Cash in Advance

Economía Monetaria

Vladimir Jaroszewski

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Córdoba

Hoja de Ruta

Hoja de Ruta

Demanda de Dinero

Dado que las tenencias de dinero en manos del público no generan intereses, ¿cómo justificamos que los agentes deseen tener dinero? ¿cómo modelamos la demanda de dinero?

1. Asumir que el dinero brinda utilidad directa al agente.
2. Imponer un costo de transaccion que justifique la tenencia de dinero.
3. Usar el dinero como un activo para transferir recursos intertemporalmente

El modelo Cash in Advance, que veremos en esta clase, sigue el tercer enfoque.

Especificaciones del modelo CIA

Los modelos CIA pueden tener diferentes especificaciones según como se asuma la restriccíon CIA, la temporalidad de apertura de los mercados y la existencia o no de incertidumbre.

Suponemos:

1. No hay incertidumbre.
2. Mercado de bienes abre antes que el mercado de activos.
3. Restricción CIA para todos los bienes de consumo.El agente entra al periodo t con tenencias de dinero M_{t-1} y recibe transferencias de suma fija τ_t.

Hoja de Ruta

Caracterización de la Economía

En una economía hipotética las preferencias del agente representativo vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

La restricción presupuestaria que enfrenta el agente en términos reales es la siguiente:

$$y_t + \tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right) \geq c_t + m_t + b_t + x_t$$

La función de producción y la ley de movimiento del capital son:

$$y_t = f(k_{t-1}); \qquad k_t = k_{t-1}(1-\delta) + x_t$$

Caracterización de la Economía: Restricción CIA

La restricción Cash in Advance adopta la siguiente forma:

$$P_t c_t \leq M_{t-1} + \tau_t$$

Diviendo por el nivel de precios obtenemos

$$c_t \leq \frac{M_{t-1}}{P_t} + \frac{\tau_t}{P_t}$$

Dividiendo y multiplicando por P_{t-1}, y recordando que $(1 + \pi_t) = \dfrac{P_t}{P_{t-1}}$, llegamos a la siguiente expresión:

$$c_t \leq \frac{m_{t-1}}{(1 + \pi_t)} + \tau_t$$

Caracterización de la Economía

En esta economía c_t representa el consumo del agente en el período t; x_t, la inversión del período t; b_t, la tenencia de bonos del período t; m_t, la tenencia de dinero del período t; y_t, la producción del período t; y k_t, el stock de capital en el período t. La tasa de interés nominal vigente en el período $t-1$ está representada por i_{t-1} y τ_t simboliza las transferencias de suma fija que recibe el agente en t. Por otra parte, β es el factor de descuento, y δ la tasa de depreciación. Todas las variables, a excepción de la tasa de interés, están expresadas en términos reales.

Propuesta de Trabajo

1. Plantear el problema secuencial del agente.
2. Identificar las variables de control, las variables de estado y variables exógenas del modelo.
3. Obtener la ecuación funcional de Bellman.
4. Obtener las condiciones de primer orden y las condiciones de envolvente.
5. Obtener las ecuaciones de Euler y otras de importancia. Realizar la interpretación económica de estas ecuaciones.

Resolución Inciso 1

Planteamos el problema secuencial del agente:

$$\max_{\{c_t, m_t, k_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad U\left(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeto a:

$$\frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t = c_t \qquad \forall t$$

$$\underbrace{f(k_{t-1}) + (1-\delta)k_{t-1} + \tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right)}_{\equiv \omega_t} = c_t + m_t + b_t + k_t \qquad \forall t$$

Resolución Inciso 2

Las variables de control, en el período t son $\{c_t, b_t, m_t, k_t\}$; mientras que, las variables de estado en el período t son $\{\omega_t, m_{t-1}\}$. Las variables exógenas en t serán $\{i_{t-1}, \tau_t, \pi_t\}$. Los parámetros son $\{\beta, \delta\}$.

