Разностные методы решения уравнения переноса

Постановка задачи

Качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных посвящено много работ (например, [7] и библиография в ней). Поскольку найти аналитическое решение таких уравнений в большинстве случаев не удается, ведется разработка, обоснование и программная реализация численных методов ([8, 9]). Актуальной задачей является разработка параллельных алгоритмов, распараллеливание имеющихся и их программная реализация.

Важным классом дифференциальных уравнений в частных производных являются уравнения переноса, которые возникают при моделировании переноса излучения, динамики популяций и т.д.

Класс решаемых на сервере уравнений составляют неоднородные уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u(x, t)), \tag{1}$$

здесь $x \in [0, X]$ — пространственная и $t \in [t_0; \theta]$ — временная независимые переменные; $u(x, t)$ — искомая функция; $a > 0$ — коэффициент.

Вместе с уравнением заданы начальное условие

$$u(t_0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, X], \tag{2}$$

и граничное условие

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in [t_0; \theta], \tag{3}$$

причем выполнены условия согласования

$$g(t_0) = \varphi(0, t_0).$$

Предполагается, что функции f, φ, g таковы, что у задачи (1)–(3) имеется единственное решение.

Разностная схема

Будем следовать работе [12]. Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih,\ i = 0, ..., N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[t_0; \theta]$ на части с шагом Δ, введя точки $t_j = t_0 + j\Delta,\ j = 0, ..., M$. Приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах обозначим u^i_j.

Для $0 \le s \le 1$ рассмотрим семейство методов $j = 0, ..., M - 1$

$$\frac{u^1_{j+1} - u^1_j}{\Delta} + a\left(s\,\frac{-4u^0_{j+1} - 2h/a(f^0_{j+1} - \dot{g}_{j+1}) + 4u^1_{j+1}}{2h} + \right.$$

$$(1-s)\,\frac{-4u_j^0 - 2h/a(f_j^0 - \dot g_j) + 4u_j^1}{2h}\Bigg) = f_j^1,$$

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a\left(s\,\frac{u_{j+1}^{i-2} - 4u_{j+1}^{i-1} + 3u_{j+1}^i}{2h} + \right.$$

$$\left.(1-s)\,\frac{u_j^{i-2} - 4u_j^{i-1} + 3u_j^i}{2h}\right) = f_j^i, \quad i = 2, ..., N \tag{4}$$

с начальным условием

$$u_0^i = \varphi(x_i), \quad i = 0, ..., N,$$

и граничным условием

$$u_j^0 = g_0(t_j), \quad j = 0, ..., M.$$

Здесь $f_j^i = f(x_i, t_j, u_j^i)$ — значение функции f, вычисленное на приближенном решении, $\dot g_j = \dfrac{dg(t)}{dt}\Big|_{t=t_0+j\Delta}$. Для построения численного метода мы дополнительно предполагаем, что $g(t)$ дифференцируемая.

Дадим комментарии относительно того, как получена схема. В уравнении (1) производная $\partial u/\partial t$ аппроксимируется конечной разностью по двум узам. Для узлов (i,j), $i = 2, ..., N$, $j = 0, ..., M-1$ производная $\partial u/\partial x$ аппроксимируется конечной разностью по трем узлам на правый край. Для $i = 1$ такая аппроксимация потребовала бы вычисления u_j^{-1}. Для $i = 1$ применяется аппроксимация по трем узлам с кратным узлом $(0, j)$

$$\frac{\partial u_j^1}{\partial x} \approx \frac{-4u_j^0 - 2h\,\partial u_j^0/\partial x + 4u_j^1}{2h}.$$

В силу (1) имеем $\dfrac{\partial u_j^0}{\partial x} = \dfrac{1}{a}\left(f_j^0 - \dfrac{\partial u_j^0}{\partial t}\right)$, последнее в силу (3) можно записать в виде $\dfrac{1}{a}(f_j^0 - \dot g_j)$.

