ШАД МТС. Д13 1.

① Дано:

$|\vec{a}| = 2$

$|\vec{b}| = 5$

$(a \hat{,} b) = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$

$\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$

$\alpha - ?$

Решение:

Перпендикулярные векторы - векторы, скалярное произведение которых равно нулю.

$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

$\Rightarrow (\alpha a + 17b) \cdot (3a - b) = 0$

$\alpha \cdot a \cdot 3a - \alpha \cdot a \cdot b + 17b \cdot 3a - 17b \cdot b = 0$

$\alpha \cdot 3a^2 - \alpha ab + 51ab - 17b^2 = 0$

! $a^2 = |a|^2$; $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha \cdot 3 \cdot 2^2 - \alpha \cdot (2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{2\pi}{3}) + 51 \cdot (2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{2\pi}{3}) - 17 \cdot 5^2 = 0$

$12\alpha - \alpha \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 10) + 51 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 10) - 425 = 0$

$12\alpha + 5\alpha - 255 - 425 = 0$

$17\alpha = 680$

$\alpha = 40$

Ответ: при $\alpha = 40$

② Решение:

Необходимо проверить аксиомы линейного пространства.

① Коммутативность:

$$x+y=\begin{pmatrix} x_1\cdot y_1 \\ x_2\cdot y_2 \\ \dots \\ x_n\cdot y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\cdot x_1 \\ y_2\cdot x_2 \\ \dots \\ y_n\cdot x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{выполняется}$$

② Ассоциативность:

$$(x+y)+z=\begin{pmatrix} (x_1\cdot y_1)z_1 \\ (x_2\cdot y_2)\cdot z_2 \\ \dots \\ (x_n\cdot y_n)z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\cdot(y_1\cdot z_1) \\ x_2\cdot(y_2\cdot z_2) \\ \dots \\ x_n\cdot(y_n\cdot z_n) \end{pmatrix}=x+(y+z)$$

$\Rightarrow$ выполняется

③ Сущ-е нейтрального элемента относительно сложения (сущ-ет единственный элемент 0): $a+0=a$:

Как эл. 0 возьмём: $0=(1,1,\dots,1)$

$$\Rightarrow x+0=\begin{pmatrix} x_1\cdot 1 \\ x_2\cdot 1 \\ \dots \\ x_n\cdot 1 \end{pmatrix}=x \text{ для люб. } x\in G$$

④ $$x+y=\begin{pmatrix} x_1\cdot x_1^{-1} \\ x_2\cdot x_2^{-1} \\ \dots \\ x_n\cdot x_n^{-1} \end{pmatrix}=(1,1,\dots,1=0)$$ $\Rightarrow$ для люб. $\vec{x}$ противоп. элементом будет вектор $x'=(x_1^{-1},x_2^{-1},x_n^{-1})$

⑤ Дистр. отн. суммы эл.:

$$\alpha(x+y)=\alpha\cdot\begin{pmatrix} x_1\cdot y_1 \\ x_2\, y_2 \\ \dots \\ x_n\cdot y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{\alpha}y_1^{\alpha} \\ x_2^{\alpha}y_2^{\alpha} \\ \dots \\ x_n^{\alpha}y_n^{\alpha} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{\alpha} \\ x_2^{\alpha} \\ \dots \\ x_n^{\alpha} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1^{\alpha} \\ y_2^{\alpha} \\ \dots \\ y_n^{\alpha} \end{pmatrix}=\alpha x+\alpha y$$

(2)

(6) Дис. отн. с. скал.:

$$(\alpha+\beta)X = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha+\beta} \\ x_2^{\alpha+\beta} \\ \dots \\ x_n^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha} x_1^{\beta} \\ x_2^{\alpha} x_2^{\beta} \\ \dots \\ x_n^{\alpha} x_n^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha} \\ x_2^{\alpha} \\ \dots \\ x_n^{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^{\beta} \\ x_2^{\beta} \\ \dots \\ x_n^{\beta} \end{pmatrix} = \alpha X + \beta X$$

(7) Асс. умн. на скал.:

$$(\alpha\beta)X = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha\beta} \\ x_2^{\alpha\beta} \\ \dots \\ x_n^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1^{\beta} \\ x_2^{\beta} \\ \dots \\ x_n^{\beta} \end{pmatrix} = \alpha(\beta X)$$

(8) Унитарность:

$$1 \cdot X = \begin{pmatrix} x_1^{1} \\ x_2^{1} \\ \dots \\ x_n^{1} \end{pmatrix} = X$$

$\Rightarrow$ мн. C явл-ся линейным пространством.

③ Дано:

$\alpha x - \beta y$,

$\gamma y - \alpha z$,

$\beta z - \gamma x$,

для $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$

и α, β, γ

Решение:

Система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называется линейно зависимой, если существуют такие скаляры (хотя бы од. отл. от 0) $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$, не все равные нулю, что $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$.

$\Rightarrow \alpha(\alpha x - \beta y) + \beta(\gamma y - \alpha z) + \gamma(\beta z - \gamma x)$

$\alpha^2 x - \alpha\beta y + \beta\gamma y - \alpha z \beta + \gamma\beta z - \gamma^2 x$

$\Rightarrow x(\alpha^2 - \gamma^2) + y(\beta\gamma - \alpha\beta) + z(\gamma\beta - \alpha\beta)$

$\Rightarrow$ 1) $(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) x$

2) $\beta(\gamma - \alpha) y$

3) $\beta(\gamma - \alpha) z$

Допустим, что: $(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) = 0$

отсюда: $\alpha = \pm \gamma$

Подставим;

$\Rightarrow \beta(\gamma - \alpha) = 0$ (занулится при $\alpha = \gamma$, либо β тут будет равно нулю).

$\Rightarrow$ существуют такие скаляры, при которых линейная комбинация векторов будет равна нулю, причём не все равные нулю, ч.т.д.

④ Дано:

e_1, e_2, e_3

$R^3 = V$

$x - ?$

$y - ?$

Решение:

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -24$

$\det A = -24 \neq 0$ => векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы и образуют базис пространства R^3.

(Хе, а не х-?)

2) $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} \Rightarrow x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

5) Дано:

$p(1)+p(-1)=0$

$p(x)\in P_4$

Решение:

Т.к. $p(x)\in P_4$, то:

$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+fx^4$

При $p(1)$: $p(1)=a+b+c+d+f$

При $p(-1)$: $a-b+c-d+f$

$\Rightarrow p(1)+(p-1)=a+b+c+d+f+(a-b+c-d+f)=$

$=2a+2c+2f$

$2a+2c+2f=0 \Rightarrow a+c+f=0$

Мы можем выразить один из коэффициентов через другие. Допустим, выразим $a=-c-f$.

Подставим:

$p(x)=(-c-f)+bx+cx^2+dx^3+fx^4 \Rightarrow$

$p(x)=bx+(x^2-1)c+dx^3+(x^4-1)f$

$\Rightarrow p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2-1$, $p_3(x)=x^3$, $p_4=x^4-1$

$\Rightarrow p_1, p_2, p_3, p_4$ образуют базис пространства V.

$\Rightarrow \dim V=4$

Базис V:

Базис формируется из совокупности n линейно независимых векторов n-мерного пространства.

$\Rightarrow$ базис равен $\{x, x^2-1, x^3, x^4-1\}$.

Ответ: $\dim V=4$; $\{x, x^2-1, x^3, x^4-1\}$.