Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

Отчет по лабораторной работе №1
"Интервальный анализ"

Выполнили студент группы 5030102/10201: Скворцов Владимир Сергеевич

Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$Ax = b, \ x = (x_1, x_2)$$

с матрицей

$$\mathrm{mid} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

.

Пусть матрица радиусов для A имеет вид

$$\mathrm{rad} A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Необходимо:

- Найти диапазон значений α, при которых $0 \in \det A$;
- Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \alpha$ найти точечную матрицу A':
$$\det A' = 0.$$

2 Необходимая теория

Интервалом вещественной оси $[a, b]$, называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b включая их самих, т.е.

$$[a, b] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}. \quad (1)$$

При этом a и b называются концами интервала.

2.1 Интервальная арифметика

Развернутые формулы основных арифметических операций для интервалов:

1. **Сложение**
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left[\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \ \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}\right], \quad (2)$$
2. **Вычитание**
$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \left[\underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, \ \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\right], \quad (3)$$
3. **Умножение**
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \left[\min\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}, \ \max\{\underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\}\right], \quad (4)$$
4. **Деление**
$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left[1/\overline{\mathbf{y}}, \ 1/\underline{\mathbf{y}}\right], \ 0 \notin \mathbf{y}. \quad (5)$$

Формулы для характеристик интервала:

1. **Средняя точка**
$$\text{mid}\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}}). \tag{6}$$
2. **Ширина**
$$\text{wid}\,\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}. \tag{7}$$
3. **Радиус**
$$\text{rad}\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}). \tag{8}$$

3 Реализаця

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-anylysis

3.1 Алгоритм поиска минимального α

В ходе выполнения работы было найдено минимальное значение параметра α, при котором определитель интервальной матрицы A включает ноль ($0 \in \det A$).

Для нахождения минимального значения α использовался итеративный метод с переменным шагом:

1. **Начальный этап**:
   - Стартовое значение: $k = 0$, $\alpha_0 = e^0 = 1$.
   - На каждой итерации значение α_k увеличивается по формуле:
   $$k \to k + 1,\ \ \alpha_k = e^k.$$
   - Процесс продолжается, пока $0 \notin \det A$.
2. **Уточнение значения**:
   - Задаем точность $\varepsilon > 0$.
   - Принимаем $a_0 = 0$ и $b_0 = \alpha_0$.
   - Находим $\alpha_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$.
   - Если $0 \in \det A$, то $b_{k+1} = \alpha_{k+1}$, иначе $a_{k+1} = \alpha_{k+1}$.
   - Процесс продолжается, пока $b - a > \varepsilon$.
   - Если $b - a \leqslant \varepsilon$, возвращаем $\frac{a_k + b_k}{2}$.

3.2 Результаты вычислений

k	α_k	$\det A_k$
0	0.50000	$[-1.90000, 2.10000]$
1	0.25000	$[-0.90000, 1.10000]$
2	0.12500	$[-0.40000, 0.60000]$
3	0.06250	$[-0.15000, 0.35000]$
4	0.03125	$[-0.02500, 0.22500]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	0.02499	$[0.00002, 0.19998]$
15	0.02500	$[-0.00004, 0.20004]$
16	0.02500	$[-0.00000, 0.20000]$

Таблица 1: Итерационный процесс при $\varepsilon = 10^{-5}$

Итерационный процесс представлен в таблице 1. Из таблицы видно, что на 16-й итерации было найдено значение α при заданной точности:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

3.3 Итоговые результаты

Минимальное значение параметра регуляризации:

$$\alpha_{min} = 0.025$$

При этом интервальная матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} [1.025,\ 1.075] & [0.925,\ 0.975] \\ [0.975,\ 1.025] & [0.975,\ 1.025] \end{bmatrix}$$

Определитель данной матрицы составляет:

$$det(A) = [0.0,\ 0.2]$$

Диапазон значений α, при котором определитель интервальной матрицы A включает ноль, составляет:

$$\alpha \in [0.025,\ +\infty)$$

3.4 Нахождение точечной матрицы A'

Для найденного минимального значения α_{min} была определена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, такая, что $\det A' = 0$.

Точечная матрица A' имеет вид:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, так как её строки линейно зависимы, и определитель равен нулю.

