МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий Інститут

Комп’ютерних Інформаційних Технологій

Кафедра комп’ютеризованих систем управління

Робота на ліквідацію академічної різниці

З дисципліни «Алгоритми та методи обчислень»

Варіант 3

Виконав:

Студент ННІКІТ СП-224

Ковилін Денис Григорійович

Київ 2017

**1** Дано масив цілих чисел: 3,1,-13,8,15,63,21,17,-4,2. Необхідно відсортувати його в порядку зростання методом вставки, «бульбашки» та методом Шейкера. Намалювати блок-схему для методу Шейкера.

**Бульбашкою.**

Алгоритм працює таким чином — у поданому наборі даних (списку чи масиві) порівнюються два сусідні елементи. Якщо один з елементів, не відповідає критерію сортування (є більшим, або ж, навпаки, меншим за свого сусіда), то ці два елементи міняються місцями місцями. Прохід по списку продовжується до тих пір, доки дані не будуть відсортованими.

1. А = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2];
2. А = [1, -13, 3, 8, 15, 21, 17, -4, 2, 63];
3. А = [-13, 1, 3, 8, 15, 17, -4, 2, 21, 63];
4. А = [-13, 1, 3, 8, -4, 2, 15, 17, 21, 63];
5. А = [-13, 1, 3, 8, -4, 2, 15, 17, 21, 63];
6. А = [-13, 1, 3, -4, 2, 8, 15, 17, 21, 63];
7. А = [-13, 1, -4, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63];
8. А = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63];

**Вставками.**

На кожному кроці алгоритму ми вибираємо один з елементів вхідних даних і вставляємо його на потрібну позицію у вже відсортованому списку до тих пір, доки набір вхідних даних не буде вичерпано. Метод вибору чергового елементу з початкового масиву довільний; може використовуватися практично будь-який алгоритм вибору

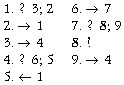
* + - 1. А = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2];
      2. А = [-13, 1, 3, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2];
      3. A = [-13, -4, 3, 8, 15, 63, 21, 17, 1, 2];
      4. A = [-13, -4, 1, 8, 15, 63, 21, 17, 3, 2]
      5. A = [-13, -4, 1, 2, 15, 63, 21, 17, 3, 8]
      6. A = [-13, -4, 1, 2, 3, 63, 21, 17, 15, 8]
      7. A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 21, 17, 15, 63]
      8. A = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63]

**Шейкера**

Відрізняється від сортування бульбашко тим, що сортування відбувається в обох напрямках, міняючи напрямок при кожному проході. Цей алгоритм лише трішки складніший за сортування бульбашко.

1. А = [3, 1, -13, 8, 15, 63, 21, 17, -4, 2];
2. А = [1, -13, 3, 8, 15, 21, 17, -4, 2, 63];
3. А = [-13, 1, -4, 3, 8, 15, 21, 17, 2, 63];
4. А = [-13, -4, 1, 3, 8, 15, 17, 2, 21, 63];
5. А = [-13, -4, 1, 2, 3, 8, 15, 17, 21, 63];

**2** Довести, що задану програму можна застосовувати до наданих станів машини Поста, вказати результат роботи машини Поста, якщо початковий стан стрічки: 1110011.



Так як не вказано на якому місці знаходиться каретка положимо, що її початкова позиція у першій комірці, тобто 1110011 (червоним відмічена каретка). Покроковий розбір програми:

Команда Поточний стан Коментар

1 ? 3; 2 1110011 мітка є, отже перехід до команди 2

2 -> 1 1110011 зсув каретки вправо і перехід до команди 1

1 ? 3; 2 1110011 мітка є, отже перехід до команди 2

2 -> 1 1110011 зсув каретки вправо і перехід до команди 1

1 ? 3; 2 1110011 мітка є, отже перехід до команди 2

2 -> 1 1110011 зсув каретки вправо і перехід до команди 1

1 ? 3; 2 1110011 мітка немає, отже перехід до команди 3

3 -> 4 1110011 зсув каретки вправо перехід до команди 4

4 ? 6; 5 1110011 мітки немає отже перехід до команди 6

6 -> 7 1110011 зсув каретки вправо перехід до команди 7

7 ? 8; 9 1110011 мітка є, отже перехід до команди 9

9 -> 4 1110011 зсув каретки вправо перехід до команди 4

4 ? 6; 5 1110011 мітка є отже перехід до команди 5

5 <- 1 1110011 зсув каретки вліво перехід до команди 1

1 ? 3; 2 1110011 мітка є, отже перехід до команди 2

2 -> 1 1110011 зсув каретки вправо і перехід до команди 1

1 ? 3; 2 1110011 мітка є, отже перехід до команди 2

2 -> 1 1110011 зсув каретки вправо і перехід до команди 1

1 ? 3; 2 11100110 мітка немає, отже перехід до команди 3

\*примітка: на цьому місці ми вже працюємо з комірками не з початкового коду, уявляючи, що нескінченно вправо розміщені порожні комірки\*

3 -> 4 11100110 зсув каретки вправо, перехід до команди 4

4 ? 6; 5 111001100 мітки немає отже перехід до команди 6

6 -> 7 111001100 зсув каретки вправо перехід до команди 7

7 ? 8; 9 1110011000 мітки немає, отже перехід до команди 8

8 ! 1110011000 завершення програми

Результат роботи: 1110011000, де червоним виділена позиція каретки.

