

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительной математики

МАЛИНОВСКИЙ ВЛАДИСЛАВ СЕРГЕЕВИЧ

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ В КРЫЛОВСКИХ
ПРОСТРАНСТВАХ**

Курсовая работа
студента 3 курса 5 группы

Руководитель

Бондарь Иван Васильевич

ассистент кафедры вычислительной
математики

магистр физ.-мат. наук

Минск, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Основные понятия и теоретические сведения проекционных методов	6
2. Метод крыловского подпространства	8
3. Метод Арнольди.....	9
4. Вычислительный эксперимент	11
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	27
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	28
ПРИЛОЖЕНИЕ	29

ВВЕДЕНИЕ

Большинство практических итерационных методов для решения больших линейных систем тем или иным образом используют процесс проектирования. Этот процесс является каноническим способом извлечения приближенного решения данной линейной системы из данного подпространства. В рамках проводимого исследования будет рассматриваться процесс проектирования на крыловские подпространства.

В первую очередь стоит пояснить, что же такое крыловские подпространства.

В линейной алгебре подпространством Крылова размерности m , порожденным вектором $v \in C^n$ и матрицей $A \in C^{n \times n}$, называется линейное пространство

$$K_m(v, A) = \text{span}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}.$$

Подпространство Крылова является подпространством векторного пространства над полем комплексных чисел: $K_m \subset C^n$.

Алгоритмы, использующие подпространства Крылова, традиционно называют методами крыловского типа. Они среди самых успешных методов, в настоящее время доступных по вычислительной алгебре.

Основная задача, которая будет поставлена в дальнейшем, – это решение линейной системы

$$Ax = b$$

Современные итерационные методы решения СЛАУ (к которым безусловно относятся методы крыловского типа), ориентированные на матрицы больших размерностей, избегают матрично-матричных операций, и чаще умножают матрицу на векторы и работают с получившимися векторами:

$$K_m(v, A) = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$$

$$v_1 = v, v_2 = Av_1, v_3 = Av_2, \dots, v_m = Av_{m-1}$$

Поскольку векторы обычно вскоре становятся почти линейно зависимыми из-за свойств степенной итерации, методы, основанные на подпространстве Крылова, часто включают некоторую схему ортогонализации. В частности, в данном исследовании использовался алгоритм Арнольди, который позволяет построить ортонормированный базис в крыловском подпространстве.

И для решения системы будут использоваться методы крыловского подпространства (подпространства, натянутые на векторы вида $p(A)v$, где p – многочлен). Говоря коротко, методы этого типа аппроксимируют решение $A^{-1}b$ вектором $p(A)b$ для подходящего «хорошего» многочлена p .

Однако непредсказуемость поведения является общепризнанной слабостью итерационных методов. Этот недостаток мешает их активно использовать, несмотря на привлекательность этих методов как средства решения больших линейных систем. Эффективность итерационных методов можно повысить, используя предобусловливание. Предобусловливание – это способ преобразования исходной линейной системы в эквивалентную, которую итерационному методу решить проще. И в общем случае надежность итерационных методов гораздо больше зависит от качества предобусловливателя, чем от выбора конкретного крыловского метода.

В планах дальнейших исследований – использование левого предобусловливания для более простого решения системы. В этом случае система линейных уравнений будет иметь вид

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

И в цикле метода Арнольди будет строиться ортогональный базис предобусловленного слева крыловского подпространства

$$K_m = \text{span}\{r_0, M^{-1}Ar_0, \dots, (M^{-1}A)^{m-1}r_0\}$$

В текущем исследовании стоит задача реализовать алгоритм Арнольди и выполнить точные

$$v_{i+1} = f(A)v_i, \text{ где } f(A) = A^{-1}$$

и приближенные

$$v_{i+1} = f(A)v_i, \text{ где } f(A) = V_m H_m^{-1} V_m^T$$

вычисления последовательностей векторов.

Также необходимо было произвести сравнительный анализ относительной ошибки точных и приближенных последовательностей векторов в зависимости от размерности m ($m = 20, 30, 40$) крыловского подпространства, параметра α ($\alpha = 1; 0.1; 0.01; 0.001$) и повторного применения алгоритма Арнольди на каждой i -ой ($i = 1, 3, 5, 10$) итерации вычисления относительной ошибки. А также произвести оптимизацию исходного кода по затратам памяти и времени.

Эти задачи, которые стояли в данной работе, служат фундаментом для дальнейшего исследования проблемы решения систем линейных уравнений больших размерностей с помощью методов крыловского подпространства.

1. Основные понятия и теоретические сведения проекционных методов

Рассматриваем линейную систему

$$Ax = b \quad (1)$$

с вещественной $n \times n$ матрицей A . Идея проекционных методов состоит в том, чтобы извлечь приближенное решение системы (1) из данного подпространства в \mathbb{R}^n . Пусть K – это подпространство возможных приближений, а m – его размерность. Тогда, в общем случае нужны m ограничений для того, чтобы можно было выделить искомое приближение. Обычно в качестве способа задания таких ограничений являются m условий ортогональности. Более конкретно, от вектора невязки $b - Ax$ требуют ортогональности к m линейно независимым векторам. Этим определено еще одно подпространство \mathcal{L} размерности m , которое называется подпространством ограничений. Эта математическая конструкция известна как условие Петрова – Галеркина.

Имеется два класса проекционных методов: ортогональные и косые. В ортогональных проекционных методах подпространство \mathcal{L} то же самое, что и K . В косых проекционных методах подпространства \mathcal{L} и K различны и не связаны друг с другом. Сейчас и в дальнейшем нас будут интересовать только ортогональные проекционные методы.

Пусть A – вещественная $n \times n$ матрица, K и \mathcal{L} – два m -мерных подпространства в \mathbb{R}^n . Необходимо построить приближенное решение \hat{x} для системы (1) исходя из условий, чтобы вектор \hat{x} принадлежал K , а невязка $b - A\hat{x}$ была ортогональна к \mathcal{L} , т.е.

$$\text{найти } \hat{x} \in K \text{ так, чтобы } b - A\hat{x} \perp \mathcal{L}$$

Если известно начальное приближение x_0 , то приближение следует искать в линейном многообразии $x_0 + K$. Тогда постановка задачи немного изменится:

$$\text{найти } \hat{x} \in x_0 + K \text{ так, чтобы } b - A\hat{x} \perp \mathcal{L}$$

Запишем \hat{x} в виде $\hat{x} = x_0 + \delta$, а невязку начального приближения обозначим как $r_0 = b - Ax_0$. Тогда невязка $\hat{r} = b - A\hat{x}$ принимает вид:

$$\hat{r} = b - A\hat{x} = b - A(x_0 + \delta) = b - Ax_0 - A\delta = (b - Ax_0) - A\delta = r_0 - A\delta$$

Условие ортогональности примет вид:

$$r_0 - A\delta \perp \mathcal{L}$$

И приближенное решение можно определить соотношениями:

$$\hat{x} = x_0 + \delta, \delta \in K$$

$$(r_0 - A\delta, w) = 0, \forall w \in \mathcal{L}$$

Таким образом, мы описали основной принцип ортогональных проекционных методов.

2. Метод крыловского подпространства

Как было показано выше, проекционный метод для решения системы

$$Ax = b$$

получает приближенное решение x_m из линейного многообразия $x_0 + K_m$ размерности m с помощью условия Петрова – Галеркина

$$b - Ax_m \perp \mathcal{L}_m,$$

где \mathcal{L}_m – подпространство размерности m , а x_0 – произвольное начальное приближение.

Метод крыловского подпространства заключается в том, что в качестве K_m берется крыловское подпространство

$$K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\},$$

где $r_0 = b - Ax_0$ – невязка начального приближения.

Приближения, вычисляемые методом крыловского подпространства, имеют вид

$$A^{-1}b \approx x_m = x_0 + q_{m-1}(A)r_0,$$

где q_{m-1} – многочлен степени $m - 1$

Рассмотрим простейший случай $x_0 = 0$. Тогда

$$r_0 = b - Ax_0 = b$$

$$A^{-1}b \approx q_{m-1}(A)b$$

Видим, что $A^{-1}b$ аппроксимируется вектором $q_{m-1}(A)b$.

3. Метод Арнольди

Как было отмечено во введении, методы крыловского подпространства включают в себя некоторую схему ортогонализации. В данной работе будет использоваться метод Арнольди. Метод Арнольди – это алгоритм построения ортонормированного базиса в крыловском подпространстве K_m . Приведем описание алгоритма.

Выбирается начальный вектор v_1 такой, что Евклидова норма этого вектора равна единице, т.е. $\|v_1\|_2 = 1$. Далее для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ вычисляются следующие элементы:

$$h_{ij} = (Av_j, v_i), \text{ для } i = 1, 2, \dots, j$$

$$w_j = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$$

$$h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$$

Если элемент $h_{j+1,j}$ равен нулю, то алгоритм прекращает свою работу. Иначе вычисляется элемент $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$

После того как для каждого j были вычислены элементы выше, алгоритм заканчивает свою работу.

