10.1109/JSTQE.2006.880600](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2006.880600).

13. BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7. vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 978-0-521-64222-4 978-0-521-63921-7.
14. AZZAM, R. M. A.; BASHARA, N. M. *Ellipsometry and Polarized Light*. 1977. ISBN 978-0-7204-0694-8.
15. OSSIKOVSKI, R. Differential Matrix Formalism for Depolarizing Anisotropic Media. *Optics Letters*. 2011, vol. 36, no. 12, s. 2330. ISSN 0146-9592, ISSN 1539-4794. Dostupné z DOI: 10.1364/OL.36.002330.
16. MOTL, L.; ZAHRADNÍK, M. *Pěstujeme lineární algebru*. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 978-80-246-0421-3.
17. SILBER, R. *Quadratic Magneto-optic Kerr Effect Spectroscopy of Magnetic Thin Films with Cubic Crystal Structure*. 2019. Disertační Práce. Universität Bielefeld.
18. ONSAGER, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review*. 1931, vol. 37, no. 4, s. 405–426. ISSN 0031-899X. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRev.37.405.
19. ONSAGER, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II. *Physical Review*. 1931, vol. 38, no. 12, s. 2265–2279. ISSN 0031-899X. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRev.38.2265.
20. HAMRLOVÁ, J.; HAMRLE, J.; POSTAVA, K., et al. Quadratic-in-Magnetization Permittivity and Conductivity Tensor in Cubic Crystals. *physica status solidi (b)*. 2013, vol. 250, no. 10, s. 2194–2205. ISSN 03701972. Dostupné z DOI: 10.1002/pssb.201349031.
21. CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 2. vyd. New York: Wiley, 1985. ISBN 978-0-471-86256-7.
22. CASTELLANO, G. Thermodynamic Potentials for Simple Magnetic Systems. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2003, vol. 260, no. 1-2, s. 146–150. ISSN 03048853. Dostupné z DOI: 10.1016/S0304-8853(02)01286-6.
23. REICHLOVÁ, H. *Ultrarychlá Laserová Spektroskopie Polovodičů*. Praha, 2010. Diplomová Práce. Univerzita Karlova.
24. JANDA, T. *Dynamika Spinové Polarizace v Polovodičích*. Praha, 2012. Diplomová Práce. Univerzita Karlova.
25. KUCHAŘÍK, J. *Studium Spinové Polarizace Pomocí Laserové Spektroskopie*. Praha, 2015. Diplomová Práce. Univerzita Karlova.
26. SAIDL, V.; NĚMEC, P.; WADLEY, P., et al. Optical Determination of the Néel Vector in a CuMnAs Thin-Film Antiferromagnet. *Nature Photonics*. 2017, vol. 11, no. 2, s. 91–96. ISSN 1749-4885, ISSN 1749-4893. Dostupné z DOI: 10.1038/nphoton.2016.255.
27. AKBAR, A.; KHALID, M. W.; ANWAR, M. S. Low Temperature Voigt Effect in the Terbium Gallium Garnet Crystal. *Optics Express*. 2017, vol. 25, no. 24, s. 30550. ISSN 1094-4087. Dostupné z DOI: 10.1364/OE.25.030550.
28. ZVEZDIN, A. K.; KOTOV, V. A. *Modern Magneto-optics and Magnetooptical Materials*. 1. vyd. Bristol: CRC Press, 1997. ISBN 978-0-7503-0362-0.

29. TESAŘOVÁ, N.; OSTATNICKÝ, T.; NOVÁK, V., et al. Systematic Study of Magnetic Linear Dichroism and Birefringence in (Ga,Mn)As. *Physical Review B*. 2014, vol. 89, no. 8, s. 085203. ISSN 1098-0121, ISSN 1550-235X. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.89.085203](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.085203).
30. KIMEL, A. V.; ASTAKHOV, G. V.; KIRILYUK, A., et al. Observation of Giant Magnetic Linear Dichroism in (Ga,Mn)As. *Physical Review Letters*. 2005, vol. 94, no. 22, s. 227203. ISSN 0031-9007, ISSN 1079-7114. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevLett.94.227203](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.227203).
31. HAMRLE, J.; BLOMEIER, S.; GAIER, O., et al. Huge Quadratic Magneto-Optical Kerr Effect and Magnetization Reversal in the Co<sub>2</sub>FeSi Heusler Compound. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2007, vol. 40, no. 6, s. 1563–1569. ISSN 0022-3727, ISSN 1361-6463. Dostupné z DOI: [10.1088/0022-3727/40/6/S09](https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/6/S09).
32. KATS, V. N.; NEFEDOV, S. G.; SHELUKHIN, L. A., et al. Giant Quadratic Magneto-Optical Kerr Effect in (Eu,Gd)O Films for Magnetic Field Sensing. *Applied Materials Today*. 2020, vol. 19, s. 100640. ISSN 23529407. Dostupné z DOI: [10.1016/j.apmt.2020.100640](https://doi.org/10.1016/j.apmt.2020.100640).
33. NĚMEC, P.; FIEBIG, M.; KAMPFRATH, T., et al. Antiferromagnetic Opto-Spintronics. *Nature Physics*. 2018, vol. 14, no. 3, s. 229–241. ISSN 1745-2473, ISSN 1745-2481. Dostupné z DOI: [10.1038/s41567-018-0051-x](https://doi.org/10.1038/s41567-018-0051-x).
34. JUNGWIRTH, T.; MARTI, X.; WADLEY, P., et al. Antiferromagnetic Spintronics. *Nature Nanotechnology*. 2016, vol. 11, no. 3, s. 231–241. ISSN 1748-3387, ISSN 1748-3395. Dostupné z DOI: [10.1038/nnano.2016.18](https://doi.org/10.1038/nnano.2016.18).
35. ŠMEJKAL, L.; SINOVA, J.; JUNGWIRTH, T. Altermagnetism: Spin-Momentum Locked Phase Protected by Non-Relativistic Symmetries. *arXiv e-prints*. 2021. Dostupné z DOI: [10.48550/ARXIV.2105.05820](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2105.05820).
36. XU, J.; ZHOU, C.; JIA, M., et al. Imaging Antiferromagnetic Domains in Nickel Oxide Thin Films by Optical Birefringence Effect. *Physical Review B*. 2019, vol. 100, no. 13, s. 134413. ISSN 2469-9950, ISSN 2469-9969. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.100.134413](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.134413).
37. YANG, K.; KANG, K.; DIAO, Z., et al. Magneto-Optic Response of the Metallic Antiferromagnet Fe<sub>2</sub>As to Ultrafast Temperature Excursions. *Physical Review Materials*. 2019, vol. 3, no. 12, s. 124408. ISSN 2475-9953. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevMaterials.3.124408](https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.3.124408).
38. TESAŘOVÁ, N.; ŠUBRT, J.; MALÝ, P., et al. High Precision Magnetic Linear Dichroism Measurements in (Ga,Mn)As. *Review of Scientific Instruments*. 2012, vol. 83, no. 12, s. 123108. ISSN 0034-6748, ISSN 1089-7623. Dostupné z DOI: [10.1063/1.4771922](https://doi.org/10.1063/1.4771922).
39. POSTAVA, K.; HRABOVSKÝ, D.; PIŠTORA, J., et al. Anisotropy of Quadratic Magneto-Optic Effects in Reflection. *Journal of Applied Physics*. 2002, vol. 91, no. 10, s. 7293. ISSN 00218979. Dostupné z DOI: [10.1063/1.1449436](https://doi.org/10.1063/1.1449436).