Resolución Inciso 3

La ecuación funcional de Bellman asociada al problema secuencial del agente es la siguiente:

$$V(\omega_t, m_{t-1}) = \max_{\{c_t, m_t, k_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ u(c_t) + \beta V\left(\omega_{t+1}, m_t\right) \right\}$$

Sujeto a

$$\omega_t = c_t + m_t + b_t + k_t$$

$$\frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t = c_t$$

Donde

$$\omega_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t + \tau_{t+1} + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} + b_t\left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right)$$

Resolución Inciso 4

Para obtener las condiciones de primer orden, formulamos el siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(c_t, m_t, k_t, b_t, \lambda_t, \mu_t) = u(c_t) + \beta V(\omega_{t+1}, m_t) + \\ \lambda_t(\omega_t - c_t - k_t - m_t - b_t) + \mu_t \left(\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \tau_t - c_t \right)$$

Donde

$$\omega_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} + b_t \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right)$$

Resolución Inciso 4

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$[c_t] \quad u_c(c_t) - \lambda_t - \mu_t = 0 \tag{1}$$

$$[b_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} - \lambda_t = 0 \tag{2}$$

$$[m_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1}{1+\pi_{t+1}} + \beta V_m(\omega_{t+1}, m_t) - \lambda_t = 0 \tag{3}$$

$$[k_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\left[f_k(k_t) + 1 - \delta\right] - \lambda_t = 0 \tag{4}$$

$$[\lambda_t] \quad \omega_t - c_t - k_t - m_t - b_t = 0 \tag{5}$$

$$[\mu_t] \quad \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \tau_t - c_t = 0 \tag{6}$$

Resolución Inciso 4

Por el teorema de la Envolvente:

$$[\omega_t] \quad V_\omega(\omega_t, m_{t-1}) = \lambda_t$$

$$[m_{t-1}] \quad V_m(\omega_t, m_{t-1}) = \frac{\mu_t}{1+\pi_t}$$

Adelantando ambas expresiones un período obtenemos

$$[\omega_{t+1}] \quad V_\omega(\omega_{t+1}, m_t) = \lambda_{t+1} \tag{7}$$

$$[m_t] \quad V_m(\omega_{t+1}, m_t) = \frac{\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} \tag{8}$$

Resolución Inciso 5

Despejando λ_t de las ecuaciones (2) y (4), e igualando

$$\beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t) \frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} = \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t) \left[f_k(k_t) + 1 - \delta \right]$$

Cancelando términos semejantes, obtenemos la **relación de Fisher**.

$$\left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} \right) = \left[f_k(k_t) + 1 - \delta \right] \tag{9}$$

La ecuación (15) indica el comportamiento óptimo del agente frente al trade-off entre dos activos rentables, el capital y los bonos.

Resolución Inciso 5

Despejando $u_c(c_t)$ de (1) obtenemos

$$u_c(c_t) = \lambda_t + \mu_t \tag{10}$$

Donde λ_t es la utilidad marginal de la riqueza y μ_t es la utilidad marginal de los servicios de liquidez del dinero. Como el agente debe mantener dinero para adquirir bienes de consumo, el costo al cual se iguala la utilidad marginal del consumo es la suma de la utilidad marginal de la riqueza y el costo de los servicios de liquidez que se necesitan para realizar transacciones.

Resolución Inciso 5

Reemplazando (7) en (2) obtenemos la **ecuación de movimiento de la utilidad marginal**, que es una ecuación de Euler.

$$\beta\lambda_{t+1}\left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right)=\lambda_t \tag{11}$$

En el óptimo, el costo marginal de reducir la riqueza hoy debe igualar a la utilidad de llevar esa riqueza al período siguiente, expresada en valor presente.

