Побережный А. А. (Курск)

КОНСТРУКТИВИЗМ В ОБОСНОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Математический конструктивизм включает в себя несколько школ советских математиков, наиболее яркой из которых является школа А. А. Маркова (марковский конструктивизм), а также немецкий математический конструктивизм Г. Динглера, П. Лоренцена. Конструктивные элементы имеют место также в других математических теориях (Г. Гедель, Д. Гильберт, Ф. Бар-Хиллел и др.)

Формирование конструктивизма как метода в обосновании математического знания связано с проблемами оснований математики. На самой заре своего возникновения и развития математика имела дело с такими абстрактными объектами, которые предполагают определенные «действия» с этими объектами, «построение» из них сложных объектов, разложение их на более простые объекты. Операции сложения, вычитания, деления на части носили алгоритмический характер, т. е. могли быть выполнены по определенному плану. Уже тогда математика использовала методы доказательства, предполагающие рассмотрение строения различных абстрактных «предметов» и «инструментов»; методы, которые можно назвать конструктивными: в арифметике это алгоритм Евклида, в геометрии – идеализированные циркуль и линейка. Эти «инструменты» позволяли эффективно строить (конструировать) различные абстрактные объекты и производить над ними операции, имеющие эффективный характер, т. е. осуществлять конструктивные процессы. Математики строили алгоритмы для решения целых классов определенных задач, - в геометрии для различных видов построений, в алгебре для нахождения коэффициентов многочлена (алгоритм Штурма), разрабатывались различные алгоритмы в теории дифференциальных уравнений и многие другие.

Советский математик А. А. Марков на основе введенного им понятия «нормального алгорифма» разрабатывает «теорию алгорифмов», на основе которой создается конструктивная логика и конструктивная математика. По определению А. А. Маркова, «алгорифм есть предписание, однозначно определяющее ход некоторых конструктивных процессов». Формально конструктивисты восприняли интуиционистскую логику, однако были отброшены некоторые абстракции последней, а введение новых понятий и истолкование логических связок и истинности суждений были проведены на базе теории алгорифмов.

Конструктивным математическим объектом считается математический объект, исходные объекты в построении которого либо представлены для непосредственного чувственного восприятия, либо интуитивно ясно представимы, а процесс построения из исходных объектов данного объекта осуществляется с помощью алгоритмов. Конструктивная истинность математических суждений должна распознаваться также с помощью алгоритмов. Конструктивисты явно формулировали предпосылки построения конструктивной математики, к ним относятся: абстракция потенциальной осуществимости, абстракция отождествления и различения, и абстракция алгоритма. В отличие от классической математики конструктивная математика не принимает абстракции актуальной осуществимости и актуальной бесконечности; при этом отвергаются так называемые чистые теоремы существования, поскольку существование объекта с данными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указывается способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами. Различия в основаниях классической и конструктивной математики и обусловливают различия в понимании сути, целей и методов их обоснования.

Исследование конструктивных процессов имело большое значение для автоматизации процессов умственного труда и сыграло важную роль в развитии кибернетики. Однако отсутствие тесного сотрудничества между философами и математиками в советской науке 30-50 гг. прошлого столетия не позволило блестящей школе А. А. Маркова подняться до уровня философии математики. Концепция полного конструктивного обоснования математической теории сложилась позже (к середине 80-х гг.) в немецком конструктивизме.

Предшественником немецкого конструктивизма эрлангенской школы считается математик Гуно Динглер, разработавший идею оперативной геометрии (1913). Своеобразие подхода, предложенного Динглером, связано с его программой обоснования точных наук (математики, физики), возможность которого Динглер видел в обращении к операционным правилам, целеустремленным нормированным действиям, которые решающим образом влияют на осуществление науки. Причем эти правила выступают не как элементы теорий, но как то, что образует предпосылку научного познания. Динглер в своем «оперативизме» предлагает операциональную реконструкцию фундамента науки, когда основные понятия и аксиомы получают определение и смысл в контексте планов действия, идеальных требований или регулятивных идей. Оперативная точка зрения нашла важное применение в исследованиях оснований логики.

Последователь Г. Динглера Пауль Лоренцен пытался обосновать аксиомы логики посредством находящегося в распоряжении опыта для доказательства утверждений, т.е. «посредством рефлексии условий возможности доказательства высказываний». Таким образом, в конструктивной или диалогической логике имеется методическое априори. Лоренцен разработал конструктивную философию математики, основным принципом которой явилось пошаговое построение математических объектов, причем каждый шаг должен проверяем. Тогда арифметика целых чисел образуется не как основанная на рекурсивных дефинициях путем привязки к аксиомам Пеано, а путем логического абстрагирования, следующего за построением, схематическим проведением счета символов. В дальнейшем таким же образом можно прийти к точным определениям понятий множества, дифференциала, интеграла.

Математический конструктивизм - теория, которая интерпретирует математические утверждения как истинные, если и только если они доказаны, и как ложные, только если они опровергнуты. Конструктивизм противостоит платоновской интерпретации, которая рассматривает математические положения в их отношении к сфере вневременных математических объектов, существующих независимо от нашего знания о них. Согласно конструктивистам, некоторые классические формы логического вывода (например, закон исключенного третьего, закон двойного отрицания, постулирование бесконечных множеств) не могут использоваться в процедурах математических доказательств.

Конструктивное построение и обоснование математической теории предполагает истолкование предположений теории в терминах «действий» некоторого «идеализированного субъекта» в предметной области теории. Выявление «конструктивного содержания математической теории», её гносеологических оснований, - т. е. тех идеализаций, которые накладываются на «действия» предполагаемого теорией «гносеологического субъекта», - делает конструктивную логику и математику особенно ценными для кибернетики и информатики, для исследования проблем искусственного интеллекта.