המחלקה למתמטיקה שימושית

חקירת משחק האורות

מאת:
ולדיסלב ברקנס

מנחה:
אלכס גולוורד

23 באפריל 2022

תוכן העניינים

1 הקדמה

פרוקיט זה הינו פרויקט סוף של סטודנט במחלקה למתמטיקה שימושית. הפרויקט חוקר את משחק האורות המטרה המקורית של הפרויקט היתה למצוא פתרונות למשחק, אך במהלך המחקר העלנו שאלות נוספות.

נציג שתי שיטות למציאת פתרון של המשחק, בתחילה השיטות נראו שונות אבל בפרויקט הראינו דמיון בינהם.

דבר מרכזי נוסף שעסקנו בו הוא בחיפוש פתרונות אופטימלים, מהו פתרון אופטימלי נגדיר בהגדרה 5.1 , פתרונות אילו הם מועטים וכן הוכחנו את כולם.

במהלך הפרויקט ראינו שבמשחק המתחיל כאשר כל הנורות דלוקות קיים לפחות פתרון אחד, תופעה זו העסיקה רבות את הפרויקט ובסיומו מצאנו הוכחה לקיום התופעה.

עבודה סוף זו הייתה מהנה עבורי אני מודה למחלקה למתמטיקה שימושית, במיוחד לאלכס גולוורד על הזדמנות לעשות עבודה מרתקת שכזה. עבודה זה לימדה אותי המון ונתנה לי את האומץ להשתמש בכלים שלמדתי במהלך התואר.

2 תאור של המשחק

משחק האורות, בלועזית Lights Out , מתקיים על לוח משבצות מלבני. כל משבצת יכולה להיות באחד משני מצבים, נקרא להם דלוק וכבוי. כאשר משתמשים בשמות האלו מתכוונים שבכל משבצת יש נורה והיא יכולה להיות דלוקה או כבויה. במצב התחלתי כל הנורות כבויות. יש לנו לוח בקרה שמאפשר בכל שלב של המשחק ללחוץ על משבצת ולשנות את מצב הנורה, אם היא דלוקה אז ניתן לכבות אותה ואם היא כבויה אז ניתן להדליק אותה. לוח הבקרה בנוי בצורה כזאת שכאשר מתבצעת לחיצה על משבצת אז מצבה של הנורה משתנה, בנוסף משתנים גם מצבם של הנורות הסמוכות לה. שתי נורות נקראות סמוכות אם הן נמצאות במשבצות בעלות צלע משוטפת. המטרה של המשחק היא לעבור ממצב התחלתי שבו כל הנרות כבויות, למצב בו כל הנורות יהיו דולקות.

הערה 2.1: מצבם התחלתי של נורות המשחק אינה משנה את תוצאות המשחק.

מטרתה של ההערה להדגיש כי מטרתו של המשחק היא להעביר את הלוח ממצב אחד בו נמצאים כל הנורות למצב האחר, וכי אין השפעה למראה של מצבים.

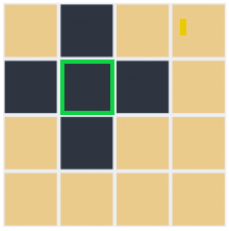
2.1 תאור גרפי של המשחק

באיור הבאה נגדיר: מצב התחלתי הוא מצב בו כל נורות צהובות. מצב סופי הוא מצב בו כל נורות שחורות. לחיצה על משבצת תסומן על ידי צביעת גבולותה בירוק.

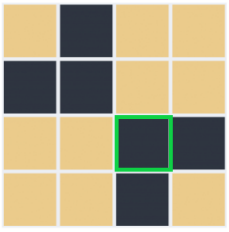
איור 2.1: הסבר שינוי מצב הלוח לאחר לחיצה

(א) לוח במצב התחלתי

(ב) לוח לאחר לחיצה בודדת



(ג) לוח לאחר שני לחיצות



פירוט: באיור 2.1א מתואר מצב התחלתי. באיור 2.1ב ניתן לראות את השפעה של לחיצה על משבצת שמסומן בירוק. באיור 2.1ג ניתן לראות השפעה לחיצה נוספת.

לשם הבנה מומלץ לנסות את המשחק, כפי שנאמר "עדיף לראות פעם אחת, מאשר לשמוע מאה פעמים" או במקרה שלנו לשחק. את המשחק אפשר לשחק בקישור הבאה:
https://www.geogebra.org/m/JexnDJpt#chapter/301822.

האתגר במשחק הוא שאין אסטרטגיה גלויה לכן, במשחקים רבים מנסים להגיע למצבים שפתרון כבר ידוע.

2.2 סוגיות בהן נעסוק בפרויקט

1. תיאור ודיון בשני אלגוריתמים למציאת פתרון המשחק.
2. הוכחה לקיום פתרון המשחק לכל לוח $m \times n$.
3. הרחבה של משחק על לוח למשחק על גרף.
4. נעסוק במספר הפתרון האפשריים בלוח ונדבר על חסם מספר הפתרונות האפשריים.
5. חיפוש לוחות בהם קיים פתרון בו הנורות שינו את מצבם פעם אחת.
6. נציג שיטה למציאת פתרונות בהם כל נורה תשתנה את מצבה פעם אחת.

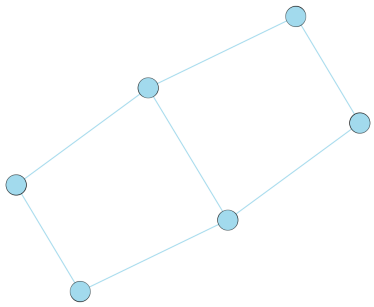
בנוסף, קיימות שאלות רבות הקשורות למשחק ובפרויקט ננסה להציג פתרון לחלקן. יתרה מזאת, נרצה להציג תופעות מעניינות, ולהראות שהמשחק אינו רק מהנה אלא גם מהווה אתגר מתמטי לא קטן.

2.3 תיאור משחק על גרף

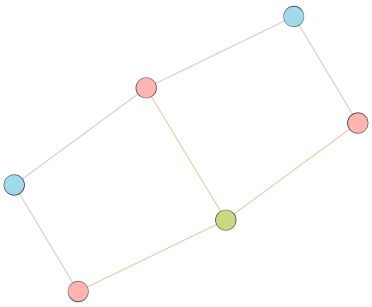
אחרי שתיארנו את המשחק על לוח, נתאר את המשחק על גרף. נזכיר שגרף זה מבנה המכיל קשתות וצמתים, קשתות מוגדרות כצירוף סדור של שני צמתים. כדי לתאר את משחק האורות על גרף נשתמש באותם כללים שהגדרנו. במשחק על גרף הצמתים הם המשבצות לכן, לחיצה על צומת הופכת את מצבה ומצב שכניה. נגדיר שזוג צמתים יקראו שכנים אם קיימת קשת המחברת ביניהם. מטרת המשחק לעבור מגרף שכל הצמתים במצב התחלתי למצב סופי.

איור 2.2 : משחק על גרף לדוגמה

(א) מצב התחלתי



(ב) לחיצה על משבצת מסומנת



נמחיש זאת על דוגמה שבאיור 2.2. איור 2.2א מתאר את מצב התחלתי, נסמן את המצב התחלתי של צומת בצבע כחול. איור 2.2ב מתאר לחיצה על צומת שצבוע בירוק. לחיצה זה שינתה את הצמתים השכנות למצבם הסופי

שמוסמן בצבע אדום.

הערה 2.2: בפועל צומת ירוקה גם נצבעת באדום הצביעה לירוק נועדה להצגה.

2.4 השוואה בין משחק על לוח למשחק על גרף

נרצה להראות כי משחק על לוח הוא סוג של משחק על גרף כלומר, כל משחק על לוח ניתן לתאר בעזרת משחק על גרף.

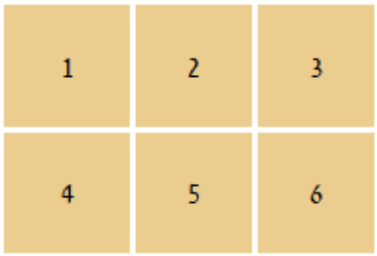
נתאר משחק על לוח כמשחק על גרף בעזרת הכללים הבאים:

1. כל משבצת במשחק על לוח נהפוך לצומת.
2. כל זוג משבצות סמוכות על לוח נחבר בקשת בגרף.

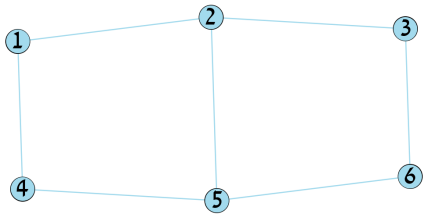
לדוגמה, ניקח לוח 2×3 נמספר את המשבצות כמו באיור 2.3א. הגרף המתקבל מתואר באיור 2.3ב.

איור 2.3: דוגמה למשחק על לוח שתורגם למשחק על גרף

(א) משחק על לוח 2×3 שמשבצותיו ממוספר



(ב) משחק על גרף שתורגם מלוח 2×3



הערה 2.3: קיימים משחקים רבים שניתן לתאר על גרף אך, לא ניתן לתאר אותם על לוח. לדוגמה, גרף בו יש צומת אם יותר מ 4 שכנים לא ניתן לתאר על לוח מכיוון שלכל משבצת על לוח יש לכל היותר 4 משבצות סמוכות.

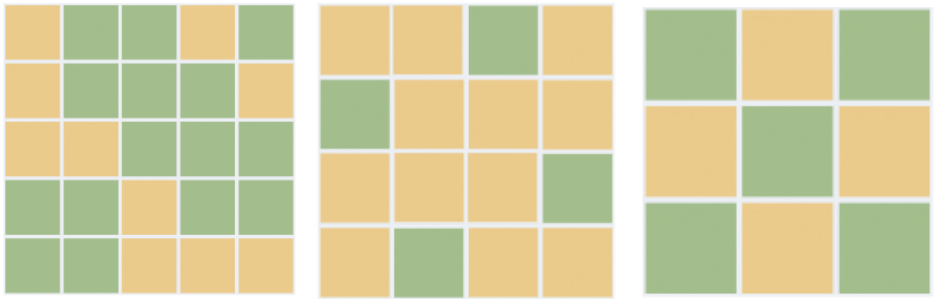
הערה 2.4: בעזרת השיטה שתיארנו אפשר לתאר כל משחק על לוח כמשחק על גרף, אבל ההפך הוא לא נכון. כלומר, לא כל משחק על גרף אפשר לתאר כמשחק על לוח.

