Modelo de Crecimiento de Solow-Swan

Sala-i-Martin, Capítulo 1

Vladimir Jaroszewski

FCE-UNC

2025-05-15

Contenido

1. Objetivos
2. Importancia del Crecimiento
3. Modelo de Solow-Swan
    - La Regla de Oro de acumulación de capital
    - La tasa de crecimiento a lo largo del tiempo
    - Introducción al progreso tecnológico
4. Residuo de Solow

Objetivo de la Clase

- Entender los determinantes del crecimiento económico de largo plazo.
- Analizar el papel del capital físico, el trabajo y la tecnología.

Cuadro 10.6: Evidencia América Latina

	PIB per cápita		Crecimiento medio anual					
	1950	2000	50	60	70	80	90	1950-2000
Argentina	6.430	11.006	1,4	2,3	1,4	-3,8	4,3	1,1
Bolivia	2.749	2.724	-1,5	0,6	2,0	-2,2	1,1	0,0
Brasil	1.655	7.190	3,7	4,3	5,8	-0,3	1,5	3,0
Chile*	3.367	9.926	1,5	2,2	1,2	1,3	4,9	2,2
Colombia	2.208	5.383	1,4	2,2	3,2	1,4	0,9	1,8
Ecuador*	1.637	3.468	2,3	1,4	6,3	-1,2	-0,8	1,5
México	2.990	8.762	2,9	3,3	3,3	-0,4	1,8	2,2
Perú	2.488	4.589	2,6	3,8	0,4	-3,1	2,5	1,2
Paraguay*	2.412	4.684	0,1	1,7	4,6	1,0	-0,6	1,4
Uruguay	5.278	9.622	1,1	0,4	2,7	-1,0	2,9	1,2
Venezuela	5.908	6.420	2,9	3,0	-2,7	-1,4	-0,8	0,2
Promedio	3.375	6.707	1,7	2,3	2,6	-0,9	1,6	1,4

Fuente: Penn World Table 6.1. PIB a precios internacionales en US$ de 1996.
*Datos disponibles desde 1951 hasta 2000.

¿Por qué estudiar el crecimiento económico?

- Pequeñas diferencias en tasas de crecimiento generan enormes diferencias en ingreso per cápita.
- Ejemplo: EE.UU. 1870–1990 creció al 1.75 % anual $\rightarrow$ el PIB per cápita se multiplicó por 8.
- Si la tasa hubiera sido 0.75 %, el nivel en 1990 sería similar al de México o Hungría.

Comparación hipotética de crecimiento

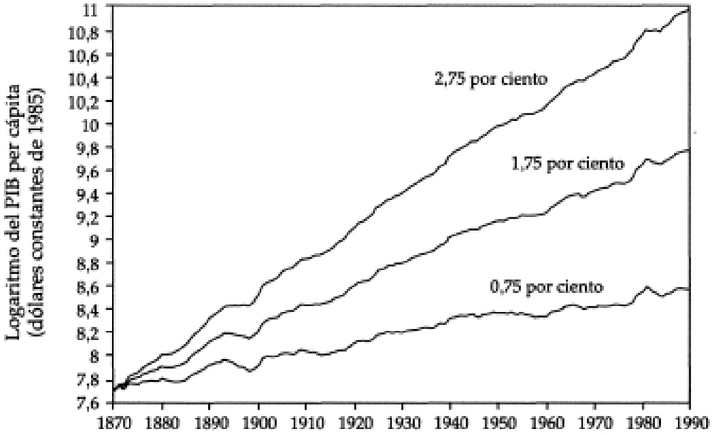


Gráfico 1. PIB hipotético bajo tres escenarios de crecimiento

Modelo Solow-Swan

- Queremos explicar las causas del crecimiento sostenido.
- No nos enfocamos en las fluctuaciones cíclicas, sino en la tendencia de largo plazo.

Factores de crecimiento

- Inversión (capital físico).
- Educación (capital humano).
- Tecnología (conocimiento).

Identidad del producto

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + NX_t$$

Supuestos del modelo:

- Economía cerrada.
- No hay gobierno.

