④
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}$$

(для удобства заменил λ на X)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -X+\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2}+\frac{X-\frac{1}{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-X+\frac{1}{2}}{3}+\frac{X-\frac{1}{2}}{3} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7{,}5 & -\overset{\lambda}{X}+\frac{1}{2} & 7{,}5 \\ 0 & 0 & \frac{\overset{\lambda}{X}-8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим особые случаи т.е. когда:

В ходе преобразований я делил на $\frac{\lambda-8}{3}$, то есть, $\frac{\lambda-8}{3}$. Также рассм-л предположение о $\lambda \neq 0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda \neq 0 \\ \frac{\lambda-8}{3} \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 8\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=3 \\ -7{,}5x_2+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)x_3=7{,}5 \\ \left(\frac{\lambda-8}{3}\right)x_3=0\end{cases}$$

Оба случая при подстановке в систему дают следующее решение:
(т.к. x_3 всегда зануляется)

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}x_1=3 \\ x_2=-1 \\ x_3=0\end{array}\right.}$$

В принципе, при любом λ x_3 равен нулю, а далее обратным ходом мы получаем этот вектор x-ов.

6*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} ; \quad A = V\Sigma V^T$$

$$V^T = V^{-1}$$

$$V^T = V^{-1}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{28}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{28}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

(пусть B)

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$ (Пусть C)

Собственные векторы данных двух найденных матриц определяют матрицы V и V, соответственно; собств. значение - сингулярные значение.

$A^T A$:

Собственные значение:

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{28}{3} - \lambda & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{28}{3} - \lambda & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$-\lambda^3 + 24 \cdot \lambda^2 - 144 \cdot \lambda + 256 = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 = 16 \end{array}\right.$ - собств. числа; откуда $\left[\begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = 2 \\ \sigma_3 = 4 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{AA^T}$:

$$|C - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6-\lambda & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6-\lambda & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 24\lambda^3 + 144\lambda^2 - 256\lambda = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 16 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right.$$ – собств. числа

Собств. вектора для A^TA (т.е. V):

$$V = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Собств. в-ра для AA^T (т.е. V):

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = V$$

и снова выпишу Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но итоговая матрица – не матрица A? Не получается...