**3** Є 6 міст. Необхідно розвезти товар у кожне місто таким чином, щоб побувати у кожному місті лише один раз. Вартість перевезення із одного міста в інше відома і задана таблицею. Знайти найменшу ціну, за яку можна здійснити таке перевезення.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** |  | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 |
| **2** | 3 |  | 7 | 8 | 9 | 4 |
| **3** | 4 | 9 |  | 6 | 8 | 9 |
| **4** | 9 | 5 | 8 |  | 4 | 10 |
| **5** | 2 | 1 | 15 | 6 |  | 3 |
| **6** | 10 | 2 | 5 | 4 | 9 |  |

Алгоритм

1. Побудова матриці з вихідними даними.

2. Знаходження мінімуму по рядках.

3. Редукція рядків.

4. Знаходження мінімуму за стовпцями.

5. Редукція стовпців.

6. Обчислення оцінок нульових клітин.

7. Редукція матриці.

8. Якщо повний шлях ще не знайдений, переходимо до пункту 2, якщо знайдений до пункту

9. Обчислення підсумкової довжини шляху і побудова маршруту.

Формуємо матрицю відстаней за вихідними даними:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 |
| 2 | 3 | M | 7 | 8 | 9 | 4 |
| 3 | 4 | 9 | M | 6 | 8 | 9 |
| 4 | 9 | 5 | 8 | M | 4 | 10 |
| 5 | 2 | 1 | 15 | 6 | M | 3 |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 4 | 9 | M |
|  |  |  |  |  |  |  |

Ітерація № 1

Етап № 1.1

Знайдемо в кожному рядку мінімальне значення. Ці мінімальні елементи по рядках, що позначаються як di, впишемо в додатковий стовпець:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | di |
| 1 | M | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 | **3** |
| 2 | 3 | M | 7 | 8 | 9 | 4 | **3** |
| 3 | 4 | 9 | M | 6 | 8 | 9 | **4** |
| 4 | 9 | 5 | 8 | M | 4 | 10 | **4** |
| 5 | 2 | 1 | 15 | 6 | M | 3 | **1** |
| 6 | 10 | 2 | 5 | 4 | 9 | M | **2** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.2

Зробимо редукцію рядків. Тобто віднімемо з кожного елемента рядка відповідний їй мінімальний елемент (di):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | di |
| 1 | **M** | **5** | **0** | **2** | **4** | **1** | 3 |
| 2 | **0** | **M** | **4** | **5** | **6** | **1** | 3 |
| 3 | **0** | **5** | **M** | **2** | **4** | **5** | 4 |
| 4 | **5** | **1** | **4** | **M** | **0** | **6** | 4 |
| 5 | **1** | **0** | **14** | **5** | **M** | **2** | 1 |
| 6 | **8** | **0** | **3** | **2** | **7** | **M** | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.3 Тепер знайдемо мінімальне значення в кожному стовпці. Ці мінімальні елементи по стовпцях, що позначаються як dj, впишемо в додатковий рядок:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 5 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 0 | M | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 3 | 0 | 5 | M | 2 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 4 | M | 0 | 6 |
| 5 | 1 | 0 | 14 | 5 | M | 2 |
| 6 | 8 | 0 | 3 | 2 | 7 | M |
| dj | **0** | **0** | **0** | **2** | **0** | **1** |

Етап № 1.4

Зробимо редукцію стовпців. Тобто віднімемо з кожного елемента стовпця відповідний йому мінімальний елемент (dj):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **M** | **5** | **0** | **0** | **4** | **0** |
| 2 | **0** | **M** | **4** | **3** | **6** | **0** |
| 3 | **0** | **5** | **M** | **0** | **4** | **4** |
| 4 | **5** | **1** | **4** | **M** | **0** | **5** |
| 5 | **1** | **0** | **14** | **3** | **M** | **1** |
| 6 | **8** | **0** | **3** | **0** | **7** | **M** |
| dj | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |

Етап № 1.5 У вийшла матриці знайдемо нульові клітини:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 5 | **0** | **0** | 4 | **0** |
| 2 | **0** | M | 4 | 3 | 6 | **0** |
| 3 | **0** | 5 | M | **0** | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 4 | M | **0** | 5 |
| 5 | 1 | **0** | 14 | 3 | M | 1 |
| 6 | 8 | **0** | 3 | **0** | 7 | M |
|  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.6 Обчислимо для нульових клітин оцінки. Вони знаходяться в такий спосіб: в рядку, що відповідає нульовій клітці знаходиться мінімальне число (при цьому сама нульова клітина, для якої шукається оцінка, в розрахунок не береться, але інші нульові клітини враховуються). Також мінімум шукається в стовпці нульової клітини (вона сама при цьому так само в розрахунок не береться, на відміну від інших нульових клітин). Потім ці два мінімуму складаються. Вийшло в результаті число і є оцінка. Її ми записуємо поряд з нулем, в дужках. Далі ця ж послідовність дій повторюється для всіх нульових клітин:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 5 | **0 [3]** | **0 [0]** | 4 | **0 [0]** |
| 2 | **0 [0]** | M | 4 | 3 | 6 | **0 [0]** |
| 3 | **0 [0]** | 5 | M | **0 [0]** | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 4 | M | **0 [5]** | 5 |
| 5 | 1 | **0 [1]** | 14 | 3 | M | 1 |
| 6 | 8 | **0 [0]** | 3 | **0 [0]** | 7 | M |
|  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.7