Por lo tanto la Identidad del producto quedaria:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{1}$$

De donde se deduce la identidad Ahorro-Inversión:

$$\begin{aligned} Y_t - C_t &= I_t \\ S_t &= I_t \end{aligned}$$

Función de producción neoclásica

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t) \tag{2}$$

- K_t: capital físico
- L_t: trabajo
- A_t: tecnología (conocimiento)
- La producción puede crecer por aumentos en K, L o mejoras en A

Tenemos en cuenta la distinción entre L_t y K_t que se trata de **bienes rivales**, mientras que A_t se trata de un **bien no rival**.
Por lo que podríamos escribir:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$$

Supuestos de la función neoclásica

- Rendimientos constantes a escala:

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t, A_t) = \lambda F(K_t, L_t, A_t)$$

- Productividades marginales positivas y decrecientes:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

- Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0$$

Ejemplo: Función Cobb-Douglas

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Participación del K: $\alpha \implies$ Renta del capital $= \alpha Y_t$
- Participación del L: $(1-\alpha) \implies$ Renta del trabajo $= (1-\alpha) Y_t$
- Rendimientos constantes a escala y rendimientos marginales decrecientes

Modelo con Función Cobb-Douglas

La identidad $OA = DA$ queda igual:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$F(L_t, K_t, A_t) = C_t + I_t \tag{3}$$

Supuesto extras

- Tasa de ahorro constante s
- Tasa de depreciación constante $\delta \Rightarrow D_t = \delta K_t$

Respecto al ahorro tendríamos:

$$C_t = (1 - s)Y_t \tag{4}$$

Respecto a la Inversión tendríamos:

$$I_t = sY_t \tag{5}$$

$$I_t = \dot{K}_t + D_t \tag{6}$$

Modelo con Función Cobb-Douglas Cont.

Reemplazando las ecuaciones (4) y (5) en (3):

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$F(L_t, K_t, A_t) = (1 - s)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Despejando $\dot{K}_t$: Dinámica del capital.

$$\dot{K}_t = sF(L_t, K_t, A_t) - \delta K_t \tag{7}$$

El crecimiento del capital me determina la producción en el momento siguiente. **Hay un proceso dinámico!!.**

Crecimiento de la población

Venimos analizando el nivel del producto agregado, pero un país se considera que es rico por su **nivel de riqueza PER CAPITA**.

Ademas consideremos que **no hay progreso tecnologico** $A_t = A$.

Considerando a la *poblacion* $= L_t$, podemos dividir (6) por L_t

Ecuación de movimiento del capital:

$$\dot{k}_t = sf(k_t, A_t) - \delta k_t - nk_t \tag{8}$$

Ecuación fundamental del modelo

Operando sobre (8) obtenemos:

Ecuación fundamental del modelo

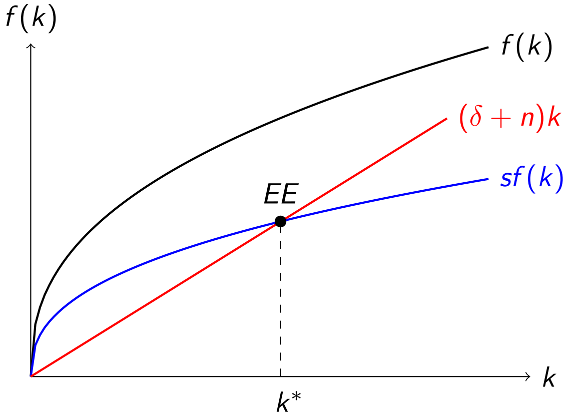
$$\dot{k}_t = s\ Ak_t^{\alpha} - (\delta + n)k_t \tag{9}$$

Lo importante de esta ecuación es que si conocemos la dinámica del stock de capital a través del tiempo, sabremos la evolución del producto per cápita $\implies$ podemos ver el crecimiento del PIB per cápita!!.

Estática comparativa:

- $\Delta s \implies \Delta \dot{k}_t$
- $\Delta \delta \implies \nabla \dot{k}_t$
- $\Delta n \implies \nabla \dot{k}_t$

Estado estacionario



Estado estacionario

En el punto donde la curva de ahorro, se intersecta con la curva de depreciaciones, llegamos al estado estacionario(**cuando las variables per capita se estabilizan**.)