40. HAMRLE, J.; FERRÉ, J.; JAMET, J. P., et al. Vicinal Interface Sensitive Magneto-Optical Kerr Effect: Application to Co/Au(322). *Physical Review B*. 2003, vol. 67, no. 15, s. 155411. ISSN 0163-1829, ISSN 1095-3795. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.67.155411](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.155411).
41. VIŠŇOVSKÝ, Š.; NÝVLT, M.; PROSSER, V., et al. Polar Magneto-Optics in Simple Ultrathin-Magnetic-Film Structures. *Physical Review B*. 1995, vol. 52, no. 2, s. 1090–1106. ISSN 0163-1829, ISSN 1095-3795. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.52.1090](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.52.1090).
42. LIANG, J. H.; CAO, J. Z.; LI, J. X., et al. Separation of Linear and Quadratic Magneto-Optic Kerr Effects in Ultra-Thin Fe Films Using a Rotating Field Method. *Journal of Applied Physics*. 2015, vol. 117, no. 17, 17E129. ISSN 0021-8979, ISSN 1089-7550. Dostupné z DOI: [10.1063/1.4918776](https://doi.org/10.1063/1.4918776).
43. LIANG, J. H.; XIAO, X.; LI, J. X., et al. Quantitative Study of the Quadratic Magneto-Optical Kerr Effects in Fe Films. *Optics Express*. 2015, vol. 23, no. 9, s. 11357. ISSN 1094-4087. Dostupné z DOI: [10.1364/OE.23.011357](https://doi.org/10.1364/OE.23.011357).
44. MATTHEIS, R.; QUEDNAU, G. Determination of the Anisotropy Field Strength in Ultra-Thin Magnetic Films Using Longitudinal MOKE and a Rotating Field: The ROTMOKE Method. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1999, vol. 205, no. 2, s. 143–150. ISSN 0304-8853. Dostupné z DOI: [10.1016/S0304-8853\(99\)00526-0](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(99)00526-0).
45. ZENG, F. L.; REN, Z. Y.; LI, Y., et al. Intrinsic Mechanism for Anisotropic Magnetoresistance and Experimental Confirmation in Co  $\times$  Fe  $1 - x$  Single-Crystal Films. *Physical Review Letters*. 2020, vol. 125, no. 9, s. 097201. ISSN 0031-9007, ISSN 1079-7114. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.097201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.097201).
46. WU, Y. Z. [ústní sdělení]. 2020.
47. BRAJER, M. *Laserová Spektroskopie Materiálů pro Spintroniku*. Praha, 2015. Diplomová Práce. Univerzita Karlova.
48. KUBAŠČÍK, P. *Magneto-Optické Štúdium Antiferomagnetických Materiálov Pre Spintroniku*. Praha, 2019. Bakalářská Práce. Univerzita Karlova.
49. SAIDL, V.; BRAJER, M.; HORÁK, L. et al. Investigation of Magneto-Structural Phase Transition in FeRh by Reflectivity and Transmittance Measurements in Visible and near-Infrared Spectral Region. *New Journal of Physics*. 2016, roč. 18, č. 8, s. 083017. ISSN 1367-2630. Dostupné z DOI: [10.1088/1367-2630/18/8/083017](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/8/083017).
50. MARTI, X.; FINA, I.; FRONTERA, C., et al. Room-Temperature Anti-ferromagnetic Memory Resistor. *Nature Materials*. 2014, vol. 13, no. 4, s. 367–374. ISSN 1476-1122. Dostupné z DOI: [10.1038/nmat3861](https://doi.org/10.1038/nmat3861).
51. KIMÁK, J. *Charakterizácia Dvojdimenzionálneho Elektromagnetu*. Praha, 2017. Bakalářská Práce. Univerzita Karlova.
52. KIMÁK, J. *Optická Spektroskopie Antiferomagnetů*. Praha, 2019. Diplomová Práce. Univerzita Karlova.
53. BAĎURA, A. *Magneto-Optická Měření pro Spintronické Aplikace*. Praha, 2019. Závěrečná Zpráva Studentského Projektu. Univerzita Karlova.

54. MINÁŘ, J. *Modulace Polarizace Světelné Vlny Pomocí Fotoelastického Modulátoru*. Praha, 2004. Závěrečná Zpráva Studentského Projektu. Univerzita Karlova.
55. SCHUSSER, J. *Skryté Kouzlo Polarizace*. Praha, 2014. Závěrečná Zpráva Studentského Projektu. Univerzita Karlova.
56. HOVOŘÁKOVÁ, K. *Charakterizace Infračerveného Detektoru pro Magneto-Optická Měření*. Praha. Závěrečná Zpráva Studentského Projektu. Univerzita Karlova.
57. WOHLRATH, V. *Magneto-Optická Charakterizace Spintronických Materiálů*. Praha, 2018. Bakalářská Práce. Univerzita Karlova.
58. SILBER, R.; STEJSKAL, O.; BERAN, L., et al. Quadratic Magneto-Optic Kerr Effect Spectroscopy of Fe Epitaxial Films on MgO(001) Substrates. *Physical Review B*. 2019, vol. 100, no. 6, s. 064403. ISSN 2469-9950, ISSN 2469-9969. Dostupné z DOI: [10.1103/PhysRevB.100.064403](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.064403).
59. SUNDAR, R. S.; DEEVI, S. C. Soft Magnetic FeCo Alloys: Alloy Development, Processing, and Properties. *International Materials Reviews*. 2005, roč. 50, č. 3, s. 157–192. ISSN 0950-6608. Dostupné z DOI: [10.1179/174328005X14339](https://doi.org/10.1179/174328005X14339).
60. NAJFELD, I.; HAVEL, T. F. Derivatives of the Matrix Exponential and Their Computation. *Advances in Applied Mathematics*. 1995, vol. 16, no. 3, s. 321–375. ISSN 0196-8858. Dostupné z DOI: [10.1006/aama.1995.1017](https://doi.org/10.1006/aama.1995.1017).
61. VIGOUREUX, J. M. Polynomial Formulation of Reflection and Transmission by Stratified Planar Structures. *Journal of the Optical Society of America A*. 1991, vol. 8, no. 11, s. 1697. ISSN 1084-7529, ISSN 1520-8532. Dostupné z DOI: [10.1364/JOSAA.8.001697](https://doi.org/10.1364/JOSAA.8.001697).
62. KUSCHEL, T.; BARDENHAGEN, H.; WILKENS, H., et al. Vectorial Magnetometry Using Magnetooptic Kerr Effect Including First- and Second-Order Contributions for Thin Ferromagnetic Films. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2011, vol. 44, no. 26, s. 265003. ISSN 0022-3727. Dostupné z DOI: [10.1088/0022-3727/44/26/265003](https://doi.org/10.1088/0022-3727/44/26/265003).
63. GELMAN, A. *Bayesian Data Analysis*. 3. vyd. Boca Raton: CRC Press, 2014. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. ISBN 978-1-4398-4095-5.

