Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторным работам №3-4 по дисциплине "Математическая статистика"

Студент:	Скворцов Владимир Сергеевич
Преподаватель:	Баженов Александр Николаевич
Группа:	5030102/10201

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Боксплот Тьюки

Сгенерировать выборки размером 20 и 100 элементов. Построить для них боксплот Тьюки.

1.2 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Сгенерировать выборки размером 20 и 100 элементов. Вычислить параметры положения и рассеяния:

- для нормального распределения,
- для произвольного распределения.

2 Теоретическое обоснование

2.1 Функции распределения

- Нормальное распределение

$$N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \tag{1}$$

- Распределение Коши

$$C(x, 0, 1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} \tag{2}$$

- Распределение Стьюдента $t(x, 0, 3)$ с тремя степенями свободы

$$t(x, 0, 3) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi(3 + t^2)^2} \tag{3}$$

- Распределение Пуассона

$$P(k, 10) = \frac{10^k}{k!} e^{-10} \tag{4}$$

- Равномерное распределение

$$U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \tag{5}$$

2.2 Боксплот Тьюки

Боксплот (англ. box plot) — график, использующихся в описательной статистике, компактно изобрадающий одномерное распределение вероятностей. Такой вид диаграммы в удобной форме показывает медиану, нижний и верхний квартили и выбросы. Границами ящика служат первый и третий квартили, линия в середине ящика — медиана. Концы усов — края статистически значимой выборки (без выброса). Длину «усов» определяют разность первого квартиля и полутора межквартальных расстояний и сумма третьего квартиля и полутора межквартальных расстояний. Формула имеет вид

$$X_1 = Q_1 - \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1),\ X_2 = Q_3 + \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1), \tag{6}$$

где X_1 — нижняя граница уса, X_2 — верхняя граница уса, Q_1 — первый квартиль, Q_3 - третий квартиль. Данные, выходящие за границы усов (выбросы), отображаются на графике в виде маленьких кружков. Выбросами считаются величины , такие что:

$$\left[\begin{array}{l} x < X_1^T \\ x > X_2^T \end{array}\right. \tag{7}$$

2.3 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Пусть $F_T(x)$ — функция распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Полагаем, что $2F_T(x)-1 = 1-\alpha$, где α — выбранный уровень значимости. Тогда $F_T(x) = 1-\alpha/2$. Пусть $st_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы и порядка $1-\alpha/2$. Тогда получаем

$$P\left(\overline{x} - \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{x} + \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha, \tag{8}$$

что и даст доверительный интервал для m с доверительной вероятностью $\gamma = 1\alpha$ для нормального распределения.

Случайная величина $n\frac{s^2}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Тогда

$$P\left(\overline{x} - \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{x} + \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha, \tag{9}$$

3 Описание работы

Лабораторные работы выполнены с использованием Python и его сторонних библиотек: `numpy`, `pandas`, `matplotlib`, `seaborn`.

Ссылка на GitHub репозиторий: https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-mathematical-statistics

4 Результаты

4.1 Гистограммы и графики плотности распределения

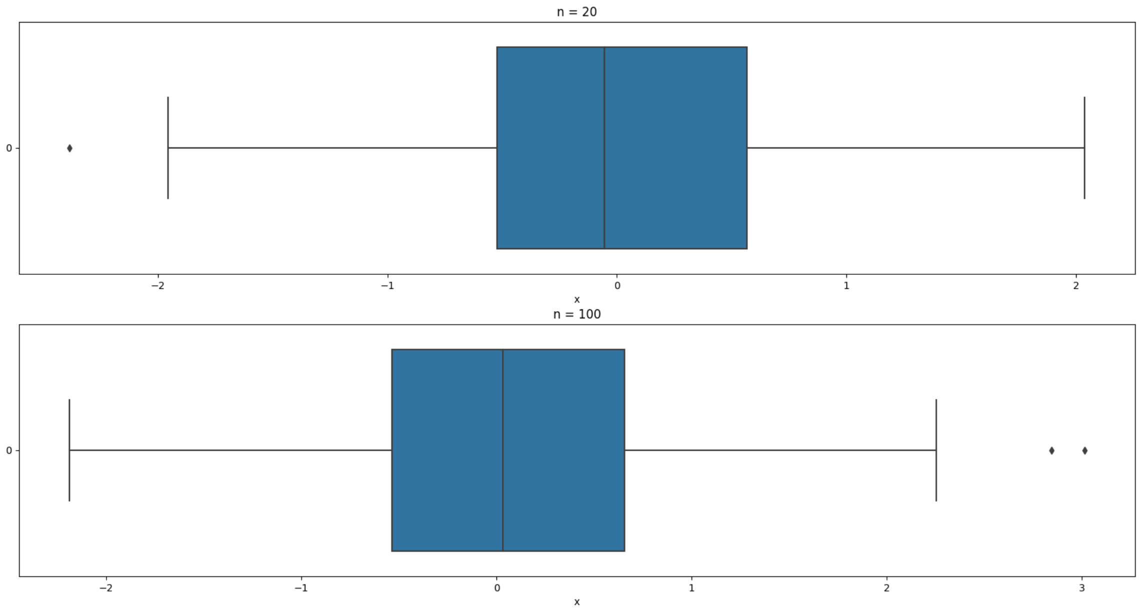

Рис. 1: Нормальное распределение (1)

