

מכללת אורט בראודה

המחלקה למתמטיקה שימושית

חקירת משחק האורות

מנחה:

אלכס גולוורד

מאת:

ולדיסלב ברקנס

27 בנובמבר 2021

תוכן עניינים

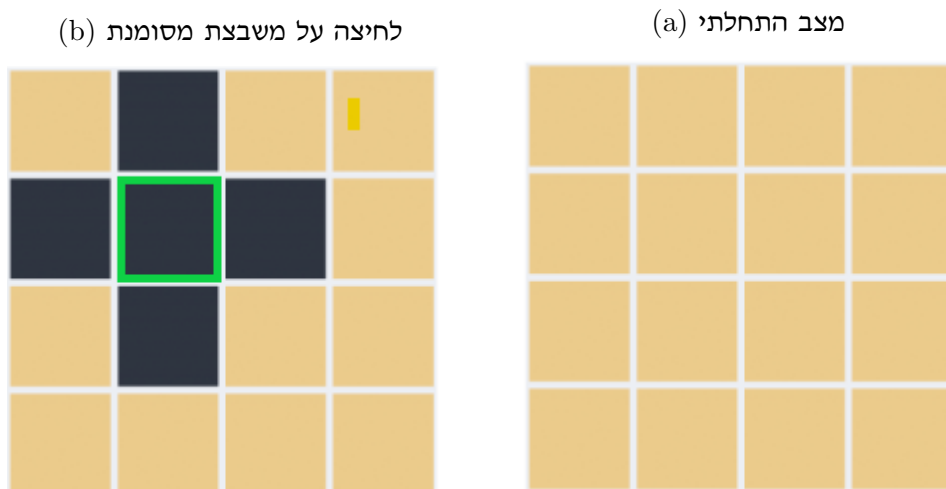
1	הקדמה	3
2	רקע על משחק האורות	3
2.1	משחק האורות על גרף	4
3	אלגוריתם למציאת פתרון	7
3.1	פתרון בעזרת שיטה הספרדית	8
4	הוכחת קיום פתרון עבור כל גרף	8
4.1	מספר הפתרונות עבור כל גרף	8
5	פתרון מינימלי עבור לוחות מלבניים	8
6	תוצאות ומסקנות	8
7	נספחים	8
8		8

1 הקדמה

2 רקע על משחק האורות

משחק האורות או Lights Out בלועזית, זהו משחק בו יש לוח משבצות ריבועי וכל משבצת הינה לחצן על הלוח. כל משבצת יכולה להיות בשתי מצבים: דלוק או כבוי. כאשר לוחצים על משבצת, משבצת הנלחצת וכל משבצות הסמוכות לה כלומר, כל המשבצות בעל צלע משותפת משנות את מצב נוכחי. משחק מתחיל כשהלוח כולו עם משבצות דלוקות והמטרה לכבות את כל המשבצות על הלוח כולו.

נתאר זאת ויזואלית:



נבחין כי המשחק 4×4 מתחיל במצב (a). בלוח (b) נתאר מצב בו לחצו על משבצת המסומנת, בירוק כל המשבצות השכנות והיא משנות מצבן, היות ומצב של כולן היה דלוקות לכן הן נכבו

המשחק במקור היה צעצוע אלקטרוני על לוח 5×5 ששוחרר ב 1995. המשחק יכול להראות פשוט אבל כפי שתואר במאמר [1] "devilish invention".

קיים קושי רב בלמצוא שיטה לפתרון אינטואיטיבי, הקושי של משחק מתבלט בשאלה כיצד כדי להתחיל את המשחק?
בנוסף אציין מניסיון האישי שהמשחק קשה כבר על לוח 5×5 ולרוב אנשים שמשחקים אותו מכירים מצבים על הלוח שיודע עליהם משם את הפתרון.

פרויקט זה באה בעקבות הקושי של המשחק והניסוי להציע שיטות לפתרון, בעקבות ניסיונות עלו נעזרנו במספר רב של כלים מתמטיים מתקדמים.
אחת המטרות במחקר למצוא הסבר לתופעות במשחק שנתקלנו.

נציין כי קיימים עוד המון שאלות שמשחק מעלה ולא לכולם קיים פתרון, נשמח בפרויקט זה פתרון לכמה מהשאלות שעולות.
חוץ מאתגר של המשחק עצמו קיים אתגר מתמטי שנרצה בפרויקט זה להציג ולהעניין.

2.1 משחק האורות על גרף

אחרי שכללי המשחק על לוח הובנו אפשר לנסות להכליל את המשחק כמשחק על גרף.
קיימים הרבה סיבות בהם תירצה להגדיר את הבעיה על מבנה כללי שכזה:

1. ככול שמבנה כללי יותר תאוריה שאתה מפתח מתאימה ליותר בעיות.
2. קיימת תאוריה רחבה שפותחה על גרפים ואתכן שנעזר בחלק מהטענות מהתאוריה שכזה.
3. מבליט את מהות הבעיה והגדרה הבסיסית ביותר של המשחק.

