Владиславова Венциславова Маркова, ф.н. 81271

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2|x|}}{x-2}=\frac{|x|}{(x-2)^{1/3}}$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{|x|}{(x-2)^{1/3}}=-\infty\ ;\ \lim_{x\to 2-0} f(x)=\cancel{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{|x|}{(x-2)^{1/3}}=+\infty\ ;\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$$

$x=2$ ⇓ вертикална асимптота.

③: Изследване първата производна (знака ѝ) за интервалите на растене и намаляване на $f(x)$:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2|x|}}{x-2}=(x-2)^{-1/3}\cdot(|x|)^{1/3}$$

I.: Нека $x>0$. Тогава $f(x)=(x-2)^{-1/3}\cdot x^{1/3}$ и

и $f'(x)=-\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{1/3}+\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-1/3}\cdot x^{-2/3}=$

$=-\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x-2}{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{2}{x}-1\right)=$

$=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-2)^4}}\cdot(-2)\cdot x^{-2/3}=-\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}}_{>0}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}>0$ и $x\neq 0$ ⇒

$f'(x)$ в $x=0$ не е дефинирана!

⇒ $f'(x)<0$ ∀ ~~x~~ $x\in(0,+\infty)$ ⇒ За $x\in(0,+\infty)$ $f(x)$ намалява ↓

II.: Нека $x<0$. Тогава $f(x)=-(x-2)^{-1/3}\cdot x^{1/3}$

и $f'(x)=-\left(-\frac{1}{3}(x-2)^{-4/3}\cdot x^{1/3}+\frac{1}{3}(x-2)^{-1/3}\cdot x^{-2/3}\right)=\left(\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{1/3}-\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-1/3}\cdot x^{-2/3}\right)=$

$=\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{1/3}\left(1-\frac{x-2}{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{1/3}\cdot\left(1-1+\frac{2}{x}\right)=$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}\cdot\underbrace{x^{1/3}\cdot\frac{1}{x}}_{x^{-2/3}}=\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}}_{>0}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}>0$ и $x\neq 0$ ⇒

⇒ $f'(x)>0$ ∀ $x\in(-\infty,0)$ ⇒ За $x\in(-\infty,0)$ $f(x)$ расте ↗.

$$f'(x)=-\operatorname{sign}(x)\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-2)^{-4/3}\cdot x^{-2/3}$$