Reemplazando (7) y (8) en (3) obtenemos la **ecuación de fijación del precio del dinero**.

$$\frac{\beta(\mu_{t+1}+\lambda_{t+1})}{1+\pi_{t+1}}=\lambda_t \tag{12}$$

Resolución Inciso 5

Igualando (11) y (12) obtenemos

$$\lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} + \lambda_{t+1}$$

Simplificando y despejando i_t, obtenemos una expresión para la tasa de interés nominal.

$$\lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} \tag{13}$$

$$i_t = \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \tag{14}$$

Resolución Inciso 5

Atrasando (13) un período y reemplazando en (1).

$$\lambda_t i_{t-1} = \mu_t$$

$$u_c(c_t) = \lambda_t + \lambda_t i_{t-1} = \lambda_t(1 + i_{t-1})$$

Depejando λ_t.

$$\lambda_t = \frac{u_c(c_t)}{(1 + i_{t-1})} \tag{15}$$

Adelantando (15) un período.

$$\lambda_{t+1} = \frac{u_c(c_{t+1})}{(1 + i_t)} \tag{16}$$

Reemplazando (15) y (16) en (11).

$$\beta \frac{u_c(c_{t+1})}{(1+i_t)} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} = \frac{u_c(c_t)}{1+i_{t-1}}$$

Simplificando y despejando $u_c(c_t)$ obtenemos la **ecuación de Euler de consumo intertemporal**.

$$\beta u_c(c_{t+1}) \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_{t+1}} = u_c(c_t)$$

Resolución Inciso 5

Dividiendo ambos miembros de (1) por $u_c(c_t)$.

$$1 = \frac{\lambda_t}{u_c(c_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t)}$$

Reemplazando λ_t por su igual en (15).

$$1 = \frac{\frac{u_c(c_t)}{(1+i_{t-1})}}{u_c(c_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t)}$$

Despejando el cociente $\frac{\mu_t}{u_c(c_t)}$, obtenemos la **ecuación de Euler entre dinero y consumo**:

$$\frac{i_{t-1}}{1 + i_{t-1}} = \frac{\mu_t}{u_c(c_t)} \tag{17}$$

Hoja de Ruta

Caracterización de la Economía

En una economía hipotética las preferencias del agente representativo vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}, \{1-h_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t).$$

La restricción presupuestaria que enfrenta el agente en términos reales es la siguiente:

$$\frac{w_{t-1}}{1+\pi_t} h_{t-1} + \tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right) = c_t + m_t + b_t$$

Caracterización de la Economía

Además, el agente enfrenta la siguiente restricción de tipo cash-in-advance:

$$c_t = \frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t$$

En esta economía c_t representa el consumo del agente en el período t; h_{t-1} las horas trabajadas en el periodo $t-1$; b_t, la tenencia de bonos del período t; m_t, la tenencia de dinero del período t. La tasa de interés nominal vigente en el período $t-1$ está representada por i_{t-1} y τ_t simboliza las transferencias de suma fija que recibe el agente en t. Por otra parte, β es el factor de descuento. Todas las variables, a excepción de la tasa de interés, están expresadas en términos reales.

Propuesta de Trabajo

1. Plantear el problema secuencial del agente.
2. Identificar las variables de control, las variables de estado y variables exógenas del modelo.
3. Obtener la ecuación funcional de Bellman.
4. Obtener las condiciones de primer orden y las condiciones de envolvente.
5. Obtener las ecuaciones de Euler y otras de importancia. Realizar la interpretación económica de estas ecuaciones.

Resolución Inciso 1

Planteamos el problema secuencial del agente:

$$\max_{\{c_t, m_t, h_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1-h_t)$$

Sujeto a:

$$c_t = \frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t \qquad \forall t$$

$$\underbrace{\frac{w_{t-1}}{1+\pi_t} h_{t-1} + \tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right)}_{\equiv\, \omega_t} = c_t + m_t + b_t \qquad \forall t$$

Resolución Inciso 2

Las variables de control, en el período t son $\{c_t, b_t, m_t, h_t\}$; mientras que, las variables de estado en el período t son $\{\omega_t, m_{t-1}\}$. Las variables exógenas en t serán $\{w_{t-1}, i_{t-1}, \tau_t, \pi_t\}$. Hay un único parámetro $\{\beta\}$.