# A. Přílohy

## A.1 Průchod a odraz při poruchách permitivity

Navazujeme zde na oddíl 1.3 a ukážeme, jak spočítat Jonesovy transmisní a reflexní matice při malých změnách tenzoru permitivity, tj. budeme se snažit vyjádřit derivace  $\delta\mathcal{T}$  a  $\delta\mathcal{R}$  podle prvků Berremanovy matice  $\delta\Delta$ . Podobný výpočet byl do jisté míry naznačen v článku [8].

Omezíme se na reálný normovaný příčný vlnový vektor  $N$  pro popis laserových svazků.

### Porucha reflexní a transmisní matice

Označíme celkovou přenosovou matici (1.27) v bázi módových amplitud vstupního a výstupního prostředí

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{D}_{(L)}^{-1} \mathfrak{M} \mathfrak{D}_{(R)}. \quad (\text{A.1})$$

Také zavedeme blokové značení  $2 \times 2$  bloků  $4 \times 4$  matic

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}^{\nwarrow} & \mathfrak{L}^{\nearrow} \\ \mathfrak{L}^{\swarrow} & \mathfrak{L}^{\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

S tímto značením jsou Jonesovy matice průchodu a odrazu po vyřešení rovnice (1.30) dány

$$\mathcal{T} = (\mathfrak{L}^{\nwarrow})^{-1}, \quad \mathcal{R} = \mathfrak{L}^{\swarrow} \mathcal{T}. \quad (\text{A.3})$$

Poruchy matice  $\delta\mathfrak{L}$  se v Jonesových maticích projeví<sup>1</sup>

$$\delta\mathcal{T} = -\mathcal{T} (\delta\mathfrak{L}^{\nwarrow}) \mathcal{T}, \quad \delta\mathcal{R} = (\delta\mathfrak{L}^{\swarrow}) \mathcal{T} + \mathfrak{L}^{\swarrow} (\delta\mathcal{T}). \quad (\text{A.4})$$

### Porucha přenosové matice

#### Sendvičová struktura

Zde se zaměříme na výpočet  $\delta\mathfrak{L}$  v případě, kdy vrstva s porušenou permitivitou není přímo výstupní prostředí. Potom  $\mathfrak{D}_{(L)}$  i  $\mathfrak{D}_{(R)}$  zůstávají neměnné a  $\delta\mathfrak{L} = \mathfrak{D}_{(L)}^{-1} \delta\mathfrak{M} \mathfrak{D}_{(R)}$ . Celková přenosová matice  $\mathfrak{M}$  je dána součinem tří dílcích přenosových matic: nadvrstev  $\mathfrak{M}_i$ , zkoumané (magnetické) vrstvy s porušenou permitivitou  $\mathfrak{M}_m$  a podvrstev  $\mathfrak{M}_o$ , takže  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i \mathfrak{M}_m \mathfrak{M}_o$ . Na poruchu pak reaguje pouze  $\mathfrak{M}_m$ , tzn.  $\delta\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i (\delta\mathfrak{M}_m) \mathfrak{M}_o$ .

Přenosová matice je dána řešením (1.25), maticovou exponenciálou

$$\mathfrak{M}_m + \delta\mathfrak{M}_m = e^{ik_0 d(\Delta + \delta\Delta)} = e^{ik_0 d\Delta} + \delta\mathfrak{M}_m \quad (\text{A.5})$$

kde  $d$  je tloušťka vrstvy.

První derivaci maticové exponenciály lze spočítat podle vzorce[60]

$$\delta\mathfrak{M}_m = \delta(e^{ik_0 d\Delta}) = ik_0 d \int_0^1 e^{ik_0 d\Delta(1-\tau)} (\delta\Delta) e^{ik_0 d\Delta\tau} d\tau. \quad (\text{A.6})$$

---

<sup>1</sup>Derivace inverzní matice  $(A^{-1})' = -A^{-1} A' A^{-1}$ .

Není tedy třeba počítat exponenciálu porušených  $\Delta + \delta\Delta$ , ale pouze neporušeného  $\Delta$ . Pokud dokážeme neporušenou matici  $\Delta$  diagonalizovat dynamickou maticí  $\mathfrak{D}$ , má vzorec (A.6) jednoduší tvar

$$\delta\mathfrak{M}_m = ik_0 d\mathfrak{D} \int_0^1 e^{ik_0 d(\mathfrak{D}^{-1}\Delta\mathfrak{D})(1-\tau)} (\mathfrak{D}^{-1}\delta\Delta\mathfrak{D}) e^{ik_0 d(\mathfrak{D}^{-1}\Delta\mathfrak{D})\tau} d\tau \mathfrak{D}^{-1}, \quad (\text{A.7})$$

kde se už vyskytuje exponenciála pouze diagonálních matic  $\mathfrak{D}^{-1}\Delta\mathfrak{D}$ , která se spočítá triviálně. Pro přehlednost explicitně spočítáme derivaci v případě, kdy neporušená permitivita je izotropní, tj. v  $2 \times 2$  blokové notaci

$$\mathfrak{D}^{-1}\Delta\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -n \cos \alpha_t & 0 \\ 0 & n \cos \alpha_t \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

kde  $n$  je index lomu a  $\alpha_t$  úhel lomu<sup>2</sup>. Pak

$$\delta \exp \left[ ik_0 d\Delta + \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^\nwarrow & \mathfrak{A}^\nearrow \\ \mathfrak{A}^\swarrow & \mathfrak{A}^\searrow \end{pmatrix} \right] = ik_0 d\mathfrak{D} \begin{pmatrix} e^{-ix} \mathfrak{B}^\nwarrow & \frac{\sin x}{x} \mathfrak{B}^\nearrow \\ \frac{\sin x}{x} \mathfrak{B}^\swarrow & e^{ix} \mathfrak{B}^\searrow \end{pmatrix} \mathfrak{D}^{-1}, \quad (\text{A.9})$$

kde jsme označili  $x = k_0 dn \cos \alpha_t$  a matice  $\mathfrak{B} = (b_{ij})$  vznikne z poruchy  $\mathfrak{A} = (a_{ij})$  transformací  $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{D}$  jako (A.7). Každý z  $2 \times 2$  bloků je násoben svým vlastním činitelem, takže výsledek nelze jednoduše zapisovat pomocí notace klasického maticového násobení.

