

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной  
физики

**Отчет по лабораторной работе №1  
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2024

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Необходимая теория</b>	<b>2</b>
2.1	Интервальная арифметика . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
3.1	Алгоритм поиска минимального $\alpha$ . . . . .	3
3.2	Результаты вычислений . . . . .	4
3.3	Итоговые результаты . . . . .	4
3.4	Нахождение точечной матрицы $A'$ . . . . .	4
3.5	Скорость сходимости . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>6</b>

## 1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$Ax = b, \quad x = (x_1, x_2)$$

с матрицей

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Пусть матрица радиусов для  $A$  имеет вид

$$\text{rad}A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимо:

- Найти диапазон значений  $\alpha$ , при которых  $0 \in \det A$ ;
- Для минимального значения радиуса матричных элементов  $\min \alpha$  найти точечную матрицу  $A'$ :

$$\det A' = 0.$$

## 2 Необходимая теория

Интервалом вещественной оси  $[a, b]$ , называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами  $a$  и  $b$  включая их самих, т.е.

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \quad (1)$$

При этом  $a$  и  $b$  называются концами интервала.

### 2.1 Интервальная арифметика

Развернутые формулы основных арифметических операций для интервалов:

#### 1. Сложение

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}], \quad (2)$$

#### 2. Вычитание

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \quad (3)$$

#### 3. Умножение

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}\}, \max\{\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}\}], \quad (4)$$

#### 4. Деление

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}], \quad 0 \notin \mathbf{y}. \quad (5)$$

Формулы для характеристик интервала:

1. **Средняя точка**

$$\text{mid } \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}}). \quad (6)$$

2. **Ширина**

$$\text{wid } \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}. \quad (7)$$

3. **Радиус**

$$\text{rad } \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}). \quad (8)$$

### 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-analysis>

#### 3.1 Алгоритм поиска минимального $\alpha$

В ходе выполнения работы было найдено минимальное значение параметра  $\alpha$ , при котором определитель интервальной матрицы  $A$  включает ноль ( $0 \in \det A$ ).

Для нахождения минимального значения  $\alpha$  использовался итеративный метод с переменным шагом:

1. **Начальный этап:**

- Стартовое значение:  $k = 0$ ,  $\alpha_0 = e^0 = 1$ .
- На каждой итерации значение  $\alpha_k$  увеличивается по формуле:

$$\alpha_k = e^k$$

- Процесс продолжается, пока  $0 \notin \det A$ .

2. **Уточнение значения:**

- Задаем точность  $\varepsilon > 0$ .
- Принимаем  $a_0 = 0$  и  $b_0 = \alpha_0$ .
- Находим  $\alpha_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ .
- Если  $0 \in \det A$ , то  $b_{k+1} = \alpha_{k+1}$ , иначе  $a_{k+1} = \alpha_{k+1}$ .
- Процесс продолжается, пока  $b - a > \varepsilon$ .
- Если  $b - a \leq \varepsilon$ , возвращаем  $\frac{a_k + b_k}{2}$ .

### 3.2 Результаты вычислений

k	$\alpha_k$	$\det A_k$
0	0.50000	$[-1.90000, 2.10000]$
1	0.25000	$[-0.90000, 1.10000]$
2	0.12500	$[-0.40000, 0.60000]$
3	0.06250	$[-0.15000, 0.35000]$
4	0.03125	$[-0.02500, 0.22500]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	0.02499	$[0.00002, 0.19998]$
15	0.02500	$[-0.00004, 0.20004]$
16	0.02500	$[-0.00000, 0.20000]$

Таблица 1: Итерационный процесс при  $\varepsilon = 10^{-5}$

Итерационный процесс представлен в таблице 1. Из таблицы видно, что на 16-й итерации было найдено значение  $\alpha$  при заданной точности:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

### 3.3 Итоговые результаты

Минимальное значение параметра регуляризации:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

При этом интервальная матрица  $A$  имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} [1.025, 1.075] & [0.925, 0.975] \\ [0.975, 1.025] & [0.975, 1.025] \end{bmatrix}$$

Определитель данной матрицы составляет:

$$\det(A) = [0.0, 0.2]$$

Диапазон значений  $\alpha$ , при котором определитель интервальной матрицы  $A$  включает ноль, составляет:

$$\alpha \in [0.025, +\infty)$$

### 3.4 Нахождение точечной матрицы $A'$

Для найденного минимального значения  $\alpha_{min}$  была определена точечная матрица  $A'$ , принадлежащая интервальной матрице  $A$ , такая, что  $\det A' = 0$ .

Точечная матрица  $A'$  имеет вид:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, так как её строки линейно зависимы, и определитель равен нулю.

