

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной  
физики

**Отчет по лабораторной работе №3  
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Необходимая теория</b>	<b>2</b>
2.1	Интервальная мода . . . . .	2
2.2	Интервальная медиана Крейновича . . . . .	3
2.3	Интервальная медиана Пролубникова . . . . .	3
2.4	Коэффициент Жаккара . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>4</b>
3.1	Поиск параметров, при которых функционал достигал наибольших значений . .	4
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>4</b>

# 1 Постановка задачи

Даны 2 интервальных выборки

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}. \quad (2)$$

Взять  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  из файлов данных, задав  $\text{rad}\mathbf{x} = \text{rad}\mathbf{y} = \frac{1}{2^N}B$ ,  $N = 14$ .

Файлы данных:

- *-0.205\_lvl\_side\_a\_fast\_data.bin*
- *0.225\_lvl\_side\_a\_fast\_data.bin*

Связь кодов данных и  $B$ :

$$V = N/16384 - 0.5$$

Сделать оценки констант  $a$ ,  $t$  в уравнениях:

$$\mathbf{X} + a = \mathbf{Y}, \quad (3)$$

$$t\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (4)$$

Метод решения:

$$\hat{a} = \operatorname{argmax} F(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (5)$$

где  $F$  — функционал.

В качестве функционала взять варианты:

$$J_i(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (6)$$

$$J_i(a, \text{mode}\mathbf{X}, \text{mode}\mathbf{Y}), \quad (7)$$

$$J_i(a, \text{med}_K\mathbf{X}, \text{med}_K\mathbf{Y}), \quad (8)$$

$$J_i(a, \text{med}_P\mathbf{X}, \text{med}_P\mathbf{Y}), \quad (9)$$

где  $J_i$  — коэффициент Жаккара,  $\text{mode}$  — интервальная мода,  $\text{med}_K$ ,  $\text{med}_P$  — интервальные медианы Крейновича и Пролубникова.

Сделать точечные и интервальные оценки, задавшись уровнем  $\alpha$ .

## 2 Необходимая теория

### 2.1 Интервальная мода

Пусть имеется интервальная выборка

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}.$$

Сформируем массив интервалов  $\mathbf{z}$  из концов интервалов  $\mathbf{X}$ .

Для каждого интервала  $\mathbf{z}_i$  подсчитываем число  $\mu_i$  интервалов из выборки  $\mathbf{X}_i$ , включающих  $\mathbf{z}_i$ . Максимальные  $\mu_i = \max \mu$  достигаются для индексного множества  $K$ . Тогда можно найти интервальную моду как мультиинтервал

$$\text{mode}\mathbf{X} = \bigcup_{k \in K} \mathbf{z}_k. \quad (10)$$

## 2.2 Интервальная медиана Крейновича

Пусть дана выборка  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$ . Пусть  $\underline{c} = \{\underline{\mathbf{x}}_i\}$ ,  $\bar{c} = \{\bar{\mathbf{x}}_i\}$  — конфигурация точек, составленные, соответственно, из левых и правых концов интервалов из  $\mathbf{X}$ .

Тогда медианой Крейновича  $\text{med}_K \mathbf{X}$  интервальной выборки  $\mathbf{X}$  — это интервал

$$\text{med}_K = [\text{med}_c, \text{med}_{\bar{c}}]. \quad (11)$$

## 2.3 Интервальная медиана Пролубникова

Зададим отношение порядка на алгебре  $\mathbb{IR}$ . Говорят, что неравенство  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  выполняется

1. в сильном смысле, если  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \bar{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ ,
2. в слабом смысле, если  $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ ,
3. в  $\forall\exists$ -смысле, если  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ ,
4. в  $\exists\forall$ -смысле, если  $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ ,
5. в центральном смысле, если  $(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})/2 \leq (\bar{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}})/2$

Для элементов выборки  $\mathbf{X}$  можно определить линейный порядок, используя любое из пяти вышеуказанных отношений порядка на  $\mathbb{IR}$ . То есть, если  $i \neq j$ , то либо  $x_i \leq x_j$ , либо  $x_i \geq x_j$  для любого из этих отношений порядка.