Знайдемо серед обчислених оцінок нульових клітин максимальну оцінку

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 5 | 0 [3] | 0 [0] | 4 | 0 [0] |
| 2 | 0 [0] | M | 4 | 3 | 6 | 0 [0] |
| 3 | 0 [0] | 5 | M | 0 [0] | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 4 | M | **0 [5]** | 5 |
| 5 | 1 | 0 [1] | 14 | 3 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 [0] | 3 | 0 [0] | 7 | M |
|  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.8 Проведемо редукцію матриці - повністю виключимо рядок і стовпець, відповідні нульовий клітці з максимальною оцінкою. Результат представлений нижче. Важливо, що при цьому виключені рядок і стовпець дають нам один з відрізків оптимального шляху: рядок відповідає Містоу відправлення, стовпець - Містоу призначення. У нашому випадку це відрізок 4 → 5 і його довжина дорівнює: 4 од. дов.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | M | 4 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 5 | M | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | 14 | 3 | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 3 | 0 | M |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 1.9

На цьому етапі, щоб виключити повернення в уже відвіданий Місто, ми ставимо символ 'M' на зворотний шлях (якщо він є; в нашому випадку - так).

Крім того необхідно поставити символ 'M' в усі клітини, які відповідають шляхах замикаючим маршрут завчасно. Таким чином ми відкидаємо можливі 'петлі' (підцикли). У нашому випадку петлею немає.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | M | 4 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 5 | M | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | 14 | **M** | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 3 | 0 | M |
|  |  |  |  |  |  |

Ітерація № 2

Етап № 2.1

Знайдемо в кожному рядку мінімальне значення. Ці мінімальні елементи по рядках, що позначаються як di, впишемо в додатковий стовпець:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | di |
| 1 | M | 5 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| 2 | 0 | M | 4 | 3 | 0 | **0** |
| 3 | 0 | 5 | M | 0 | 4 | **0** |
| 5 | 1 | 0 | 14 | M | 1 | **0** |
| 6 | 8 | 0 | 3 | 0 | M | **0** |
|  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 2.2 Зробимо редукцію рядків. Тобто віднімемо з кожного елемента рядка відповідний їй мінімальний елемент (di):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | di |
| 1 | **M** | **5** | **0** | **0** | **0** | 0 |
| 2 | **0** | **M** | **4** | **3** | **0** | 0 |
| 3 | **0** | **5** | **M** | **0** | **4** | 0 |
| 5 | **1** | **0** | **14** | **M** | **1** | 0 |
| 6 | **8** | **0** | **3** | **0** | **M** | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Етап № 2.3

Тепер знайдемо мінімальне значення в кожному стовпці. Ці мінімальні елементи по стовпцях, що позначаються як dj, впишемо в додатковий рядок:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | M | 4 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 5 | M | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | 14 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 3 | 0 | M |
| dj | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |

Етап № 2.4 Зробимо редукцію стовпців. Тобто віднімемо з кожного елемента стовпця відповідний йому мінімальний елемент (dj):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | **M** | **5** | **0** | **0** | **0** |
| 2 | **0** | **M** | **4** | **3** | **0** |
| 3 | **0** | **5** | **M** | **0** | **4** |
| 5 | **1** | **0** | **14** | **M** | **1** |
| 6 | **8** | **0** | **3** | **0** | **M** |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Етап № 2.5

У вийшла матриці знайдемо нульові клітини:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | **0** | **0** | **0** |
| 2 | **0** | M | 4 | 3 | **0** |
| 3 | **0** | 5 | M | **0** | 4 |
| 5 | 1 | **0** | 14 | M | 1 |
| 6 | 8 | **0** | 3 | **0** | M |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 2.6 Обчислимо для нульових клітин оцінки. Вони знаходяться в такий спосіб: в рядку, що відповідає нульовій клітці знаходиться мінімальне число (при цьому сама нульова клітина, для якої шукається оцінка, в розрахунок не береться, але інші нульові клітини враховуються). Також мінімум шукається в стовпці нульової клітини (вона сама при цьому так само в розрахунок не береться, на відміну від інших нульових клітин). Потім ці два мінімуму складаються. Вийшло в результаті число і є оцінка. Її ми записуємо поряд з нулем, в дужках. Далі ця ж послідовність дій повторюється для всіх нульових клітин:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | **0 [3]** | **0 [0]** | **0 [0]** |
| 2 | **0 [0]** | M | 4 | 3 | **0 [0]** |
| 3 | **0 [0]** | 5 | M | **0 [0]** | 4 |
| 5 | 1 | **0 [1]** | 14 | M | 1 |
| 6 | 8 | **0 [0]** | 3 | **0 [0]** | M |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 2.7

Знайдемо серед обчислених оцінок нульових клітин максимальну оцінку:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | M | 5 | **0 [3]** | 0 [0] | 0 [0] |
| 2 | 0 [0] | M | 4 | 3 | 0 [0] |
| 3 | 0 [0] | 5 | M | 0 [0] | 4 |
| 5 | 1 | 0 [1] | 14 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 [0] | 3 | 0 [0] | M |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 2.8

Проведемо редукцію матриці - повністю виключимо рядок і стовпець, відповідні нульовий клітці з максимальною оцінкою. Результат представлений нижче.