### 3.5 Скорость сходимости

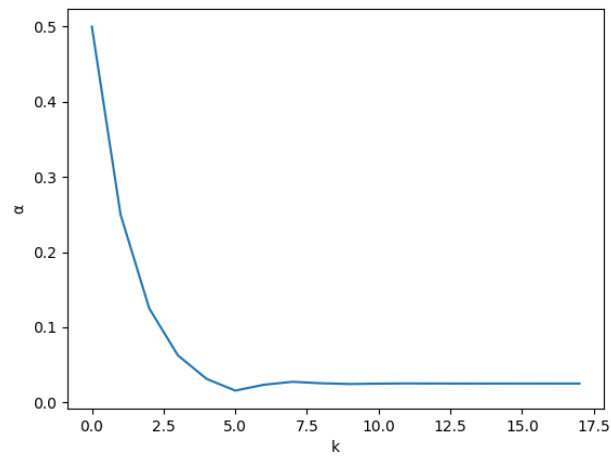


Рис. 1: Зависимость значения  $\alpha$  от номера итерации  $k$

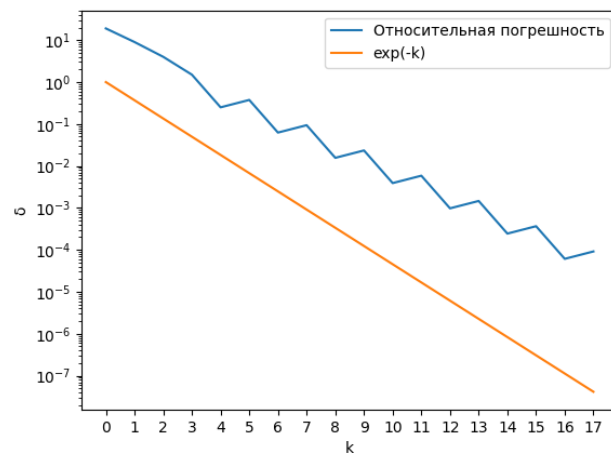


Рис. 2: Относительная погрешность  $\delta$  от номера итерации  $k$

Из графика 2 следует, что относительная погрешность уменьшается с темпом, близким к  $\exp(-k)$ .

## 4 Обсуждение

### 1. Физическая интерпретация

Матрица  $A'$  представляет собой матрицу, формируемую при минимальном значении радиуса матричных элементов  $\delta$ . Это минимальное значение радиуса соответствует моменту, когда матрица  $A$  теряет свою обратимость, и  $\det A' = 0$ . Следовательно, система уравнений становится вырожденной, что означает наличие бесконечного множества решений. В физическом смысле это указывает на то, что данные, полученные с двух ракурсов, недостаточны для точной реконструкции объекта, поскольку отсутствует информация для однозначного решения.

### 2. Чувствительность при минимальном радиусе

При минимальном радиусе матричных элементов формируется точечная матрица  $A'$ , которая представляет собой границу множества возможных матриц  $A$ , описывающих интервал неопределенности. Система становится чувствительной к незначительным возмущениям в данных. Любое изменение исходных данных может существенно повлиять на результат реконструкции, что усложняет задачу томографии в условиях реальных данных с шумами.

### 3. Практические соображения

В практической томографии часто используется большее количество ракурсов, чем два, для улучшения условий задачи и предотвращения ситуации, когда  $\det A' = 0$ . В задачах с ограниченным числом ракурсов проблема вырожденности матрицы возникает часто, поэтому такие задачи требуют применения специальных методов, учитывающих неоднозначность.

## 5 Выводы

В ходе лабораторной работы была построена интервальная матрица  $A$  размером  $2 \times 2$  следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} [1.05 - \alpha, 1.05 + \alpha] & [0.95 - \alpha, 0.95 + \alpha] \\ [1 - \alpha, 1 + \alpha] & [1 - \alpha, 1 + \alpha] \end{bmatrix}$$

Для данной матрицы был вычислен диапазон значений  $\alpha$ , при которых определитель интервальной матрицы включает ноль, что соответствует состоянию вырождения матрицы. Минимальное значение  $\alpha = 0.025$  было установлено с использованием итерационного алгоритма с переменным шагом.

При этом было установлено, что при значении  $\alpha = 0.025$  интервальный определитель матрицы принимает значения в интервале  $[0.0, 0.2]$ , что включает ноль. Следовательно, это значение  $\alpha$  является минимальным, при котором матрица  $A$  становится вырожденной.

Для минимального значения  $\alpha$  была найдена точечная матрица  $A'$ , принадлежащая интервальной матрице  $A$ , такая, что:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, поскольку её строки линейно зависимы, и её определитель равен нулю.

В общем случае, если матрица  $A$  представляет собой матрицу линейной регрессии, она может иметь размерность  $2 \times N$  (где  $N \geq 2$ ) и не быть квадратной. В таких случаях для анализа необходимо рассматривать всевозможные квадратные подматрицы и для каждой подбирать своё значение  $\alpha$ , при котором эти матрицы будут неособенными (невырожденными). Затем, пересечение всех найденных матриц позволяет получить итоговую регуляризованную матрицу, которая удовлетворяет условиям задачи и может быть использована для дальнейшего анализа или вычислений.