- Se alcanza el estado estacionario cuando $\boxed{\dot{k}_t = 0}$

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

- En este punto, el capital per cápita se mantiene constante en el tiempo, y dado que el PIB per cápita es una función del capital, este también permanece constante.
- **Por lo que el ahorro es tal que se pueda reemplazar el capital por depreciaciones y dotar de capital a la nueva población.**

Por otro lado en términos agregados; el producto, el consumo y el capital **agregados** crecen a la tasa n.

Que nos dice el modelo??

¿Podemos sacar alguna conclusión sobre la diferencia entre países ricos y países pobres?

Tasas mas altas de ahorro llevan a una mayor inversión, por lo que se constituye un mayor stock de capital y por consiguiente una mayor producción.
$\Longrightarrow$ **el nivel de renta de estado estacionario tiene una relación directa con la tasa de ahorro.**

¿Puede pasar que la tasa de ahorro sea demasiado alta?

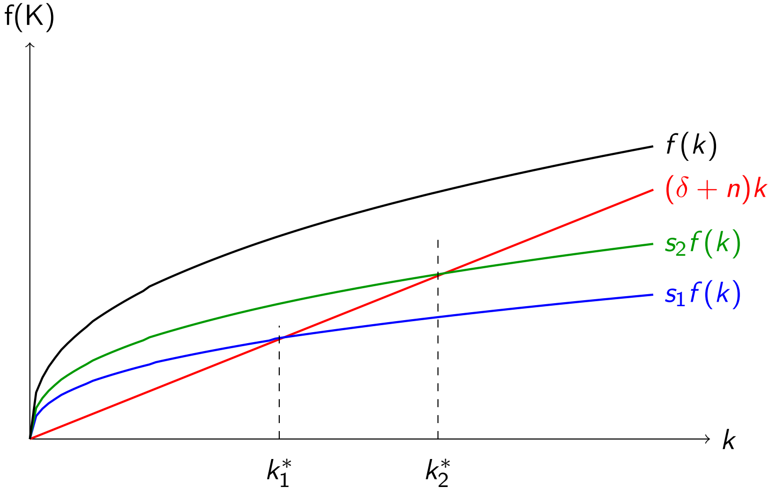
Otros efectos:

- ΔA_t llevaría que la Curva de ahorro y la función de producción se desplacen hacia arriba.
- $\Delta\delta, \Delta n$ producen un aumento en la pendiente de la curva de depreciaciones.

Cambio en la tasa de ahorro s

- Si s aumenta, la inversión $sf(k)$ se desplaza hacia arriba.
- Nuevo estado estacionario: $k^*_{nuevo} > k^*_{original}$.
- El PIB per cápita aumenta en el largo plazo, pero no crece indefinidamente.

Gráfico: Aumento en la tasa de ahorro



Regla de Oro de acumulación de capital

$k_{oro} \implies$ Es el nivel de capital por trabajador que **maximiza el consumo** en estado estacionario.
Despejando el consumo de (4) tomándola en términos per capital:

$$c_t = (1-s)f(k_t)$$
$$sf(k_t) = f(k_t) - c_t$$

e insertando en la ecuación (7), en EE ($\Delta \dot{k}_t = 0$):

$$0 = sf(k_t^*) - (\delta + n)k_t^*$$
$$0 = f(k_t^*) - c_t^* - (\delta + n)k_t^*$$

Despejando a c_t:

$$c_t^* = f(k_t^*) - (\delta + n)k_t^* \tag{10}$$

Condición de la Regla de Oro

Maximizando la ecuación (10) para encontrar la regla de oro de acumulación de capital.