Важливо, що при цьому виключені рядок і стовпець дають нам один з відрізків оптимального шляху: рядок відповідає Містоу відправлення, стовпець - Містоу призначення. У нашому випадку це відрізок 1 → 3 і його довжина дорівнює: 3 од. дов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 0 | M | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 5 | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 0 | M |
|  |  |  |  |  |

Етап № 2.9 На цьому етапі, щоб виключити повернення в уже відвіданий Місто, ми ставимо символ 'M' на зворотний шлях (якщо він є; в нашому випадку - так). Крім того необхідно поставити символ 'M' в усі клітини, які відповідають шляхах замикаючим маршрут завчасно. Таким чином ми відкидаємо можливі 'петлі' (підцикли). У нашому випадку петлею немає.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 0 | M | 3 | 0 |
| 3 | **M** | 5 | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 0 | M |
|  |  |  |  |  |

Ітерація № 3 Етап № 3.1 Знайдемо в кожному рядку мінімальне значення. Ці мінімальні елементи по рядках, що позначаються як di, впишемо в додатковий стовпець:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 | di |
| 2 | 0 | M | 3 | 0 | **0** |
| 3 | M | 5 | 0 | 4 | **0** |
| 5 | 1 | 0 | M | 1 | **0** |
| 6 | 8 | 0 | 0 | M | **0** |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 3.2

Зробимо редукцію рядків. Тобто віднімемо з кожного елемента рядка відповідний їй мінімальний елемент (di):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 | di |
| 2 | **0** | **M** | **3** | **0** | 0 |
| 3 | **M** | **5** | **0** | **4** | 0 |
| 5 | **1** | **0** | **M** | **1** | 0 |
| 6 | **8** | **0** | **0** | **M** | 0 |
|  |  |  |  |  |  |

Етап № 3.3

Тепер знайдемо мінімальне значення в кожному стовпці. Ці мінімальні елементи по стовпцях, що позначаються як dj, впишемо в додатковий рядок:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 0 | M | 3 | 0 |
| 3 | M | 5 | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 | 0 | M |
| dj | **0** | **0** | **0** | **0** |

Етап № 3.4

Зробимо редукцію стовпців. Тобто віднімемо з кожного елемента стовпця відповідний йому мінімальний елемент (dj):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | **0** | **M** | **3** | **0** |
| 3 | **M** | **5** | **0** | **4** |
| 5 | **1** | **0** | **M** | **1** |
| 6 | **8** | **0** | **0** | **M** |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 |

Етап № 3.5

У вийшла матриці знайдемо нульові клітини:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | **0** | M | 3 | **0** |
| 3 | M | 5 | **0** | 4 |
| 5 | 1 | **0** | M | 1 |
| 6 | 8 | **0** | **0** | M |
|  |  |  |  |  |

Етап № 3.6 Обчислимо для нульових клітин оцінки. Вони знаходяться в такий спосіб: в рядку, що відповідає нульовій клітці знаходиться мінімальне число (при цьому сама нульова клітина, для якої шукається оцінка, в розрахунок не береться, але інші нульові клітини враховуються). Також мінімум шукається в стовпці нульової клітини (вона сама при цьому так само в розрахунок не береться, на відміну від інших нульових клітин). Потім ці два мінімуму складаються. Вийшло в результаті число і є оцінка. Її ми записуємо поряд з нулем, в дужках. Далі ця ж послідовність дій повторюється для всіх нульових клітин:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | **0 [1]** | M | 3 | **0 [1]** |
| 3 | M | 5 | **0 [4]** | 4 |
| 5 | 1 | **0 [1]** | M | 1 |
| 6 | 8 | **0 [0]** | **0 [0]** | M |
|  |  |  |  |  |

Етап № 3.7 Знайдемо серед обчислених оцінок нульових клітин максимальну оцінку:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 0 [1] | M | 3 | 0 [1] |
| 3 | M | 5 | **0 [4]** | 4 |
| 5 | 1 | 0 [1] | M | 1 |
| 6 | 8 | 0 [0] | 0 [0] | M |
|  |  |  |  |  |

Етап № 3.8

Проведемо редукцію матриці - повністю виключимо рядок і стовпець, відповідні нульовий клітці з максимальною оцінкою. Результат представлений нижче.

Важливо, що при цьому виключені рядок і стовпець дають нам один з відрізків оптимального шляху: рядок відповідає Містоу відправлення, стовпець - Містоу призначення. У нашому випадку це відрізок 3 → 4 і його довжина дорівнює: 6 од. дов.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | 0 | M | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 8 | 0 | M |
|  |  |  |  |

Етап № 3.9

На цьому етапі, щоб виключити повернення в уже відвіданий Місто, ми ставимо символ 'M' на зворотний шлях (якщо він є; в нашому випадку - немає).