מכיוון שמשחק על לוח ניתן לתאר כמשחק על גרף לכן, טענות שמתקימות במשחק על גרף נכונות במשחק על לוח.

3 אלגוריתם למציאת פתרון

לפני שנציג את שיטות למציאת פתרון, נרצה להמחיש את האתגר במשחק על ידי הצגה מספר תופעות שמתקיימות במשחק. באיור 3.1 מוצגים מספר פתרונות אפשריים ללוחות שונים, לחיצה על הלחצנים הירוקים בסדר כלשהו תוביל לפתרון המשחק. ניתן לראות שמספר הלחיצות הנדרשות לפתרון לוח 4×4 קטן ממספר הלחיצות הנדרשות לפתרון לוח 3×3. אפשר היה לחשוב שככל שהלוח גדול יותר נדרשות יותר לחיצות כדי להגיע לפתרון, אך, ניתן לראות באיור 3.1 זה לא נכון. תופעה נוספת המתקיימת במשחק היא שכמות הפתרונות עבור לוחות שונים משתנה. עבור לוח 3×3 קיים פתרון יחיד, אולם ללוח 4×4 קיימים 16 פתרונות. באופן מפתיע, ללוח 5×5 קיימים רק 4. תופעה זה מפתיע משום שאפשר היה לצפות שככל שהלוח גדול יותר כך, מספר הפתרונות יגדל. על מנת לחדד תופעה זו, נסתכל על לוחות ריבועים ($n \times n$). נשאל מהו המימד של הלוח אם הכי הרבה פתרונות ומהו מספר פתרונות ללוח זה כאשר $n \in [1, 20]$? התוצאה המתקבלת היא שמספר הפתרונות הגדול ביותר הוא כאשר $n = 19$ ומספר הפתרונות הוא $65,536$. בנוסף $n = 19$ הוא הלוח היחיד ב $n \in [1, 20]$ המקבל את מספר פתרונות זה. לאומת זאת מספר הפתרונות השני בגודלו הוא 256 ומתקיים בעבור $n \in \{9, 16\}$.

איור 3.1 : פתרונות של משחק על לוחות שונים



שתי גישות למציאת פתרון שנציג בעבודה מבוססות על מידול הבעיה לשדה לינארי ולמערכת משוואות שפתרונה יוביל לפתרון המשחק. נתאר את השיטות אומנם, בתחילה הן נראות שונות אך, נציג את הקשר בינהן.

3.1 אלגוריתם שמבוסס על מטריצת שכנויות

כדי למדל את הבעיה על שדה לינארי נשתמש ביצוג גרפי, לחיצה על צומת משנה את מצב הצומת ומצב שכנותיה. נסמן את הצמתים ב i. נתאר את המשחק בצורה אלגברית:

1. כל צומת יכול להיות בשנים מצבים, את המצבים נסמן: $\{0,1\}$.
2. מצב של צומת i נסמן ב n_i.
3. בתחילת המשחק מצבו של כל צומת הוא 0.
4. משחק מסתים כאשר מצבם של צמתים הוא 1.

הערה 3.1: עבור משחקים על לוח נתאר את המשבצות ומצבם הנוכחים ב $a_{i,j}$. זאת מכיוון שמשחק על לוח ניתן לתאר בעזרת מטריצה.

הערה 3.2: פעולת לחיצה על לחצן משנה את מצב המנורה, שינוי מצב מנורה ניתן לתאר בעזרת חיבור בשדה $\mathbb{Z}_2$. נורה שמצבה הוא n_i לאחר לחיצה תעבור למצב $n_i + 1$.

למה 3.1: סדר הלחיצות אינו משנה את מצב הלוח.

הוכחה. לפי הערה 3.2 אפשר לתאר לחיצה כחיבור בשדה $\mathbb{Z}_2$, כלומר כל לחיצה משנה את מצבה ומצבן של המשבצות הסמוכות. לכן עבור סדרת לחיצות כלשהי מצב המשבצת תלוי אך ורק במספר השינויים שבוצעו עליה בסדרת הלחיצות ואינו תלוי בסדר שלהן. □

הערה 3.3: מספר זוגי של לחיצות על צומת יחידה אינו משנה את מצב הלוח.

הוכחה. כאשר מספר הלחיצות הוא זוגי מספר השינויים של משבצת ושל שכנותיה הוא זוגי כלומר, מצבן לא ישתנה. □

מסקנה 3.1: בעבור משבצת מסוימת שנלחצה m פעמים. מצב הלוח היה זהה אם למצב בו הינו לוחצים על אותה משבצת m מודולו 2 פעמים.

מסקנה 3.1 ממיחשה שכדי לתאר פתרון של משחק מספיק לתאר רק את המשבצות שנלחצו.

למה 3.2: כמות האפשרויות לחיצה על לוח $m \times n$ הוא $2^{m \cdot n}$

הוכחה. לפי הערה 3.1 כל לחצן יכול להיות בשתי מצבים והיות לפי למה 3.1 סדר הלחיצות לא משנה, לכן ללוח $m \times n$ מספר האפשרויות ללחיצה $2^{m \cdot n}$. □

כדי להבין כמה גדול $2^{m\cdot n}$ נסתכל על לוח 6×6. כמות האפשרויות ללחיצה גדולה מכמות המספרים שמציגים מספרים שלמים במחשב (4 בתים). המספר הגדול ביותר שאפשר להציג בעזרת 4 בתים הוא $2^{32} - 1$. המטרה של המחשה זו היא להדגיש כמה לא פרקטי לנסות לפתור בעזרת מעבר על כל האופציות.

נתאר את המשחק בצורה וקטורית (בעזרת הערה 3.2). ניקח לדוגמה משחק בגודל 2×2, נתאר את הלוח במצבו התחלתי כמטריצה

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נתאר לחיצה על משבצת $(1,1)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{a_{1,1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

כפי שתיארנו בהערה 3.2 אפשר לתאר שינוי מצב הנורה על ידי חיבור מצבה עם אחד.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

אם נציג כל מטריצה ע״י וקטור קואורדינטות בבסיס סטנדרטי של מרחב מטריצות אז, נוכל לרשום את השוויון הנ״ל גם כך :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

וקטור המתאר הלחיצה על משבצת מסוימת יקרא וקטור שינוי שלה.

הגדרה 3.1: תהי משחק על גרף בעל n צמתים הממוספרים מ 1 עד n, וקטור שינוי t_i של צומת i הוא :

- וקטור השייך $\mathbb{Z}_2{}^n$.
- וקטור שתוצאת החיבור עם וקטור לוח הוא וקטור לוח לאחר לחיצה על i.

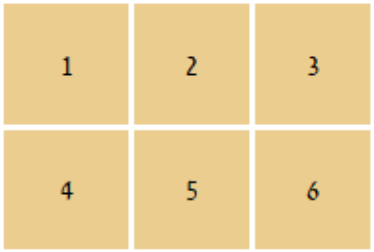
כדי לבנות וקטור שינו t_i :

- ערכי הוקטור שיקבלו ערך 1 היו באינדקסים של הצומת ושכנותיה
- שאר הערכי וקטור היו 0.

הגדרה 3.2: וקטור המתאר את מצב הלוח יקרא וקטור הלוח.

הערה 3.4: שיטת המספור בפרויקט היא מעבר על שורות ואז על עמודות כמו שמתואר באיור 3.2.

איור 3.2 : שיטת מספור משבצות על לוח



דוגמה 3.1: תהי גרף בעל 4 צמתים, כפי שמתואר באיור 3.3. צמתים שמצבם 1 יצבעו באדום, בכחול יצבעו צמתים שמצבם 0. נדגים צירוף לחיצות במשחק בעזרת וקטורי השינויים ווקטור הלוח.

באיור 3.3א מתואר גרף במצבו הנוכחי. נראה את שינוי הגרף לאחר לחיצה על הצמתים $1,3$.

וקטור שינוי של צומת 1:

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

נשרשר את וקטורי השינויי של שתי הלחיצות:

$$t_1 + t_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

אם נחבר וקטור זה עם וקטור הלוח שנסמן ב S_0 נקבל:

$$S_0 + t_1 + t_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

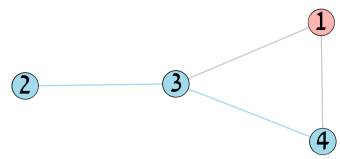
וקטור הלוח שמתקבל לאחר חיבור אכן תואם לתוצאה המצופה, כפי שמתואר באיור 3.3ב.

הערה 3.5: היות ווקטור שינוי שייך לשדה $\mathbb{Z}_2{}^n$, ניתן לתאר צירוף לחיצות במשחק בעזרת צירוף לינארי בשדה $\mathbb{Z}_2{}^n$. כפי שתיארנו במסקנה 3.1 סקלרים בצירוף לינארי זה הם 0 או 1.

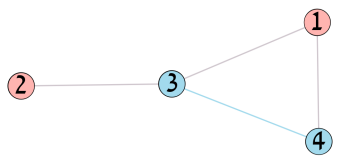
הערה 3.6: מכיוון שכל משחק מתחיל כאשר מצב כל הצתמים הינו 0, ניתן להשמיט את וקטור הלוח ההתחלתי.