Поясним более понятным языком выше описанный алгоритм. На каждом шаге алгоритм умножает последний вектор Арнольди v_j на A . Полученный при этом вектор w_j ортонормируется по отношению ко всем ранее найденным векторам v_i с помощью процесса Грама – Шмидта. Алгоритм прекратит свою работу, если вектор $w_j = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$ обращается в нуль.

По итогам работы m шагов алгоритма мы получим векторы v_1, v_2, \dots, v_m , которые будут образовывать ортонормированный базис крыловского подпространства

$$K_m = \text{span}\{v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$$

Каждый вектор v_j имеет вид $q_{j-1}(A)v_1$, где q_{j-1} – многочлен степени $j - 1$.

В результате выполнения алгоритма можно сформировать матрицу V_m размерности $n \times m$, которая состоит по столбцам из векторов v_1, v_2, \dots, v_m . Через $\overline{H_m}$ обозначим хессенбергову матрицу размера $(m + 1) \times m$. Матрица Хессенберга – это матрица, у которой все элементы лежащие ниже первой

поддиагонали равны нулю. Ненулевыми элементами матрицы $\overline{H_m}$ будут числа h_{ij} . Матрица H_m – это матрица, которая получается из матрицы $\overline{H_m}$ удалением последней строки.

В итоге будет справедливо следующее равенство

$$V_m^T A V_m = H_m$$

и вытекающее из него

$$A^{-1} = V_m H_m^{-1} V_m^T$$

Последнее равенство будет использоваться нами для вычисления приближенной последовательности векторов

$$v_{i+1} = f(A)v_i, \text{ где } f(A) = V_m H_m^{-1} V_m^T$$

4. Вычислительный эксперимент

В первую очередь, в вычислительном эксперименте требовалось реализовать алгоритм Арнольди. Реализация всех методов будет приведена в приложении к данной курсовой работе. Однако практическая реализация метода Арнольди будет отличаться от описания, которое приведено выше. В том варианте процесса Арнольди арифметика для простоты считалась точной. На практике можно получить значительный выигрыш от замены стандартного алгоритма Грама – Шмидта модифицированным алгоритмом (MGS, modified Gram – Schmidt). Данная версия метода получила название алгоритм Арнольди MGS. Приведем ее описание.

Берется вектор v_1 такой, что его Евклидова норма равна единице. Далее для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ проводятся следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \text{Вектор } w_j &= Av_j \\ h_{ij} &= (w_j, v_i), \quad w_j = w_j - h_{ij}v_i \\ i &= 1, \dots, j \\ h_{j+1,j} &= \|w_j\|_2 \end{aligned}$$

Если элемент $h_{j+1,j}$ равен нулю, то алгоритм немедленно прекращает свою работу. В противном случае вычисляется вектор $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$.

Да, в точной арифметике данная версия алгоритма и версия приведенная выше были бы идентичными. Но при наличии округлений новая версия алгоритма гораздо надежней.

Будем работать с матрицей $B(\alpha) = A - \alpha I$. Матрица A является трехдиагональной и имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Нет нужды хранить такую матрицу в памяти целиком. Поэтому было разработано эффективное умножение матрицы такого вида на произвольный вектор.

В качестве начального вектора будем брать $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Также задается размерность m крыловского подпространства. По окончании работы алгоритма мы должны получить матрицу V_m , которая состоит из векторов v_1, v_2, \dots, v_m и матрицу H_m .

Ниже приводятся матрицы V_m, H_m для параметров $m = 40$ и $\alpha = 1$.

```

Матрица V
[[1. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. ... 0. 0. 0.]
 ...
 [0. 0. 0. ... 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 1.]]

Матрица H
[[-3.  1.  0. ...  0.  0.  0.]
 [ 1. -3.  1. ...  0.  0.  0.]
 [ 0.  1. -3. ...  0.  0.  0.]
 ...
 [ 0.  0.  0. ... -3.  1.  0.]
 [ 0.  0.  0. ...  1. -3.  1.]
 [ 0.  0.  0. ...  0.  1. -3.]]

```

Рис. 1: Матрицы V и H для параметров $m = 40$, $\alpha = 1$

Видим, что полученная матрица H является хессенберговой. Нет смысла приводить в отчете матрицы V, H для других параметров α, m . Структура этих матриц останется прежней. Изменяться лишь числа на главной диагонали матрицы H .

Далее необходимо было построить точную и приближенную последовательности векторов:

$$v_{i+1} = f(A)v_i, \text{ где } f(A) = A^{-1}$$

$$\widetilde{v}_{i+1} = f(A)v_i, \text{ где } f(A) = V_m H_m^{-1} V_m^T$$

После каждой итерации нужно провести нормирование вектора.

Процесс вычисления точной последовательности векторов был немного оптимизирован. Вместо того, чтобы работать с обращенной матрицей A , как показано выше, предлагается получать вектор v_{i+1} из уравнения $Av_{i+1} = v_i$. Т.е. это уравнение нужно решить. Это было сделано с помощью метода минимальных невязок или GMRES. Реализация данного метода присутствует в языке программирования Python, на котором и были разработаны все методы этой курсовой работы.

Ниже приводятся точные и приближенные последовательности векторов при параметрах $\alpha = 1, m = 40$. Для других значений α и m последовательности векторов приводить не будем в силу больших размеров. Однако проверим правильность их нахождения с помощью вычисления относительной ошибки.

$$\alpha = 1, m = 40$$

```

Точная последовательность векторов  $v^*$ 
[ [ 1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00 ...  0.00000000e+00
  0.00000000e+00  0.00000000e+00 ]
[ -9.24176372e-01 -3.53003962e-01 -1.34835515e-01 ...  0.00000000e+00
  0.00000000e+00  0.00000000e+00 ]
[ 7.37380410e-01  5.63308508e-01  3.22747056e-01 ...  2.35173646e-15
  7.93885426e-16  2.41157610e-16 ]
...
[ -6.16417677e-02 -1.20614054e-01 -1.74445750e-01 ... -2.23229423e-04
  -1.31557626e-04 -6.08461094e-05 ]
[ 6.03653083e-02  1.18189745e-01  1.71115807e-01 ...  2.67503566e-04
  1.58421674e-04  7.35052907e-05 ]
[ -5.91488407e-02 -1.15875947e-01 -1.67929452e-01 ... -3.18037764e-04
  -1.89230054e-04 -8.80676568e-05 ] ]

Приближенная последовательность векторов  $v$ 
[ [ 1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00 ...  0.00000000e+00
  0.00000000e+00  0.00000000e+00 ]
[ -9.24176372e-01 -3.53003962e-01 -1.34835515e-01 ... -3.15732021e-16
  -1.18399508e-16 -3.94665027e-17 ]
[ 7.37380410e-01  5.63308508e-01  3.22747056e-01 ...  9.56809071e-15
  3.67604977e-15  1.24882079e-15 ]
...
[ -6.16417677e-02 -1.20614054e-01 -1.74445749e-01 ... -2.23229732e-04
  -1.31557843e-04 -6.08462230e-05 ]
[ 6.03653082e-02  1.18189745e-01  1.71115807e-01 ...  2.67503869e-04
  1.58421887e-04  7.35054012e-05 ]
[ -5.91488406e-02 -1.15875947e-01 -1.67929452e-01 ... -3.18038064e-04
  -1.89230267e-04 -8.80677644e-05 ] ]

```

Рис. 2: Векторы v, \tilde{v} для параметров $\alpha = 1, m = 40$

Относительная ошибка для векторов v_{i+1} и \tilde{v}_{i+1} будет находиться по формуле

$$\frac{\|v_{i+1} - \tilde{v}_{i+1}\|}{\|v_{i+1}\|}$$

Будем вычислять относительные ошибки при $\alpha = 1; 0.1; 0.01; 0.001$ и $m = 40, 30, 20$. Также будем производить пересчет матриц V, H с помощью метода Арнольди на каждом j -ом шаге ($j = 1, 3, 5, 10$) вычисления относительной ошибки. Результаты будут представлены в следующих таблицах.

$$\alpha = 1, m = 40$$

Таблица 1.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.1784594861346038e-10	1.1784594861346038e-10	1.1784594861346038e-10	1.1784594861346038e-10	1.1784594861346038e-10
2	1.2297003120736434	2.795094282476859e-10	2.795094282476859e-10	2.795094282476859e-10	2.795094282476859e-10
3	0.6507761775978169	1.2466172143101906	4.267362664184195e-10	4.267362664184195e-10	4.267362664184195e-10
4	1.5963024320708337	1.2853763251189576	5.441424162634289e-10	5.441424162634289e-10	5.441424162634289e-10
5	0.9868227774160595	1.7418531464513731	1.3989919735179484	6.388228413192143e-10	6.388228413192143e-10
6	0.9948965543256706	1.7979954300254042	1.4024265337897592	7.4243149842594e-10	7.4243149842594e-10
7	1.4327302020619763	1.514403776447922	1.402957888750331	8.261058250132048e-10	8.261058250132048e-10
8	1.0895680747192655	1.4601647005606544	1.402844490225332	9.16013154488277e-10	9.16013154488277e-10
9	1.4097154512660734	1.3750969943637414	0.7218135770503399	9.905037086409673e-10	9.905037086409673e-10
10	1.16939718987937	1.3543935858684588	0.5825255597098158	1.4141753159377337	1.0689180841378531e-9