Крім того необхідно поставити символ 'M' в усі клітини, які відповідають шляхах замикаючим маршрут завчасно. Таким чином ми відкидаємо можливі 'петлі' (підцикли). У нашому випадку петлею немає.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | 0 | M | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 8 | 0 | M |
|  |  |  |  |

Ітерація № 4

Етап № 4.1

Знайдемо в кожному рядку мінімальне значення. Ці мінімальні елементи по рядках, що позначаються як di, впишемо в додатковий стовпець:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 | di |
| 2 | 0 | M | 0 | **0** |
| 5 | 1 | 0 | 1 | **0** |
| 6 | 8 | 0 | M | **0** |
|  |  |  |  |  |

Етап № 4.2 Зробимо редукцію рядків. Тобто віднімемо з кожного елемента рядка відповідний їй мінімальний елемент (di):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 | di |
| 2 | **0** | **M** | **0** | 0 |
| 5 | **1** | **0** | **1** | 0 |
| 6 | **8** | **0** | **M** | 0 |
|  |  |  |  |  |

Етап № 4.3 Тепер знайдемо мінімальне значення в кожному стовпці. Ці мінімальні елементи по стовпцях, що позначаються як dj, впишемо в додатковий рядок:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | 0 | M | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 8 | 0 | M |
| dj | **0** | **0** | **0** |

Етап № 4.4

Зробимо редукцію стовпців. Тобто віднімемо з кожного елемента стовпця відповідний йому мінімальний елемент (dj):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | **0** | **M** | **0** |
| 5 | **1** | **0** | **1** |
| 6 | **8** | **0** | **M** |
| dj | 0 | 0 | 0 |

Етап № 4.5

У вийшла матриці знайдемо нульові клітини:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | **0** | M | **0** |
| 5 | 1 | **0** | 1 |
| 6 | 8 | **0** | M |
|  |  |  |  |

Етап № 4.6

Обчислимо для нульових клітин оцінки. Вони знаходяться в такий спосіб: в рядку, що відповідає нульовій клітці знаходиться мінімальне число (при цьому сама нульова клітина, для якої шукається оцінка, в розрахунок не береться, але інші нульові клітини враховуються). Також мінімум шукається в стовпці нульової клітини (вона сама при цьому так само в розрахунок не береться, на відміну від інших нульових клітин). Потім ці два мінімуму складаються. Вийшло в результаті число і є оцінка. Її ми записуємо поряд з нулем, в дужках.

Далі ця ж послідовність дій повторюється для всіх нульових клітин:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | **0 [1]** | M | **0 [1]** |
| 5 | 1 | **0 [1]** | 1 |
| 6 | 8 | **0 [8]** | M |
|  |  |  |  |

Етап № 4.7 Знайдемо серед обчислених оцінок нульових клітин максимальну оцінку:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 2 | 6 |
| 2 | 0 [1] | M | 0 [1] |
| 5 | 1 | 0 [1] | 1 |
| 6 | 8 | **0 [8]** | M |
|  |  |  |  |

Етап № 4.8 Проведемо редукцію матриці - повністю виключимо рядок і стовпець, відповідні нульовий клітці з максимальною оцінкою. Результат представлений нижче. Важливо, що при цьому виключені рядок і стовпець дають нам один з відрізків оптимального шляху: рядок відповідає Містоу відправлення, стовпець - Містоу призначення. У нашому випадку це відрізок 6 → 2 і його довжина дорівнює: 2 од. дов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
|  |  |  |

Етап № 4.9

На цьому етапі, щоб виключити повернення в уже відвіданий Місто, ми ставимо символ 'M' на зворотний шлях (якщо він є; в нашому випадку - так).

Крім того необхідно поставити символ 'M' в усі клітини, які відповідають шляхах замикаючим маршрут завчасно. Таким чином ми відкидаємо можливі 'петлі' (підцикли). У нашому випадку петлею немає.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | 0 | **M** |
| 5 | 1 | 1 |
|  |  |  |

Ітерація № 5

Етап № 5.1

Знайдемо в кожному рядку мінімальне значення. Ці мінімальні елементи по рядках, що позначаються як di, впишемо в додатковий стовпець:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 | di |
| 2 | 0 | M | **0** |
| 5 | 1 | 1 | **1** |
|  |  |  |  |

Етап № 5.2

Зробимо редукцію рядків. Тобто віднімемо з кожного елемента рядка відповідний їй мінімальний елемент (di):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 | di |
| 2 | **0** | **M** | 0 |
| 5 | **0** | **0** | 1 |
|  |  |  |  |

Етап № 5.3

Тепер знайдемо мінімальне значення в кожному стовпці. Ці мінімальні елементи по стовпцях, що позначаються як dj, впишемо в додаткову строку

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | 0 | M |
| 5 | 0 | 0 |
| dj | **0** | **0** |

Етап № 5.4 Зробимо редукцію стовпців. Тобто віднімемо з кожного елемента стовпця відповідний йому мінімальний елемент (dj):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | **0** | **M** |
| 5 | **0** | **0** |
| dj | 0 | 0 |

Етап № 5.5 У вийшла матриці знайдемо нульові клітини:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | **0** | M |
| 5 | **0** | **0** |
|  |  |  |

Етап № 5.6 Обчислимо для нульових клітин оцінки. Вони знаходяться в такий спосіб: в рядку, що відповідає нульовій клітці знаходиться мінімальне число (при цьому сама нульова клітина, для якої шукається оцінка, в розрахунок не береться, але інші нульові клітини враховуються). Також мінімум шукається в стовпці нульової клітини (вона сама при цьому так само в розрахунок не береться, на відміну від інших нульових клітин). Потім ці два мінімуму складаються. Вийшло в результаті число і є оцінка. Її ми записуємо поряд з нулем, в дужках. Далі ця ж послідовність дій повторюється для всіх нульових клітин:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | **0 [∞]** | M |
| 5 | **0 [0]** | **0 [∞]** |
|  |  |  |

Етап № 5.7

Знайдемо серед обчислених оцінок нульових клітин максимальну оцінку:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Місто | 1 | 6 |
| 2 | **0 [∞]** | M |
| 5 | 0 [0] | **0 [∞]** |
|  |  |  |

Етап № 5.8

Проведемо редукцію матриці - повністю виключимо рядок і стовпець, відповідні нульовий клітці з максимальною оцінкою. Результат представлений нижче.

