# Регрессия ДЗ 1.

1) Доказать свойство: $R^2 = Corr^2(y_i, \hat{y}_i)$

$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$ ; $Corr(y_i, \hat{y}_i) = \frac{Cov(y_i, \hat{y}_i)}{\sigma_y \sigma_{\hat{y}}}$

$$Corr^2(y_i, \hat{y}_i) = \frac{cov^2(y_i, \hat{y}_i)}{(\sigma_y \sigma_{\hat{y}})^2} = \frac{cov(y_i, \hat{y}_i) \cdot cov(y_i, \hat{y}_i)}{Var(y) Var(\hat{y})} =$$

$$= \frac{cov(\hat{y}_i + \varepsilon, y_i) cov(\hat{y}_i + \varepsilon, y_i)}{Var(\hat{y} + \varepsilon) Var(\hat{y})} =$$

$$= \frac{(cov(\hat{y}, \hat{y}) + cov(\hat{y}, \varepsilon))(cov(\hat{y}, \hat{y}) + cov(\hat{y}, \varepsilon))}{Var(y) Var(\hat{y})} =$$

$$= \frac{Cov(\hat{y}, \hat{y}) \cancel{Cov(\hat{y}, \hat{y})}}{Var(y) \cancel{Var(\hat{y})}} = \frac{Var(\hat{y})}{Var(y)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{ESS}{TSS} = R^2 \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

② **2.1.**

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = (X^T X)^{-1} X^T \cdot (\beta X + \varepsilon) =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \cdot \beta \cdot X + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \varepsilon = \underline{\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon}$$

**2.2.**

$$E(\hat{\beta} | X) = \beta$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta} | X) = E((X^T X)^{-1} X^T y | X) \Rightarrow$$

$$E(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot E(\varepsilon) =$$

$$= \beta$$

$$\Rightarrow \underline{E(\hat{\beta}) = \beta}$$

| ③ $\boxed{\text{Для } \hat{\beta}_2}$ | $cov(X_2, X_3) > 0$ | $cov(X_2, X_3) < 0$ |
|---|---|---|
| $\beta_3 > 0$ | $+$ | $-$ |
| $\beta_3 < 0$ | $-$ | $+$ |

| $\boxed{\text{Для } \hat{\beta}_1}$ | $cov(X_1, X_3) > 0$ (по условию) |
|---|---|
| $\beta_3 > 0$ | $+$ |
| $\beta_3 < 0$ | $-$ |

Вывод: смещение опр-се:

- знаком при пропущ. $\beta_3$
- направлением связи между рассм-м $\beta_i$ и $\beta_3$ пропущенным (связь в нашем случае - ковариация)

(4) $Var(\varepsilon | X) = \sigma^2 I_n$

Доказать:

$$Var(\hat{\beta} | X) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$Var(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$Var(\varepsilon) \cdot (X^T X^{-1}) X^T \cdot X (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$\sigma^2 \cdot I_n \cdot (X^T X)^{-1} X^T \cdot X \cdot (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$\sigma^2 (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

ч.т.д.