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	1.4234441388538748	1.4090173586270955	0.4992372459234804	1.414182345700565	1.1554254045332264e-9
12	1.1878063311703995	1.413570013974164	0.4541103032879589	1.4141832708235837	1.2259418485159641e-9
13	1.225919676098428	1.5076693229304856	1.410297021896583	1.4141830660916979	1.3015138419711777e-9
14	1.3767491325501435	1.5305346839352814	1.4116752484852768	1.4141825757228448	1.3652164995701271e-9
15	1.3490952146857111	1.4881578876732777	1.4122545627044085	1.4141819969782494	1.431601948245306e-9
16	1.4190718633461712	1.5110871821686904	1.4126245518906393	1.4141813823232683	1.502901372740188e-9
17	1.1555589087316418	1.3853566712268297	0.8090957425205183	1.4141807478667179	1.5623404577334573e-9
18	1.1329157390903608	1.3895965942005335	0.7833387635359301	1.414180100162008	1.6245872780867142e-9
19	1.413241395531105	1.3069981615799753	0.7560846007027168	1.790804226090449	1.6783312054208474e-9
20	1.2087530054313895	1.3024597073714135	0.7291935268818784	1.783366318102628	1.7344506835311909e-9

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	1.4005311222906476	1.3981622248891425	1.4093770800395384	1.775463975068873	1.7838380553188482e-9
22	1.0736181425476954	1.400722109245887	1.4105689835739879	1.7671824293085565	1.8359067131651106e-9
23	1.3775898495492125	1.4359316619755123	1.4108713255720662	1.7586371383387713	1.8823799906406845e-9
24	1.2951993901686292	1.4447448946208117	1.4109926628654492	1.7499118728435228	1.932005939791258e-9
25	1.4033594861793148	1.4167872008178446	1.4004818726240942	1.741057188153269	1.9790728926419224e-9
26	1.4195881580141183	1.4152201021615798	1.4093665165853568	1.7321022950569531	2.018551092920859e-9
27	1.4060327300190079	1.3681690080090179	1.4178282346493378	1.723064334299647	2.053103429487077e-9
28	1.410159527652035	1.3503075785189163	1.42576091338874	1.4142136385941475	2.0890558039274835e-9
29	1.415731298912748	1.3844596936082634	1.4138944798959314	1.4142137185537837	2.1246388061465552e-9
30	1.284524652356215	1.3784690361224552	1.4137113094567042	1.4142136749230791	2.1584732472674147e-9

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
30	1.284524652356215	1.3784690361224552	1.4137113094567042	1.4142136749230791	2.1584732472674147e-9
31	1.3628014983569838	1.4278949176839655	1.413495002576244	1.4142136373033742	2.184201930259174e-9
32	1.57825888759313	1.4359152441623808	1.413252761643894	1.414213715527352	2.211272994768235e-9
33	1.4068826917895678	1.411748091358189	1.5026894720477522	1.4142136595566426	2.2320913210601324e-9
34	1.4070478229052354	1.410840681866665	1.5010735184831545	1.4142136072530729	2.2558977850262832e-9
35	1.6387546838235318	1.4987063413818755	1.5000168753279361	1.4142135324498628	2.2770016482961287e-9
36	1.4186840010591728	1.5341414500379211	1.4992937518400302	1.4142134096994472	2.296366581231294e-9
37	1.414293740280756	1.399329247283663	1.41415414207872	1.371883767257538	2.3127667318368734e-9
38	1.4342907219854348	1.3963970975840025	1.414101724260046	1.3652855952865024	2.3257305987418816e-9
39	1.4210874773944608	1.442467339141407	1.4140440133479562	1.366329682120843	2.338204109922022e-9

$$\alpha = 1, m = 30$$

Таблица 2.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.178418100828565e-10	1.178418100828565e-10	1.178418100828565e-10	1.178418100828565e-10	1.178418100828565e-10
2	0.0002794073970088407	2.7933687804066266e-10	2.7933687804066266e-10	2.7933687804066266e-10	2.7933687804066266e-10
3	0.0007708558478166968	0.0006870452470745584	4.251414494355718e-10	4.251414494355718e-10	4.251414494355718e-10
4	0.001505808886707952	0.0009171346408113534	5.374352821185265e-10	5.374352821185265e-10	5.374352821185265e-10
5	0.0025875008610067576	0.002638672025062751	0.001262597238958558	6.213315916751537e-10	6.213315916751537e-10
6	0.2020464332642593	0.0034219640672700185	0.0015613768204656303	7.053288143925732e-10	7.053288143925732e-10
7	0.05326037309631651	0.018814809163949318	0.001569916754916723	7.6343106928871e-10	7.6343106928871e-10
8	0.015630381474489783	0.023667459090897756	0.0014985968514880982	8.181455615854456e-10	8.181455615854456e-10
9	0.05134616333998105	0.011438129056045849	0.04373254585543415	8.725621119789001e-10	8.725621119789001e-10
10	0.01644133902842172	0.013185657957878034	0.05810891309675091	0.37683910359071654	9.057999564580418e-10

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	0.1283631740617227	0.08718334041406525	0.062482645892760404	0.45519345590761084	9.376629763909023e-10
12	0.04147527263012401	0.10907166694927539	0.06343058450083809	0.47238511031765723	9.696719631029183e-10
13	0.013660649397626385	0.05304266277564341	0.024181849367371527	0.4750761343146991	9.879747243822165e-10
14	0.004952491687645554	0.061362134155881806	0.019669018886944646	0.47379637582989426	1.0062583671330286e-9
15	0.04481161087160426	0.028471621097602397	0.02150301971766318	0.4711501043578279	1.024887465662271e-9
16	0.04051835099206803	0.020706414243620814	0.022758815234012606	0.4678578370602108	1.0356248491272883e-9
17	0.021689589296459852	0.06019293413829014	0.03239965916119753	0.4641689069638854	1.0467425234891683e-9
18	0.06417189674701171	0.07991882173036241	0.04425894639694815	0.4602032147866628	1.05780835520766e-9
19	0.029930923590907328	0.04974019749409254	0.051003339834422755	0.12296384226404186	1.0647480890432403e-9
20	0.021128024156034382	0.06621738541780105	0.05494462602200365	0.06962236352430456	1.071986945833114e-9

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
20	0.021128024156034382	0.06621738541780105	0.05494462602200365	0.06962236352430456	1.071986945833114e-9
21	0.02023055506703596	0.04946733131887334	0.02964855454118577	0.0760689028843176	1.0770195141572668e-9
22	0.014297449344488625	0.04148262717416355	0.02000017930328637	0.08234868087826466	1.0823174419957962e-9
23	0.05954911290047182	0.026293435533167327	0.015940104484043233	0.08596013363910487	1.085379157473754e-9
24	0.055094854487981404	0.01898946627984617	0.014313789329841002	0.08788126357661007	1.0886292009871422e-9
25	0.03124831178389201	0.0505169455987068	0.013799758111987722	0.08879220229914496	1.089799413320302e-9
26	0.02889672434238788	0.0647250820219685	0.01604406346721729	0.08909742894538786	1.0899079828193875e-9
27	0.04559437861279321	0.022528101115624255	0.017808431256393496	0.08903676017842742	1.0897047008165486e-9
28	0.0212754585212563	0.011461417761107514	0.01911973674854719	0.3702454697106773	1.0876469588025998e-9
29	0.03735979999983223	0.020671079532764734	0.029886102393358607	0.43875719469632335	1.085195134399929e-9