### Odraz od bulku

Druhý případ, kdy magnetická vrstva je přímo výstupním prostředím (ale mezi ní a vstupním prostředím můžou být další vrstvy), je složitější. Pokud se zajímáme i o prošlé světlo, narázíme na problém, který je jinak všudypřítomný v Yehově formalismu, totiž dynamická matice je v okolí degenerací (izotropní vrstva či šíření podél optické osy) singulární. Ta v anizotropním prostředí nutně definuje bázi Jonesových vektorů<sup>3</sup>, což má za následek neexistenci derivace  $\delta\mathcal{T}$ . Pokud bychom přece jen chtěli popsat změny prošlého světla, museli bychom ho místo módrovými amplitudami (Jonesovými vektory) popisovat pomocí složek polí  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , které singularitami netrpí.

Častější situace, na kterou se zde zaměříme, je taková, že se zajímáme pouze o odražené světlo (odraz na anizotropním bulku). Zmíněná singularita  $\mathcal{T}$  se pak objevuje v mezivýpočtech a je možné jí obejít.

Z činitelů přenosové matice jsou nyní neměněné  $\mathfrak{D}_{(L)}$  a  $\mathfrak{M}$ , takže po derivaci  $\delta\mathfrak{L} = \mathfrak{D}_{(L)}^{-1}\mathfrak{M}(\delta\mathfrak{D}_{(R)})$ . Rovnici (1.30) přepíšeme do vhodnějšího tvaru

$$\mathfrak{L}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{J}^i \\ \mathcal{J}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

řešením pro  $\mathcal{J}^r$  je pak

$$\mathfrak{K}^\nwarrow \mathcal{J}^i + \mathfrak{K}^\searrow \mathcal{J}^r = 0 \quad (\text{A.11})$$

s označením  $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{D}_{(R)}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{D}_{(L)}$ . Výsledná reflexní matice je pak

$$\mathcal{R} = -(\mathfrak{K}^\searrow)^{-1} \mathfrak{K}^\nwarrow. \quad (\text{A.12})$$

---

<sup>2</sup>Pro absorbující prostředí je komplexní, nicméně stále platí  $\cos \alpha_t \equiv \sqrt{1 - N^T N/n^2}$ .

<sup>3</sup>Protože oba svazky jsou oddělené.

Reflexní matice má derivaci, ale nelze jí počítat tímto způsobem, protože derivace  $\mathfrak{D}_{(R)}^{-1}$  neexistuje v okolí degenerací.

Původ této singularity je následující. Význam rovnice (A.11) je takový, že nutí ty kombinace složek příčných polí  $\mathbf{G}$ , které odpovídají módům přicházejícím ke struktuře z výstupního prostředí, aby byly nulové (z druhé strany nikdo nesvítí). Projekce  $\mathbf{G}$  na dvou-dimenzionální podprostor<sup>4</sup> těchto dvou módů musí být nulová. Singularita vzniká z toho důvodu, že v (A.11) je díky přítomnosti  $\mathfrak{D}_{(R)}$  vždy volena báze vlastních vektorů příslušné porušené matice  $\Delta + \delta\Delta$ . Řešením je přejít od dynamických matic k projektorům na spektrální podprostory, nebo ekvivalentně používat sadu<sup>5</sup> bází, která singulární není. Taková sada bází pak nutně není daná přímo vlastními módy, ale tvoří stejný podprostor, takže je po zámeně s původní bází v (A.11) rovnice ekvivalentní. Výsledkem je, že v (A.11) nahradíme  $\mathfrak{K}$  takovým  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , se kterým je rovnice ekvivalentní, ale navíc  $\tilde{\mathfrak{K}}$  lze derivovat.

Nyní ukážeme, jak takové  $\tilde{\mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1} \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{D}_{(L)}$  spočítat a derivovat. Potom je porušená reflexní matice (vznikne derivací (A.12))

$$\delta\mathcal{R} = -(\tilde{\mathfrak{K}}^{\searrow})^{-1}(\delta\tilde{\mathfrak{K}}^{\swarrow}) + (\tilde{\mathfrak{K}}^{\searrow})^{-1}(\delta\tilde{\mathfrak{K}}^{\searrow})(\tilde{\mathfrak{K}}^{\searrow})^{-1}\tilde{\mathfrak{K}}^{\swarrow} \quad (\text{A.13})$$

a  $\tilde{\mathfrak{K}}$

$$\delta\tilde{\mathfrak{K}} = \delta\left(\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1}\right) \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{D}_{(L)}. \quad (\text{A.14})$$

K singularitám dochází pouze, pokud jsou dva nežádoucí módy degenerované, tj. neporušená  $\Delta$  má v bázi neporušených módů tvar

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1} \Delta \tilde{\mathfrak{D}}_{(R)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

kde jsme už v neporušené  $\Delta$  dovolili nedegenerované propuštěné módy ( $-a_1$  a  $-a_2$ ) a znaménkem jsme naznačili, které módy postupují kterým směrem. Protože v rovnici (A.11) vystupují pouze dva spodní bloky matice  $\mathfrak{K}$  a v té vystupuje matice  $\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1}$  v roli levého činitele, stačí nám počítat dva spodní bloky matice  $\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1}$ . Potom porucha<sup>6</sup>

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1}(\delta\Delta)\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

vede na

$$\left( \left[ \delta\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1} \right]^{\swarrow} \quad \left[ \delta\tilde{\mathfrak{D}}_{(R)}^{-1} \right]^{\searrow} \right) = - \begin{pmatrix} \frac{p_{31}}{b+a_1} & \frac{p_{32}}{b+a_2} & 0 & 0 \\ \frac{p_{41}}{b+a_1} & \frac{p_{42}}{b+a_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{D}^{-1}. \quad (\text{A.17})$$

Pokud bychom se zajímali o poruchy v okolí již anizotropní permitivity, je možné derivace  $\mathfrak{D}_{(R)}$  a tedy i  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathcal{T}$  a  $\mathcal{R}$  počítat standardními metodami poruchového počtu pro výpočet derivací vlastních vektorů<sup>7</sup>.

<sup>4</sup>Projekce je šíkmá, ve skutečnosti se jedná o doplněk kolmé projekce na podprostor dvou propuštěných módů.

<sup>5</sup>Sadou bází rozumíme bázi podprostoru pro každé dané  $\delta\Delta$ .

<sup>6</sup>Porucha je takto vyjádřená v bázi neporušených vlastních módů.

<sup>7</sup>S tím rozdílem, že  $\Delta$  není hermitovská.