Важливо, що при цьому виключені рядок і стовпець дають нам один з відрізків оптимального шляху: рядок відповідає Місто відправлення, стовпець - Місто призначення. У нашому випадку це відрізок 5 → 6 і його довжина дорівнює: 3 од. дов.

|  |  |
| --- | --- |
| Місто | 1 |
| 2 | 0 |
|  |  |

Етап № 5.9

На цьому етапі, щоб виключити повернення в уже відвіданий Місто, ми ставимо символ 'M' на зворотний шлях (якщо він є; в нашому випадку - немає).

Крім того необхідно поставити символ 'M' в усі клітини, які відповідають шляхах замикаючим маршрут завчасно. Таким чином ми відкидаємо можливі 'петлі' (підцикли). У нашому випадку петлею немає.

|  |  |
| --- | --- |
| Місто | 1 |
| 2 | 0 |
|  |  |

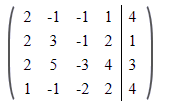
Ітерація № 6 Залишилося знайти останній відрізок оптимального шляху. Його можна з легкістю визначити без розрахунків, просто подивившись яка пара Місто в ланцюзі залишилася незамкненою. Це і буде шуканий відрізок маршруту. У нашому випадку це: 2 → 1 і його довжина дорівнює: 3 од. дов. відповідь Таким чином, завдання комівояжера успішно вирішена, оптимальний (найкоротший) шлях знайдений. Йому відповідає наступний маршрут: 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 2 → 1

Загальна довжина знайденого оптимального маршруту становить 21 од. дов.

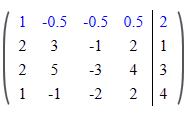
**4** Дано систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими, необхідно знайти її розв’язки методом Гауса. Обчислити визначник та знайти обернену матрицю.



Перепишемо СЛАР у вигляді матриці:



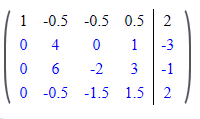
Першу строку ділимо на 2, щоб отримати а11 = 1



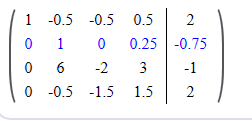
Від 2-ої строки віднімаємо першу строку, помножену на 2.

Від 3-ої строки віднімаємо першу строку, помножену на 2.

Від 4-ої строки віднімаємо 1 строку



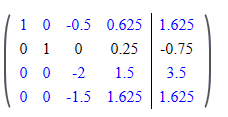
2-гу строку ділимо на 4



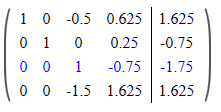
До першої строки додаємо 2 строку, помножену на 0.5.

Від 3-ої строки віднімаємо 2 строку, помножену на 6

До 4-ої строки додаємо 2 строку, помножену на 0.5

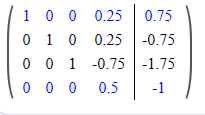


3-ю строку ділимо на -2

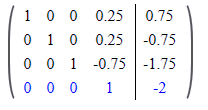


До першої строки додаємо 3-у строку, помножену на 0.5

До 4-ої строки додаємо 3-у строку, помножену на 1.5



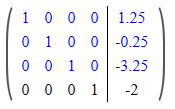
4-у строку ділимо на 0.5



Від першої строки віднімаємо 4-у строку, помножену на 0.25

Від 2-ої строки віднімаємо 4-у строку, помножену на 0.25

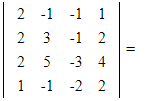
До 3-ої строки додаємо 4-у строку, помножену на 0.75



У результаті отримаємо одиничну матрицю яка явно описує кожну невідому.

x1 = 1.25 x2 = -0.25 x3 = -3.25 x4 = -2

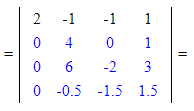
Обчислення визначника початкової матриці:



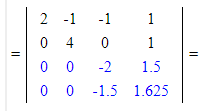
Від 2 строки віднімаємо 1 строку

Від 3 строки віднімаємо 1 строку

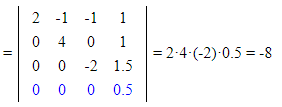
Від 4 строки віднімаємо 1 строку, помножену на 0.5



Від 3 строки віднімаємо 2 строку, помножену на 1.5

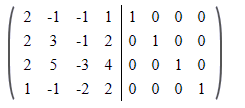
До 4 строки додаємо 2 строку, помножену на 0.125  


Від 4 строки віднімаємо 3 строку, помножену на 0.75

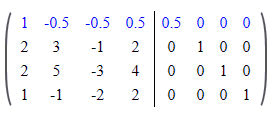


Обчислення оберненої матриці:

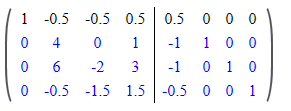
Для обчислення оберненої матриці напишемо її та допишемо справа одиничну матрицю:



Тепер щоб знайти обернену матрицю, використовуючи елементарні перетворення над строками матриці, перетворимо ліву частину отриманої матриці в одиничну.