$$\alpha = 1, m = 20$$

Таблица 3.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.1202532285975012e-15	1.1202532285975012e-15	1.1202532285975012e-15	1.1202532285975012e-15	1.1202532285975012e-15
2	1.2517881963963889e-8	2.0330640791612906e-15	2.0330640791612906e-15	2.0330640791612906e-15	2.0330640791612906e-15
3	1.5179118159780872e-8	9.715038264210668e-9	1.7524629526386415e-15	1.7524629526386415e-15	1.7524629526386415e-15
4	3.627159579024748e-8	1.2118924634288014e-8	1.6401572052549168e-15	1.6401572052549168e-15	1.6401572052549168e-15
5	1.2393020593240768e-7	2.1015679851870644e-7	2.64451891454785e-7	1.2867034220559821e-15	1.2867034220559821e-15
6	1.9176014779754044e-7	2.6352822482962356e-7	3.359763019552678e-7	1.024740027247086e-15	1.024740027247086e-15
7	2.6959611124175147e-7	5.398864225898451e-7	3.4708659193246145e-7	1.2660803974546906e-11	1.2660803974546906e-11
8	0.000002978406165222763	6.264377717291586e-7	3.397992668282057e-7	6.39318386008664e-12	6.39318386008664e-12
9	0.00002520754148968172	0.000024014034465687897	0.000005426978703683871	1.26737003360876e-11	1.26737003360876e-11
10	0.000018676178295808045	0.000029468266583788125	0.000006667829630800275	0.00005170072357173701	6.664356973145525e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	0.0007332225340032543	0.00001315382659706615	0.000006808340789558071	0.0000636884810427521	9.71979966224746e-12
12	0.00017168140490393915	0.000016323565080150433	0.000006682239585569469	0.00006600278121434328	2.105458010886722e-11
13	0.0011143788217482075	0.008053141477349526	0.0009788810549085406	0.0000659112625544349	1.2256962699704698e-11
14	0.0002582135733264471	0.010498764644323139	0.001250045977854454	0.00006518877579094501	1.4552502801710514e-11
15	0.00020369360292579747	0.0032112744854741497	0.0013169799891470245	0.00006428226551011443	2.5506730698527425e-11
16	0.00008137690056811412	0.0009812064689317772	0.0013246988711351922	0.00006331420784068658	1.5439812071927414e-11
17	0.00003078176349056245	0.0002990818644566724	0.0004199813631324114	0.00006232513561042194	1.6593374670633574e-11
18	0.00022850753008472497	0.00009334227337892101	0.00029988899955720654	0.00006133298611617243	2.7361537812690336e-11
19	0.00008898751923191435	0.0005012932259990328	0.00032295389192734905	0.000981016602700213	1.8665209769113292e-11

$$\alpha = 0.1, m = 40$$

Таблица 4.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	2.8286175404590533e-10	2.8286175404590533e-10	2.8286175404590533e-10	2.8286175404590533e-10	2.8286175404590533e-10
2	3.460440167389963e-10	3.3674203810347364e-10	3.3674203810347364e-10	3.3674203810347364e-10	3.3674203810347364e-10
3	3.926599923177405e-10	2.804179549628893e-10	2.7748679714447844e-10	2.7748679714447844e-10	2.7748679714447844e-10
4	4.992944823146998e-10	2.6538145577621986e-10	2.6407551291452895e-10	2.6407551291452895e-10	2.6407551291452895e-10
5	1.548548727059072e-8	3.891454975868779e-8	2.4307221263698888e-8	2.8928489622380467e-10	2.8928489622380467e-10
6	9.253493191615138e-7	3.861166182311162e-8	2.3775258188116008e-8	2.6853416888715113e-10	2.6853416888715113e-10
7	0.000005403195716671304	0.00006991264798267719	2.2529817012658036e-8	2.452725464531168e-10	2.452725464531168e-10
8	6.24583514641263e-7	0.00006995062664367752	2.1467404262189036e-8	2.208981096472729e-10	2.208981096472729e-10
9	0.00007088055068952844	0.000002420414328424150	0.0005857170718886918	1.978495701736327e-10	1.978495701736327e-10
10	0.000003900298730109025	9.319103973353035e-8	0.0006172774942829617	0.069616938224162	1.7618147880161558e-10

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	0.00011313765427262661	0.0016054480222634187	0.0006122399604340071	0.06960921581861834	1.5590710536650647e-10
12	0.000008088458960076393	0.0016928901251431574	0.0006044237955832757	0.06773813415997951	1.3718392453188515e-10
13	0.000003722397751301915	0.00009746491050977462	0.00004213562970552517	0.06599156453288191	1.20425812939326e-10
14	0.000001598542159636751	0.000008192655771281209	0.000022550418875322753	0.06442523514236036	1.0509932370101725e-10
15	0.000008047977868577634	0.000006525761613867209	0.000022934386014398354	0.06303265249837708	9.11092696377587e-11
16	0.000023277996679263397	0.000006792759616084760	0.000022871285588192802	0.06180222827805104	7.881802476032266e-11
17	0.000005636761593363003	0.00000748075697430612	0.00006636381468275855	0.060720530291193966	7.039890024135398e-11
18	0.00013510946408002027	0.00000794354526048742	0.00006982497633857993	0.059773466101957655	5.979990473941928e-11
19	0.00004459519598266837	0.000024148572220481112	0.00006987879005363345	0.001840327816242591	5.387098838756143e-11
20	0.000016743032611929574	0.000025823271106204905	0.00006970121648017496	0.0008399980757583568	4.509045664607566e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	0.000010280722264104686	0.000003140227493463451	0.000013524176357832051	0.0008852723178930347	3.8057783438158316e-11
22	0.000006263188486452158	0.000001912398525472397	0.000015148905401606705	0.0008975709744812683	4.1129982095374507e-11
23	0.00012702161601681346	0.00016544144783236478	0.000015663957241738135	0.000900324491914408	3.908566564811651e-11
24	0.00000956838243365325	0.00017123065052446164	0.000015790171347501386	0.000900466072948848	2.893936935847939e-11
25	0.000010163668603284166	0.00001032847787653099	0.00009236960205441653	0.0008999345648597363	2.45963555717462e-11
26	0.000002671070976088066	0.000003538995728494174	0.00010550435135797852	0.0008992725822793894	2.7733847651785806e-11
27	0.000010522024121962852	0.0002295367852391452	0.00010935588210399303	0.0008986301494847906	4.52774822847422e-11
28	0.000001175873727679350	0.0002408083862462864	0.00011065460315496087	0.010104775085379492	4.441431409520592e-11
29	0.0001066507913169937	0.000013094549629956931	0.00002583000854397094	0.010389991120832066	3.353516194840613e-11
30	0.000056032539723577654	0.000007056916394370557	0.000009343443212815524	0.010398052241320172	1.9404673318456624e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
30	0.000056032539723577654	0.000007056916394370557	0.000009343443212815524	0.010398052241320172	1.9404673318456624e-11
31	0.000030571033903398036	0.000014015345512403187	0.000004637349663059311	0.010398178956675119	1.3027845699620747e-11
32	0.000056343595770308154	0.000014826176760610533	0.000003722871032504188	0.010398031286388554	9.547709174739348e-12
33	0.000011328057598088366	0.000017189951520897784	0.03511395964448739	0.010397849568303561	8.31088607772418e-12
34	0.0004188064031294385	0.000026444750611658464	0.03694926345191032	0.010397657231870399	1.0123335881536131e-11
35	0.00017464183298329197	0.00009380497255293436	0.03704502833816502	0.010397465675755073	1.742341384423582e-11
36	0.00009778022018194	0.00009964248655681555	0.03704975094378811	0.010397281869344913	3.4106843823101383e-11
37	0.000034508898429020235	0.000010690189326298878	0.0019396316002021116	0.00034207034055270445	5.7925564911641846e-11
38	0.000014391753777927908	0.000003567008055889546	0.00010164760510975057	0.00020774256794831304	6.809999889319069e-11
39	0.000006360205068764775	0.00005762468058621039	0.000006281062385562106	0.00021732813000597233	6.338773199939954e-11