Resolución Inciso 3

La ecuación funcional de Bellman asociada al problema secuencial del agente es la siguiente:

$$V(\omega_t, m_{t-1}) = \max_{\{c_t, m_t, h_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ u(c_t, 1-h_t) + \beta V\left(\omega_{t+1}, m_t\right) \right\}$$

Sujeto a

$$\omega_t = c_t + m_t + b_t$$

$$\frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t = c_t$$

Donde

$$\omega_{t+1} = \frac{w_t}{1+\pi_{t+1}} h_t + \tau_{t+1} + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} + b_t \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right)$$

Resolución Inciso 4

Para obtener las condiciones de primer orden, formulamos el siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(c_t, m_t, h_t, b_t, \lambda_t, \mu_t) = u(c_t, 1 - h_t) + \beta V(\omega_{t+1}, m_t) + \\ \lambda_t(\omega_t - c_t - m_t - b_t) + \mu_t \left(\frac{m_{t-1}}{1 + \pi_t} + \tau_t - c_t \right)$$

Donde

$$\omega_{t+1} = \frac{w_t}{1 + \pi_{t+1}} h_t + \tau_{t+1} + \frac{m_t}{1 + \pi_{t+1}} + b_t \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} \right)$$

Resolución Inciso 4

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$[c_t] \quad u_c(c_t, 1-h_t) - \lambda_t - \mu_t = 0 \tag{1}$$

$$[b_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} - \lambda_t = 0 \tag{2}$$

$$[m_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1}{1+\pi_{t+1}} + \beta V_m(\omega_{t+1}, m_t) - \lambda_t = 0 \tag{3}$$

$$[h_t] \quad u_{1-h}(c_t, 1-h_t)(-1) + \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{w_t}{1+\pi_{t+1}} = 0 \tag{4}$$

$$[\lambda_t] \quad \omega_t - c_t - k_t - m_t - b_t = 0 \tag{5}$$

$$[\mu_t] \quad \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \tau_t - c_t = 0 \tag{6}$$

Resolución Inciso 4

Por el teorema de la Envolvente:

$$[\omega_t] \qquad V_\omega(\omega_t, m_{t-1}) = \lambda_t$$

$$[m_{t-1}] \qquad V_m(\omega_t, m_{t-1}) = \frac{\mu_t}{1+\pi_t}$$

Adelantando ambas expresiones un período obtenemos

$$[\omega_{t+1}] \qquad V_\omega(\omega_{t+1}, m_t) = \lambda_{t+1} \tag{7}$$

$$[m_t] \qquad V_m(\omega_{t+1}, m_t) = \frac{\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} \tag{8}$$

Resolución Inciso 5

Despejando $u_c(c_t, 1 - h_t)$ de (1) obtenemos

$$u_c(c_t, 1 - h_t) = \lambda_t + \mu_t \tag{9}$$

Donde λ_t es la utilidad marginal de la riqueza y μ_t es la utilidad marginal de los servicios de liquidez del dinero. Como el agente debe mantener dinero para adquirir bienes de consumo, el costo al cual se iguala la utilidad marginal del consumo es la suma de la utilidad marginal de la riqueza y el costo de los servicios de liquidez que se necesitan para realizar transacciones.

Resolución Inciso 5

Reemplazando (7) en (2) obtenemos la **ecuación de movimiento de la utilidad marginal**, que es una ecuación de Euler.

$$\beta\lambda_{t+1}\left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right)=\lambda_t \tag{10}$$

En el óptimo, el costo marginal de reducir la riqueza hoy debe igualar a la utilidad de llevar esa riqueza al período siguiente, expresada en valor presente.

Reemplazando (7) y (8) en (3) obtenemos la **ecuación de fijación del precio del dinero**.

$$\frac{\beta(\mu_{t+1}+\lambda_{t+1})}{1+\pi_{t+1}}=\lambda_t \tag{11}$$

Resolución Inciso 5

Igualando (10) y (11) obtenemos

$$\lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} + \lambda_{t+1}$$

Simplificando y despejando i_t, obtenemos una expresión para la tasa de interés nominal.

$$\lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} \tag{12}$$

$$i_t = \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \tag{13}$$

Resolución Inciso 5

Atrasando (12) un período y reemplazando en (1).

$$\lambda_t i_{t-1} = \mu_t$$

$$u_c(c_t, 1 - h_t) = \lambda_t + \lambda_t i_{t-1} = \lambda_t(1 + i_{t-1})$$

Depejando λ_t.