Невязкой метода (4) назовем сеточную функцию

$$\Psi_j^1 = \frac{u(x_1, t_{j+1}) - u(x_1, t_j)}{\Delta} + as\,\frac{-4u(x_0, t_{j+1}) - 2h/a(f_{j+1}^0 - \dot g_{j+1}) + 4u(x_1, t_{j+1})}{2h} +$$

$$a(1-s)\,\frac{-4u(x_0, t_j) - 2h/a(f_{j+1}^0 - \dot g_j) + 4u(x_1, t_j)}{2h} - \overline{f}_j^1,$$

$$\Psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + as\,\frac{u(x_{i-2}, t_{j+1}) - 4u(x_{i-1}, t_{j+1}) + 3u(x_i, t_{j+1})}{2h} +$$

$$a(1-s)\,\frac{u(x_{i-2}, t_j) - 4u(x_{i-1}, t_j) + 3u(x_i, t_j)}{2h} - \overline{f}_j^i, \quad i = 2, ..., N. \tag{5}$$

Здесь $\overline{f}_j^i = f(x_i, t_j, u(x_i, t_j))$ — значение функции f, вычисленное на точном решении. Обратим внимание на то, что невязка вычисляется на точном решении.

Теорема 1 *Пусть точное решение $u(x,t)$ задачи (1) – (3) трижды непрерывно дифференцируемо по x, дважды непрерывно дифференцируемо по t, первая производная решения по x непрерывно дифференцируема по t. Тогда невязка метода (4) имеет порядок $h^2 + \Delta$.*

Обозначим $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i,\ i = 0, ..., N,\ j = 0, ..., M.$

Определение 1 *Метод сходится, если $\varepsilon_j^i \to 0$ при $h \to 0$ и $\Delta \to 0$ для всех $i = 0, ..., N$ и $j = 0, ..., M$. Метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C, что $\|\varepsilon_j^i\| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, ..., N$ и $j = 0, ..., M$.*

Доказательство устойчивости и сходимости метода

В этом разделе будем рассматривать задачи с однородным граничным условием $u(x_0, t) = 0$, $t \in [t_0, \theta]$. К такой задаче можно свести исходную задачу с помощью замены $\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - g(t)$.

Введем в рассмотрение вектор $y_j = (u_j^1, u_j^2, ..., u_j^N)' \in Y,\ j = 0, ..., M-1$, где знак $'$ означает транспонирование, Y — векторное пространство с нормой

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

На пространстве Y определим оператор A заданный матрицей

$$A = \frac{a}{2h} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда систему (4) можно переписать в виде

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sA\, y_{j+1} + (1-s)A\, y_j = F_j, \tag{6}$$

здесь $F_j = (f_j^1 + s f_{j+1}^0 + (1-s) f_j^0,\ f_j^2, ...,\ f_j^N)'$.

Воспользуемся тождеством

$$y_{j+1} = y_j + \Delta \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta}$$

и введем оператор

$$B = E + s\Delta A,$$

(E — тождественный оператор); уравнение (6) можно записать как двухслойную разностную схему в каноническом виде [8]:

$$B\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + A\, y_j = F_j. \qquad (7)$$

Оператор A является положительно определенным с собственными числами $\lambda_1(A) = 8h/a$, $\lambda_2(A) = ... = \lambda_n(A) = 6h/a$, следовательно B положительно определенный. Поскольку B обратим, можно представить (7) в виде

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta B^{-1}\, F_j,$$

где $S = (E - \Delta B^{-1}\, A)$ так называемый [10, 11] оператор продвижения на шаг.

Определение 2 *Разностная схема* (7) *называется устойчивой, если* $\|S\| < 1$.

Формализация понятия устойчивости проведена в [8], стр. 324.

Теорема 2 *Пусть выполнено условие* $s \geq \dfrac{1}{2}$, *тогда разностная схема* (7) *является абсолютно устойчивой.*

Теорема 3 *Пусть выполнены условия устойчивости* $s \geq \dfrac{1}{2}$, *тогда метод* (4) *сходится, причем порядок сходимости* $h^2 + \Delta$.

Доказательства проводятся аналогично [12].