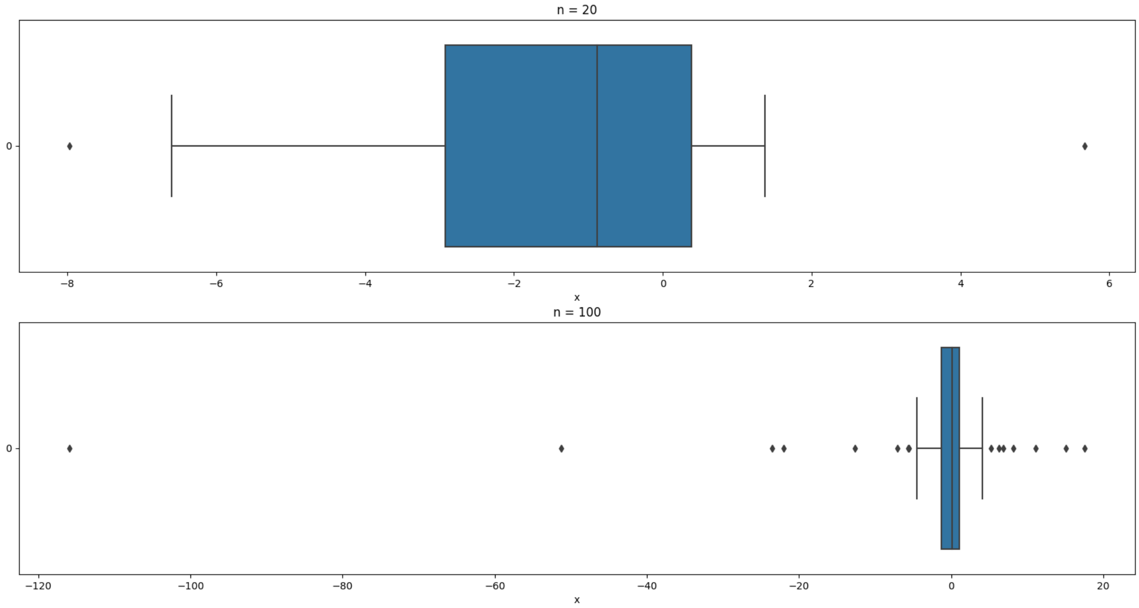

Рис. 2: Распределение Коши (2)

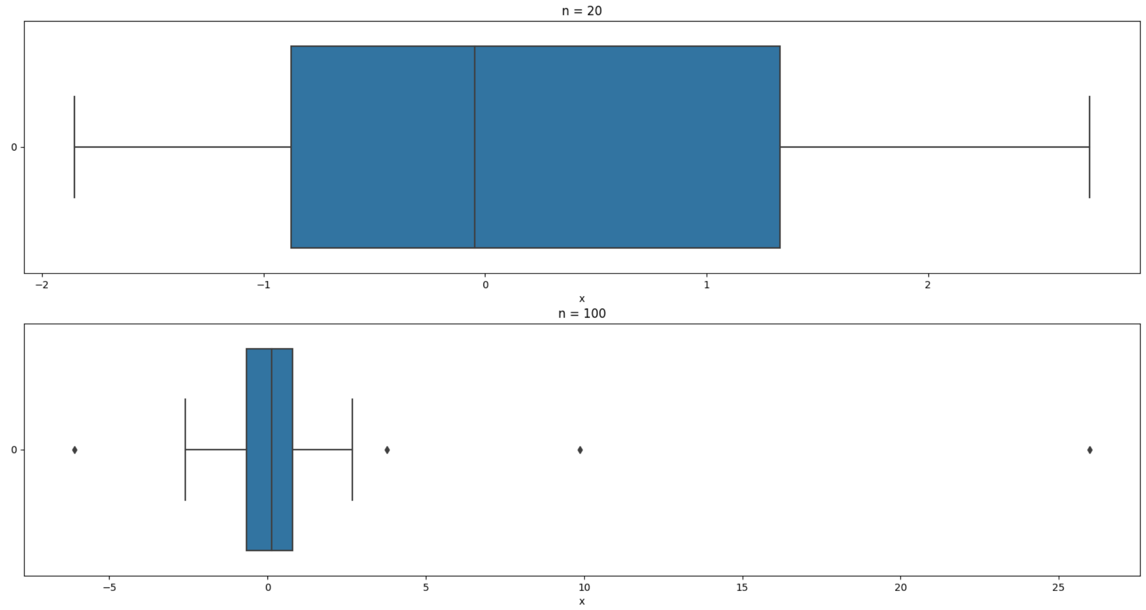

Рис. 3: Распределение Стьюдента (3)

