

Здравейте Венцислав Марков, офи. 81241

6. Изследване втората производна (знака ѝ) за проверка на изпъкналост и вдлъбнатост на  $f(x)$  (съответно растежа и намаляването  $f(x)$ ).

$$f'(x) = \underbrace{-\text{sign}(x)}_{\text{const}} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} x^{-2/3}$$

$$f''(x) = \dots$$

Лево

$x > 0$ !  $f''(x) = \frac{+2}{3} \cdot \left( \frac{+4}{3} \cdot (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} + \frac{2}{3} (x-2)^{-4/3} x^{-5/3} \right) =$

$$= \frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} \cdot \left( 2 + \frac{x-2}{x} \right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} \cdot \underbrace{x^{-2/3}}_{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} \cdot \left( 3 - \frac{2}{x} \right)$$

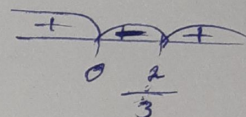
$$x > 0 \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} x^{-2/3}$$

$$x < 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-4/3} x^{-2/3}$$

$f''(x)$  не е дефинирано в  $x=0$ !

$$3 - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{3x-2}{x} = 0$$



В интервала  $(0, +\infty)$  сме.

Лево разглеждаме интервала  $(0, \frac{2}{3})$ :

$(x-2)^{-7/3} < 0$  и  $(3 - \frac{2}{x}) < 0$  и  $f''(x) > 0$  и  $f(x)$  е изпъкнала.

или  $(\frac{2}{3}, 2)$ :

$(x-2)^{-7/3} < 0$  и  $(3 - \frac{2}{x}) > 0$  и  $f''(x) < 0$  и  $f(x)$  е вдлъбната.

или  $(2, +\infty)$ :  $(x-2)^{-7/3} > 0$  и  $(3 - \frac{2}{x}) > 0$  и  $f''(x) > 0$  и  $f(x)$  е изпъкнала.

$\frac{2}{3}$  е точка, в която втората производна си сменя знака (първото равие е намаляване) и функцията - изпъкналост с вдлъбнатост.

Лево  $x < 0$ !  $f''(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{4}{3} (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} + \frac{2}{3} (x-2)^{-4/3} x^{-5/3} \right) =$

$$= -\frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} \cdot \left( 2 + \frac{x-2}{x} \right) = -\frac{4}{9} \cdot (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} \cdot \left( 3 - \frac{2}{x} \right)$$

$$f''(x) = \text{sign}(x) \cdot (x-2)^{-7/3} x^{-2/3} \left( 3 - \frac{2}{x} \right) \quad \text{За } x < 0 \oplus < 0 \text{ и } (x-2)^{-7/3} < 0 \Rightarrow$$

$(\forall x \neq 0 \text{ и } x \neq 2)$   $\Rightarrow f''(x) > 0$  и  $f(x)$  е изпъкнала

За  $x = \frac{2}{3}$ :

$$\text{Хордентата на допирателната в } y = f'(x_0) \cdot (x-x_0) + f(x_0) =$$

$$= f'(\frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{2}{3}) + f(\frac{2}{3})$$

$$\frac{2}{3} \approx 0.666667 \left\{ \begin{aligned} &= f'(\frac{2}{3}) \cdot x - \frac{2}{3} f'(\frac{2}{3}) + f(\frac{2}{3}) \\ &= 0.6 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot (-0.6) + (-0.8) = 0.6x - 0.4 = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \end{aligned} \right.$$

В инт.  $(0, \frac{2}{3})$  производната на  $f$  се намалява и е изпъкнала.  $\checkmark$   
тази допирателна е изпъкнала.  $\checkmark$   
В инт.  $(\frac{2}{3}, 2)$  производната се намалява по-малко и е вдлъбната.  $\checkmark$   
В инт.  $(2, +\infty)$  производната се намалява по-малко и е изпъкнала.  $\checkmark$