## Diskuze

Výpočet je dokončen, postupným dosazováním do uvedených vzorců je možné v obou případech dojít od  $\delta\Delta$  až ke kýženým  $\delta\mathcal{T}$  a  $\delta\mathcal{R}$ . Výpočet je sice nepřehledný a vyžaduje dávku účetnického talentu, na druhou stranu je ale přímočarý a dovoluje počítat změny stočení a elipticity za pomocí pouze lineární algebry a znalosti přenosové a dynamické matice neporušených vrstev. V nejčastější situaci, kdy neporušená struktura je tvořena pouze izotropními vrstvami, je jejich výpočet navíc velice jednoduchý[61], redukovaný na výpočet Abelových  $2 \times 2$  přenosových matic v izotropních vrstvách.

Výpočet podobný tomu právě uvedenému nebyl dosud proveden. V článku [40] byl spočítán speciální případ ultra-tenké vrstvy, která odpovídá v rovnici (A.9) limitě  $x \rightarrow 0$ . Naše rozšíření je platné i pro středně-tenké vrstvy, pro které nemusí platit  $nd \ll \lambda$  jako pro ultra-tenké vrstvy, ale slabší podmínka  $(\Delta n)d \ll \lambda$ , kde jsme označili míru zanesené anizotropie rozštěpením indexu lomu  $\Delta n$ .

V článku [39] byl spočítán odraz přímo od bulku (s izotropní neporušenou permitivitou) se stejným výsledkem (2.2), takže standardní postup je předpokládat platnost (2.2) i mimo tyto dva limitující případy[31, 62]. Nás výpočet zaplňuje tuto důležitou mezitu a dovoluje počítat, jak MO koeficienty závisí na tloušťce vrstvy.

Další výhodou našeho výpočtu je také to, že není nutné se omezovat na izotropní neporušené permitivity. Výsledky jsou platné i pokud zkoumáme odchylky permitivity již anizotropních struktur.

Samořejmě lze úlohu vždy řešit numericky, poskytujeme ale rychlý způsob určování analytických výrazů pro “extrakční faktory” (např. vážící konstanty  $A_{s/p}$ ,  $B_{s/p}$  z (2.2)) v mnohem širší třídě situací, než bylo doposud možné.

## Obecné výsledky

Pokud je multivrstva tvořena pouze izotropními vrstvami, mají všechny dynamické i přenosové matice speciální tvar. Všechny jejich  $2 \times 2$  bloky musí být diagonální (jako (1.29)) a to nám umožňuje učinit určité závěry ohledně tvaru  $\delta\mathcal{R}$  a  $\delta\mathcal{T}$  bez konkrétních výpočtů. V obou případech sendvičové struktury i odrazu od bulku (v případě izotropní struktury  $a_1 = a_2$ ) je posloupnost kroků vedoucí k výpočtu  $\delta\mathcal{T}$  a  $\delta\mathcal{R}$  tvořena pouze několika druhy operací. Buď může být každý blok matice vynásoben svým vlastním faktorem (jako (A.9)), nebo může být matice z obou stran násobena některou z přenosových nebo dynamických matic, a nebo z ní může být extrahován jeden z  $2 \times 2$  bloků (jako např. (A.13)). Výsledkem libovolné posloupnosti těchto tří operací může být pouze lineární kombinace bloků  $\delta\Delta$  násobené zleva a zprava nějakými diagonálními maticemi. To znamená, že

$$\delta\mathcal{T}, \delta\mathcal{R} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{12} \end{pmatrix} \delta\Delta \nwarrow \begin{pmatrix} c_{13} & 0 \\ 0 & c_{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{21} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \delta\Delta \nearrow \begin{pmatrix} c_{23} & 0 \\ 0 & c_{24} \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{A.18})$$

s nějakými konstantami  $c_{ij}$ . Po uvážení tvaru Berremanovy matice (1.25) nám to poskytuje užitečnou pomůcku jak určovat, v kterých prvcích Jonesových matic se mohou uplatňovat které prvky permitivity (např.  $\epsilon_{12}$  se může projevit pouze v  $r_{sp}$  a nikoli  $r_{ss}$ ,  $r_{pp}$ ,  $r_{ps}$ ). Závěrem je, že i v našem případě středně-tenké vrstvy platí

obecnější tvar vzorce (2.2), který pochází z [40]

$$r_{ps} \propto A_s \left( \varepsilon_{21} - \frac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} \right) + B_s \varepsilon_{31} \quad (\text{A.19})$$

$$r_{sp} \propto A_p \left( \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{32}\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \right) + B_s \varepsilon_{13}. \quad (\text{A.20})$$

### Výsledky v kolmém dopadu

Pokud jsou všechny vrstvy izotropní a světlo dopadá kolmo ( $N = 0$ ), je výpočet velice jednoduchý. Jediný nenulový blok poruchy Berremanovy matice (1.25) je levý spodní

$$\delta\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon^\perp - \frac{\varepsilon^|\varepsilon^-}{\varepsilon_{33} + n^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

kde  $\varepsilon$  nyní značí pouze odchylku od izotropního indexu lomu  $n$ , a dynamické matice tvoří pouze bloky úměrné jednotkové matici (viz (1.29))

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -n & n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Ve vzorci (A.18) jsou pak všechny z  $c$  matic diagonální a jediný člen je úměrný  $\delta\Delta^\vee$ , takže můžeme psát

$$\mathcal{R} + \delta\mathcal{R} = R \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + P_0 \left( \varepsilon^\perp - \frac{\varepsilon^|\varepsilon^-}{\varepsilon_{33} + n^2} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

a stejně pro transmisní matici.

Pro kubický vzorek orientovaný hlavními krystalografickými směry v osách  $x$ ,  $y$ ,  $z$  můžeme dosadit  $\varepsilon(\mathbf{M})$  z (1.37) a (1.39) a dostat relevantní část Berremanovy matice

$$\varepsilon^\perp - \frac{\varepsilon^|\varepsilon^-}{\varepsilon_{33} + n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{G_s}{2} - \frac{K^2}{n^2} \right) (\sigma_1 \cos 2\varphi_M + \sigma_2 \sin 2\varphi_M) \quad (\text{A.24})$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\Delta G}{2} (\sigma_1 \cos 2\varphi_M - \sigma_2 \sin 2\varphi_M). \quad (\text{A.25})$$

Z toho již plyne model (4.39).

## A.2 Dodatky k magnetické anizotropii

### Podmínka integrability

Integrací podmínky (1.52) pro rovnovážnou polohu magnetizace  $\varphi_M$  po uzavřené křivce dostaneme

$$0 = -F(2\pi) + F(0) = \oint_0^{2\pi} L(\varphi_M) d\varphi_M = \mu_0 H_{\text{ext}} M_S \oint_0^{2\pi} \sin(\varphi_M - \varphi_H) d\varphi_M. \quad (\text{A.26})$$

Přechodem k experimentálně ovladatelnému úhlu pole  $\varphi_H$  dostaneme podmínu integrability

$$\oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} \sin(\varphi_M - \varphi_H) d\varphi_H = 0, \quad (\text{A.27})$$

která platí, pokud jsme mohli provést substituci, tj. pokud je  $\varphi_M(\varphi_H)$  spojité, nedochází k přeskokům. Striktně vzato bychom ji mohli použít i v případě, kdy dochází k vratným<sup>8</sup> přeskokům, tj. výchozí i koncové  $\varphi_M$  mají stejnou hodnotu volné energie; nedochází k hysterezi.