$$\alpha = 0.1, m = 30$$

Таблица 5.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.236634340994586e-15	1.236634340994586e-15	1.236634340994586e-15	1.236634340994586e-15	1.236634340994586e-15
2	9.379575408771585e-13	5.953681205230008e-15	5.953681205230008e-15	5.953681205230008e-15	5.953681205230008e-15
3	1.6348931887024863e-12	1.5562241810389357e-12	2.883239913373301e-15	2.883239913373301e-15	2.883239913373301e-15
4	1.9605126652847838e-11	2.4085658055682246e-12	1.1969322501970794e-15	1.1969322501970794e-15	1.1969322501970794e-15
5	1.3291677706744352e-9	7.896154478471786e-10	4.134914316895505e-9	1.5713846849280944e-15	1.5713846849280944e-15
6	2.2132190863231255e-8	7.630234228087408e-10	4.0568778029157135e-9	1.3524981591279657e-15	1.3524981591279657e-15
7	4.997240026785292e-7	2.707151674769951e-7	3.843081233502046e-9	3.3674980447149957e-12	3.3674980447149957e-12
8	0.000008671122187822122	2.9055483806327293e-7	3.6612390896846824e-9	1.0493747822036806e-12	1.0493747822036806e-12
9	0.000001240925354614429	0.000001273443632632122	0.000051320375051020524	5.460980202509276e-12	5.460980202509276e-12
10	0.000024627927719245155	0.000001337917527885129	0.00005341684692464107	0.0512517398479818	6.776110506915465e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	0.000001116545339863534	0.000001928046760446594	0.00005290951660364461	0.05237729909900491	3.4701913876006973e-12
12	0.000023375627487742226	0.000002153997399072944	0.00005235162951270694	0.05204634998514861	4.38401511955805e-12
13	0.000001695636326055954	4.914195432499981e-7	0.000003854582800325249	0.051722393925689274	9.475440247646463e-12
14	0.000001627850885808415	4.441767493289242e-7	0.000003103187683534808	0.051449589183969906	7.324876882664819e-12
15	0.000001450467452335366	0.000007305795078365660	0.000003183686276377109	0.05122500811569898	1.0477173789248204e-11
16	5.529386513370512e-7	0.00000803277794958586	0.000003193940718526269	0.05104254568000808	1.0029217351956552e-11
17	0.000005496024644912467	9.490324280859035e-7	0.00015444223758672408	0.05089568231970068	6.461290582416325e-12
18	8.224611649467951e-7	3.3959072548688954e-7	0.00016175706827127614	0.05077827787517193	1.5986745982002576e-11
19	0.00000606675613597215	0.0001252337908460845	0.0001620976338026061	0.0015142199279354507	1.1593006690851102e-11
20	0.000003417910802779428	0.0001381527465435165	0.000162096915571821	0.00004591248890797246	1.260253124911736e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	0.000001417840518952487	0.000014457338306638846	0.000008309174390234239	0.000003510522257295836	2.0300291738004717e-11
22	0.000014056285466477146	0.000001700507597316070	0.000003370171186738864	0.00000343806080907272	1.755196517241609e-11
23	0.000001270391329525866	3.206649997679663e-7	0.000003647419898951216	0.000003505840969128069	1.0781520140218575e-11
24	0.000011080655975752222	1.1748039445263599e-7	0.000003783014652870605	0.000003524889168004580	7.93524633197274e-12
25	0.000005543086542901318	0.00010141678068399333	0.0002536925949766728	0.000003529097415470366	2.241638471554414e-12
26	0.000003124556399452937	0.00011361443919617949	0.000269565667915239	0.000003529042966610582	3.1913721607792046e-12
27	0.000006067048943051371	0.000014147956375025728	0.0002705988269021874	0.000003527951831074268	2.8776859005962207e-11
28	0.000017063028890952597	0.000002068979647830198	0.00027066804576713396	0.05858614358533368	4.114926249697149e-11
29	0.000003243346629958819	8.713118498234906e-7	0.000017359198009665055	0.06031581374784921	3.255229802343252e-11

$$\alpha = 0.1, m = 20$$

Таблица 6.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.0834595432403084e-15	1.0834595432403084e-15	1.0834595432403084e-15	1.0834595432403084e-15	1.0834595432403084e-15
2	3.2322087540902755e-14	1.1932996857826328e-15	1.1932996857826328e-15	1.1932996857826328e-15	1.1932996857826328e-15
3	1.69800418417675e-13	1.665427836155328e-13	1.1735452394803568e-15	1.1735452394803568e-15	1.1735452394803568e-15
4	4.375314269078177e-13	5.528551002786845e-14	1.0874820836919486e-15	1.0874820836919486e-15	1.0874820836919486e-15
5	2.740476571443821e-11	1.0598264695665476e-11	7.420824557849398e-12	6.634631307404015e-16	6.634631307404015e-16
6	3.55977853280708e-10	1.0105343343801775e-11	7.96288999990594e-12	4.823903870627895e-16	4.823903870627895e-16
7	2.752500347504001e-8	3.68636637675746e-8	8.078862650543583e-12	4.3333378540999487e-16	4.3333378540999487e-16
8	3.320332762660277e-9	3.794026788332511e-8	1.0599583539758924e-11	3.559901110676233e-12	3.559901110676233e-12
9	0.000001271881898956309	2.7078758435446357e-7	0.00011233826325497605	1.0448852951134991e-12	1.0448852951134991e-12
10	6.099559963344988e-8	2.862571545234509e-7	0.00011576249339916321	0.0006546025908152835	2.067336767313683e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	0.000001718225903767272	3.258374031927826e-7	0.00011578218358156905	0.0006763968620789356	6.118554152258829e-12
12	2.0622014677951609e-7	3.6094856287238203e-7	0.00011572088791396112	0.0006772416373371546	3.639909537851364e-12
13	3.3199050636189756e-7	0.000002186839600338820	0.000003649065436106059	0.0006773372391671504	6.919982299643869e-12
14	5.2877033753769165e-8	0.000002326822428519537	1.3577303953960805e-7	0.0006773792349874598	5.327184888916575e-12
15	0.000001361739634559443	1.8561848180608778e-7	7.298906941850399e-8	0.0006774037351086389	3.5784890871190227e-12
16	1.2606783881181306e-7	1.1764695813715316e-7	7.309737129864188e-8	0.0006774186622748054	4.675817899299334e-12
17	7.072085445529669e-8	0.000001078197037589860	0.00006961969578738856	0.0006774279429754894	5.835332619682017e-12
18	0.000002994812347107056	0.00000119420784379577	0.00007287234039778009	0.0006774337910899167	6.526453984762333e-12
19	8.051713201456549e-7	1.528284004959608e-7	0.00007302992731657218	0.0000224951016352518	3.2711776365683927e-12

$$\alpha = 0.01, m = 40$$

Таблица 7.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	6.928643243195686e-10	6.928643243195686e-10	6.928643243195686e-10	6.928643243195686e-10	6.928643243195686e-10
2	2.191780177530841e-10	2.1923781078051405e-10	2.1923781078051405e-10	2.1923781078051405e-10	2.1923781078051405e-10
3	5.225122736452456e-11	5.228008165476361e-11	5.2290471732472505e-11	5.2290471732472505e-11	5.2290471732472505e-11
4	2.3224281281588683e-11	2.0011868011603483e-11	2.0019037653273717e-11	2.0019037653273717e-11	2.0019037653273717e-11
5	2.7981272107244836e-9	1.968152843144289e-9	1.1912563331085665e-9	1.8409118794325544e-11	1.8409118794325544e-11
6	1.452249511468588e-7	1.9602547666676835e-9	1.185390620559954e-9	1.1365841901725874e-11	1.1365841901725874e-11
7	1.9166260337121817e-8	2.557089992730446e-7	1.1796025014206423e-9	4.0507881306493585e-12	4.0507881306493585e-12
8	2.657846178984479e-7	2.5950257386408544e-7	1.176846054696991e-9	1.7695354698741873e-12	1.7695354698741873e-12
9	3.696842174045974e-8	3.329417060113645e-8	0.000001371043221896632	2.6741335840031223e-12	2.6741335840031223e-12
10	2.8182947867514586e-7	3.492054014559127e-8	0.000001409121893493332	1.1337323760490148	2.822418347797183e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	1.2722849786545604e-8	0.000002940093631457662	0.000001410124667574333	1.1356395537916002	2.5469775321153534e-12
12	0.000016833977631503685	0.000002979209252044428	0.000001410117297060696	1.1356526107505422	5.121460431563505e-12
13	5.683747660530878e-7	7.081219778113774e-8	2.622553400319833e-7	1.1356524174220473	3.302872476601826e-12
14	5.463918615081254e-7	5.676262307308929e-8	2.92681156161418e-7	1.13565227639818	7.602018662511283e-12
15	4.736552288637655e-7	0.00003849448279800586	2.971927341452125e-7	1.1356522087100855	9.309927109707707e-12
16	1.2024124669116384e-7	0.00003881048449725827	2.9782132764400487e-7	1.135652176496024	9.08464094034423e-12
17	3.4437777647635624e-7	3.207116338588903e-7	0.000001820735438509995	1.135652161188788	6.932094334574875e-12
18	2.6261426817479554e-8	3.6995743287203114e-8	0.000001873144890499900	1.1356521539202546	9.36211918199245e-12
19	5.111278395830909e-7	4.3514918627097906e-7	0.000001875229988779454	0.018792727700824866	2.001623184407323e-11
20	3.607972188625068e-8	4.4099870517077556e-7	0.000001875445987676190	0.0007226635462582135	2.9949107380973624e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	5.090652752162173e-7	5.1431525488052904e-8	0.000001063117497964082	0.0003489964691576197	4.205771471673997e-12
22	2.3530620205684136e-8	5.6326763974733506e-8	0.000001193549137700217	0.00025784373078684803	5.1220634366806696e-12
23	6.421959181602724e-7	1.9588646803136684e-7	0.000001210841022008916	0.00023476314763210064	1.5642916236333576e-12
24	4.355671939627073e-8	1.9895020630316108e-7	0.000001213186433633311	0.00022891706315150768	3.472304196407185e-12
25	2.957780672376993e-7	2.883470261705949e-7	0.000001316505602043334	0.0002274359036537494	3.583261233927942e-12
26	4.410396364203029e-8	3.1601208028618253e-7	0.000001345786667582875	0.0002270605791139231	4.5426022703253545e-12
27	0.000001815970459505971	7.446961893389812e-8	0.000001347513150423201	0.00022696546411651286	1.7876115144732621e-12
28	2.406455110330472e-7	6.249735674018044e-8	0.000001347894838973679	0.10292579865824382	4.258927571646145e-12
29	1.9808708387071872e-7	4.196838237357853e-7	0.000002343170437632976	0.10361135692842946	5.3362757327140294e-12
30	5.546413034836568e-8	4.6234262470187144e-7	0.000002688994701060365	0.10361605281868526	1.0475382791078627e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
30	5.546413034836568e-8	4.6234262470187144e-7	0.000002688994701060365	0.10361605281868526	1.0475382791078627e-11
31	0.000001725136614144498	6.994214062977786e-8	0.000002740888243520981	0.1036160825114915	9.197832811520298e-12
32	7.858471105627499e-8	2.4832061133915886e-8	0.000002748716796580374	0.10361608186467883	2.4628762169170703e-11
33	8.706102010014957e-7	8.320328856054963e-7	8.352826984208813e-7	0.10361608164217699	4.803434057611306e-11
34	2.9245849694076753e-7	8.831819012257684e-7	7.512937332769765e-7	0.10361608158543095	6.634862411931388e-11
35	1.647940882415013e-7	9.855690069389995e-8	7.496362631603097e-7	0.10361608157104174	7.666915451045964e-11
36	5.173417988909641e-7	3.705957041721865e-8	7.496743910042562e-7	0.10361608156739552	8.156676684844783e-11
37	1.6805471694177875e-7	0.000001998658371296586	3.8027704980464467e-7	0.0007200428370881588	8.389090476072617e-11
38	5.7102716108664534e-8	0.000002049384711960167	4.183647333376598e-7	0.0002340721247598177	8.499379659307215e-11
39	3.708706033279516e-8	8.072368246488423e-8	4.2236440100300703e-7	0.000249354160758333	8.551718685504147e-11