איור 3.3 : דוגמה לתיאור וקטור שינוי במהלך משחק על גרף

(א) מצב של הגרף לפני לחיצה



(ב) מצב של הגרף לאחר הלחיצות



כאשר נסמן מצב הלוח ההתחלתי ב S_0 , מתקיים :

$$S_0 + \sum_{j=1}^{n} \vec{t}_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{t}_j x_j \tag{1}$$

בעקבות כך ניתן לתאר את בעיית המשחק בצורה הבאה :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{t}_j x_j = \vec{1} \tag{2}$$

כאשר $\vec{1}$ מתאר את וקטור הלוח כאשר המשחק פתור. n מתאר את מספר הצמתים בגרף. נשים לב שאם ידוע צירוף $x = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, x_n \end{bmatrix}$ שמקיים את המשוואה 2 אז הוא פתרון של משחק על גרף. כדי להגיע לפתרון על גרף נלחץ על הצמתים שמספורם שווה לאינדקסים j שמקיימים $x_j = 1$ בצירוף x.

מערכת משוואות שמתוארת בנוסחה 2 אפשר לתאר בעזרת מטריצה כמו שמתואר בנוסחה 3.

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{i,j} & t_{i,2} & \cdots & t_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

נשים לב שלמטריצה במשוואה 3, נסמנה ב A, ערכי המטריצה שמקיימים $A_{i,j} = 1$ הם באינדקסים i, j, בהם צמתים n_i, n_j שהם שכנים או זהים ($i = j$).

הגדרה 3.3: מטריצה שקבלנו במשוואה 3 תקראה מטריצת שכנויות של משחק.

הערה 3.7: היות ובגרף יחס שכנות הוא סימטרי מטריצה שכנות היא גם סימטרית.

דוגמה 3.2: מטריצה שכנות עבור גרף באיור 3.3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

הגדרה 3.4: וקטור פתרון של משחק הוא וקטור $\vec{x}$ שניראה במשוואה 3.

נזכיר שאם $\vec{x}$ וקטור פתרון של המערכת ו $x_i = 1$ אז כדי לפתור משחק צריך ללחוץ על לחצן i. בנוסף נציין שאתכן קימיים כמה פתרונות אפשריים.

הגדרה 3.5: שיטת פתרון הנעזרת ביצירת מטריצה שכנויות ומציאת וקטור פתרון תקראה אלגוריתם מבוסס מטריצת שכנויות.

שיטת הפתרון מבוססת מטריצת השכנויות אפשר לראות ב [2]. מרגע שהצלחנו לתאר את הבעיה, בצורה משוואות לינארית על שדה $\mathbb{Z}_2{}^n$, נוכל להיעזר בכלים של אלגברה לינארית כדי למצוא פתרון, כמו מציאת פתרון בעזרת דירוג או מציאת מטריצה פסאודו הפוכה וכולי.

הערה 3.8: עבור משחק על לוח $m \times n$ גודל מערכת המשוואות המתקבל משיטה מבוססת מטריצת שכנויות הוא $m \cdot n$ משתנים ומשוואות.

עבור לוח $[m \times n]$ מטריצת השכנות בגודל $[m \cdot n \times m \cdot n]$, האם קיימות שיטות לפתור את המשחק בעזרת מערכת המשוואת יותר מצומצמת?

3.2 אלגוריתם שמבוסס על מילוי עקבי של שורות

עד כה הצגנו בעבודה שיטת פתרון הנעזרת במטריצת שכנויות. נרצה להראות שיטה נוספת למציאת פתרון. שיטת הפתרון שנציג נובעת מהערה 3.8, נציג שיטה משופרת שמצמצמת את כמות המשתנים והמשוואות למציאת פתרון למשחק על לוח $m \times n$ ב $\min(m, n)$ משוואות ומשתנים. צמצום גודל מערכת משואות יכולה להוביל לחישוב מהיר יותר וניצול טוב יותר של המידע.

המאמר [1] מציג שיטה למציאת פתרון של משחק על לוח. בפרק זה נציג את הגישה שמתוארת ב [1] ונראה את הקשר בין השיטות. לגישה החדשה ניקרא "אלגוריתם שמבוסס על מילוי עקבי של שרות" או בקצרה מילוי עקבי.

נתאר אלגוריתם מילוי עקבי בשלבים, כל שלב נדגים על לוח 3×3 שמתואר באיור 3.4. הלוח 3×3 הנתון ממוספר באינדקסים כפי שתיארנו בהערה 3.4. אלגוריתם מילוי עקבי מתבסס על רעיון, שפתרון של המשחק הוא סדרה של לחיצות על משבצות מסוימות. נשייך לכל משבצת משתנה שיכול לקבל שני ערכים : 0 אם המשבצת אינה מופיעה בסדרת הלחיצות של הפתרון ו- 1 אם המשבצת כן מופיעה בסדרת הלחיצות של הפתרון. מראש לא ידוע לנו האם משבצות של השורה הראשונה יופיעו בסדרת הפתרון. נסמן ב x_1, x_2, x_3 משתנים של משבצות בשורה ראשונה כפי שמתואר באיור 3.4 . את שאר המשתנים נתאר בעזרת משתנים משורה הראשונה.

איור 3.4 : לוח 3×3 עם אינדקסים

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

נבחין בתופעה הבאה : על מנת שנורה 1 תהיה דולקת סכום המשתנה שלה ומשתנים של משבצות השכנות במודולו 2 חייב להיות 1. המשוואה המתקבלת עבור איור 3.4 :

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1 \tag{4}$$

לכן משתנה x_4, חייב להיות שווה ל $x_1 + x_2 + 1$ היות ומתקיים :

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = x_1 + x_2 + 1$$

על מנת שהנורה 2 תהיה דלוקה, סכום המשתנה שלה והמשתנים של משבצות שכנות במודולו 2 חייב להיות 1. לכן מתקבל שערכו של x_5 חייב להיות שווה ל $x_1 + x_2 + x_3 + 1$ היות ומתקיים :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 \Rightarrow x_5 = x_1 + x_2 + x_3 + 1$$

באופן דומה מחשבים את המשתנים של שאר המשבצות בשורה השנייה. על פי אותם שיקולים נחשב את המשתנים של משבצות בשורות הבאות.

נבחין שלאחר שמילאנו את כל הלוח כמו שמתואר באיור 3.5. אם היה ידוע איזה משבצות משורה הראשונה שייכים לסדרת הלחיצות של פתרון אז, פתרנו את המשחק.

הגדרה 3.6: המשוואה שתיארה את סכום משתנה של משבצת i ומשתנים של כל שכניה תקראה משוואת אילוצים על משבצת i.

הערה 3.9: תיאור כל משוואות האילוצים כמערכת משוואות לינארית, הינה גישה נוספת למדל את המשחק. פתרון של מערכת זו יוביל לפתרון המשחק. בנוסף נראה בהמשך שנקבל אותה מערכת משוואות כמו אלגוריתם מבוסס על מטריצת שכנויות שהוגדר ב 3.5.

משוואה 4 הינה משוואת האילוצים של משבצת 4. עבור משחק לוח $[m \times n]$ שהלחצנים בו ממוספרים לפי הערה 3.4 ניתן לנסח את משוואת אילוצים:

$$x^*_{i-n} + x^*_{i-1} + x^*_i + x^*_{i+1} + x^*_{i+n} = 1 \quad x^*_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in [1, n \cdot m] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

דוגמה 3.3: חישוב משתנה x_7 בעזרת משתנים משורה ראשונה. היות ו- x_7 משורה שלישית לכן משוואת האילצים שנעזר תהיה משורה שניה על משבצת שמעליו, שזאת משבצת 4 .

משוואת האילצים של משבצת:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_7 = 1$$

לכן

$$x_7 = 1 + x_1 + x_4 + x_5$$

היות ומילוי עקבי שורה אחרי שורה, ידוע תיאור משוואת של משתנים משורה השניה:

$$x_4 = 1 + x_1 + x_2$$
$$x_5 = 1 + x_1 + x_2 + x_3$$

נציב ערכים אילו

$$x_7 = 1 + x_1 + (1 + x_1 + x_2) + (1 + x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_7 = 1 + x_1 + x_3$$

איור 3.5 : תרגום כל הלחצנים לפי המשתנים של השורה הראשונה

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 + x_1 + x_2 & 1 + x_1 + x_2 + x_3 & 1 + x_2 + x_3 \\ 1 + x_1 + x_3 & 0 & 1 + x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

על מנת ליצור מערכת משוואות שתפתור את המשחק מחבר המאמר [1] מוסיף לשורה האחרונה עוד שורה, שורה דמיונית ומחשבים משבצות בשורה זה לפי אותם שיקולים. משום שזאת שורה דמיונית, בעצם אנחנו לא מדליקים אף נורה בה ערכי המשתנים של משבצות שלה חייב להיות 0.

איור 3.6 : לוח 3×3 מלאה כולל שורה וירטואלית

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2 & 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2+x_3 \\ 1+x_1+x_3 & 0 & 1+x_1+x_3 \\ \hline 1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & 1+x_1+x_2 \end{bmatrix}$$

כך נוצרת מערכת משוואות עם n משוואות ו- n :משתנים

איור 3.7 : מערכת המשוואות המתקבלת משיטה פתרון לפי שורה העליונה בלוח 3×3

$$\begin{cases} 1+x_1+x_2=0 \\ x_0+x_1+x_2=0 \\ 1+x_0+x_1=0 \end{cases}$$

הגדרה 3.7: שיטה פתרון הנעזרת ביצרת מערכת משוואת משורה הדימיונת ומציאת וקטור פתרון בעזרת אותה מערכת תקרא אלגוריתם שמבוסס על מילוי עקבי של שורות.

את השיטה הדגמנו על לוח 3×3, אפשר היה להדגים על כל לוח אחר ושיטה עדיין אתה עובד. בנוסף, שיטה מילוי עקבי אינה חייבת להיות מבוססת על מילוי שורות עלה אפשר היה לבנות את אותה שיטה גם על עמודות. בגלל שאפשר להפעיל את השיטה על שורות או עמודות כדי לקבל מערכת משוואות קטנה ביותר נבחר את כיוון עם פחות משבצות. המאמר בשלב זה נראה את הקשר בין שתי השיטות.

משפט 3.1: מטריצה המיצג של מערכת המשוואות האילוצים היא מטריצת שכנויות.