$$\lambda_t = \frac{u_c(c_t, 1 - h_t)}{(1 + i_{t-1})} \tag{14}$$

Adelantando (14) un período.

$$\lambda_{t+1} = \frac{u_c(c_{t+1}, 1 - h_{t+1})}{(1 + i_t)} \tag{15}$$

Resolución Inciso 5

Reemplazando (14) y (15) en (10).

$$\beta \frac{u_c(c_{t+1}, 1 - h_{t+1})}{(1 + i_t)} \frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} = \frac{u_c(c_t, 1 - h_t)}{1 + i_{t-1}}$$

Simplificando y despejando $u_c(c_t, 1 - h_t)$ obtenemos la **ecuación de Euler de consumo intertemporal**.

$$\beta u_c(c_{t+1}, 1 - h_{t+1}) \frac{1 + i_{t-1}}{1 + \pi_{t+1}} = u_c(c_t, 1 - h_t)$$

Resolución Inciso 5

Dividiendo ambos miembros de (1) por $u_c(c_t, 1-h_t)$.

$$1 = \frac{\lambda_t}{u_c(c_t, 1-h_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t, 1-h_t)}$$

Reemplazando λ_t por su igual en (14).

$$1 = \frac{\frac{u_c(c_t, 1-h_t)}{(1+i_{t-1})}}{u_c(c_t, 1-h_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t, 1-h_t)}$$

Despejando el cociente $\frac{\mu_t}{u_c(c_t, 1-h_t)}$, obtenemos la **ecuación de Euler entre dinero y consumo**:

$$\frac{i_{t-1}}{1+i_{t-1}} = \frac{\mu_t}{u_c(c_t, 1-h_t)} \tag{16}$$

Resolución Inciso 5

Despejando $u_{1-h}(c_t, 1-h_t)$ de (4) y reemplazando a $V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)$ por su igual en (7).

$$u_{1-h}(c_t, 1-h_t) = \beta\lambda_{t+1}\frac{w_t}{1+\pi_{t+1}}$$

Reemplazando a λ_{t+1} por su igual en (15).

$$u_{1-h}(c_t, 1-h_t) = \beta\frac{u_c(c_{t+1}, 1-h_{t+1})}{(1+i_t)}\frac{w_t}{(1+\pi_{t+1})} \tag{17}$$

Despejando $\frac{\beta u_c(c_{t+1},1-h_{t+1})}{1+\pi_{t+1}}$ de la ecuación de Euler intertemporal de consumo.

$$\frac{\beta u_c(c_{t+1}, 1-h_{t+1})}{1+\pi_{t+1}} = \frac{u_c(c_t, 1-h_t)}{1+i_{t-1}} \tag{18}$$

Resolución Inciso 5

Reemplazando (18) por su igual en (17):

$$u_{1-h}(c_t, 1-h_t) = \frac{u_c(c_t, 1-h_t)}{(1+i_{t-1})} \frac{w_t}{(1+i_t)}$$

$$\frac{u_{1-h}(c_t, 1-h_t)}{u_c(c_t, 1-h_t)} = \frac{w_t}{(1+i_{t-1})(1+i_t)}$$

$$\frac{u_{1-h}(c_t, 1-h_t)}{u_c(c_t, 1-h_t)} = \frac{\frac{w_t}{(1+i_t)}}{1+i_{t-1}} \tag{19}$$

La ecuación (19) indica el comportamiento óptimo del agente frente al trade-off entre consumo y ocio.

Hoja de Ruta

Caracterización de la Economía

En una economía hipotética las preferencias del agente representativo vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}, \{d_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, d_t).$$

La restricción presupuestaria que enfrenta el agente en términos reales es la siguiente:

$$\tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right) = c_t + d_t + m_t + b_t$$

Además, el agente enfrenta la siguiente restricción de tipo cash-in-advance:

$$c_t = \frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t$$

En esta economía c_t representa el consumo de bienes cash del agente en el período t; d_t el consumo de bienes crédito del agente en el período t; b_t, la tenencia de bonos del período t; m_t, la tenencia de dinero del período t. La tasa de interés nominal vigente en el período $t-1$ está representada por i_{t-1} y τ_t simboliza las transferencias de suma fija que recibe el agente en t. Por otra parte, β es el factor de descuento. Todas las variables, a excepción de la tasa de interés, están expresadas en términos reales.