$$\alpha = 0.01, m = 30$$

Таблица 8.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	2.4740625058871938e-15	2.4740625058871938e-15	2.4740625058871938e-15	2.4740625058871938e-15	2.4740625058871938e-15
2	3.24386891412378e-14	1.802711582360293e-15	1.802711582360293e-15	1.802711582360293e-15	1.802711582360293e-15
3	1.3443462277736916e-14	9.602624438199238e-14	2.9926931359053046e-15	2.9926931359053046e-15	2.9926931359053046e-15
4	5.923779250753479e-13	7.615121929806557e-14	1.3820989487565727e-15	1.3820989487565727e-15	1.3820989487565727e-15
5	2.038950274028039e-10	3.751295771631258e-10	3.7138258558625113e-10	8.903577029677968e-16	8.903577029677968e-16
6	1.1023578546737483e-8	3.7756145451460463e-10	3.726235063638026e-10	1.0234838988519408e-13	1.0234838988519408e-13
7	7.181389395070678e-8	1.3678233782383077e-7	3.7222735153243154e-10	2.773422484053106e-13	2.773422484053106e-13
8	1.2045887109907148e-7	1.3841367818149336e-7	3.7208894072616453e-10	1.207355863203455e-12	1.207355863203455e-12
9	3.9643889654812824e-7	2.0857804892023948e-7	8.48704800443987e-7	1.1694024415613504e-12	1.1694024415613504e-12
10	7.446604581095538e-8	2.189604034478294e-7	8.714266304600856e-7	0.9736704935550176	2.869327518666996e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	1.5738288626499625e-8	1.9790339039488428e-7	8.720514820482034e-7	0.976552722124237	2.3874672171839774e-12
12	2.895422221200702e-7	2.0902185183512366e-7	8.720686111321418e-7	0.9765742524263713	3.660973323118334e-12
13	2.9725430289578563e-8	1.0478364918616735e-7	1.357226676115221e-7	0.9765743782723324	8.695435555777971e-12
14	7.655057974896553e-8	1.0774807989790989e-7	1.4938727201138383e-7	0.9765743632472372	7.464505400765967e-12
15	2.8768893997451374e-8	0.000001047859466276369	1.5124006397271687e-7	0.9765743567502605	8.311779391810627e-12
16	8.116298590302497e-8	0.000001068148263331496	1.5146348101110342e-7	0.9765743541611427	1.2771610216012587e-11
17	8.096229916272956e-9	6.109086470934644e-8	0.000005531766142016955	0.976574353131041	7.185889889270046e-12
18	0.000002048692380979955	4.732962269199844e-8	0.000005680929012867384	0.9765743527213033	1.9145584462024516e-12
19	3.4701583170051735e-8	0.000005627043674735469	0.000005685096074686309	0.012193180413729403	3.5645124350486946e-12
20	3.6163332046476266e-9	0.000005703451210188226	0.000005685218744839223	0.00013575267521965118	4.763366934554218e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	0.000001896316532311008	9.07359836632108e-8	3.5184627786123595e-7	0.00011074813274532847	4.4541218208095905e-12
22	7.515022842201822e-8	3.19209200831964e-8	3.538055366522935e-7	0.0001135554934479528	5.189234363367214e-12
23	2.7387949183539004e-8	0.000002071210554858556	3.590660238301825e-7	0.00011411527822719298	5.854388314272079e-12
24	8.643090254100315e-7	0.000002108592596658755	3.6000678022422246e-7	0.00011422678045599851	2.569051103551066e-12
25	3.5997982029862084e-7	6.94247184039325e-8	0.000006999184266965731	0.00011424899095152404	4.377993665174417e-12
26	1.390674959841888e-7	3.263357836823705e-8	0.000007192111544875779	0.00011425341528516652	1.441211260946014e-11
27	5.460114250813332e-8	2.5566624802545615e-7	0.000007197654643982308	0.00011425429669759192	3.732797570694562e-11
28	4.91673793476615e-7	2.5976640223687115e-7	0.00000719783311030357	0.033839395321575115	4.9812541890419475e-11
29	4.47964267051228e-8	3.8028541900155095e-7	2.1115019433797845e-7	0.03411562469458318	5.718412090878105e-11

$$\alpha = 0.01, m = 20$$

Таблица 9.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	2.121146208911644e-15	2.121146208911644e-15	2.121146208911644e-15	2.121146208911644e-15	2.121146208911644e-15
2	4.895796573095239e-15	2.4277106425730458e-15	2.4277106425730458e-15	2.4277106425730458e-15	2.4277106425730458e-15
3	2.4692238957782535e-14	1.7383534380329607e-14	6.92117710666123e-16	6.92117710666123e-16	6.92117710666123e-16
4	7.093005401948396e-13	1.5538193089830585e-14	5.018120566792225e-16	5.018120566792225e-16	5.018120566792225e-16
5	3.36019034027721e-11	2.484442176744562e-11	5.842656978323113e-11	4.475989973903899e-16	4.475989973903899e-16
6	3.420717478669752e-9	2.511582794151083e-11	5.898843870018285e-11	3.920935574715697e-16	3.920935574715697e-16
7	4.708428385794591e-8	9.362024860543572e-7	5.913429743224338e-11	2.9294638752248636e-13	2.9294638752248636e-13
8	1.6954458908570478e-8	9.462607884111518e-7	5.894520080870263e-11	1.1293250444852434e-12	1.1293250444852434e-12
9	2.2147987107760587e-8	1.563194089782817e-7	6.939459479278872e-7	1.904717539876412e-12	1.904717539876412e-12
10	6.482570280150743e-8	1.629431239354334e-7	7.119758711922078e-7	0.3599087734643216	1.682068750724017e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	2.5562522786804854e-7	1.2601161825250861e-8	7.12456137866185e-7	0.36340125686502045	2.1726408667732054e-12
12	3.192810776467443e-8	1.0351278572287402e-8	7.124685039490071e-7	0.3634387772425269	5.020893017952584e-12
13	7.465099316800847e-8	1.4899375771471466e-7	4.998029521649411e-8	0.36343918177696266	5.763171212882296e-12
14	1.266353707463636e-7	1.5890165699494052e-7	5.282271388047109e-8	0.3634391861445504	4.517092319912753e-12
15	1.2886515481195451e-8	4.6492822219743475e-8	5.376961656330218e-8	0.3634391861904034	9.045904668026967e-12
16	7.005931377907708e-9	4.511483740377003e-8	5.3917490543936266e-8	0.363439186190278	6.336955450760409e-12
17	2.5852048464292412e-8	1.875322494098873e-8	0.000002464389638006042	0.36343918619013077	3.235168449224331e-12
18	2.906034575705354e-9	1.9961515059099604e-8	0.000002528657963534072	0.3634391861900587	5.369042791822279e-12
19	7.822006413193796e-7	6.903163830846937e-9	0.000002530377742295155	0.004113466087169444	5.354516377471325e-12

