Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

Отчет по лабораторной работе №2
“Интервальный анализ”

Выполнили студент группы 5030102/10201: Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},\ x = (x_1, x_2) \tag{1}$$

с матрицей 2 и вектором правой части 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала $\mathrm{Tol}(x)$ для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти argmax Tol и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ 2 — b-коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ 2 — A-коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab-коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала $\mathrm{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить argmax Tol и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

2 Необходимая теория

2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная $m \times n$ матрица $\mathbf{A}$ и интервальный аетор правой части $\mathbf{b}$.

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множетсво

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A}\ \exists b \in \mathbf{b} :\ Ax = b\}. \tag{4}$$

Функционалом $\mathrm{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m\times n} \times \mathbb{IR}^m \to \mathbb{R}$ называется выражение

$$\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \overset{\mathrm{def}}{=} \min_{1\le i\le m} \left\{ \mathrm{rad}\mathbf{b}_i - \left| \mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \tag{5}$$

Тогда принадлежность $x \in \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \ge 0$, то есть допусковое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \ge 0\}$$

функционала Tol.

2.2 b-коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица $\mathbf{A}$ ИСЛАУ неизменна, и значения $\mathrm{mid}\mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$ зафиксированы. Тогда расширение вектора $\mathbf{b}$ путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e},\ K \ge 0,\ \mathbf{e} = ([-1, 1], \ldots, [-1, 1])^T \tag{6}$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознаю- щего функционала $\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием argmax Tol — положение точки T — не изменится.

2.3 A-коррекция ИСЛАУ

A-коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в замене матрицы $\mathbf{A}$ ее интервальной матрицей $\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}$ такой, что

$$\mathrm{rad}(\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}) < \mathrm{rad}\mathbf{A},\ \mathrm{mid}(\mathbf{A}\ominus\mathbf{E}) = \mathrm{mid}\mathbf{A},\ \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

3 Реализаця

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-anylysis

3.1 Алгоритм проверки непустоты допускового множества ИСЛАУ

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — интервальная матрица, а $\mathbf{b}$ — интервальный вектор. Необходимо определить, является ли допусковое множество решений $\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непустым. Для этого используется следующий алгоритм:

Начальные параметры:

- $\varepsilon > 0$ — заданная точность для определения максимума функции толерантности.

- x_0 — начальное приближение, составляется из средних значений интервалов mid$\mathbf{A}$ и mid$\mathbf{b}$.

Алгоритм:

1. Вычисляем начальное приближение x_0 путём решения системы $\mathrm{mid}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathrm{mid}(\mathbf{b})$,
2. Используем метод оптимизации (например, квазиньютоновские методы) для нахождения минимума функции $-\mathrm{Tol}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, начиная с точки $\mathbf{x}_0$ с точностью ε.
3. Если изменение значения функции между итерациями становится меньше ε, останавливаем поиск максимума.
4. Если найденное максимальное значение $\mathrm{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geqslant 0$, где x^* — найденная точка максимума, то допусковое множество $\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. В противном случае, пусто.

3.2 Результаты вычислений

Заданная точность последующих результатов: $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix},$$
$$x^* = (1, 2)^T,$$
$$\mathrm{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допусковое множество — пустое.}$$

2.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix},$$
$$x^* = (1, 2)^T,$$
$$\mathrm{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допусковое множество — пустое.}$$

3.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix},$$
$$x^* = (1, 2)^T,$$
$$\mathrm{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допусковое множество — пустое.}$$

4 Обсуждение

5 Выводы