נזכיר שהגדרנו מטריצת שכנויות בהגדרה 3.3. משוואות האילוצים הן בסיס כל האלגוריתם מילוי עקבי מכיוון שהתקדמות בשורות מבוססת על המשוואות עלו. אם נפרוס את משוואת האילוצים נקבל גם מערכת משוואת שפותרת את המשחק כפי הזכרנו בהערה 3.9 אבל כמות המשוואות הינה n^2. נבחין שאם נרשום את מערכת משוואות בסדר מיספור המשבצות כפי שמותאר באיור 3.4 אז, המטריצה המייצג מערכת משוואות זה תהיה מטריצה שכנויות.

דוגמה 3.4: נבנה את מערכת המשוואות על לוח 2×2 של משוואות האילצים לפי סדר המיספור שקבענו:

איור 3.8: לוח 2×2

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

וקטור השינויים:

$$t_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

לכן מטריצת שכנויות נראת כך:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

אם נסדר את המשוואות במערכת המשוואות לפי סדר האינדקסים של המשבצות נקבל את המערכת מהצורה

$$x_0 + x_1 + x_2 = 1$$
$$x_0 + x_1 + x_3 = 1$$
$$x_0 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

אפשר לראות שמטריצה המייצגת של המערכת זהה למטריצת שכנויות.

נרצה לתת הסבר נוסף לשורה דימיונית ואיך מערכת המשוואות מצתמצמת ביחס למטריצה שכנויות. הסבר לתופעות ניתן בעזרת תיאור אלגוריתם מילוי עקבי במקום על טבלה נשתמש במטריצת שכנויות ופעולות דירוג. נראה את הפעולות דירוג על אותה דוגמה על לוח 3×3. באופן שכזה נראה שאלגוריתם מילוי עקבי הוא דירג מתוחכם של מטריצה מורחבת $[M|\vec{1}]$.

כדי לחשב את x_4 באיור 3.4 השתמשנו במשוואת האילוצים של משבצת 1, אשר מתוארת במטריצה בשורה ראשונה.

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + 1$$

איור 3.9 : מערכת משוואות מורחבת של משחק על לוח 3×3

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

נבחין שלושת השורות הראשונות של המטריצה 3.9 מאפשרות תיאור פשוט של המשתנים x_4, x_5, x_6, בגלל ששורות עלו ניתן לבטא כמשוואות האילוצים של לחצנים $1, 2, 3$ אם ננסה לתאר את משתנה x_7 באותה שיטה נסתכל על שורה ה 4 במטריצה ונראה שהיא תלויה ב x_4, x_5 היות ואמרנו שאפשר בקלות לתאר את משתנים עלו בעזרת שורות $1, 2$ במטריצה לכן נעזר בשורות עלו כדי לתאר את x_7, אופן שימוש בשורות עלו תהיה בעזרת הפעלות השורה הבאות :

$$r_4 \leftarrow r_4 + r_1$$
$$r_4 \leftarrow r_4 + r_2$$

שני פעולות שורות הללו הם שקולות לפעולה אלגברית הבאה :

$$(x_1 + x_4 + x_5 + x_7 + 1) + (x_1 + x_2 + x_4 + 1) = 0 \Rightarrow x_2 + x_5 + x_7 = 0$$
$$(x_2 + x_5 + x_7) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_7 + 1 = 0$$

ועכשיו קיבלנו תיאור של x_7 בעזרת המשתנים של שורה שמעליו בטבלה. בכך תרגמנו את אלגוריתם מילוי עקבי בעזרת פעולת שורות על מטריצה מורחבת. אחרי שנעבור על כל השורות בצורה שכזה נקבל את המטריצה 3.10.

נשים לב שבמטריצה 3.10 שלושת השורות התחתונות מתוארת אך ורק על ידי המשתנים x_1, x_2, x_3, אם נתאר את שורות עלו כמערכת משוואות נקבל את אותה מערכת משוואת של שאלגוריתם מילוי עקבי תיאר על לוח 3×3 את מערכת המשוואות הזה תיארנו במערכת 3.7.

אחת התוצאות שקיבלנו בזה שתיארנו את אלגוריתם שמבוסס על מילוי עקבי של שרות בעזרת פעולת שורות היא, שקבלנו הסבר לשורה דמיוניות. משבצות בשורה הדמיונית הן השורות במטריצה שלאחר פעולת שורות

איור 3.10 : המטריצה לאחר פעולת שורות על כל שורות

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

מופיע אך ורק במשתנים של שורה הראשונה בלבד. אם נסמן ב n את מספר המשבצות בשורה אז, היות ונקבל n שורות במטריצה של משבצות של משבצות בשורה הדמיונית, ולשורות במטריצה עלו יש לכל יותר n נעלמים של שורה העליונה לכן ניתן לפתור את הבעיה בעזרת שורות עלו בלבד.

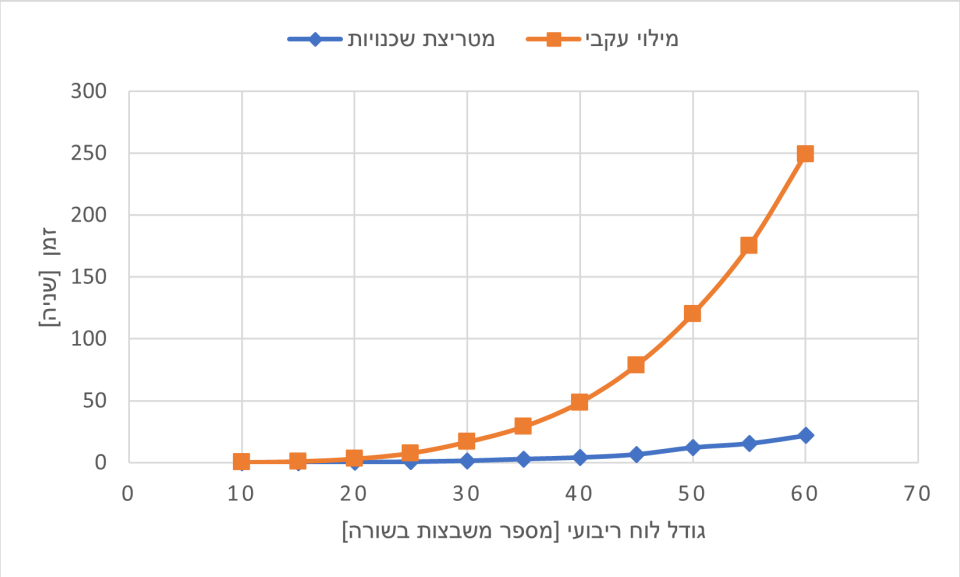
3.3 השוואה בין שתי השיטות למציאת פתרון

לפי חישוב סיבוכיות לדרג מטריצה כללית בגודל $n^2 \times n^2$ זה $O(n^2 \cdot n^4) = O(n^6)$.

דירוג בעזרת שיטה הספרדית אומרת שעל כל עמודה וקטור עמודה של מטריצת שכנויות יש לכל יותר 5 ערכים ששווים 1. כל החוכמה בדירוג לפי אלגוריתם מילוי עקבי הוא שפעולות השורות אינן פוגעות בשורות שנדרג בהמשך והמשתנים היחידים שמשתנים לאחר הפעולה הם המשתנים בשורה העליונה. לכן דירוג שורה היה חיבור של עד כ 5 שורות לכן הסיבוכיות $O(n^2 \cdot n^2) = O(n^4)$. לדרג את n משתנים הנותרים הוא בסיבוכיות $O(n \cdot n^2) = O(n^3)$.

ננסה להראות את סיבוכיות בפועל על ידי חישוב זמני חישוב. באיור 3.11 אפשר לראות ביצועים של שני האלגוריתמים ציר ה x גודל שורה של לוח המלבני. את שני האלגוריתמים הרצנו על לוחות בגדלים מ 10 עד 60 משבצות בשורה. ציר ה y זמן שלקח בשניות לפי התוצאות של איור 3.11 ניראה שגישה הספרדית שבתאוריה יותר אופטימליות לוקחת יותר זמן. אחת הסיבות לקח שפונקציה שפותרת מערכת משוואות הינה פונקציה ספרייה וכנראה יש מימוש אופטימלי לפתרון הבעיה שאפילו שאלגוריתם מילוי עקבי מקטין את כמות המשתנים היא אינה יכולה להתחרות במימוש אופטימלי שמממשת ספרייה.

איור 3.11 : גרף מתאר ביצועים על לוח ריבועי גודל שורה מול זמן



3.4 דיון לגבי משחק על גרף

כאשר תיארנו את המשחק על גרף אתכן והסיבות לקח היו :

1. ככול שמבנה כללי יותר תאוריה שאתה מפתח מתאימה ליותר בעיות.
2. קיימת תאוריה רחבה שפותחה על גרפים ואתכן שנעזר בה.
3. מבליט את מהות הבעיה והגדרה הבסיסית ביותר של המשחק.

בפועל כשהצגנו את אלגוריתמים לפתרון המשחק התגלתה התמונה המלאה. שני האלגוריתמים שתיארנו מתארים את המשחק כגרף היות ושני האלגוריתמים בנויים על מטריצת השכנויות. קשר זה מדגיש ומראה שלפעמים רק תיאור מהות הבעיה מספיק כדי למצוא לבעיה פתרון.

4 קיום פתרון ומספר הפתרונות עבור משחק על גרף

עד כה הצגנו שיטות למציאת פתרון, שיטות עלו האירו את העובדה ששאלת קיום הפתרון למשחק על גרף שקולה לשאלת קיום הפתרון למערכת משוואות לינאריות. בפרק זה נרצה להוכיח קיום פתרון למשחק לכל גרף. העובדה שקיים פתרון לכל כל גרף אינה מובנת מעליה. אחד המקומות ששאלה זה נשאלה היא בספר [4], בעבודתנו נראה הוכחה קצת שונה בעזרת הכלים שפיתחנו. אומנם הוכחה קיום פתרון הופיע לראשונה במאמר [3]. עובדה מעניינת נוספת שהוצגע במאמר היא, שיש רק הוכחה שמבוססת על אלגברה לינארית לשאלת קיום פתרון.