ארצה להתייחס לנקודה אחרונה, החשיבות הגדולה שאפשר לתאר את הבעיה של משחק כאוסף של כללים על גרף, מרכזת אותנו לבעיה ובסופו של דבר כשנראה את שיטה למציאת הפתרון, השיטה עצמה תזכיר לנו מיד את הייצוג הגרפי.

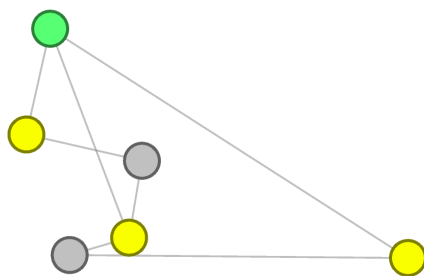
כדי לתאר את משחק האורות על גרף נשתמש באותם כללים שהגדרנו פרט לעובדה שצמתים הם הלחצנים או המשבצות במקרה של הלוח וכל לחיצה הופכת את המצב של

הצומת והשכנים שלה.
נזכיר כי צמתים שכנים הם צמתים שיש קשת ביניהם.

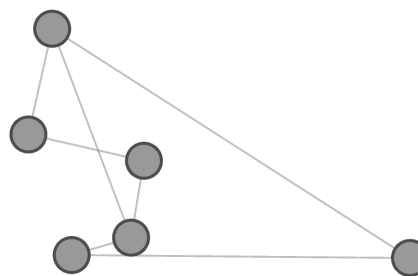
נציין כי כאשר כל צומת יכולה להיות בשתי מצבים, דלוקה או כבויה המטרה היא לעבור מכל הצמתים במצב מסוים דלוק למצב אחר כבוי. העובדה שמצב התחלתי הינו דלוק או כבוי אינה תשנה את המשחק עלה רק לאיזה מצב סופי צריך לעבור לכבוי או דלוק.

נמחיש זאת על דוגמה:

(b) לחיצה על משבצת מסומנת



(a) מצב התחלתי



על גרף התחלתי (a) ניתן לראות 6 קודקודיים צבועים באפור ומטרה לצבוע את כולם לצהוב.
בשלב (b) מציגים לחיצה על צומת ירוקה היא ושכניה נצבעים בצהוב.

הערה 2.1 בפועל צומת ירוקה גם נצבעת לצהוב צביעה לירוק נועדה להזגשה על מי נלחץ

משחק על גרף הינה הכללה של משחק על לוח כלומר, כל משחק לוח ניתן לתאר בעזרת משחק על גרף.

נמחיש זאת על דוגמה:

ניקח לוח למשל 2×3 נמספר את המשבצות כמו באיור 3

Figure 3: לוח 2×3

1	2	3
4	5	6

כדי לתאר את הלוח על על משחק גרף נשתמש בשני הכללים הבאים:

1. כל משבצת על משחק לוח נהפוך לנקודה.

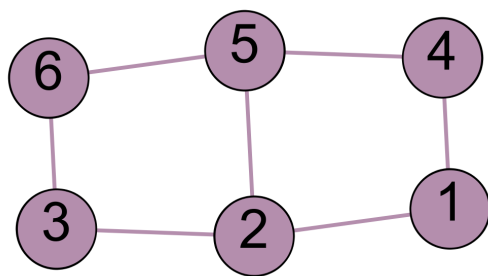
2. כל זוג משבצות סמוכות על לוח נחבר את נקודות בקו

הגרף שנקבל עבור לוח באיור 3 מתואר באיור 4

נשים לב שלגרף בו יש צומת אם יותר מ 4 שכנים לא ניתן לתאר לוח שכזה כיוון שלכל היות במשחק על לוח לכל משבצת יש לכל יותר 4 משבצות סמוכות.

לכן לסיכום אפשר למדל כל משחק לוח על משחק גרף שמייצג אותו אבל ההפך זה לא נכון.

Figure 4: גרף 2×3



3 אלגוריתם למציאת פתרון

לפני שנציא שיטה לפתרון נציין מדוע נציין מדוע קיים הצורך לחפש פיתרון אחת הסיבות המרכזיות שמספר אפשרויות לנסיון גדולות מהר

3.1 פתרון בעזרת שיטה הספרדית

4 הוכחת קיום פתרון עבור כל גרף

4.1 מספר הפתרונות עבור כל גרף

5 פתרון מינימלי עבור לוחות מלבניים

6 תוצאות ומסקנות

7 נספחים

8

רשימת מקורות

- [1] ALL LIGHTS AND LIGHTS OUT An investigation among lights and shadows by SUMA magazine's article by Rafael Losada Translated from Spanish by Ángeles Vallejo