ШАД МТС. ДЗ 2.

1) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 2 +$

$+ 30 - 15 - 3 + 20 = 19$

$\det A = 19 \neq 0$ => матрица невырожденная => матрица имеет обратную.

Найдём союзную матрицу A^*:

Для наглядности сразу транспонируем A:

$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и найдём для неё алгебраические дополнения.

$A_{11} = 1$

$A_{12} = -1$

$A_{13} = -3$

$A_{21} = -(-9) = 9$

$A_{22} = 10$

$A_{23} = -(-11) = 11$

$A_{31} = -13$

$A_{32} = -25$

$A_{33} = -18$

$\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19} \\ -\frac{13}{19} & -\frac{25}{19} & -\frac{18}{19} \end{pmatrix}$$

Проверим:

$$\cancel{\frac{A^*}{\det A}} \quad A \cdot A^{-1} = E$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= E$, ч.т.д.

(2)

$$\overset{a}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot X \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}} = \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow A \cdot X \cdot B = C$

$$X = \frac{C}{AB} \Rightarrow X = C \cdot (AB)^{-1} \Rightarrow X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Найдём B^{-1}:

$\det B = 96 + 84 - 105 - 48 = 180 - 153 = 27$

$\det B = 27 \neq 0 \Rightarrow$ матрица невырожденная.

$$B^* = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* \Rightarrow \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдём A^{-1}:

$\det A = -9 + 2 = -7$

$\det A = -7 \neq 0 \Rightarrow$ матрица невырожденная.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \Rightarrow \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{27} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}$$

③ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

При $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

В ходе преобразований $r = 2$

При $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

В ходе преобраз-ий $r = 3$

(не успеваю переписать из черновика...)

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} = A$

Решение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-7-\lambda)(7-\lambda) - 4\cdot 4\cdot 7 - 3\cdot 8\cdot 6 -$$
$$\big(6\cdot 4\cdot(-7-\lambda) - 4\cdot 3\cdot(7-\lambda) - 7\cdot 8\cdot(1-\lambda)\big) =$$
$$= (1-\lambda)(-7-\lambda)(7-\lambda) - 112 - 144 - \big(24\cdot(-7-\lambda) -$$
$$- 12\cdot(7-\lambda) - 56\cdot(1-\lambda)\big) =$$
$$= (1-\lambda)(-7-\lambda)(7-\lambda) - 256 - 24\cdot(-7-\lambda) + 12\cdot(7-\lambda) +$$
$$+ 56(1-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$
$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda + 3 = 0$$

$$-\lambda^2\cdot(\lambda+1) + 2\lambda\cdot(\lambda+1) + 3\cdot(\lambda+1) = 0$$
$$-(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

$-\lambda - 1 = 0$ $\qquad$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda = -1$ $\qquad$ $\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 3$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}\right.$$

То есть, $\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3\end{array}\right.$ – собственные числа

Теперь найдём собственные вектора.

Для $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_1 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3 \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

Для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = x_3 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3\end{array}\right.$

$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

$\vec{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{pmatrix}$