Propuesta de Trabajo

1. Plantear el problema secuencial del agente.
2. Identificar las variables de control, las variables de estado y variables exógenas del modelo.
3. Obtener la ecuación funcional de Bellman.
4. Obtener las condiciones de primer orden y las condiciones de envolvente.
5. Obtener las ecuaciones de Euler y otras de importancia. Realizar la interpretación económica de estas ecuaciones.

Resolución Inciso 1

Planteamos el problema secuencial del agente:

$$\max_{\{c_t, d_t, m_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad U\left(\{c_t, d_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, d_t)$$

Sujeto a:

$$c_t = \frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t \qquad \forall t$$

$$\underbrace{\tau_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + b_{t-1}\left(\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}\right)}_{\equiv\, \omega_t} = c_t + m_t + b_t + d_t \qquad \forall t$$

Resolución Inciso 2

Las variables de control, en el período t son $\{c_t, b_t, m_t, d_t\}$; mientras que, las variables de estado en el período t son $\{\omega_t, m_{t-1}\}$. Las variables exógenas en t serán $\{i_{t-1}, \tau_t, \pi_t\}$. Hay un único parámetro $\{\beta\}$.

Resolución Inciso 3

La ecuación funcional de Bellman asociada al problema secuencial del agente es la siguiente:

$$V(\omega_t, m_{t-1}) = \max_{\{c_t, m_t, d_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ u(c_t, d_t) + \beta V\left(\omega_{t+1}, m_t\right) \right\}$$

Sujeto a

$$\omega_t = c_t + m_t + b_t + d_t$$

$$\frac{m_{t-1}}{(1+\pi_t)} + \tau_t = c_t$$

Donde

$$\omega_{t+1} = \tau_{t+1} + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} + b_t \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right)$$

Resolución Inciso 4

Para obtener las condiciones de primer orden, formulamos el siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(c_t, m_t, d_t, b_t, \lambda_t, \mu_t) = u(c_t, d_t) + \beta V(\omega_{t+1}, m_t) + \lambda_t(\omega_t - c_t - d_t - m_t - b_t) + \mu_t \left(\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \tau_t - c_t \right)$$

Donde

$$\omega_{t+1} = \tau_{t+1} + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} + b_t \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right)$$

Resolución Inciso 4

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$[c_t] \quad u_c(c_t, d_t) - \lambda_t - \mu_t = 0 \tag{1}$$

$$[b_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} - \lambda_t = 0 \tag{2}$$

$$[m_t] \quad \beta V_\omega(\omega_{t+1}, m_t)\frac{1}{1 + \pi_{t+1}} + \beta V_m(\omega_{t+1}, m_t) - \lambda_t = 0 \tag{3}$$

$$[d_t] \quad u_d(c_t, d_t) - \lambda_t = 0 \tag{4}$$

$$[\lambda_t] \quad \omega_t - c_t - d_t - m_t - b_t = 0 \tag{5}$$

$$[\mu_t] \quad \frac{m_{t-1}}{1 + \pi_t} + \tau_t - c_t = 0 \tag{6}$$

Resolución Inciso 4

Por el teorema de la Envolvente:

$$[\omega_t] \qquad V_\omega(\omega_t, m_{t-1}) = \lambda_t$$

$$[m_{t-1}] \qquad V_m(\omega_t, m_{t-1}) = \frac{\mu_t}{1+\pi_t}$$

Adelantando ambas expresiones un período obtenemos

$$[\omega_{t+1}] \qquad V_\omega(\omega_{t+1}, m_t) = \lambda_{t+1} \tag{7}$$

$$[m_t] \qquad V_m(\omega_{t+1}, m_t) = \frac{\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} \tag{8}$$

Resolución Inciso 5

Despejando $u_c(c_t, d_t)$ de (1) obtenemos

$$u_c(c_t, d_t) = \lambda_t + \mu_t \tag{9}$$

Donde λ_t es la utilidad marginal de la riqueza y μ_t es la utilidad marginal de los servicios de liquidez del dinero. Como el agente debe mantener dinero para adquirir bienes de consumo, el costo al cual se iguala la utilidad marginal del consumo es la suma de la utilidad marginal de la riqueza y el costo de los servicios de liquidez que se necesitan para realizar transacciones.