$$\alpha = 0.001, m = 40$$

Таблица 10.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	3.9900942794462456e-10	3.9900942794462456e-10	3.9900942794462456e-10	3.9900942794462456e-10	3.9900942794462456e-10
2	1.3950820596215297e-10	1.3950758379533959e-10	1.3950758379533959e-10	1.3950758379533959e-10	1.3950758379533959e-10
3	5.453314527395906e-11	5.4532783875469e-11	5.453321194332555e-11	5.453321194332555e-11	5.453321194332555e-11
4	1.6166825647090514e-11	1.5269533748112535e-11	1.5271443004282807e-11	1.5271443004282807e-11	1.5271443004282807e-11
5	8.876960818558751e-11	6.0700704490957295e-9	7.858615578377185e-10	2.0958154847347478e-11	2.0958154847347478e-11
6	1.230165842959838e-7	6.084629481070217e-9	7.886273602758773e-10	6.023801087167199e-12	6.023801087167199e-12
7	4.087663144316596e-8	4.039343613006895e-7	7.889566144539962e-10	1.7999387510238666e-12	1.7999387510238666e-12
8	3.546586627176771e-8	4.088914820498586e-7	7.890279637386994e-10	8.916827301391712e-13	8.916827301391712e-13
9	1.4236750429687218e-7	5.827559785770255e-8	0.000012049341070415533	1.5470706194533349e-12	1.5470706194533349e-12
10	1.5890445202790535e-8	6.082908452339473e-8	0.000012321240532047375	0.24400245489896868	2.4118450370244213e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	6.271846186611918e-8	3.1222904809830178e-9	0.00001232761639766051	0.24513339309667423	4.297979580766465e-12
12	4.781402940949275e-9	9.290649501862495e-10	0.000012327770592910173	0.24513903012575955	4.39413461338346e-12
13	3.745795540258369e-7	8.557591887997894e-7	2.9212795316327624e-7	0.24513905960868557	6.377506651753698e-12
14	1.9568224175246722e-8	9.155933248225032e-7	7.82523723382905e-8	0.2451390597969615	4.298541713419467e-12
15	1.9774834733414237e-8	8.737420045800874e-8	7.906692709420922e-8	0.24513905980449674	3.5865375853861044e-12
16	9.545109720012103e-8	1.5219982281263498e-8	7.921013659941616e-8	0.24513905980625234	4.722003132590929e-12
17	1.1378799679727105e-8	3.76802609367368e-7	0.0000372071128447691	0.24513905980681927	4.283058616352116e-12
18	7.042402379448318e-7	3.8856664481621963e-7	0.00003793572766201355	0.2451390598069368	5.895577921839506e-12
19	1.7662633278829534e-8	1.9735665005431153e-8	0.00003795045767104989	0.0012338360091765505	6.5116933963982654e-12
20	5.591947552558187e-7	3.1722487846307837e-9	0.000037950769462550196	0.00002178636567813004	1.6396478264985566e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	3.569242032292382e-8	0.000001767939659933949	7.55852342333859e-7	0.000022618704045805995	2.8729660169144497e-11
22	9.83363888302389e-8	0.000001771709614233289	2.098034787861271e-8	0.000023141723743889798	3.251963599107239e-11
23	3.3428245540389687e-7	3.03657450776372e-8	1.2335463635671687e-8	0.00002328793909914815	3.358545010233913e-11
24	8.149999082368729e-8	3.41617169661945e-8	1.2265418528327772e-8	0.000023328927914026453	3.3885069447957576e-11
25	1.5956523979953482e-8	1.909096097323029e-7	0.00046507780656474776	0.000023340433804135538	3.396921926104842e-11
26	0.000003089488900039096	1.918801063676912e-7	0.00047210234785928496	0.000023343665647096315	3.399290390627035e-11
27	9.908287405228579e-8	1.733842215798058e-8	0.00047220917578188836	0.00002334457369558189	3.3999591198967655e-11
28	0.000001046522567615249	1.8020588963872074e-8	0.00047221082534343783	0.00122484581348236	3.400144084044211e-11
29	2.2011846930187597e-8	2.817581970764598e-7	0.000007158088221549062	0.0012308957931659985	3.400198256798557e-11
30	5.46223444496509e-9	2.8351983275070017e-7	1.1583510142212175e-7	0.0012309258514914565	3.400213432410945e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
30	5.46223444496509e-9	2.8351983275070017e-7	1.1583510142212175e-7	0.0012309258514914565	3.400213432410945e-11
31	8.255227262283303e-8	1.4879360058300018e-8	1.5519402280459756e-8	0.0012309259283554907	3.4002142436344766e-11
32	1.5701201676770812e-8	1.627652418569734e-8	1.3876140324992375e-8	0.0012309259219580146	3.400214080373412e-11
33	7.790115133870653e-8	2.7134918683812255e-7	0.00007473337197220368	0.001230925921387069	3.400215471352456e-11
34	6.039080492365463e-9	2.726212546032634e-7	0.00007564252320123969	0.0012309259213437208	3.4002145640233254e-11
35	0.00002204775801765536	2.7195001663504707e-8	0.00007565375222054096	0.0012309259213410433	3.4002142798586705e-11
36	0.000006122621213980809	2.863774542806066e-8	0.00007565390861934399	0.0012309259213410465	3.400213974242943e-11
37	0.000006500606177408605	7.22544852970385e-8	9.286036853808436e-7	0.00004485688596158628	3.4002142889424514e-11
38	4.877977774699004e-7	7.248593396465578e-8	2.7695981635290727e-8	0.000050101144467891473	3.400213974242943e-11
39	2.698744091723731e-7	9.80874886847471e-8	1.3023183264966961e-8	0.00005082939355312867	3.4002142889424514e-11

$$\alpha = 0.001, m = 30$$

Таблица 11.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	3.146343197492983e-15	3.146343197492983e-15	3.146343197492983e-15	3.146343197492983e-15	3.146343197492983e-15
2	1.5533370759342144e-14	1.3862904573244944e-15	1.3862904573244944e-15	1.3862904573244944e-15	1.3862904573244944e-15
3	9.204209982015168e-15	3.550541696732232e-14	5.146021447227412e-16	5.146021447227412e-16	5.146021447227412e-16
4	1.1084336352780247e-11	3.776706474948406e-14	1.4509932722866275e-14	1.4509932722866275e-14	1.4509932722866275e-14
5	2.1700222999263444e-9	1.3932326687104458e-9	3.787844785398865e-10	4.0679394968425965e-15	4.0679394968425965e-15
6	4.8339430827219204e-8	1.3983580330676378e-9	3.797928655510368e-10	1.0261944457942867e-13	1.0261944457942867e-13
7	8.209329875766463e-8	3.518119082666024e-7	3.7972197875201786e-10	8.864939260718421e-13	8.864939260718421e-13
8	2.6058030731532306e-8	3.56034871911112e-7	3.797049265208899e-10	5.977700112137328e-13	5.977700112137328e-13
9	1.1624504897313659e-8	5.4809124858337566e-8	0.000006018184352690204	1.8302439136130405e-12	1.8302439136130405e-12
10	2.4659326339627013e-8	5.7485063371407554e-8	0.000006160757762304093	0.7795370246695608	2.242471637689846e-12

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	1.8355455553605816e-8	5.4948191583199174e-9	0.000006164209289027907	0.7826542983188655	4.423135055628669e-12
12	0.000001720130211466916	4.67178585536426e-9	0.000006164294659021557	0.782676805287522	4.982773249498733e-12
13	1.3956574461192734e-8	8.929514307909231e-7	2.5820800224821987e-7	0.782676980624778	9.28431993938066e-12
14	1.6270569249270561e-7	9.348443402857676e-7	2.3755204679171946e-7	0.7826769820997382	3.7135784567232064e-12
15	2.8984822028963174e-8	4.629214519495011e-8	2.406568727305162e-7	0.7826769821124684	2.6302508964171917e-12
16	4.579341588320562e-9	4.248876846387422e-9	2.4103388346744613e-7	0.7826769821122516	3.4959148625938597e-12
17	9.276682425848798e-8	0.000002755354477030497	0.000004246158248897878	0.7826769821122604	1.4691898904451096e-12
18	1.67941188775252e-8	0.000002818804822415563	0.000004345127429613828	0.7826769821121604	4.239254605612613e-12
19	0.000001729862311732566	6.955810738687396e-8	0.000004347460088905969	0.0072924143735964755	8.109047315625895e-12
20	5.3590154914863764e-8	5.287491309792099e-9	0.000004347519051111521	0.00007786515024587294	2.6989506590315086e-11

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
21	7.572530634605503e-8	0.000003533594805459916	1.0687940708012058e-7	0.00006425107006788372	3.250691517660649e-11
22	2.2201341213078828e-8	0.000003572500699185528	3.56670480915178e-8	0.0000679040262350121	3.3988705836793426e-11
23	5.036157795939202e-8	4.512081769073864e-8	3.594086752471084e-8	0.00006888555988925977	3.438662331241263e-11
24	1.7545460534435524e-7	1.7871079405949907e-8	3.59841690777955e-8	0.00006914911184539716	3.4493438820988205e-11
25	0.0012428698248234237	1.941676415381953e-8	0.0000207911250582158	0.00006921987823957921	3.452212679378405e-11
26	0.000010713943501418687	1.9082128581227708e-8	0.00002127377525464105	0.00006923887974214914	3.4529789617228224e-11
27	9.272909261966234e-8	0.000001030306714425585	0.000021285782742868975	0.00006924398184085516	3.453189906554248e-11
28	7.153316858729336e-8	0.000001148322881272600	0.000021286193470844752	0.02491966841375168	3.453246916640112e-11
29	6.878441751308474e-9	1.3999481153797093e-7	5.157276497286731e-7	0.025089568166565615	3.45326131877426e-11

$$\alpha = 0.001, m = 20$$

Таблица 12.

