

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

**Отчет по лабораторной работе №2
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Постановка задачи | 2 |
| 2 | Необходимая теория | 2 |
| 2.1 | Допусковое множество | 2 |
| 2.2 | b -коррекция ИСЛАУ | 3 |
| 2.3 | A -коррекция ИСЛАУ | 3 |
| 2.4 | Ab -коррекция ИСЛАУ | 3 |
| 3 | Реализация | 3 |
| 3.1 | Алгоритм проверки непустоты допускового множества ИСЛАУ | 4 |
| 3.2 | Результаты вычислений | 4 |
| 4 | Обсуждение | 6 |
| 5 | Выводы | 6 |

1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad x = (x_1, x_2) \quad (1)$$

с матрицей и вектором правой части:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала $\text{Tol}(x)$ для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти $\arg\max \text{Tol}$ и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ — b -коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ — A -коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab -коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала $\text{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить $\arg\max \text{Tol}$ и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

2 Необходимая теория

2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная $m \times n$ матрица \mathbf{A} и интервальный вектор правой части \mathbf{b} .

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} \exists b \in \mathbf{b} : Ax = b\}. \quad (5)$$

Функционалом $\text{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется выражение

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad} \mathbf{b}_i - \left| \text{mid} \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (6)$$

Тогда принадлежность $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, то есть допустовое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol .

2.2 b -коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица \mathbf{A} ИСЛАУ неизменна, и значения $\text{mid} \mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$ зафиксированы. Тогда расширение вектора \mathbf{b} путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (7)$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием $\arg\max \text{Tol}$ — положение точки T — не изменится.

2.3 A -коррекция ИСЛАУ

A -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в замене матрицы \mathbf{A} ее интервальной матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ такой, что

$$\text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) < \text{rad} \mathbf{A}, \quad \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) = \text{mid} \mathbf{A}, \quad \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

2.4 Ab -коррекция ИСЛАУ

Ab -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в комбинированном применении A -коррекции и b -коррекции, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы A , второй этап — уширение вектора правой части b .

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-analysis>

3.1 Алгоритм проверки непустоты допускового множества ИСЛАУ

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, где \mathbf{A} — интервальная матрица, а \mathbf{b} — интервальный вектор. Необходимо определить, является ли допусковое множество решений $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непустым. Для этого используется следующий алгоритм:

Начальные параметры:

- $\varepsilon > 0$ — заданная точность для определения максимума функции толерантности.
- x_0 — начальное приближение, составляется из средних значений интервалов $\text{mid}\mathbf{A}$ и $\text{mid}\mathbf{b}$.

Алгоритм:

1. Вычисляем начальное приближение x_0 путём решения системы $\text{mid}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \text{mid}(\mathbf{b})$,
2. Используем метод оптимизации (например, квазиньютоновские методы) для нахождения минимума функции $-\text{Tol}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, начиная с точки \mathbf{x}_0 с точностью ε .
3. Если изменение значения функции между итерациями становится меньше ε , останавливаем поиск максимума.
4. Если найденное максимальное значение $\text{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, где x^* — найденная точка максимума, то допусковое множество $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто. В противном случае, пусто.

3.2 Результаты вычислений

Заданная точность последующих результатов: $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix},$$

$$x^* = (1, 2)^T,$$

$$\text{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допусковое множество} — \text{пустое.}$$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix},$$

$$x^* = (1, 2)^T,$$

$$\text{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допусковое множество} — \text{пустое.}$$

3.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.70, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.70, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix},$$

$$x^* = (1, 2)^T,$$

$\text{Tol}(\mathbf{x}^*, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow \text{допустовое множество} — \text{пустое.}$

4 Обсуждение

5 Выводы