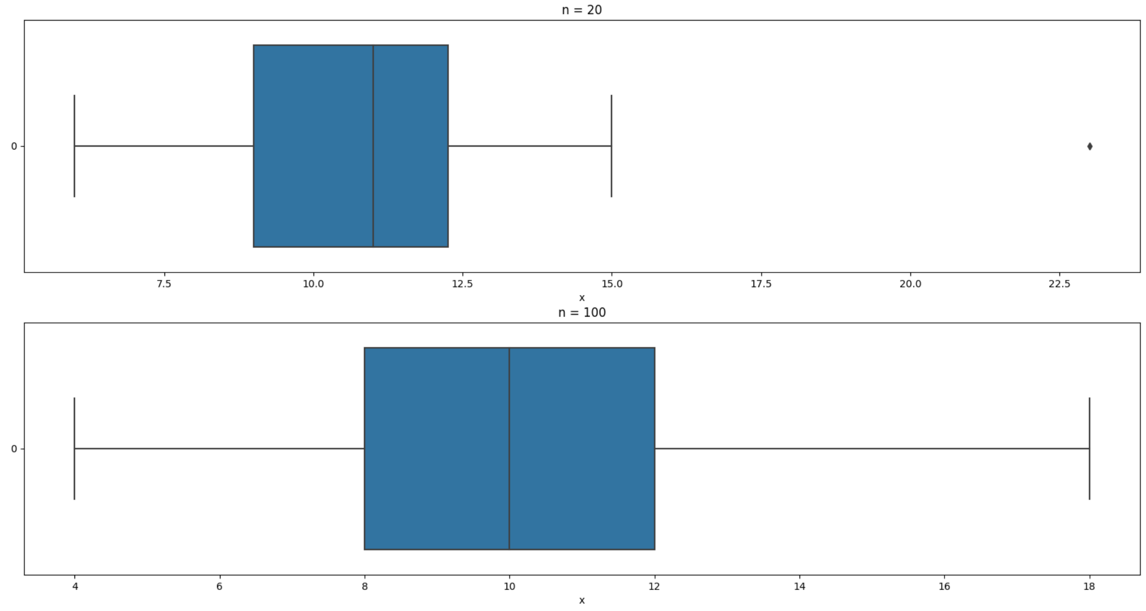

Рис. 4: Распределение Пуассона (4)

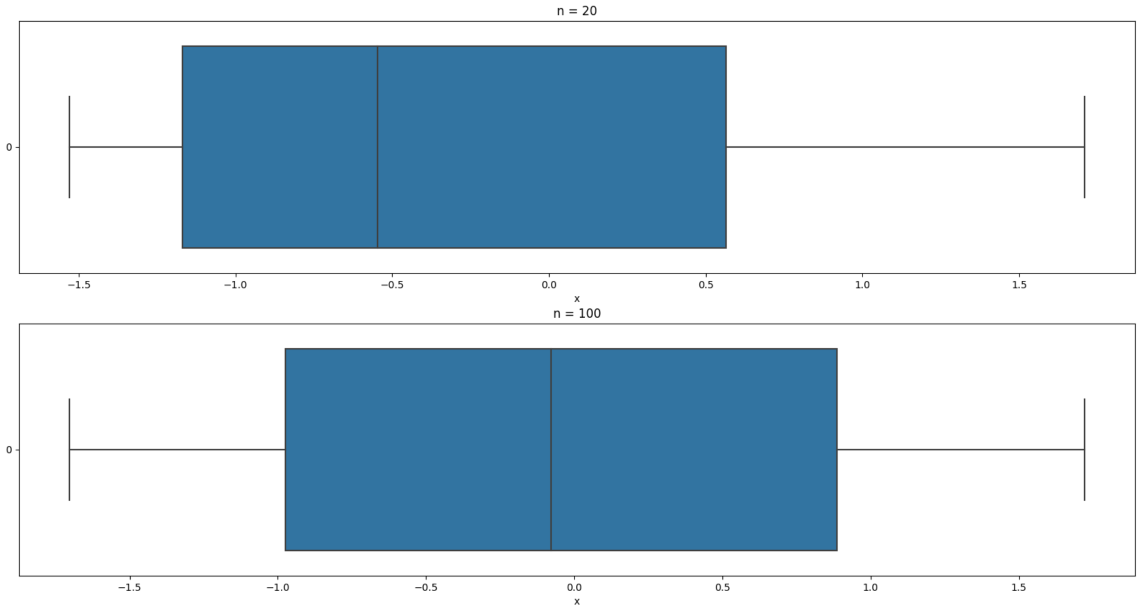

Рис. 5: Равномерное распределение (5)