4.1 הוכחת קיום פתרון על גרף

הגדרה 4.1: תהי $\mathbb{S}$ קבוצה, פעולה בינארית על $\mathbb{S}$ היא פונקציה $\mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ המתאימה לכל זוג סדור. פעולה בינארית עבור הזוג (s_1, s_2) תסומן $\langle s_1, s_2 \rangle$.

הגדרה 4.2: מכפלה פנימית היא פעולה בינארית שמוגדרת לכל זוג וקטורים במרחב וקטורי $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ומעתיקה אותם ל $\mathbb{S}$. תהי $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, לכל $x, y, z \in \mathbb{S}^n$ ו $\alpha \in \mathbb{S}$, פעולה בינארית תקראה מכפלה פנימית אם היא מקיימת 4 אקסיומות הבאות:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha\, x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. (א) $\langle x, x \rangle \geq 0$

   (ב) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$

הגדרה 4.3: לכל שני וקטורים $x, y \in \mathbb{Z}_2{}^n$ נגדיר פעולה הבאה:

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n \tag{6}$$

לפעולה זה בין שני וקטורים ב $\mathbb{Z}_2{}^n$ ניקרא מכפלה סקלרית.

הערה 4.1: פעולה שהגדרנו בהגדרה 4.3 נקראת מכפלה סקלרית למרות שהיא מקיימת רק 3 מתוך 4 תכונות של מכפלה סקלרית ב - R^n. תכונה $< \vec{u}, \vec{u} >= 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ לא מתקיימת.

דוגמה 4.1: המחשה להערה 4.1:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 0$$

הערה 4.2: וקטורים $x, y \in \mathbb{Z}_2{}^n$ יקראו מאונכים אחד לשני נסמן זאת $x \perp y$ אם המכפלה הסקלרית שהלם שווה ל 0 כלומר, $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

משפט 4.1: תהי מטריצה $A \in \mathbb{Z}_2{}^{m \times n}$ אז $\mathrm{Col}A^T \perp \mathrm{Nul}A$ ו $\mathrm{Col}A \perp \mathrm{Nul}A^T$

הוכחה. תהי מטריצה $A \in \mathbb{Z}_2^{m \times n}$ ניקח $\vec{x} \in \mathrm{Nul}A$. לכן $A\vec{x} = \vec{0}$. אז,

$$\vec{x} \perp \mathrm{Row}A = \mathrm{Col}A^T$$

רצוי לציין שעבור מטריצות $A \in Z_2{}^{m\times n}$ מאותם שיקולים אותה הוכחה נכונה, רק עבור מכפלה הסקלרית שהגדרנו בהגדרה 4.3. $\square$

נרצה לחדד תופעה שקוראת בשדה וקטורי $\mathbb{Z}_2{}^n$ עם המכפלה הסקלרית שהגדרנו. עבור השדה הוקטורי $\mathbb{R}^n$ לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים $\mathrm{Col}A \cap \mathrm{Nul}A^T = \{\vec{0}\}$. טענה זה אינה נכונה בשדה $\mathbb{Z}_2{}^n$.

משפט 4.2: לכל משחק על גרף קיים פתרון.

הוכחה. כשפיתחנו את שיטת פתרון בעזרת מטריצת השכנויות שהגדרנו 3.5, הצלחנו לתאר את המשחק בעזרת מערכת משוואות. המטריצה שמתארת את המערכת קראנו לה מטריצה שכנויות נסמן ב $A \in Z_2{}^{n\times n}$. נציין כמה עבודות על מטריצת השכנויות:

1. מטריצה סימטרית לפי 3.7
2. A המטריצה הינה ריבועית.
3. האיברים על האלכסון מטריצה A ערכם שווה ל 1.

כדי להראות שלמשחק יש פתרון צריך להראות שקיים פתרון למערכת:

$$A\vec{x} = \vec{1}$$

במקרה ש A מטריצה הפיכה אז קיים פתרון יחיד. עבור המקרה שמטריצה אינה הפיכה כלומר $\mathrm{Nul}A \neq \{\vec{0}\}$ ניקח $\vec{x} \in \mathrm{Nul}A$ מהגדרה מתקיים $A\vec{x} = \vec{0}$ לכן מתקיים:

$$\vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x}^T\vec{0} = 0$$

נסמן $\vec{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A\vec{x} = a_{1,1}x_1^2 + 2(a_{1,2}+a_{2,1})x_1x_2 + \cdots + 2(a_{1,n}+a_{n,1})x_1x_n + \\ + a_{2,2}x_2^2 + 2(a_{2,3}+a_{3,2})x_2x_3 + \cdots + 2(a_{2,n}+a_{n,2})x_2x_n + \cdots\end{aligned} \tag{7}$$

היות ומטריצה סימטריות $a_{i,j} = a_{j,i}$ לכן מתקבל:

$$a_{i,j} - a_{j,i} = a_{i,j} + a_{j,i} = 1$$

נזכיר כי תוצאות של פעולת חיבור וחיסור מודלו 2 זהות. לכן את המשוואה 7 אפשר לפשט:

$$\vec{x}^T A\vec{x} = a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{n,n}x_n^2$$

הבחנה נוספת לא משנה אם הערך 0 או 1 מתקיים השוויון, $x^2 = x$ לכן פישוט נוסף למשוואה 7:

$$\vec{x}^T A\vec{x} = a_{1,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{n,n}x_n$$

לכן קיבלנו $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ ומתקיים:

$$a_{1,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{n,n}x_n = 0$$

כלומר $\vec{1} \perp \vec{x}$ כאשר $x \in \mathrm{Nul}A$ לפי משפט 4.1 מתקבל $\vec{1} \in \mathrm{Col}A^T$ היות ומטריצה סימטרית $A^T = A$ לכן $\vec{1} \in \mathrm{Col}A$ והוכחנו שלמערכת $A\vec{x} = \vec{1}$ יש פתרון. □

הוכחת קיום הפתרון עבור המשחק כפי שהגדרנו על גרף הושגה, מסקנה נאיבית שניתן אולי לחשוב היא, שלכל מצב התחלתי אפשרי היה ניתן לפתור את המשחק. בחלק זה של הפרק ננסה לחדד ולהעביר.

הגדרה 4.4: משחק אחר שאפשר להציע הוא משחק האורות כללי יותר מוגדר כך: לוח הבקרה נשאר זהה למשחק המקורי כלומר, שינוי נורות לאחר לחיצה מתנהג נשאר כפי שהוגדר במשחק המקורי. הבדל בין משחק החדש למקורי מצב התחלתי שחלק מנורות דולקות וחלק כבויות ורוצים להגיע למצב סופי שגם בו חלק מנורות דולקות וחלק כבויות.

עבור המשחק שהגדרנו 4.4 אותו קורא נאיבי יכול להניח שגם עבור משחק שכזה תמיד קיים פתרון. אפשר לבנות דוגמה למשחק על לוח, שאין לו פתרון. דוגמה אפשרית למקרה שכזה היא לקחת משחק על לוח 2×1 בו מצב התחלתי הוא שהנורה השמאלית ביותר דלוקה ונרצה לעבור למצב הסופי בו כל הנורות דולקות. נרצה להראות שבאמת המשחק אינו פתיר וזה קל כי כמות הלוחות השונים שניתן ליצר מצומצמם. אפשר לתאר את כל המצבים האפשריים לפי כל צירופים לא סדורים האפשריים של לחיצות אפשריות. אם נמספר את המשבצות לפי שיטת המספור שציינו בהערה 3.4, אז אוסף כל צירופים הלא סדורים של אוסף לחיצות אפשריים הם:

$$(), (1), (2), (1,2)$$

איור 4.1: מצבי הלוחות לאחר לחיצה של צירוף

(א) עבור צירוף $()$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ב) עבור צירוף (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ג) עבור צירוף (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ד) עבור צירוף $(1,2)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

כדי לבדוק אם קיים פתרון למשחק הכללי שהגדרנו בהגדרה 4.4 נוכל להיעזר בהוכחה 4.2.

משפט 4.3: למשחק קיים פתרון אם ורק אם וקטור הפרש בין מצב סופי ומצב ההתחלתי שייך למרחב העמודות של מטריצת שכנויות.

הוכחה. נגדיר קודם את המשחק החדש אלגברית. לפי משוואה 1 אפשר לנסח אלגברית את המשחק כך. תהי A מטריצת השכנויות $\vec{S_0}$ מצב התחלתי של המשחק ו $\vec{S_e}$ מצב הסופי של המשחק, נחפש צירוף לא סדור של לחיצות $\vec{x}$ כך שמתקיים:

$$\vec{S_0} + A\vec{x} = \vec{S_e}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$A\vec{x} = \vec{S_e} - \vec{S_0}$$

הוכחה של משפט 4.2 בנויה על עובדה שצריך להוכיך שווקטור $\vec{1}$ שייך ל $\mathrm{Col}A$. במקרה של המשחק החדש כדי להראות שקיים פתרון למשחק מספיק להוכיח ש $\vec{S_e} - \vec{S_0}$ שייך ל $\mathrm{Col}A$. □

הערה 4.3: כדי לבדוק שוקטור $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ שייך ל $\mathrm{Nul}A$ של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ היא לוודא שמתקיים:

$$A\vec{v} = \vec{0}$$

הערה 4.4: במרחב $\mathbb{Z}_2{}^n$ אתכן וקיים וקטור $z \in \mathbb{Z}_2{}^n$ ומטריצה $A \in Z_2^{n\times n}$ כך שמתקיים $z \in \mathrm{Col}A$ ו $z \in \mathrm{Nul}A^T$

הערה 4.5: בגלל הערה 4.4 לא ניתן לומר שוקטורים $z \in \mathbb{Z}_2{}^n$ המקיים $z \in \mathrm{Col}A$ אז הוא לא שייך ל $\mathrm{Nul}A$. לו היה ניתן לומר זאת היה קל לבדוק למשחק לפי הכללים החדשים עם קיים למשחק זה פיתרון על ידי בדיקה $\vec{S_e} - \vec{S_0} \notin \mathrm{Nul}A$.