- Derivamos (10) e igualamos a cero:

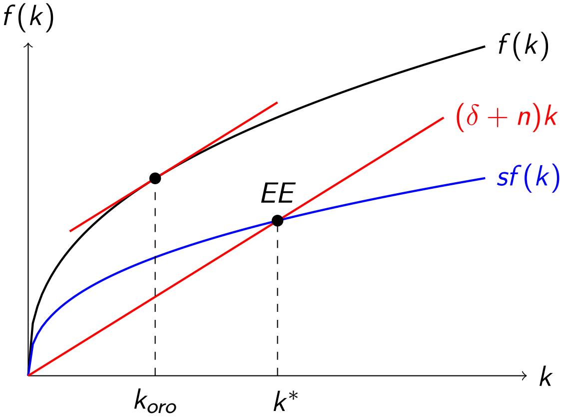
$$\frac{dc^*}{dk} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0$$

Máximo cuando: K_{oro}

$$f'(k^{oro}) = \delta + n \tag{11}$$

Recordemos que $(\delta + n)$ es la pendiente de la curva de depreciaciones. Por lo tanto la Regla de oro establece el máximo consumo **cuando la pendiente de la función de producción es igual a la pendiente de la curva de depreciaciones.**

Gráfico de la Regla de Oro



Implicancias económicas

El modelo básico de Solow no incorpora comportamiento de maximización intemporal de los agentes. **Por lo que se puede caer en una ineficiencia dinámica**.

No hay nada en el modelo que haga que la tasa de ahorro elegida por los agentes sea la que implique la regla de oro.

- Si $k^* < k^{oro}$: se puede aumentar el consumo incrementando s.
- Si $k^* > k^{oro}$: se ahorra demasiado, reducir s aumentaría el consumo.

Para el segundo caso la decisión en términos de bienestar es clara, para la primera hay que analizar el costo-beneficio intertemporal.

Esto señala que claramente ahorra/invertir demasiado es perjudicial, mientras que ahorrar/invertir poco, no necesariamente es malo.

Comportamiento del consumo al reducir $s > s_{oro}$

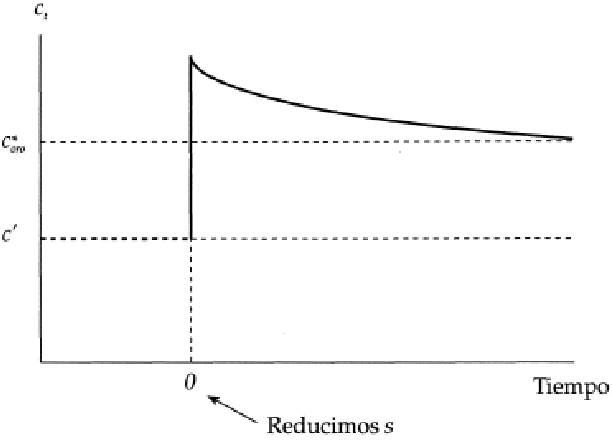


Gráfico 1.7. Comportamiento del consumo cuando se reduce s y la tasa de ahorro inicial está por encima de s_{oro}.

Implcancias de aumentar el ahorro cuando $s^* < s^{oro}$

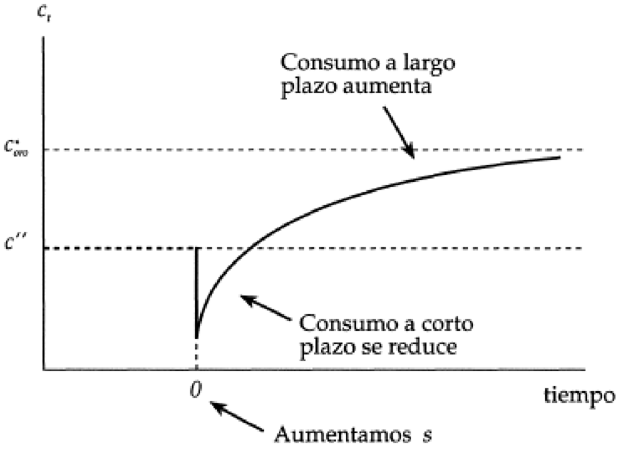


Gráfico 1.9. Comportamiento del consumo cuando se incrementa s y la tasa de ahorro inicial está por debajo de s_{oro}.

La tasa de crecimiento a lo largo del tiempo

La tasa de crecimiento de la economía se puede expresar como:

$$\gamma_y \equiv \frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} \equiv \alpha \gamma_k.$$

ya que en el caso Cobb-douglas la tasa de crecimiento del PIB es proporcional a la tasa de crecimiento del capital.
Para analizar la crecimiento del capital podemos dividir la ecuación (9) por k obteniendo:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{s\ f(k, A)}{k} - (\delta + n) \tag{12}$$

La tasa de crecimiento a lo largo del tiempo Cont.