3.5 Скорость сходимости

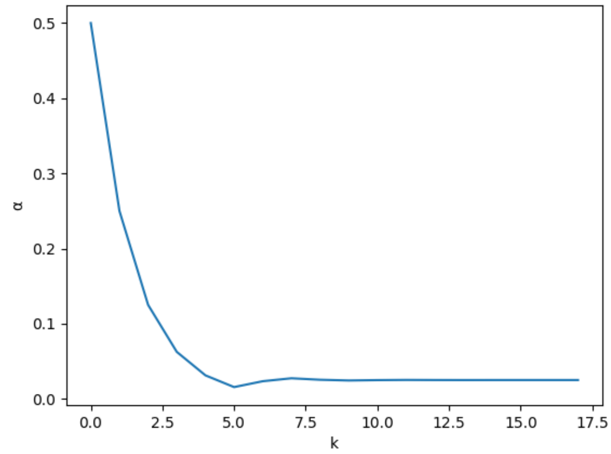

Рис. 1: Зависимость значения α от номера итерации k

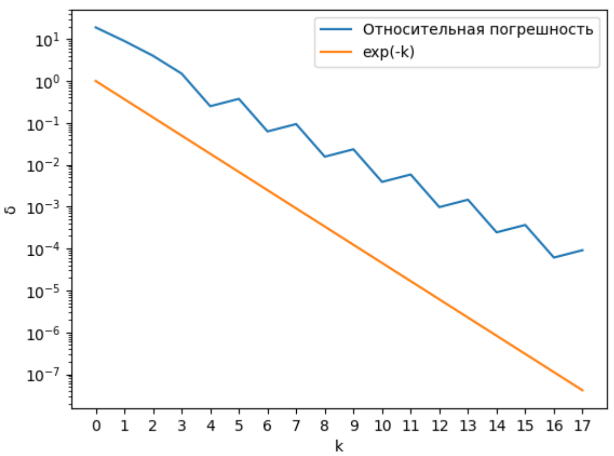

Рис. 2: Относительная погрешность δ от номера итерации k

Из графика 2 следует, что относительная погрешность уменьшается с темпом, близким к $\exp(-k)$.

4 Обсуждение

1. **Физическая интерпретация**
   Матрица A' представляет собой матрицу, формируемую при минимальном значении радиуса матричных элементов δ. Это минимальное значение радиуса соответствует моменту, когда матрица A теряет свою обратимость, и $\det A' = 0$. Следовательно, система уравнений становится вырожденной, что означает наличие бесконечного множества решений. В физическом смысле это указывает на то, что данные, полученные с двух ракурсов, недостаточны для точной реконструкции объекта, поскольку отсутствует информация для однозначного решения.

2. **Чувствительность при минимальном радиусе**
   При минимальном радиусе матричных элементов формируется точечная матрица A', которая представляет собой границу множества возможных матриц A, описывающих интервал неопределенности. Система становится чувствительной к незначительным возмущениям в данных. Любое изменение исходных данных может существенно повлиять на результат реконструкции, что усложняет задачу томографии в условиях реальных данных с шумами.

3. **Практические соображения**
   В практической томографии часто используется большее количество ракурсов, чем два, для улучшения условий задачи и предотвращения ситуации, когда $detA' = 0$. В задачах с ограниченным числом ракурсов проблема вырожденности матрицы возникает часто, поэтому такие задачи требуют применения специальных методов, учитывающих неоднозначность.

5 Выводы

В ходе лабораторной работы была построена интервальная матрица A размером 2×2 следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} [1.05 - \alpha, 1.05 + \alpha] & [0.95 - \alpha, 0.95 + \alpha] \\ [1 - \alpha, 1 + \alpha] & [1 - \alpha, 1 + \alpha] \end{bmatrix}$$

Для данной матрицы был вычислен диапазон значений α, при которых определитель интервальной матрицы включает ноль, что соответствует состоянию вырождения матрицы. Минимальное значение $\alpha = 0.025$ было установлено с использованием итерационного алгоритма с переменным шагом.

При этом было установлено, что при значении $\alpha = 0.025$ интервальный определитель матрицы принимает значения в интервале $[0.0, 0.2]$, что включает ноль. Следовательно, это значение α является минимальным, при котором матрица A становится вырожденной.

Для минимального значения α была найдена точечная матрица A', принадлежащая интервальной матрице A, такая, что:

$$A' = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.975 \\ 1.025 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является вырожденной, поскольку её строки линейно зависимы, и её определитель равен нулю.

В общем случае, если матрица A представляет собой матрицу линейной регрессии, она может иметь размерность $2 \times N$ (где $N \geq 2$) и не быть квадратной. В таких случаях для анализа необходимо рассматривать всевозможные квадратные подматрицы и для каждой подбирать своё значение α, при котором эти матрицы будут неособенными (невырожденными). Затем, пересечение всех найденных матриц позволяет получить итоговую регуляризованную матрицу, которая удовлетворяет условиям задачи и может быть использована для дальнейшего анализа или вычислений.