4.2 Доверительные интервалы для параметров распределений

n = 20	m	σ
	-0.43 < m < 0.37	$0.66 < \sigma < 1.25$
n = 100	m	σ
	-0.12 < m < 0.24	$0.81 < \sigma < 1.07$

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения (1)

n = 20	m	σ
	$0.11 < m < 0.97$	$0.29 < \sigma < 0.33$
n = 100	m	σ
	$0.30 < m < 0.67$	$0.28 < \sigma < 0.33$

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

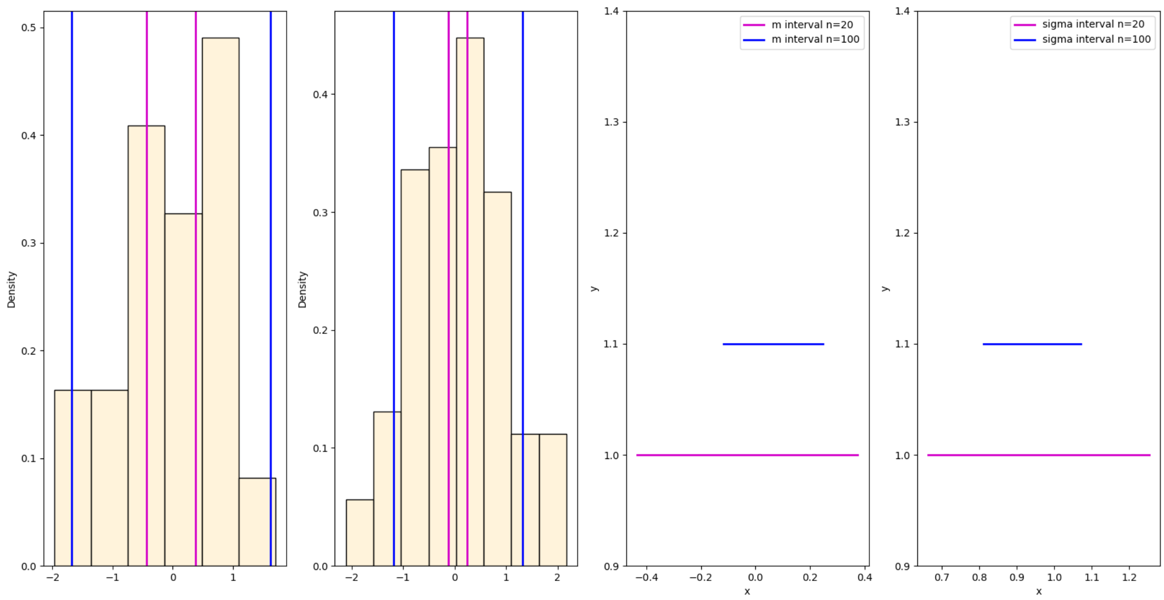

Рис. 6: Гистограммы и оценки для параметров нормального распределения

5 Выводы

По результатам выполнения лабораторной работы были сгенерированы выборки размером 20 и 100 элементов и построены для них боксплоты Тьюки.

Боксплот позволяет наглядно представить основные характеристики выборки - медиану, квартили, межквартальный размах и выбросы. На основе построенных графиков можно увидеть разницу в распределении данных для двух выборок. Для выборки размером в 100 элементов представленные метрики имеют более проработанный вид, ведь с увеличением размера выборки улучшается точность оценок параметров распределения.

Также в ходе выполнения лабораторной работы были сгенерированы две выборки размерами 20 и 100 элементов для нормального и произвольного распределения. Затем для каждой из них были вычислены параметры распределения: среднее значение и дисперсия.

Результаты, представленные графически, демонстрируют, что количество элементов в выборке влияет на точность оценок параметров. Более большое количество наблюдений (т.е. 100 элементов) приводит к более точным и стабильным оценкам среднего и дисперсии, как для нормального, так и для произвольного распределения. Для выборки с меньшим количеством элементов (20 элементов) оценки могут сильно варьироваться в зависимости от конкретной выборки, что также наглядно отображено на графиках.

Лабораторная работа иллюстрирует важнейший статистический принцип: точность статистической оценки увеличивается с ростом объема выборки. Результаты этого исследования подчеркивают значимость использования достаточно больших выборок для надежного анализа данных.