### Derivace $\varphi_M$ podle $\varphi_H$

Směr magnetizace  $\varphi_M$  pro daný směr pole  $\varphi_H$  je dán minimalizací magnetické entalpie (1.49) nebo ekvivalentně podmínkou nulového celkového momentu (1.52).

Derivaci  $d\varphi_M/d\varphi_H$  určíme pomocí implicitní derivace (1.52) podle  $\varphi_H$

$$\frac{dL}{d\varphi_M} \frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} = \mu_0 H_{\text{ext}} M_S \cos(\varphi_M - \varphi_H) \left( \frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} - 1 \right), \quad (\text{A.28})$$

po úpravě pak

$$\frac{d\varphi_M}{d\varphi_H} = \frac{1}{1 - \frac{dL}{d\varphi_M} \frac{1}{\mu_0 H_{\text{ext}} M_S \cos(\varphi_M - \varphi_H)}}. \quad (\text{A.29})$$

### Přibližný výpočet $\varphi_M$

Zaměříme se na to, jakým způsobem se  $\varphi_M$  změní při změně volné energie  $F \mapsto F + \delta F$  (a  $L \mapsto L + \delta L$ ). Nejdříve označíme normovaný torque  $l = L/\mu H_{\text{ext}} M_S$ . Vydeme opět z podmínky (1.52), která má tvar

$$l(\varphi_M + \delta\varphi_M) + \delta l(\varphi_M + \delta\varphi_M) = \mu H_{\text{ext}} M_S \sin(\varphi_M + \delta\varphi_M - \varphi_H). \quad (\text{A.30})$$

Rozvinutím funkcí  $l(\varphi_M)$ ,  $\delta l(\varphi_M)$  a  $\sin(\varphi_M - \varphi_H)$  a následným porovnáním členů lze určit  $\delta\varphi_M$  do požadovaného rádu v  $\delta l$ . Do druhého rádu v  $\delta\varphi_M$  má (A.30) tvar (čárka značí derivaci podle  $\varphi_M$ )

$$\begin{aligned} l'(\varphi_M)\delta\varphi_M + l''(\varphi_M)\frac{\delta\varphi_M^2}{2} + \delta l(\varphi_M) + \delta l'(\varphi_M)\delta\varphi_M &= \\ &= \cos(\varphi_M - \varphi_H)\delta\varphi_M - \sin(\varphi_M - \varphi_H)\frac{\delta\varphi_M^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Posbíráním členů prvního rádu dostaneme

$$l'(\varphi_M)\delta\varphi_M^{(1)} + \delta l(\varphi_M) = \cos(\varphi_M - \varphi_H)\delta\varphi_M^{(1)}, \quad (\text{A.32})$$

takže oprava prvního rádu je

$$\delta\varphi_M^{(1)} = \frac{\delta l(\varphi_M)}{\cos(\varphi_M - \varphi_H) - l'(\varphi_M)}. \quad (\text{A.33})$$

---

<sup>8</sup>Ve smyslu vratného termodynamického procesu.

Pomocí tohoto vzorce je možné analyticky počítat Jacobiho matici (a tedy gradient cílové funkce  $\mathcal{L}$ ) úlohy nejmenších čtverců (4.42). Členy druhého řádu jsou pak

$$\begin{aligned} l'(\varphi_M)\delta\varphi_M^{(2)} + l''(\varphi_M)\frac{(\delta\varphi_M^{(1)})^2}{2} + \delta l'(\varphi_M)\delta\varphi_M^{(1)} = \\ = \cos(\varphi_M - \varphi_H)\delta\varphi_M^{(2)} - \sin(\varphi_M - \varphi_H)\frac{(\delta\varphi_M^{(1)})^2}{2}, \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

takže oprava druhého řádu je

$$\begin{aligned} \delta\varphi_M^{(2)} = \frac{\delta\varphi_M^{(1)}}{\cos(\varphi_M - \varphi_H) - l'(\varphi_M)} \\ \left[ \delta l'(\varphi_M) + \frac{\delta\varphi_M^{(1)}}{2} (l''(\varphi_M) + \sin(\varphi_M - \varphi_H)) \right]. \quad (\text{A.35}) \end{aligned}$$

V okolí nulové anizotropie ( $l = 0$ ) mají oba řády jednoduchý tvar

$$\delta\varphi_M^{(1)} = \delta l(\varphi_H), \quad \delta\varphi_M^{(1)} + \delta\varphi_M^{(2)} = \delta l(\varphi_H)(1 + \delta l'(\varphi_H)). \quad (\text{A.36})$$

Výpočtně nenáročně lze  $\varphi_M$  počítat ještě jinou metodou. Po úpravě (1.52) má podmínka na rovnovážné  $\varphi_M$  tvar

$$\varphi_M = \varphi_H + \arcsin l(\varphi_M). \quad (\text{A.37})$$

Opakovou aplikací zobrazení  $\varphi_M \mapsto \varphi_H + \arcsin l(\varphi_M)$  se startovním bodem  $\varphi_M = \varphi_H$  lze často dosáhnout pevného bodu splňujícího (A.37). Kýzené  $\varphi_M$  je tak nalezeno za pomoci nižšího počtu vyhodnocení funkce  $l$  než v případě minimalizace volné energie, či numerického řešení (1.52). Metoda ale selhává pro příliš silné anizotropie.

## Určení volné energie z nepřesného pole

Je myslitelné, že přesnost plánovaných dodatečných měření magnetického pole nebude dostatečná a bude nutné kalibraci provést pomocí magneto-optických měření. Proto zde uvedeme, jakým způsobem se nepřesnosti v  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  projevují ve výsledcích určení magnetické anizotropie.

