Динамические кратчайшие пути

Мирошников Владислав
371 группа

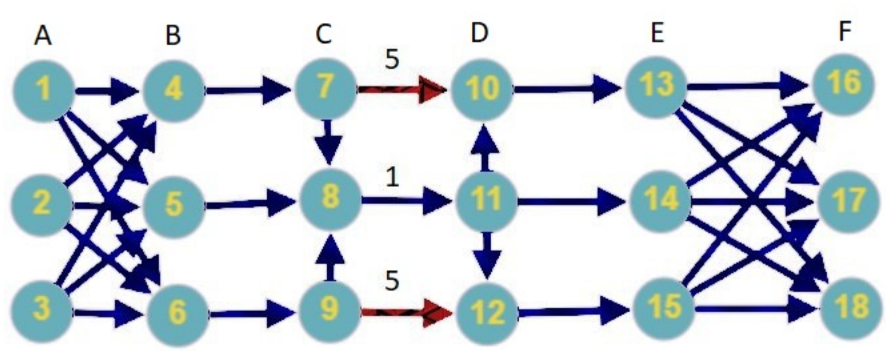
Докажите следующие утверждения (определение однородного пути есть в лекции):

1 (a). Не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра становятся однородными. В качестве доказательства придумайте такой худший случай.

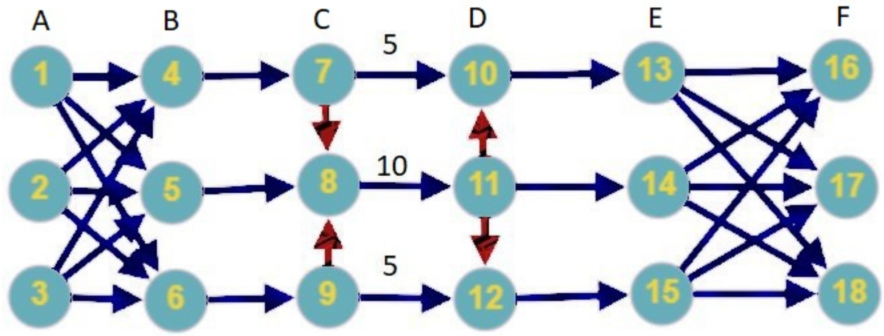
Доказательство. Рассмотрим ребро (i, j), при этом при апдейте увеличился вес этого ребра. При этом для фиксированной пары ребро-вершина $((i, j), x)$, где x — вершина, может быть не более одного однородного пути из i в x из ребра (i, j), иначе не выполнится уникальность кратчайших путей. То есть, если бы было два однородных пути из i в x, то у нас могло бы быть два кратчайших подпути из j в x, что противоречит условию задачи. Благодаря этому факту мы можем воспользоваться дальнейшей комбинаторикой, так как у нас есть гарантии, что каждой паре (ребро, вершина) соответствует максимум 1 однородный путь.

При этом произвольное ребро (i, j) может быть выбрано максимум m способами, так как m — число ребер в графе по условию, а вершина x максимум n способами, так как n — число вершин в графе по условию. Таким образом, пар ребро-вершина и, собственно, однородных путей может быть максимум mn, при этом $m <= n^2$ (по известному факту) => однородных путей может быть максимум n^3. То есть при апдейте увелечения веса ребра не более, чем n^3 путей в графе становятся однородными. □

Пример худшего случая, при котором порядка n^3 путей станет однородными после увелечения веса ребра: В исходном графе однородные пути показаны синим, при этом каждому вертикальному уровню (A, B, C, D, E, F) соответствует порядка n вершин в общем случае. Неподписанные веса на ребрах считаем равным 1.



При этом пусть ребро (8,11) изменило вес при апдейте с 1 на 10.



Теперь у нас появились однородные пути из C -> D через горизонтальные ребра ((7,10), (9,12)), а вертикальные ребра "вышли"из однородных путей, так как теперь ребро (8,11) "невыгодное"и пути через вертикальные ребра не будут кратчайшими. Посчитаем, сколько образовалось однородных путей. Каждой вершине из A соответствует порядка n вершин из B (то есть например из 1 можно прийти в 4, 5, 6). В общем случае из A в B имеем порядка n^2 однородных путей. Из B в C у нас соответствие 1 к 1, то есть итого из A в C также порядка n^2 однородных путей. Из C -> D -> E также соответствия 1 к 1. Каждой вершине из E соответствует порядка n вершин из F (то есть например из 13 можно прийти в 16, 17, 18). Итого в общем случае имеем порядка n^3 однородных путей, то есть порядка n^3 стали однородными после обновления веса ребра.

1 (b). Не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными.

Доказательство. Рассмотрим ребро (i, j), при этом при апдейте увеличился вес этого ребра. Нам нужно посчитать, сколько максимально путей перестанут быть однородными. Пусть их будет x. Если x однородных путей после увеличения веса ребра перестали быть однородными, то все их подпути уже не кратчайшие. При увеличении веса ребра (i, j) это значит, что все эти подпути проходят через (i, j). То есть фактически нужно посчитать максимальное количество однородных путей, у которых подпути проходят через ребро (i, j).

Теперь посчитаем, сколько максимально может быть однородных путей, начинающихся или заканчивающихся в ребре (i, j). Рассмотрим случай для начинающихся из (i, j) (для заканчивающихся аналогично). При этом для фиксированной пары ребро-вершина $((i, j), x)$, где x — вершина, может быть не более одного однородного пути из i в x из ребра (i, j), иначе не выполнится уникальность кратчайших путей. То есть, если бы было два однородных пути из i в x, то у нас могло бы быть два кратчайших подпути из j в x, что противоречит условию задачи. Тогда в качества конца пути можно взять максимум $O(n)$ вершин. То есть максимально может быть $O(n)$ однородных путей, начинающихся или заканчивающихся в ребре (i, j).

Теперь посчитаем, сколько максимально может быть однородных путей, проходящих через ребро (i, j) (при этом не в начале и не в конце, так как этот случай уже рассмотрен). Фактически стартовую вершину мы можем выбрать максимально за $O(n)$ и конечную также за $O(n)$ => максимум может быть $O(n^2)$ однородных путей, проходящих через ребро (i, j) (при этом не в начале и не в конце).

Итого максимальное количество однородных путей, у которых подпути проходят через ребро (i, j) составляет $O(n^2)$, то есть не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными.

$\square$