Del lado derecho de la ecuación (12) el primer termino es el producto medio del capital multiplicado por la tasa de ahorro, este termino por condiciones de la función de producción neoclásica tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$

a largo plazo la economía debe dejar de crecer

Lo que muestra el modelo es que la economía no puede crecer continuamente a largo plazo en base a ahorrar una proporción fija del ingreso

¿Es esto algo que se corrobora empíricamente?

Progreso tecnológico

Los aumentos en la tasa de ahorro o el decrecimiento de la población no son consistentes con el crecimiento de largo plazo. ¿Pero que pasa con el **progreso tecnológico?**

- Introducimos el parámetro $A(t)$ que multiplica al trabajo: $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- Si $A(t)$ crece a tasa x.
- de modo que $\hat{L} = L_t A_t$ crecen a la tasa $(n + x)$

Para analizar en términos per capita hacemos lo mismo que antes, solo que ahora dividimos por $\hat{L}$.

Ecuación fundamental

$$\frac{d\hat{k}}{k} = s\ f(\hat{k}) - (\delta + n + x)\hat{k} \tag{13}$$

Progreso tecnológico

En este caso la tasa de crecimiento a largo plazo de la economía es:

$$\gamma_y = \gamma_k = x$$

Lo que quiere decir que en estado estacionario, el PIB per cápita y el capital crecerán al mismo ritmo que la tecnología x.
$\Rightarrow$ **debe existir progreso tecnológico!!**

Pero el progreso tecnológico en esto modelo es EXOGENO, no explica porque se produce, y es mas que no hay recursos para destinar a la I+D.

Residuo de Solow

¿Es posible medir el progreso tecnológico?

Partimos de la función de producción clásica $Y_t = A_t \; F(K_t, L_t)$

Contabilidad del crecimiento

Esta permite medir las contribuciones de los 3 componentes básicos:

- ΔK
- ΔL
- ΔA

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L} \tag{14}$$

Residuo de Solow Cont.

La expresión (14) lo que no es observable es el progreso tecnológico $\frac{\Delta A}{A}$, por lo tanto:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} \tag{15}$$

y de esta forma es posible calcular la PTF como un residuo
$\Rightarrow$ *Residuo de Solow*.

- El residuo de Solow es la porción del crecimiento del producto que no se explica por el crecimiento del capital ni del trabajo.
- Se interpreta como una medida del **progreso tecnológico total**, también llamado productividad total de los factores (PTF).

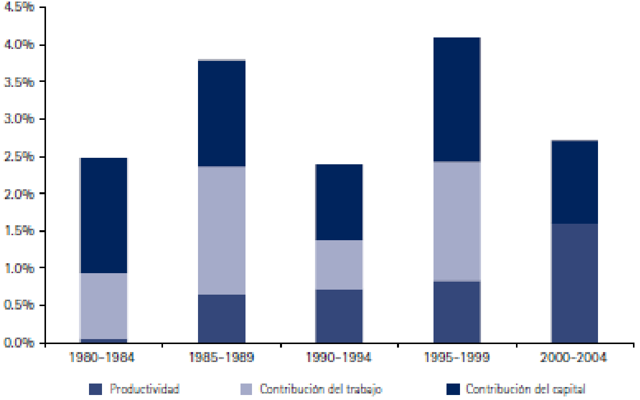
Residuo de Solow Cont.

Los resultados de los cálculos de Solow fueron fascinantes. El producto por hora-hombre se había duplicado en Estados Unidos entre 1909 y 1949. Lo más sorprendente fueron las fuentes de este crecimiento. **Tan solo el 12 % podía explicarse por la expansión del capital por trabajador, mientras que el 88 % correspondía al residuo, es decir, al progreso técnico.**

Residuo de Solow Cont.

Figura 4.3

Fuentes del crecimiento económico en Estados Unidos, 1980-2004



Fuente: The Groningen Growth and Development Centre, disponible en http://www.ggdc.net

GRACIAS!