Označme skutečné pole používané v experimentu  $\mathbf{H}$  a nominální (nepřesné) pole  $\mathbf{H}'$ , stejně tak skutečný torque  $L$  a torque určený za předpokladu nominálního pole  $L'$ . Také označíme vektorový součin v rovině  $\mathbf{M} \times \mathbf{H} \equiv M_S |\mathbf{H}| \sin(\varphi_M - \varphi_H)$ . Podmínka nulového torque je pomocí něho zapsána jako

$$L(\varphi_M) = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (\text{A.38})$$

Výsledkem analýzy z oddílu 4.4 je principiálně průběh  $\varphi_M$  pro každé jednotlivé přiložené pole, avšak s neznámým konstantním celkovým pootočením (aditivní konstanta k  $\varphi_M$ ). Celkové pootočení je určené pomocí podmínky integrability (A.29), ve které ale vystupuje magnetické pole  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ , takže bude při použití  $\mathbf{H}'$  jiné než při použití  $\mathbf{H}$ . To samo o sobě není překvapivé, obě posloupnosti polí můžou být

navzájem pootočené. Jenže v podmínce integrability vystupuje  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  v kombinaci s magnetizací, takže s nepřesným nominálním polem  $\mathbf{H}'$  bude celkové pootočení záviset i na magnetické anizotropii vzorku. Jinými slovy, i za předpokladu, že všechny ostatní aspekty experimentu a zpracování jsou ve všech směrech ideální, při změření dvou vzorků s různou magnetickou anizotropií nebudou po provedení analýzy výsledné směry magnetizace  $\varphi_M = 0$  shodné. Pokud v analýze používáme nepřesné  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ , je souřadná soustava magnetického pole a magnetizace závislá na parametrech měřeného vzorku. To se případně projeví rozdílem určených parametrů  $\pi_+$  ze vztahu (4.37), které vyjadřují úhel vzájemné rotace soustavy magnetu a polarizace.

Intuitivně k takové situaci dochází, pokud je  $\mathbf{H}'$  oproti  $\mathbf{H}$  otočeno převážně jedním směrem v okolí snadných os prvního vzorku, a převážně opačným směrem v okolí snadných os druhého vzorku. Tento efekt je ale pravděpodobně malý, ve zbývající diskuzi ho ignorujeme.

Předpokládejme, že z experimentu máme již určen průběh  $\mathbf{M}$ . Skutečný torque  $L$  souvisí se skutečným  $\mathbf{H}$  vztahem (A.38). Naopak výsledek analýzy  $L'$  byl určen aplikací stejného vztahu, ale s nominálním  $\mathbf{H}'$

$$L' = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}'. \quad (\text{A.39})$$

Situace tedy není tak jednoduchá, že by anizotropie magnetického pole zanášela do experimentu konstantní magnetickou anizotropii, protože

$$L - L' = \mu \mathbf{M} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}'), \quad (\text{A.40})$$

také nezávisí jen na nepřesnosti pole vyjádřené  $\mathbf{H} - \mathbf{H}'$ , ale i na magnetické anizotropii vzorku.

### A.3 Stokesovy kovektory

Popis pomocí Stokesových vektorů je zvláště užitečný pro popis detekčních systémů, protože Stokesovy parametry jsou *zobecněné intenzity*. Použití ilustrujeme na optickém můstku z oddílu 2.1.

Intenzita měřená detektorem A je daná nultou složkou dopadajícího Stokesova vektoru

$$I_A = s_0^A \equiv \mathcal{D}^A \cdot \mathcal{S}^A, \quad (\text{A.41})$$

kde jsme označili  $\mathcal{D}^A = (1, 0, 0, 0)$  "Stokesův kovektor" detektoru A. Tečka ( $\cdot$ ) značí kontrakci<sup>9</sup>.

Stejně jako můžeme světelný svazek popisovat Stokesovými vektory v různých místech jeho dráhy, můžeme i signál měřený detektory popisovat vzhledem ke Stokesovým vektorům v různých místech. Označíme jedním apostrofem kovektory vzhledem ke světlu vstupujícímu do děliče  $\mathcal{D}'$  a vzhledem ke světlu před destičkou  $\mathcal{D}''$ . Vyjádřením  $\mathcal{S}^A$  pomocí Stokesova vektoru vstupujícího do můstku  $\mathcal{S}^{\text{in}}$  a Muellerových matic půlvlnné destičky a polarizačního děliče

$$I_A = \mathcal{D}^A \cdot (\mathbb{M}_A \mathbb{M}_{\lambda/2} \mathcal{S}^{\text{in}}) = (\mathcal{D}^A \mathbb{M}_A \mathbb{M}_{\lambda/2}) \cdot \mathcal{S}^{\text{in}} \equiv \mathcal{D}''^A \cdot \mathcal{S}^{\text{in}}, \quad (\text{A.42})$$

---

<sup>9</sup>"Skalární součin".

kde jsme druhou rovností naznačili asociativitu maticového násobení, která nás motivovala k definici Stokesova kovektoru detektoru A vzhledem ke světlu vstupujícímu do můstku  $\mathcal{D}''^A$ .

Stejně lze zřejmě činit i pro detektor B. Rozdílové a součtové napětí je pak

$$U_{A-B} = (\mathcal{D}'^A - \mathcal{D}'^B) \cdot \mathbb{M}_{\lambda/2} \mathcal{S}^{in} \equiv \mathcal{D}''^{A-B} \cdot \mathcal{S}^{in}, \quad (A.43a)$$

$$U_{A+B} = (\mathcal{D}'^A + \mathcal{D}'^B) \cdot \mathbb{M}_{\lambda/2} \mathcal{S}^{in} \equiv \mathcal{D}''^{A+B} \cdot \mathcal{S}^{in}. \quad (A.43b)$$

Měřené signály jsou lineární ve vstupních Stokesových vektorech a jsou tedy reprezentovány lineárními formami, zde  $\mathcal{D}''^{A-B}$  a  $\mathcal{D}''^{A+B}$ . Pro ideální půlvlnnou destičku a polarizační dělič jako v oddílu 2.1 jsou Muellerovy matice (A měří  $E_y$ , B měří  $E_x$ )

$$\mathbb{M}_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A.44a)$$

$$\mathbb{M}_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta_{\lambda/2} & \sin 4\theta_{\lambda/2} & 0 \\ 0 & \sin 4\theta_{\lambda/2} & -\cos 4\theta_{\lambda/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A.44b)$$

a Stokesovy kovektory jsou po dosazení

$$\mathcal{D}'^{A-B} = (0, -1, 0, 0), \quad (A.45a)$$

$$\mathcal{D}''^{A-B} = -(0, \cos 4\theta_{\lambda/2}, \sin 4\theta_{\lambda/2}, 0), \quad (A.45b)$$

$$\mathcal{D}''^{A+B} = (1, 0, 0, 0). \quad (A.45c)$$

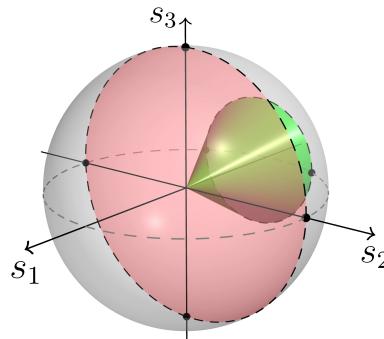
Místo sledování, co se při průchodu optickými prvky děje se všemi myslitelnými vstupními Stokesovými vektory, je výhodnější sledovat, jak se mění konstantní detektorové kovektory. Navíc Stokesovy kovektory lze pro plně polarizované světlo přímočaře graficky znázorňovat v trojrozměrném prostoru redukovaných Stokesových vektorů. Pokud je jediná nenulová složka kovektoru  $d_0$  ta nultá (jako v  $\mathcal{D}''^{A+B}$ ), pak je měřený signál jednoduše úměrný vstupní intenzitě (vzdálenosti redukovaného Stokesova vektoru od počátku) a netřeba ho zvlášť znázorňovat. Pokud je naopak  $d_0 = 0$  (jako v  $\mathcal{D}''^{A-B}$ ), pak je signál lineární v redukovaném Stokesově vektoru a tedy úměrný vzdálenosti od určité roviny.

