

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

**Отчет по лабораторной работе №3
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Необходимая теория	2
2.1	Интервальная мода	2
2.2	Интервальная медиана Крейновича	3
2.3	Интервальная медиана Пролубникова	3
2.4	Коэффициент Жаккара	3
3	Реализация	4
3.1	Поиск параметров, при которых функционал достигал наибольших значений . .	4
4	Результаты	4
5	Выводы	4

1 Постановка задачи

Даны 2 интервальных выборки

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}. \quad (2)$$

Взять \mathbf{X}, \mathbf{Y} из файлов данных, задав $\text{rad}\mathbf{x} = \text{rad}\mathbf{y} = \frac{1}{2^N}B$, $N = 14$.

Файлы данных:

- *-0.205_lvl_side_a_fast_data.bin*
- *0.225_lvl_side_a_fast_data.bin*

Связь кодов данных и B :

$$V = N/16384 - 0.5$$

Сделать оценки констант a , t в уравнениях:

$$\mathbf{X} + a = \mathbf{Y}, \quad (3)$$

$$t\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (4)$$

Метод решения:

$$\hat{a} = \operatorname{argmax} F(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (5)$$

где F — функционал.

В качестве функционала взять варианты:

$$J_i(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (6)$$

$$J_i(a, \text{mode}\mathbf{X}, \text{mode}\mathbf{Y}), \quad (7)$$

$$J_i(a, \text{med}_K\mathbf{X}, \text{med}_K\mathbf{Y}), \quad (8)$$

$$J_i(a, \text{med}_P\mathbf{X}, \text{med}_P\mathbf{Y}), \quad (9)$$

где J_i — коэффициент Жаккара, mode — интервальная мода, med_K , med_P — интервальные медианы Крейновича и Пролубникова.

Сделать точечные и интервальные оценки, задавшись уровнем α .

2 Необходимая теория

2.1 Интервальная мода

Пусть имеется интервальная выборка

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}.$$

Сформируем массив интервалов \mathbf{z} из концов интервалов \mathbf{X} .

Для каждого интервала \mathbf{z}_i подсчитываем число μ_i интервалов из выборки \mathbf{X}_i , включающих \mathbf{z}_i . Максимальные $\mu_i = \max \mu$ достигаются для индексного множества K . Тогда можно найти интервальную моду как мультиинтервал

$$\text{mode}\mathbf{X} = \bigcup_{k \in K} \mathbf{z}_k. \quad (10)$$

2.2 Интервальная медиана Крейновича

Пусть дана выборка $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$. Пусть $\underline{c} = \{\underline{\mathbf{x}}_i\}$, $\bar{c} = \{\bar{\mathbf{x}}_i\}$ — конфигурация точек, составленные, соответственно, из левых и правых концов интервалов из \mathbf{X} .

Тогда медианой Крейновича $\text{med}_K \mathbf{X}$ интервальной выборки \mathbf{X} — это интервал

$$\text{med}_K = [\text{med}_c, \text{med}_{\bar{c}}]. \quad (11)$$

2.3 Интервальная медиана Пролубникова

Зададим отношение порядка на алгебре \mathbb{IR} . Говорят, что неравенство $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ выполняется

1. в сильном смысле, если $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \bar{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$,
2. в слабом смысле, если $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$,
3. в $\forall\exists$ -смысле, если $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$,
4. в $\exists\forall$ -смысле, если $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$,
5. в центральном смысле, если $(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})/2 \leq (\bar{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}})/2$

Для элементов выборки \mathbf{X} можно определить линейный порядок, используя любой из пяти вышеуказанных отношений порядка на \mathbb{IR} . То есть, если $i \neq j$, то либо $x_i \leq x_j$, либо $x_i \geq x_j$ для любого из этих отношений порядка.

Медиана Пролубникова $\text{med}_P \mathbf{X}$ выборки \mathbf{X} — это интервал \mathbf{x}_m , для которого половина интервалов из \mathbf{X} лежит слева, а половина — справа.

В ситуации, когда имеются два элемента подинтервала \mathbf{x}_m и \mathbf{x}_{m+1} , расположенных посередине вариационного ряда, $\mathbf{x}_m \neq \mathbf{x}_{m+1}$ медиана может быть определена естественным обобщением взятия полусуммы точечных значений, расположенных посередине ряда из точечных значений, в случае интервальной выборки взятие полусуммы интервалов \mathbf{x}_m и \mathbf{x}_{m+1} :

$$\text{med}_P \mathbf{X} = (\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m+1})/2. \quad (12)$$

2.4 Коэффициент Жаккара

Коэффициент Жаккара для двух интервалов:

$$\text{Ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{wid}(x \wedge y)}{\text{wid}(x \vee y)} = \frac{\min\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}{\max\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\} - \min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}. \quad (13)$$

Коэффициент Жаккара для множества интервалов:

$$\text{Ji}(\mathbf{X}) = \frac{\min \bar{\mathbf{x}}_i - \max \underline{\mathbf{x}}_i}{\max \bar{\mathbf{x}}_i - \min \underline{\mathbf{x}}_i}. \quad (14)$$

Коэффициент Жаккара для двух множеств интервалов:

$$\text{Ji}_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\min\{\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{y}}_k\}}{\max\{\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k\} - \min\{\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{y}}_k\}}, \quad k = 1, 2, \dots, |\mathbf{X}|. \quad (15)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-analysis>

3.1 Поиск параметров, при которых функционал достигал наибольших значений

Для поиска параметров, при которых функционал достигал наибольших значений, был использован алгоритм троичного поиска с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ на участках, где функции вели себя как унимодальные.

4 Результаты

Для функционала 6:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34278 \pm 0.0005, \quad F_1(\hat{a}) = -0.94918, \\ \hat{t} &= -1.01467 \pm 0.0005, \quad F_1(\hat{t}) = -0.92734.\end{aligned}$$

Для функционала 7:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34023 \pm 0.0005, \quad F_2(\hat{a}) = -0.25437, \\ \hat{t} &= -0.99871 \pm 0.0005, \quad F_2(\hat{t}) = -0.92750.\end{aligned}$$

Для функционала 8:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34415 \pm 0.0005, \quad F_3(\hat{a}) = -0.00184, \\ \hat{t} &= -1.00607 \pm 0.0005, \quad F_3(\hat{t}) = 0.63020.\end{aligned}$$

Для функционала 9:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34366 \pm 0.0005, \quad F_4(\hat{a}) = -0.12457, \\ \hat{t} &= -1.00607 \pm 0.0005, \quad F_4(\hat{t}) = 0.63021.\end{aligned}$$

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы оценки параметров в уравнениях с интервальными данными. Используя различные функционалы, такие как коэффициент Жаккара, были найдены оптимальные значения параметров \hat{a} и \hat{t} для уравнений $\mathbf{X} + a = \mathbf{Y}$ и $t\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Результаты показали, что:

1. Значения параметров \hat{a} и \hat{t} варьируются в зависимости от выбранного функционала. Это демонстрирует важность выбора подходящего критерия оптимальности для конкретной задачи интервального анализа.

2. Наиболее стабильные результаты были получены для функционала 8, где значение \hat{t} показало положительное значение коэффициента Жаккара, что указывает на высокий уровень совпадения интервалов.
3. Выбор интервальной моды и медиан (Крейновича и Пролубникова) как статистических характеристик позволил получить более точные оценки параметров, что подчеркивает их значимость в анализе интервальных данных.

Таким образом, проведенная работа продемонстрировала применимость и эффективность интервального анализа в задачах оценки параметров, а также подчеркнула важность выбора подходящих методов и инструментов для анализа данных.