Зрабислава Венциславова Маркова, фак. 81271

6.: Изследване втората производна (знака ѝ) за проверка на изпъкналост и вдлъбнатост на $f(x)$ (съответно растене и намаляване на $f'(x)$)!

$$f'(x) = \underbrace{-\operatorname{sign}(x)}_{const} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} \cdot x^{-2/3}$$

$x > 0 \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} \cdot x^{-2/3}$

$x < 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} \cdot x^{-2/3}$

$f''(x) =$

Нека $x > 0$!

$$f''(x) = \pm\frac{2}{3} \cdot \left(\pm\frac{4}{3} \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \pm \frac{2}{3} (x-2)^{-4/3} \cdot x^{-5/3} \right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \cdot \left(2 + \frac{x-2}{x}\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right)$$

$x^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0$

$f''(x)$ не е дефинирана в $x = 0$!

$3 - \frac{2}{x} = 0$

$\frac{3x-2}{x} = 0$

$+ \quad - \quad +$; $0 \quad \frac{2}{3}$

В интервала $(0, +\infty)$ сме.

Нека разгледаме интервала $\left(0, \frac{2}{3}\right)$:

$(x-2)^{-7/3} < 0$ и $\left(3 - \frac{2}{x}\right) < 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ и $f(x)$ е изпъкнала.

инт. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$:

$(x-2)^{-7/3} < 0$ и $\left(3 - \frac{2}{x}\right) > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ и $f(x)$ е вдлъбната.

инт. $(2, +\infty)$: $(x-2)^{-7/3} > 0$ и $\left(3 - \frac{2}{x}\right) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ и $f(x)$ е изпъкнала.

$\frac{2}{3}$ е точка, в която втората производна си сменя знака (първата расте е намаляване) и функцията изпъкналост с вдлъбнатост.

Нека $x < 0$!

$$f''(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} + \frac{2}{3} (x-2)^{-4/3} \cdot x^{-5/3} \right) =$$

$$= -\frac{4}{9} \cdot \left((x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \right) \cdot \left(2 + \frac{x-2}{x}\right) = -\frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \left(3 - \frac{2}{x}\right)$$

$$f''(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot x^{-2/3} \left(3 - \frac{2}{x}\right).$$

$(\forall x \neq 0$ и $x \neq 2)$

За $x < 0$ (*) < 0 и $(x-2)^{-7/3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) > 0$ и $f(x)$ е изпъкнала

$- \quad + \quad -$; $0 \quad \frac{2}{3}$

$\left(-\frac{4}{9} \cdot \left(3 - \frac{2}{x}\right)\right)$ (*)

За $x = \frac{2}{3}$:

Уравнение на допирателната: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) =$

$= f'\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) =$

В инт. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ графиката на f се намира под тази допирателна и е изпъкнала.

$\frac{2}{3} \approx 0{,}666667$

$= f'\left(\frac{2}{3}\right) \cdot x - \frac{2}{3} f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$

В инт. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ графиката се намира под нея и е вдлъбната.

$= -0{,}6 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot (-0{,}6) + (-0{,}8) =$

$= -0{,}6x + 0{,}4 - 0{,}8 = -0{,}6 \cdot x - 0{,}4 = -\frac{3}{5} \cdot x - \frac{2}{5}$. (доп. $(0) \approx -0{,}4$) (доп. $(1) \approx -1$)