V obecném případě, kdy  $d_0$  není ani nulové, ani jediné nenulové, je znázornění mírně složitější. Nejdří se o pouhé posunutí roviny, od které je vzdálenost odečítána. Na obr. A.1 (a) jsou vyznačené nulové plochy (množina Stokesových vektorů, pro které  $U_{A-B} = 0$ )  $\mathcal{D}''^{A-B}$  tak, jak je v (A.45b) a v situaci, kdy  $d_0$  je nenulové. Pro nenulové  $d_0$  je nulová plocha kužel.

Pro body neležící na nulovém kuželu však  $U_{A-B}$  není určeno vzdáleností od kuželev. Pro body na Poincarého sféře je signál úměrný vzdálenosti od roviny, která vznikne průnikem nulového kuželu s Poincarého sférou (vždy kružnice); stejnou konstrukci lze provést i pro body mimo Poincarého sféru ( $I \neq 1$ ), posunutí roviny však závisí na  $I$ .

Uvedený postup selhává, pokud  $d_0 > |\mathbf{d}| \equiv |(d_1, d_2, d_3)|$ , protože pak neexistují nenulové vektory, pro které je signál nulový; neexistuje nulová plocha. Nicméně pro každé konstantní  $I$  je stále signál úměrný vzdálenosti od určité roviny, tentokrát však ležící mimo sféru vektorů s intenzitou  $I$ .

Z provedené diskuze vyplývá jako nejvhodnější znázorňovat Stokesovy kovektory jednotně pomocí *nulové kružnice*, která je průsečíkem nulového kužele s Poincarého sférou, a případně jejím normálovým 3-vektorem  $\mathbf{d}$ , kterým je znázorněna konstanta úměrnosti mezi signálem a geometrickou vzdáleností. Případ  $d_0 > |\mathbf{d}|$  v této práci nepoužíváme (soustředíme se na popis optického můstku, ve kterém se takové kovektory nevyskytují), ale znázorňovali bychom ho také 3-vektorem  $\mathbf{d}$  a “nulovou”<sup>10</sup> rovinou příslušnou Poincarého sféry.



Obrázek A.1: Nulové plochy Stokesových kovektorů s nulovou (růžově) a nenulovou (zeleně) nultou složkou  $d_0$ . Průnikem s Poincarého sférou vznikne *nulová kružnice*.

Při znázornění kovektorů tímto způsobem lze beze změny převzít znázornění akce Muellerových matic pomocí mapování Poincarého sféry. Protože nulové kružnice jsou množiny Stokesových vektorů, je možné je přímo zobrazit metodou vyloženou v oddílu 1.2.2 a výsledkem bude opět podmnožina nulové plochy. V případě čistých retardérů se nulová kružnice zobrazí jako jiná kružnice na Poincarého sféře, a je to tedy přímo nulová kružnice transformovaného kovektoru; vektor  $\mathbf{d}$  se otáčí společně s kružnicí. Pokud však Muellerovou maticí dochází také k deformaci a posunutí Poincarého sféry (jako např. v případě čistého diatenuátoru), je obrazem zobrazení obecně elipsa ležící uvnitř Poincarého sféry, a je proto nutné provést následující konstrukci pro získání nulové kružnice. Transformovaná elipsa vždy leží na nulovém kuželu, takže ho můžeme určit proložením elipsy kuželem s vrcholem v počátku. Nulová kružnice je pak určena průnikem kuželu a Poincarého sféry.

## A.4 Detaily zpracování dat

### Předzpracování dat

Měřící proceduru, v rámci které detekujeme závislost magneto-optického signálu na směru externího magnetického pole konstantní velikosti, vždy provádíme v několika navazujících cyklech. Koncový stav cyklu je vždy shodný s počátečním ( $\varphi_H = 0^\circ$  a  $360^\circ$ ). Optický můstek však trpí dlouhodobou mechanickou nestabilitou

---

<sup>10</sup>Která vzhledem k tomu, že leží mimo Poincarého sféru, odpovídá nedosažitelným Stokesovým vektorům  $|\mathbf{s}| > s_0$ .

(tzv. drift), takže rozdílové napětí na konci cyklu většinou nereplikuje hodnotu na začátku. Pro odstranění alespoň části tohoto jevu od každého cyklu odečítáme lineární funkci takovou, aby se počáteční i koncový bod rovnal. Koncový bod je pak duplicitní, takže ho dále vyřadíme ze zpracování. Ze všech cyklů pak vezmeme aritmetický průměr. Pro snadné vykreslování od výsledné křivky odečteme její střední hodnotu.

Symetrizaci v magnetickém poli  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  podle (4.36) nemůžeme provést přímo, protože pro každou změrenou hodnotu  $\varphi_H$  se směr opačného změřeného pole mírně liší od  $\varphi_H + 180^\circ$ . V takovém případě bereme jako výsledné  $\varphi_H$  aritmetický průměr obou hodnot (po odečtení  $180^\circ$ ).

## Vztah MO koeficientů $P$

Převod mezi koeficienty  $P_{ij}$  a  $P_{+/-}, \pi_{+/-}$  poskytuje matice

$$\begin{pmatrix} P_+ e^{i2\pi_+} \\ P_- e^{i2\pi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & -i \\ i & -1 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

## Určení nejistot

Nejistoty veličin určených metodou nejmenších čtverců určujeme standardním způsobem[63]. V okolí minima cílové funkce numericky spočítáme matici druhých derivací (zde určujeme koeficienty  $c_i$ )

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c_i \partial c_j} = H_{ij}, \quad (\text{A.47})$$

kterou následně normujeme odhadem variance chyb  $\sigma^2 = \mathcal{L}_{\min}/(n - m)$ , kde  $n$  je počet měřených bodů a  $m$  počet fitovaných parametrů modelu. Matice inverzní k  $H/\sigma^2$  je pak kovarianční matici, na jejíž diagonále jsou variance fitovaných parametrů.

Oblasti spolehlivosti  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ , resp.  $3\sigma$  jsou přibližně<sup>11</sup> ohraničené křivkou  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\min}(1 + j/(n - m))$ , kde  $j = 1, 4$ , resp. 9.

---

<sup>11</sup>Platí přesně pro lineární regresi.