Медиана Пролубникова  $\text{med}_P \mathbf{X}$  выборки  $\mathbf{X}$  — это интервал  $\mathbf{x}_m$ , для которого половина интервалов из  $\mathbf{X}$  лежит слева, а половина — справа.

В ситуации, когда имеются два элемента подинтервала  $\mathbf{x}_m$  и  $\mathbf{x}_{m+1}$ , расположенных посередине вариационного ряда,  $\mathbf{x}_m \neq \mathbf{x}_{m+1}$  медиана может быть определена естественным обобщением взятия полусуммы точечных значений, расположенных посередине ряда из точечных значений, в случае интервальной выборки взятие полусуммы интервалов  $\mathbf{x}_m$  и  $\mathbf{x}_{m+1}$ :

$$\text{med}_P \mathbf{X} = (\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m+1})/2. \quad (12)$$

## 2.4 Коэффициент Жаккара

Коэффициент Жаккара для двух интервалов  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$  и  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}$ :

$$\text{Ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{wid}(x \wedge y)}{\text{wid}(x \vee y)} = \frac{\min\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}{\max\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\} - \min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}. \quad (13)$$

Коэффициент Жаккара для множества интервалов  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ :

$$\text{Ji}(\mathbf{X}) = \frac{\min \bar{\mathbf{x}}_i - \max \underline{\mathbf{x}}_i}{\max \bar{\mathbf{x}}_i - \min \underline{\mathbf{x}}_i}. \quad (14)$$

Коэффициент Жаккара для двух множеств интервалов  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  и  $\mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^n$ :

$$\text{Ji}_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\min\{\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{y}}_k\}}{\max\{\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k\} - \min\{\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{y}}_k\}}, \quad k \in 1, 2, \dots, |\mathbf{X}|. \quad (15)$$

### 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-analysis>

#### 3.1 Поиск параметров, при которых функционал достигал наибольших значений

Для поиска параметров, при которых функционал достигал наибольших значений, был использован алгоритм троичного поиска с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  на участках, где функции вели себя как унимодальные.

### 4 Результаты

Для функционала 6:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34601 \pm 0.0005, \quad F_1(\hat{a}) = -0.94918, \\ \hat{t} &= -1.05038 \pm 0.0005, \quad F_1(\hat{t}) = -0.92734.\end{aligned}$$

Для функционала 7:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34675 \pm 0.0005, \quad F_2(\hat{a}) = -0.25437, \\ \hat{t} &= -1.03947 \pm 0.0005, \quad F_2(\hat{t}) = -0.92750.\end{aligned}$$

Для функционала 8:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34406 \pm 0.0005, \quad F_3(\hat{a}) = -0.00184, \\ \hat{t} &= -1.02773 \pm 0.0005, \quad F_3(\hat{t}) = 0.63020.\end{aligned}$$

Для функционала 9:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 0.34406 \pm 0.0005, \quad F_4(\hat{a}) = -0.12457, \\ \hat{t} &= -1.02773 \pm 0.0005, \quad F_4(\hat{t}) = 0.63021.\end{aligned}$$

### 5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы оценки параметров в уравнениях с интервальными данными. Используя различные функционалы, такие как коэффициент Жаккара, были найдены оптимальные значения параметров  $\hat{a}$  и  $\hat{t}$  для уравнений  $\mathbf{X} + a = \mathbf{Y}$  и  $t\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ .

Результаты показали, что:

1. Значения параметров  $\hat{a}$  и  $\hat{t}$  варьируются в зависимости от выбранного функционала. Это демонстрирует важность выбора подходящего критерия оптимальности для конкретной задачи интервального анализа.

2. Наиболее стабильные результаты были получены для функционала 8, где значение  $\hat{t}$  показало положительное значение коэффициента Жаккара, что указывает на высокий уровень совпадения интервалов.
3. Выбор интервальной моды и медиан (Крейновича и Пролубникова) как статистических характеристик позволил получить более точные оценки параметров, что подчеркивает их значимость в анализе интервальных данных.

Таким образом, проведенная работа продемонстрировала применимость и эффективность интервального анализа в задачах оценки параметров, а также подчеркнула важность выбора подходящих методов и инструментов для анализа данных.