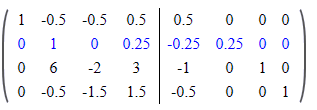
1-у строку ділим на 2



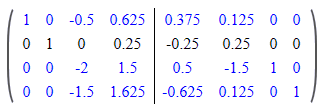
Від 2 строки віднімаємо 1 строку, помножену на 2

Від 3 строки віднімаємо 1 строку, помножену на 2

Від 4 строки віднімаємо 1 строку



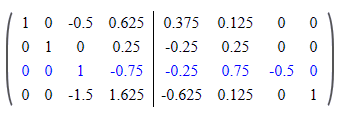
2-у строку ділимо на 4



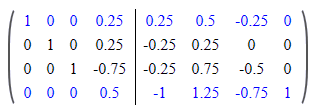
До 1-ої строки додаємо 2 строку, помножену на 0.5

Від 3-ої строки віднімаємо 2 строку, помножену на 6

До 4-ої строки додаємо 2 строку, помножену на 0.5

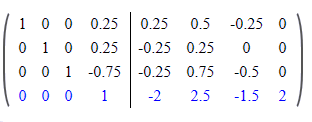


3-ую строку ділимо на -2

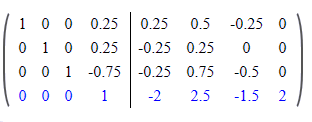


До 1 строки додаємо 3 строку, помножену на 0.5

До 4 строки додаємо 3 строку, помножену на 1.5



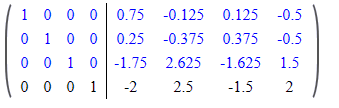
4-у строку ділимо на 0.5



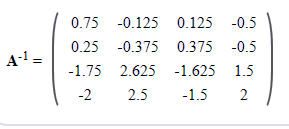
Від 1 строки віднімаємо 4 строку, помножену на 0.25

Від 2 строки віднімаємо 4 строку, помножену на 0.25

До 3 строки додаємо 4 строку, помножену на 0.75



Після останньої ітерації бачимо, що зліва одинична матриці, отже справа обернена матриця.



**5** Необхідно здійснити -ту ітерацію для знаходження розв’язку рівняння  методом дотичних на проміжку , якщо .

Для x ^ (k) = 1 - 2 етапу

1) Відділення коренів - виділення відрізків містять тільки 1 корінь.

2) Ітераційний процес - уточнити значення відшукуваного кореня.

Є 2 точки, F (x0), F (x1)

рівняння прямої

1 етап

y-f (x1) / f (x1) -f (x0) = (x - x1) / (x1-x0)

Для точки перетину з віссю абсцис (у = 0), рівняння

x = х1 - (х1-х0 / f (x1) -f (x0)) \* f (x1)

2 етап

F (X (k)) = 1

(X (k) - X (k-1)) - зміна X (k) в результаті ітерації константи меншою X (k)

Для 1 ітерації

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | X | F (x) |
| X2 | -1,85 | -3.38 |
| X3 | -1 | -3.72 |

Результат для x2 та x3

X2 = [x1 - x (x1 - 1)] = 11.85

**6** Нехай потрібно розв’язати систему нелінійних рівнянь методом простих ітерацій до четвертого наближення, знайти область визначення для невідомих, якщо задано:

Намалювати блок-схему.

Виразимо усі невідомі через інші: для рівняння 1 – х1, для р-ня 2 – х2, для р-ня 3 – х3

x1 =

x2 = 5x1 - 1

x3 = x13 - 3x22 + 2

Як видно вище D(y), тобто область визначення для кожної невідомої:

х1 >= 0, так як виражається через корінь, х2, х3 Є R

Підставимо у праві частини рівнянь початкові умови і знайдемо значення невідомих на першій ітерації:

x1 = = 1.4742

x2 = 5\*1,5 – 1 = 6,5

x3 = 1,53 - 0 + 2 = 5,375

Підставимо у праві частини рівнянь значення з першої ітерації і знайдемо значення невідомих на другій ітерації:

x1 = = 2,2

x2 = - 5\*1.47 – 1 = 6,35

x3 = 1.473 - 3\*8,52 + 2 = -211,58

Підставимо у праві частини рівнянь значення з другої ітерації і знайдемо значення невідомих на третій ітерації:

x1 = = 2.03

x2 = 5\*2.2 – 1 = 10

x3 = 2.23 – 3\*6,352 + 2 = -108.312

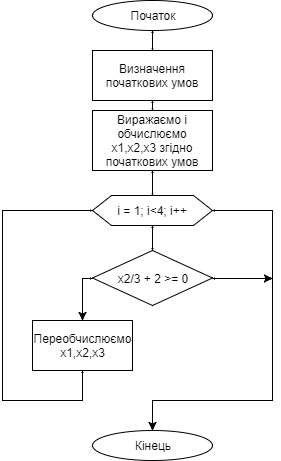
Підставимо у праві частини рівнянь значення з третьої ітерації і знайдемо значення невідомих на четвертій ітерації:

x1 = = 2.3

x2 = 5\*2,03 – 1 = 9.15

x3 = 2.033 – 3\*102 + 2 = -293.88

Блок-схема



**8** Нехай дано дослідні дані попиту та пропозиції, а також ціну на певну продукцію. Необхідно оцінити похибку розв’язку методом найменших квадратів, якщо зроблено припущення, що залежність попиту та ціни визначається за формулою , а пропозиції від ціни .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | 3 | 7 | 2 | 5 | 3 |
|  | 3 | 3 | 6 | 8 | 10 | 2 |
|  | 3 | 6 | 4 | 2 | 9 | 4 |