Resolución Inciso 5

Reemplazando (7) en (2) obtenemos la **ecuación de movimiento de la utilidad marginal**, que es una ecuación de Euler.

$$\beta \lambda_{t+1} \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}} \right) = \lambda_t \tag{10}$$

En el óptimo, el costo marginal de reducir la riqueza hoy debe igualar a la utilidad de llevar esa riqueza al período siguiente, expresada en valor presente.

Reemplazando (7) y (8) en (3) obtenemos la **ecuación de fijación del precio del dinero**.

$$\frac{\beta(\mu_{t+1} + \lambda_{t+1})}{1 + \pi_{t+1}} = \lambda_t \tag{11}$$

Resolución Inciso 5

Igualando (10) y (11) obtenemos

$$\lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} + \lambda_{t+1}$$

Simplificando y despejando i_t, obtenemos una expresión para la tasa de interés nominal.

$$\lambda_{t+1} i_t = \mu_{t+1} \tag{12}$$

$$i_t = \frac{\mu_{t+1}}{\lambda_{t+1}} \tag{13}$$

Resolución Inciso 5

Atrasando (12) un período y reemplazando en (1).

$$\lambda_t i_{t-1} = \mu_t$$

$$u_c(c_t, d_t) = \lambda_t + \lambda_t i_{t-1} = \lambda_t(1 + i_{t-1})$$

Depejando λ_t.

$$\lambda_t = \frac{u_c(c_t, d_t)}{(1 + i_{t-1})} \tag{14}$$

Adelantando (14) un período.

$$\lambda_{t+1} = \frac{u_c(c_{t+1}, d_{t+1})}{(1 + i_t)} \tag{15}$$

Resolución Inciso 5

Reemplazando (14) y (15) en (10).

$$\beta \frac{u_c(c_{t+1}, d_{t+1})}{(1+i_t)} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} = \frac{u_c(c_t, d_t)}{1+i_{t-1}}$$

Simplificando y despejando $u_c(c_t, d_t)$ obtenemos la **ecuación de Euler de consumo intertemporal de bienes cash**.

$$\beta u_c(c_{t+1}, d_{t+1}) \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_{t+1}} = u_c(c_t, d_t)$$

Resolución Inciso 5

Dividiendo ambos miembros de (9) por $u_c(c_t, d_t)$.

$$1 = \frac{\lambda_t}{u_c(c_t, d_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t, d_t)}$$

Reemplazando λ_t por su igual en (14).

$$1 = \frac{\frac{u_c(c_t, d_t)}{(1+i_{t-1})}}{u_c(c_t, d_t)} + \frac{\mu_t}{u_c(c_t, d_t)}$$

Despejando el cociente $\frac{\mu_t}{u_c(c_t, d_t)}$, obtenemos la **ecuación de Euler entre dinero y consumo de bienes cash**:

$$\frac{i_{t-1}}{1 + i_{t-1}} = \frac{\mu_t}{u_c(c_t, d_t)} \tag{16}$$

Resolución Inciso 5

Reemplazando a λ_t en (14) por su igual en (4) obtenemos la **ecuación de Euler entre consumo de bienes crédito y bienes cash.**

$$u_d(c_t, d_t) = \frac{u_c(c_t, d_t)}{(1 + i_{t-1})} \tag{17}$$

Despejando λ_t de (4), adelantando un período, trayendo μ_{t+1} de (12) y reemplazando las 3 expresiones en (11), obtenemos la **ecuación de Euler intertemporal de consumo de bienes crédito.**

$$\beta u_d(c_{t+1}, d_{t+1}) \frac{(1 + i_t)}{(1 + \pi_{t+1})} = u_d(c_t, d_t) \tag{18}$$