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
1	1.2833812081771015e-15	1.2833812081771015e-15	1.2833812081771015e-15	1.2833812081771015e-15	1.2833812081771015e-15
2	4.382415543786778e-15	2.599974934504825e-15	2.599974934504825e-15	2.599974934504825e-15	2.599974934504825e-15
3	1.7040338370781963e-14	3.739993008495924e-15	9.186634321831292e-16	9.186634321831292e-16	9.186634321831292e-16
4	5.21413198829298e-13	4.20383597125293e-15	3.5122046201496077e-16	3.5122046201496077e-16	3.5122046201496077e-16
5	4.6205240125835316e-11	9.505626260203468e-11	3.792835586755293e-11	5.630774521278122e-16	5.630774521278122e-16
6	2.156468238899866e-9	9.644779682038394e-11	3.757405589980322e-11	6.620518538552257e-13	6.620518538552257e-13
7	1.5330384777089346e-7	6.768355520336819e-8	3.810222616258659e-11	3.975804774337717e-13	3.975804774337717e-13
8	8.506435838503358e-9	6.851707872467656e-8	3.8323930355376175e-11	1.1385528114819604e-12	1.1385528114819604e-12
9	4.1381542354824136e-9	1.9630804545411002e-7	0.000005113742910375888	2.308075984006142e-12	2.308075984006142e-12
10	4.933338273839695e-8	2.048821095452293e-7	0.000005233487203250117	0.19750563203015264	9.373168175046455e-13

v	Пересчет каждый раз	Пересчет каждый 3-ий раз	Пересчет каждый 5-ый раз	Пересчет каждый 10-ый раз	Без пересчета
11	1.1058296154488606e-8	5.0335659470563875e-8	0.00000523633451742679	0.19934851858534244	5.650261090631143e-12
12	7.556431663345398e-8	5.174851072752502e-8	0.000005236403651335566	0.19936672426612817	5.816716330976674e-12
13	4.5484415482906475e-9	6.651380405774134e-9	1.2706652008283923e-7	0.19936690917266436	7.334113135063369e-12
14	7.130969572964221e-8	5.7789521691568525e-9	3.302486088973408e-8	0.19936691110346685	3.6086110591333427e-12
15	3.5519019399539476e-9	0.000003054351707361351	3.3300219619370146e-8	0.19936691112378033	2.3062088433061906e-12
16	4.6295226258299674e-7	0.000003093794997639628	3.3344944532570285e-8	0.19936691112397154	3.8955591717991805e-12
17	1.396495633815087e-8	4.608741788967697e-8	0.000003349777471842910	0.19936691112430927	2.4739761487758786e-12
18	1.1477826463508846e-8	9.107313652201561e-9	0.000003423587442878356	0.1993669111241941	5.247021637215912e-12
19	1.9099712381920193e-7	7.116126871996556e-7	0.000003425332671155336	0.0019735653609614027	1.549878578924231e-11

Из результатов можно увидеть, что чем меньше m – размерность крыловского подпространства, тем меньше относительная ошибка. Зависимость от α также присутствует – чем меньше значение α , тем меньше

относительная ошибка. Также можно заметить, что с каждой итерацией относительная ошибка постепенно увеличивается (за исключением вычисления относительной ошибки без пересчета в случае $m=40$), что связано с накоплением вычислительной погрешности.

Относительная ошибка без пересчета находится в среднем в пределах $10^{-15} - 10^{-12}$, что свидетельствует о хорошем приближенном вычислении векторов. Однако (и к сожалению) главная цель так и не была достигнута. Предполагалось, что пересчет матриц V, H на j -ой итерации вычисления относительной ошибки позволит уменьшить эту самую ошибку. Но, как видно из таблиц, наши ожидания не оправдались. Кроме этого, относительная ошибка даже намного увеличилась после пересчета. Это связано с тем, что алгоритм Арнольди MGS не обеспечивает должной точности. В дальнейшем планируется использовать более совершенную разновидность метода Арнольди – алгоритм Хаусхолдер Арнольди. Этот метод подразумевает полное изменение техники ортогонализации, а именно использовать алгоритм Хаусхолдера. Это один из самых надежных способов ортогонализации с вычислительной точки зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения курсовой работы было проведено теоретическое обоснование проекционных методов и методов подпространства Крылова. Был реализован алгоритм Арнольди, в том числе и его усовершенствованная версия – алгоритм Арнольди MGS. Проведена оптимизация вычислений по затратам памяти и времени. В частности реализовано эффективное умножение трехдиагональной матрицы, которая не хранится целиком в памяти компьютера, на произвольный вектор, а также вместо того, чтобы выполнять итерационный процесс с обращенной матрицей, предлагалось решать уравнение с помощью алгоритма GMRES. Проведен сравнительный анализ относительной ошибки точных и приближенно вычисленных векторов в зависимости от параметров α, m . Сделаны выводы об недостаточной эффективности алгоритма Арнольди MGS. В дальнейшем планируется реализовать алгоритм Хаусхолдер Арнольди, который не допускает настолько значительной потери значащих разрядов, т.к. используется один из самых надежных с вычислительной точки зрения способов ортогонализации – алгоритм Хаусхолдера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем – Том 1 – 2-е издание – Москва: Издательство Московского университета, 2013. – 321 с.

Листинг приложения, используемого для проведения вычислительного эксперимента (реализация на языке программирования Python)

```
import numpy as np
from scipy.sparse.linalg import lgmres
from numpy import linalg as la
from scipy.sparse.linalg import LinearOperator
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly
import plotly.plotly as py
import plotly.graph_objs as go

def Linear_Arnoldi(A, v, m):
    w=[]
    V = []
    V.append(np.array(v[:]))
    h=np.zeros((m + 1, m))
    for j in range(m):
        w.append(A.dot(V[j]))
        for i in range(j+1):
            h[i][j]=np.inner(w[j],V[i])
            w[j]=w[j]-h[i][j]*V[i]
        h[j+1][j]=la.norm(w[j])
        if h[j+1][j]==0:
            return np.array(V).T, h[0:-1]
        V.append(w[j]/h[j+1][j])
    return np.array(V[0:-1]).T, h[0:-1]

def mymatvec(z):
    res = np.zeros((z.size, 1))
    res[0] = (-2-alpha)*z[0]+z[1]
    res[res.size-1] = (-2-alpha)*z[z.size-1]+z[z.size-2]
    for i in range(1,z.size-1):
        res[i] = (-2-alpha)*z[i]+z[i-1]+z[i+1]
    return res

def accurate_vectors_lgmres(A,v0,m):
    dim = len(v0)
    Ainv = LinearOperator((dim,dim), lambda v: lgmres(A, v, tol=10**-10,
    atol=10**-10)[0])
```

```

n=np.zeros((m,dim))
n[0,:]=v0
for i in range (m-1):
    tmp=Ainv.dot(n[i,:])
    n[i+1,:]=tmp/la.norm(tmp)
return n

def approximate_vectors(V,H1,v0,m):
    dim = len(v0)
    n2=np.zeros((m,dim))
    n2[0,:]=v0
    for i in range(m-1):
        tmp=V.dot(H1.dot(V.T.dot(n2[i,:])))
        n2[i+1,:]=tmp/la.norm(tmp)
    return n2

def relative_error(V,H1,n,m):
    print("Без пересчета")
    r=[]
    vect = V[:,0]
    for i in range(0, m-1):
        vect = V.dot(H1.dot(V.T.dot(vect)))
        vect = vect/np.linalg.norm(vect)
        r.append(np.linalg.norm(n[i+1]-vect)/np.linalg.norm(n[i+1]))
    return r

def relative_error_Arnoldi(V, H1, n,m,j, tmp):
    print("Пересчет каждый "+str(j)+" раз")
    r=[]
    for i in range(0, m-1):
        if (j-1==0) or i%(j-1)==0:
            V,H=Linear_Arnoldi(A, tmp,m)
            H1=la.inv(H)
            vect = V.dot(H1.dot(V.T.dot(tmp)))
            vect2= lgmres(A,tmp)[0]
            vect = vect/np.linalg.norm(vect)
            tmp = vect
            r.append(np.linalg.norm(n[i+1]-vect)/np.linalg.norm(n[i+1]))
    return r

```