משפט 4.4: תהי משחק לפי כללים החדשים $\vec{S_e}$ מצב הסופי, $\vec{S_0}$ התחלתי של משחק ו A מטריצת שכנויות. אם $\vec{S_e} - \vec{S_0} \notin \mathrm{Nul}A$ אז למשחק קיים פתרון.

הוכחה. אם $\vec{S_e} - \vec{S_0} \notin \mathrm{Nul}A$ אז בהכרח

$$\vec{S_e} - \vec{S_0} \in \mathrm{Col}A^T = \mathrm{Col}A$$

לפי משפט 4.3 למשחק קיים פתרון. □

משפט 4.4 יכול להקל בדיקה אם משחק פתיר.

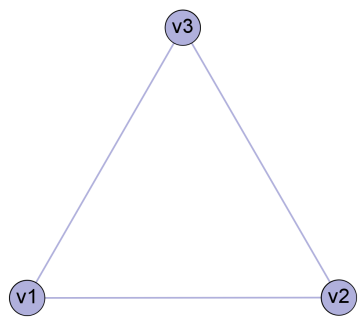
4.2 מספר הפתרונות עבור כל גרף

הוכחנו שלכל משחק על גרף שמתחל עם כל לחצנים במצב 0 יש פתרון ניזכר שסדר לחיצות אינו משנה את התוצאה על הלוח לכן אם נילחץ על הלחצנים בסדר כלשהו לפי פתרון נקבל גרף כולו דלוק.

השאלה שנשאל בפרק זה מה אפשר לומר על מספר פתרונות מפיתוח שעשינו. נציין קודם שניקרא לשני פתרונות שונים אם קיים לפחות לחצן אחד שמבדיל בין הפתרונות כלומר קיים לחצן ששייך לפתרון ראשון ולא שייך לפתרון שני כפי שציינו קודם סדר לחיצות לא משנה את הפתרון. לכן פתרון הינו קבוצה של לחצנים. בנוסף נזכר לפי הערה 3.1 מספר אי זוגי של לחיצות נחשב ללחיצה לכן מספר הלחיצות על אותו לחצן לא משנה אלה רק זוגיות של מספר לחיצות לכן לכל לחצן יש רק שני מצבים שיכול להיות לחוץ או לא. כרגע נראה שקיים כמה פתרונות לדוגמא איור 4.2 המתאר משחק על גרף בו הצמתים כבויים. היות וגרף הינו קליקה לכן לחיצה בודדת על אחד הצמתים תדליק את כל הלחצנים.

קבלנו $G = \{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\}\}$ היא קבוצת של פתרונות. כלומר כבר הראינו שיש מקרים בהם יש יותר מפתרון אחד.

איור 4.2 : משחק על גרף



שאלה טביעת שנובעת שנשאלת היא כמה פתרונות יש למשחק מסוים. כדי לענות על שאלה נצטרך להציג כמה מושגים מאלגברה לינארית. בשיטת דירוג של גאוס אם ניזכר בקצרה בשיטה , אנחנו עוברים שורה שורה ומנסים בעזרת פעולות של שורות ליצור עמודות בהם מופיע איבר בודד ששונה מאפס.

הגדרה 4.5: איבר מוביל בשורה הוא האביר הראשון בשורה ששונה מאפס לאחר דירוג.

הגדרה 4.6: נעלמים שאברהם מובילים אחרי דירוג אקראו נעלמים מובילים.

הגדרה 4.7: במטריצה מדורגת בשיטת גאוס עבור עמודות שאין בהם איבר מוביל תיקרא עמודה חופשית.

הגדרה 4.8: נעלמים שעמודה שלהם חופשית אחרי דירוג יקראו נעלמים חופשים.

הגדרה 4.9: מספר נעלמים חופשיים במטריצה נקרא דרגת החופש.

ניתן דוגמה קטנה שתסכם את המושגים שהצגנו, ניקח מטריצה המדורגת הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

בדוגמה צבענו בכחול את האיברים המובילים ובסגול את עמודות החופשיות. עבור הדוגמה דרגת החופש היא 3

הערה 4.6: דרך קלה לחשב את דרגת החופש $F(A)$ של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ כשידוע שדרגה של מטריצה A הוא $\text{rank}(A)$ בעזרת הנוסחה הבאה:

$$F(A) = n - rank(A)$$

לאחר שהגדרנו את מושג דרגת החופש נוכל לנסח את המפשט המרכזי של הפרק.

משפט 4.5: מספר הפתרונות של משחק שווה ל 2^k כאשר k שווה לדרגת החופש של מטריצה A של פתרון הסטנדרטי

היות לכל משחק ניתן להגיר מטריצת שכנויות של משחק שהגדרנו ב 3.3 ופתרונות של משחק וקטורים X של מערכת $A\vec{x} = \vec{1}$ כאשר A מטריצת שכנויות. ידוע שקיים פתרון למשחק ואם הוא משחק שמתחיל שמצב כל הנורות הוא 0 אז יש משפט 4.2. שמוכיח שקיים פתרון.

היות ומניחים שיש כמה פתרונות אפשר לתאר את כל פתרונות כ $x = x_n + x_0$ כאשר $x_0 \ , \ x_n \in \text{Nul}(A)$ פתרון פרטי שידוע שקיים ו x כל פתרונות הכללים.

לכן מספר פתרונות כללים שווה למספר פתרונות במרחב האפס. ידוע שמספר פתרונות במרחב האפס תלוי לדרגת החופש ולכן מספר הווקטורים שפורשים את מרחב האפס שווה לדרגת החופש שנסמן ב k. כמות הווקטורים במרחב זה שווה לכל וקטורים שניתן ליצור בצירוף לינארי

$$x = a_1x_1 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k$$

כאשר הערכים של $a_i \in Z_2$ לכן לכל מקדם יכול להיות 2 ערכים, לכן כל הקונבנציות האפשריות 2^k ששווה לכמות הווקטורים במרחב האפס וכמות הפתרונות השונים של המשחק.

הבחנה נוספת ומעניינת שנרצה לציין היא בנושא חסם עליון לכמות הפתרונות. חסם עליון טריוויאלי לכמות המקסימלית של פתרונות היא 2^n פתרונות כאשר n שווה למספר הלחצנים כלומר לא יכול להיות יותר פתרונות מאשר כמות הלחיצות השונות האפשריות במשחק.

הערה 4.7: עבור משחק לוח מלבני בגודל $m \times n$ קיים לכל יותר 2^k כאשר $k = \min\{m, n\}$ פתרונות שונים

הערה זה נכונה לפי גישה פתרון הספרדית שהגדרנו 3.7 ניתן לתרגם את משחק ל k משוואות ש k יכול להיות מספר שורות או עמודות לכן ניקח את המספר הקטן יותר.

לסיכום נרצה להציג טבלה של מספר הפתרונות כתלות לממדי הלוח. את הטבלה אפשר לראות באיור 4.3 כאשר, השורות ועמודות בטבלה מייצגות את ממדי הלוח בהתאמה.

איור 4.3 : טבלה מתארת מספר פתרונות בלוחות $m \times n$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	1	1	2	1	1	2	1
2	2	1	4	1	2	1	4	1	2
3	1	4	1	1	8	1	1	4	1
4	1	1	1	16	1	1	1	1	16
5	2	2	8	1	4	1	16	2	2
6	1	1	1	1	1	1	1	64	1
7	1	4	1	1	16	1	1	4	1
8	2	1	4	1	2	64	4	1	2
9	1	2	1	16	2	1	1	2	256

5 פתרון אופטימלי עבור לוחות מלבניים

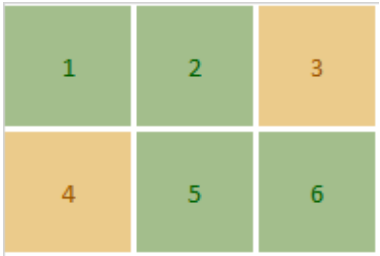
בפרק זה נציג סוג מסוים של פתרונות, סוג זה אקרה פתרון אופטימלי. סוג זה של פתרון מקל רבות על המשחק כיוון שמצמצם את כמות הלחיצות האפשריות בכל מצב במשחק.

הגדרה 5.1: פתרון אופטימלי של משחק הינו פתרון בו שינוי מצב כל הנורות היה יחיד. כלומר השחקן פתר את המשחק כאשר כל נורה עברו ממצב התחלתי למצב הסופי פעם אחת בלבד

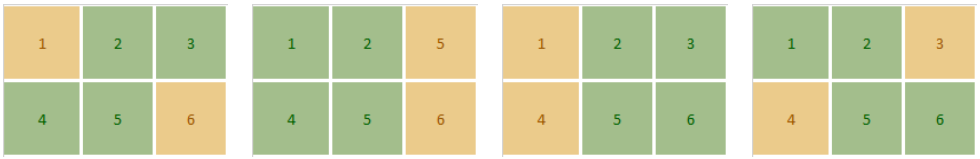
באיור 5.1 ניתן דוגמא לפתרון מינמלי בלוח 2×3. כשלוחצים על לחצנים $3,4$ על לוח כל נורות נדלקות ואף אחת מהם לא נכבה באף שלב של לחיצה.

נרצה לחדד ולהדגיש עד כמה קל למצוא פתרונות אופטימלי. אם ניקח לוח 2×3 כפי שמתואר באיור 5.1, ונתבונן במספר כל הפתרונות שיש ללוח זה כפי שמתואר בטבלה 4.3 ניראה שיש 4 פתרונות. קיימים שני פתרונות אופטימליים ושני פתרונות לא אופטימליים, ופה נשאלת השאלה כמה פתרונות בהתבוננות חפזה הקרואה רואה. כנראה ששני הפתרונות האופטימליים מיידית נמצאו. כנראה גם שכדי למצוא פתרונות הנותרים נצטרך לקחת דף ועט ולחפש אותם גם עבור לוח בממד מצומצם שכזה. את כל ארבעת הפתרונות נציג באיור 5.2.