Для кожної з функцій Р(с) та S(c) обчислимо за методом найменших квадратів їх рівняння тренду:

Система рівнянь МНК виглядає так:  
an + b∑с = ∑Р ,де n=6 – кількість пар Р – с, а і b – коефіцієнти   
a∑с + b∑с2 = ∑Р\*с лінійного рівняння Р = а\*с + b

Р(с):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *і=1* | *і=2* | *і=3* | *і=4* | *і=5* | *і=6* | *Сума* |
| *с* | 2 | 3 | 7 | 2 | 5 | 3 | 22 |
| *Р* | 3 | 3 | 6 | 8 | 10 | 2 | 32 |
| *с2* | 4 | 9 | 49 | 4 | 25 | 9 | 100 |
| *Р2* | 9 | 9 | 36 | 64 | 100 | 4 | 222 |
| *Р\*с* | 6 | 9 | 42 | 16 | 50 | 6 | 129 |

Підставивши дані з таблиці у систему можемо визначити а і b:

6a + 22b = 32

22a + 100b = 129

Вирішивши отриману СЛАР отримажмо:

a = 3.121, b = 0.603

Підставляємо у рівняння Р = а\*с + b

Р = 0.603 с + 3.121

Похибка відносно початкового припущення   
δа = 3.397

δb = 1.879

Так як у функції  присутній квадрат аргумента ця функція є квадратною, або параболічною. Для параболічної функції СЛАР МНК виглядає так:

an + b∑t + c∑t2 = ∑S , де a,b,c – коефіцієнти квадратичного рівняння t-ціна (t, тому   
a∑t + b∑t2 + c∑t3 = ∑S \*t що с вже зайняте), n – кількість пар S-t  
a∑t2 + b∑t3 + c∑t4 = ∑S \*t2

S(с):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *і=1* | *і=2* | *і=3* | *і=4* | *і=5* | *і=6* | *Сума* |
| *t* | 2 | 3 | 7 | 2 | 5 | 3 | 22 |
| *S* | 3 | 6 | 4 | 2 | 9 | 4 | 28 |
| *t2* | 4 | 9 | 49 | 4 | 25 | 9 | 100 |
| *t3* | 8 | 27 | 343 | 8 | 125 | 27 | 538 |
| *t4* | 16 | 81 | 2401 | 16 | 625 | 81 | 3220 |
| *S2* | 9 | 36 | 16 | 4 | 81 | 16 | 162 |
| *S\*t* | 6 | 18 | 28 | 4 | 45 | 12 | 113 |
| *s\*t2* | 12 | 54 | 196 | 8 | 225 | 36 | 531 |

Підставивши дані з таблиці у систему можемо визначити а, b і с:

6a + 22b + 100c = 28  
22a + 100b + 538c = 113  
100a + 538b + 3220c = 531

Розв’язавши СЛАР отримаємо:

c = -0.779, b = 7.439, a = -9.624

Підставляємо у рівняння S = а\*t2 + c

S = -0.779t2+7.439t-9.624

Похибка відносно початкового припущення  :

δа = 3.779

δb = 7.439

δc = 8.624

**9** За заданою таблицею знайти значення функції в точці , використовуючи формулу Лагранжа:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 1 | 3 | 4 |
|  | 5 | 3 | 2 |

За заданою таблицею будуємо поліном Лагранжа:

L(x) =y0 \* + y1 \* + y2 \*

Підставимо у отриманий поліном табличні значення:

L(x) = 5\* + 3 \* + 2\* =

= 5 \* (x2 – 7x + 12) / 6 + 3 \* (x2 – 5x + 4) / -2 + 2 \* (х2 – 4х + 3) / 9 =

= (15 \* (x2 – 7x + 12) - 27 \* (x2 – 5x + 4) + 4 \* (х2 – 4х + 3) ) / 18 =

= ( 15 x2 – 105x + 180 – 27x2 + 135x – 108 + 4x2 – 16x + 12) / 18 =

= ( -8x2 + 14x + 84 ) / 18

Визначемо значення функції у точці х = 2:

L(2) = (-8 \* 4 + 14 \* 2 + 84) / 18 = 4,44

**10** За заданою таблицею побудувати інтерполяційний поліном Ньютона:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 1 | 3 | 4 |
|  | 5 | 3 | 2 |

Складемо систему розділених різниць.

f10 = (y1 – y0)/(x1-x0) = -1

f11 = (y2 – y1)/(x2-x1) = -1

f20 = (f11– f10)/(x2-x0) = 0

Запишемо формулу для інтерполяційного полінома Ньютона і підставимо туди отримані значення:

P(x) = y0 + f10(x-x0) + f20(x-x0)(x-x1) = 5 – 1 \* (x-1) + 0 \* (x-x0)(x-x1) = 6 - x