איור 5.1 : פתרון מינמלי של משחק



איור 5.2 : משחק על גרף לדוגמה



השאלה שנפתור בפרק זה לאיזה לוחות קיים פתרון מינמלי כאשר מצב התחלתי הוא שכל הנורות במצב 0.

5.1 הוכחת אי קיום לפתרון אופטימלי על לוחות ששני הממדים גדולים מ 4×4

לפני שבאמת נוכיח את הטענה נציין את משמעות ששני הממדים גדולים מ 4×4.

משפט 5.1: קיים פתרון אופטימלי למשחק $2 \times m$ כאשר m הוא אי זוגי.

הוכחה. נוכיח בעזרת אינדוקציה. נתחיל על לוח 2×1 כל לחיצה בודדת על משבצת מובילה לפתרון אופטימלי המשחק.

נניח וקיים לוח $2 \times m$ בו מתקיים פתרון אופטימלי כאשר m אי זוגי. היות וללוח קיים פתרון אופטימלי לכן מהגדרה הנורות השתנו רק פעם אחת לכן עבור משבצות בעמודה האחרונה הן בהכרח שונו על ידי אותה לחיצה. לחיצה זה בהכרח על משבצת בעמודה האחרונה. נניח בלי הגבלת הכלליות שלחצן נלחץ בשורה 1. עובר לוח $2 \times (m+2)$ נבצע את אותם מהלכים כמו שביצענו עבור לוח $2 \times m$ ונשים לב שנורות שנותרו במצבם התחלתי הן :

$$\{n_{1,m+2}, n_{2,m+1}, n_{2,m+2}\}$$

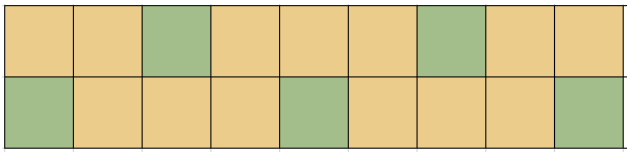
נשים לב לחיצה על לחצן $n_{2,m+1}$ יוביל לפתרון על הלוח. □

הערה 5.1: טענה 5.1 אינה בהכרח נכונה עבור לוח m זוגי. היות ולפי הוכחה בסיס האינדקוציה עבור m זוגי אינו מתקיים. עבור לוח 2 כל לחיצה בודדת תוביל למשבצת בודדת שתשאר במצבה התחלתי במשחק לכן, כל לחיצה נוספת תשנה את שאר הנורות ופתרון שאתקבל אינו אופטימלי.

לכן לא ניתן להוכיח שקיים פתרון אופטימלי ללוחות עלו עם m זוגי בדרך זה.

5.3.

איור 5.3 : פתרון ללוח 2×9



הסיבה שקיים פתרון אופטימלי לכל לוח $2 \times m$ שפשוט שיטת הפתרון שהצגנו ניתן להרחבה לכל m. ניקח לדוגמה את איור 5.3 אם נוסיף שתי עמודות ימינה אז לחיצה על שורה העליונה בעמודה הימנית ביותר תפתור את המשחק.

כדי להוכיח טענת הפרק נעזר בלוח שמתואר כך, ללוח יש משבצת שהיא ראשית הצירים נסמן אותה כ $a_{1,1}$. בלוח זה הצירים ממשיכים אינסוף ימינה ולמעלה. נתאר את המשחק הנתון בעזרת מטריצה אינסופית.

משפט 5.2: עבור לוח אינסופי אין אף פתרון אופטימלי בו המשבצת בראשית הצירים נלחצה

הוכחה. לאחר לחיצה על $a_{1,1}$ מתקבל הלוח הבאה :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כדי להדליק את הנורה $a_{2,2}$ נצטרך ללחוץ $a_{2,3}$ או $a_{3,2}$. אם נילחץ על $a_{2,3}$ נקבל את הלוח הבאה :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

נשים לב כי הגענו למבוי סתום כי ניתן להדליק את $a_{3,2}$ רק על ידי לחיצה על $a_{4,2}$ ואז לא היה ניתן להדליק את $a_{3,1}$. ניתוח דומה אפשר לתאר עבור לחיצה על $a_{3,2}$. □

לפי טענה 5.2 אם ברצוננו למצוא למשחק האינסופי שהגדרנו פתרון מינמלי לא נוכל להדליק את נורה $a_{1,1}$ על ידי לחיצה עליו. לכן על מנת להדליק את $a_{1,1}$ נלחץ על $a_{1,2}$.

משפט 5.3: אין אף פתרון אופטימלי בו נלחצה משבצת $a_{1,2}$

הוכחה. כדומה להוכחה טענה 5.2 נגיע למצב סתום. אם נסתכל על מצב הלוח לאחר לחיצה על משבצת $a_{1,2}$ ניראה כי יש סידרת לחיצות מאולצת כדי להדליק נורות מסוימות.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כדי להדליק את הנורות $a_{2,1}$ נהיה חייבים ללחוץ על $a_{3,1}$. כדי להדליק את הנורות $a_{2,3}$ נהיה חייבים ללחוץ על $a_{2,4}$. כדי להדליק את הנורות $a_{3,3}$ נהיה חייבים ללחוץ על $a_{4,3}$. כדי להדליק את הנורות $a_{5,2}$ נהיה חייבים ללחוץ על $a_{6,2}$. כדי להדגיש את הכפתורים שנלחצו נסמן אותם $*$ ונקבל את הלוח הבאה:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

נשים לב ששוב הגענו למבוי סתום. □

אפשר להחליף בין הצירים ולקבל בעזרת אותה הוכחה למה לא קיים פתרון בו נלחצת משבצת $a_{2,1}$. היות ועברנו על כל האפשרויות שאפשר לנסות להדליק את $a_{1,1}$ והראינו שבכל מצב מגיעים למבוי סתום.

מסקנה 5.1: למשחק אינסופי שכזה לא קיים פתרון אופטימלי.

מסקנה 5.2: במשחק על לוח 4×4 קיים פתרון מינימלי. נתבונן על לוח 8. ניתן לראות שקיים תת פתרון עבור לוח 4×4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

מסקנה 5.3: למשחק $n \times 4$ לא קיים פתרון אופטימלי כאשר $n > 4$

עבור לוח זה טענה 5.2 מתקיימת היות והוכחה נכונה עבור לוח $n \times 4$.

נרצה להראות שגם טענה 5.3 נכונה עבור לוח שכזה. אם נתחיל את המשחק מלחיצה על $a_{2,1}$ כדומה למה שעשינו כדי לקבל את לוח 8 נקבל את סידרת לחיצות המאולצת $\{a_{2,1}, a_{1,3}, a_{3,4}, a_{4,2}, a_{6,3}\}$ שמתוארת בלוח הבאה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & * & 1 \end{bmatrix}$$

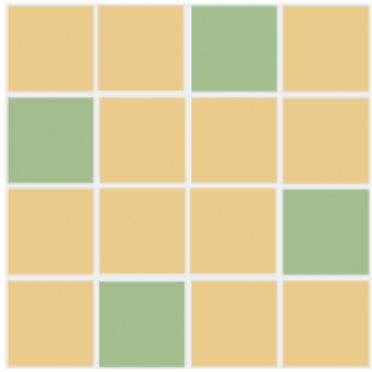
והגענו שוב למבוי סתום.

מסקנה 5.4: במשחק על לוח $m \times n$ שמתקיים $\min(m,n) > 4$ למשחק אין פתרון אופטימלי

5.2 אלגוריתם למציאת פתרון אופטימלי

קיימים מספר דרכים למציאת פתרון אופטימלי. אפשר לנסות ולחפש פתרון ידנית. דרך נוספת היא לעבור על כל הפתרונות של משחק רגיל ולבדוק עם יש מבניהם פתרון אופטימלי. נציעה דרך אחרת לחפש פתרון מינמלי והיא בעזרת להשתמש באותה מטריצה שכנויות כפי שהגדרנו רק להגדיר את זה שהיא על חוג $\mathbb{Z}$. בעזרת שימוש בחוג $\mathbb{Z}$ מאלצים את שפתרונות המתקבלים שידליקו כל נורות אך ורק פעם אחת, זאת מתקיים בעקבות משוואות האילוצים שהגדרנו ב 3.6 שמאלצות את הסכום להיות שווה לאחד , אם נסתכל על נוסחה של משוואת האילוצים הכללים נוסחה 5 היות וחיבור על השלמים לכן מאולצים במשוואה זה שהיה לחצן בודד לחוץ לכן פתרון מערכת המשוואות מתאר פתרון מינמלי של משחק. התיאוריה שפיתחנו באלגברה לינארית הייתה תקפה לשדות אבל כלי תכנות שהשתמשנו בעבודה זה יודע לפתור גם על חוג של השלמים והסמכנו על הכלי כדי לבדוק את המקרים שממדים שייכם לקבוצה $\{(m,n) : 2 < m,n < 7\}$ וקיבלנו שהלוח היחיד בקבוצת הממדים העלו שיש לו פתרון מינמלי הוא לוח 4×4 ופתרון מתואר באיור 5.4.

איור 5.4 : פתרון ללוח 4×4



6 נספחים

מימוש של הפרויקט בוצע על ידי שפת תוכנה Python בעזרת הכלי Sage וספריות מתמטיות נוספות.

6.1 יצירת מטריצת שכנויות

קוד זה יוצר מטריצת שכנויות של משחק על לוח $m \times n$.

[8]:
```
import numpy as np
# to prove the minimal case on not square we need to build matrix for␣
↪not rectangler board
def genenerate_neighbord_matrix_m_n(m,n) -> np.array:
    mat = np.zeros((m*n, m*n), dtype= np.int8)

    # the general case
    for j in range(0, m*n):
        if j-n > -1 :
            mat[j-n,j] = 1

        if j % n != 0 :
            mat[j-1,j] = 1

        mat[j,j] = 1
```

```
        if (j+1) % n != 0 :
            mat[j+1,j] = 1

        if j+n < m*n :
            mat[j+n,j] = 1

    return mat
def genenerate_neighbord_matrix(n) -> np.array:
    return genenerate_neighbord_matrix_m_n(n,n)

print('Adj matrix for 3,2 board:')
print(genenerate_neighbord_matrix_m_n(3,2))
```

```
Adj matrix for 3,2 board:
[[1 1 1 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0]
 [1 0 1 1 1 0]
 [0 1 1 1 0 1]
 [0 0 1 0 1 1]
 [0 0 0 1 1 1]]
```

6.2 מציאת פתרון

מתאר אלגוריתם למציאת פתרון בעזרת ממטריצת השכנויות. הפתרון המתקבל הם וקטורי עמודות. ניקח לדוגמה את הפתרון $(1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ עבור לוח 3×3 את אותו פתרון נתאר בעזרת מטריצה כך:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[7]:
```
from sage.all import *
n = 3
A = Matrix(Integers(2),genenerate_neighbord_matrix(n)) # A = adjacency␣
↪matrix
Y = vector([1 for x in range(n**2)]) # Y = ( 1, 1, ..., 1)
X = A.solve_right(Y)
print('Solution for 3x3 board:')
print(X)
```

```
Solution for 3x3 board:
(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)
```

6.3 אלגוריתם מבוסס על מילוי עקבי

שיטת הפתרון השניה שהצגנו בעבודה. הקוד מחולק לשלושה פונקציות: פעולת דירוג של מטריצה לפי שיטה, פונקציה שפותרת את המערכת ופונקציה שעוטפת את שני הפונקציה וממש את השיטה כולה. הפתרון מוצג כוקטור עמודה כמו שתיארנו ב 6.2.

[3]:
```
# row operation on mat to generate the solution for [n, n**2-1]
def gaussian_elimination_spanish_alg(mat : np.array, sol_vec : np.array):
    n = int(sqrt(mat.shape[0]))
    #all rows but the last one
    for i in range(0, n**2-n):
        # the lamp that is affected
```

```
        affected_lamp = i + n
        row_i = mat[i][:affected_lamp+1]
        # check rows below
        # for j in range(i+1, n**2):
        for j in [i-1 + n, i+n, i+n+1, i+ 2*n]:
            if j> -1 and j < n**2 and mat[j][affected_lamp] == 1:
                row_j = mat[j][:affected_lamp+1]
                row_j = row_j + row_i
                row_j = row_j % 2
                mat[j][:affected_lamp+1] = row_j
                sol_vec[j] = ( sol_vec[j] + sol_vec[i] ) % 2

# get result to [n, n**2-1] from solution [0, n-1]
def mul_mat_sol_based_on_res(mat : np.array, end_state : list, res :␣
 ↪list):
    n = int(sqrt(mat.shape[0]))
    for i in range(0,n**2-n):
        res_i_plus_n = int(end_state[i])
        for j in range(0,i+n):
            res_i_plus_n = (res_i_plus_n + mat[i][j] * res[j]) % 2
        res.append(res_i_plus_n)

# facade for the intire spanish method
def generate_mat_spanish_alg(mat : np.array):
    n = int(sqrt(mat.shape[0]))
    end_state = np.ones(n**2) # end_state = (1, 1, ... , 1)
    gaussian_elimination_spanish_alg(mat, end_state)
    # the matrix we need to solve for parmeter [0, n-1]
    new_mat = np.array(mat[n**2-n:n**2, 0:n], copy=True)
    # the solution vector after row operation
    new_sol = np.array(end_state[n**2-n:n**2],  copy=True)
```

```
    # find solution for n variables
    A = Matrix(Integers(2),new_mat)
    Y = vector(Integers(2),new_sol)
    X = A.solve_right(Y)
    res = [x for x in X] # solution for parmeter [0, n-1]
    mul_mat_sol_based_on_res(mat, end_state, res)
    return res

mat = genenerate_neighbord_matrix(4)
A = Matrix(Integers(2),mat)
res = generate_mat_spanish_alg(mat)
print('solution for board n=4:')
print(res)

print('check solution by multiply matrix with soultion vector:')
X = vector(Integers(2),res)
Y = A*X
print(Y)
```

```
solution for board n=4:
[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]
check solution by multiply matrix with soultion vector:
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
```

6.4 השווה בין שתי שיטות

השווה זמני ריצה בין שתי אלגוריתמים.

[4]:
```
import datetime
import numpy as np

def matrix_solve(mat):
    A = Matrix(Integers(2),mat)
    Y = vector([1 for x in range(n**2)])
    Z = vector([0 for x in range(n**2)])
    X = A.solve_right(Y)
    return X

val = []
# run on range(10 ,61,5)
for i,n in enumerate(range(10 ,15)):
    # print(i)
    mat = genenerate_neighbord_matrix(n)

    a0 = datetime.datetime.now()
    matrix_solve(mat)
    b0 = datetime.datetime.now()
    c0 = b0 - a0
    t0 = c0.total_seconds()
    # print(t0)

    a1 = datetime.datetime.now()
    generate_mat_spanish_alg(mat)
    b1 = datetime.datetime.now()
    c1 = b1 - a1
    t1 = c1.total_seconds()
```

```
    # print(t1)

    val.append((n, t0, t1))

res = np.array(val)
# np.savetxt("benchmark.csv", res, delimiter = ',')
print('board size, adj method, row by row method')
print(res)
```

```
board size, adj method, row by row method
[[10.        0.029358  0.319221]
 [11.        0.042352  0.406416]
 [12.        0.051597  0.548713]
 [13.        0.064825  0.781002]
 [14.        0.101306  1.072234]]
```

6.5 מציאת פתרון אופטימלי

הצגנו בפרויקט שיטה למציאת פתרונות מינמלי מבוססת פתרון מערכת משוואות על שלמים.

[5]:
```
from sage.all import *
n = 3
m = 2
a = genenerate_neighbord_matrix_m_n(m,n)
A = Matrix(ZZ,a)
Y = vector([1 for x in range(m*n)])
Z = vector([0 for x in range(m*n)])
X = A.solve_right(Y)
print('Optimal solution:')
print(X)
```

```
Optimal solution:
(0, 0, 1, 1, 0, 0)
```

6.6 מספר פתרונות על לוח

חישוב מספר הפתרונות שיש על לוחות $m \times n$ כאשר $m, n \leq 9$. שורות ועמודות בטבלה מתארות את מימדי הלוח שמעוניינים לדעת מספר פתרונותיו. לדוגמה אפשר לראות מטבלת התוצאות שללוח 3×5 כמות הפתרונות הוא 8 כפי שמתואר בשורה 3 עמוד 5 בטבלת התוצאות.

[6]:
```
def num_solution_board(m,n):
    a = genenerate_neighbord_matrix_m_n(m, n)
    A = Matrix(Integers(2),a)
    num_solutions = 2**A.kernel().dimension()
    return num_solutions

m = 9
n = 9
res = np.zeros((m, n), dtype= np.int32)
for i in range(1,m+1):
    for j in range(1,n+1):
        res[i-1][j-1] = num_solution_board(i,j)
print('Number solution based on m x n board size:')
print(res)
```

```
Number solution based on m x n board size:
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	1	1	2	1	1	2	1
2	2	1	4	1	2	1	4	1	2
3	1	4	1	1	8	1	1	4	1
4	1	1	1	16	1	1	1	1	16
5	2	2	8	1	4	1	16	2	2
6	1	1	1	1	1	1	1	64	1
7	1	4	1	1	16	1	1	4	1
8	2	1	4	1	2	64	4	1	2
9	1	2	1	16	2	1	1	2	256

6.7 כל הפתרונות עבור לוח נתון

חישוב כל הפתרונות עבור לוח בגודל $m \times n$. הפתרון שמתקבל הוא רשימה של פתרונות כאשר כל פתרון הוא וקטור עמודות כפי שתאירנו ב 6.2. מציאת כל הפתרונות מסתמכת על הגישה של חיבור פתרון פרטי עם כל וקטורים במרחב האפס.

[81]:
```
def get_all_sol(m,n):
    """
    helper function to recursivly sum all combinations for sol_vector +␣
↪null_vector
    """
    def get_all_sol_rec(cur_sol,index_in_null_base):
        if len(null_base) == index_in_null_base:
            all_sol.append(cur_sol)
            return
        get_all_sol_rec(cur_sol + null_base[index_in_null_base],␣
↪index_in_null_base+1)
        get_all_sol_rec(cur_sol, index_in_null_base+1)

    # generates all structer that the helper function needs
    a = genenerate_neighbord_matrix_m_n(m,n)
    A = Matrix(Integers(2),a)
    Y = vector([1 for x in range(m*n)]) # Y = ( 1, 1, ..., 1)
    X = A.solve_right(Y)

    null_base = A.right_kernel_matrix().rows()
    all_sol = []
    get_all_sol_rec(X,0)
    return all_sol

m = 2
n = 3
```

```python
res = get_all_sol(m,n)
print('All solution(each solution is row vector) based on m x n board␣
↪size:')
print(*res, sep = '\n')
print(f'number of soultion generated: {len(res)}')
```

```
All solution(each solution is row vector) based on m x n board size:
(1, 1, 0, 1, 1, 0)
(1, 0, 0, 0, 0, 1)
(0, 1, 1, 0, 1, 1)
(0, 0, 1, 1, 0, 0)
number of soultion generated: 4
```

מקורות

[1] Rafael Losada Translated from Spanish by Ángeles Vallejo, *ALL LIGHTS AND LIGHTS OUT,* SUMA magazine's

[2] Jamie Mulholland *Permutation Puzzles* Lecture 24: Light out Puzzle , SFU faculty of science department of mathematic

[3] K. Sutner, *Linear Cellular Automata and the Garden-of-Eden,* The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, No. 29, 1989, Springer-Verlag, New York.

[4] אברהם ברמן, בן-ציון קון, אלגברה ליניארית, תיאוריה ותרגילים , הוצאת בק, חיפה, 1999.