## Модель

Модель імітує поведінку масивних тіл, які рухаються у просторі підкоряючись закону тяжіння Ісака Ньютона. Простір, в якому рухаються тіла, тривимірний. Саме в тривимірному просторі напруга поля гравітації зворотно пропорційна квадрату відстані від точкової маси, у двовимірному просторі залежність напруги і, відповідно, закон тяжіння мали б інший вигляд. Але модельні сценарії побудовані так, що всі вектори положення і вектори швидкості рухомих тіл розташовані в одній площині, тому стан моделі природно відображується на площині екрану.

В кожному модельному сценарії чисельно вирішується задача n тіл. Одночасно з побудовою траєкторій тіл стан моделі відображується на екрані, що створює ілюзію руху тіл.

Модельний час, на відміну від природного, дискретний. Одиницею виміру часу є один такт, одиницею виміру простору – один піксель, одиниця виміру маси обрана такою, щоб стала тяжіння в законі Ньютона дорівнювала 1. Хоча для користувача моделі можна дати одиницям інші назви, наприклад, 1 піксель – мільйон кілометрів, 1 такт – один день, одиниця маси – маса Землі.

Чисельне вирішення диференційних рівнянь потребує, щоб за один такт дискретного часу ніякі параметри моделі не зазнавали значних змін. На практиці це виглядає як обмеження напруженості поля тяжіння, бо прискорення тіла в полі тяжіння це власне і є напруженість, швидкості це суми прискорень, а відстані, які тіла долають за одиницю дискретного часу, кількісно дорівнюють швидкостям. Якщо ці відстані будуть великими орбіти планет не будуть гладкими. Якщо прискорення будуть великими, то чисельне інтегрування буде неточним і поведінка системі не буде підкорятися законам механіки.

## Планети

Планета – основний елемент моделі. Він уособлює не тільки власне планети, а і зірки, астероїди, комети і навіть ракети, які є об’єктами, похідними від планети.

Основні властивості планети це маса, розмір, положення і швидкість. З двовимірності модельного простору витікає що положення і швидкість задаються двома компонентами. Планета має форму кола, тому розмір планети задається радіусом кола. Для ідентифікації планета слугує її унікальне ім’я. Для відображення планети є додаткові властивості - колір і траєкторія. Траєкторія зберігається як колекція точок простору, в яких планета побувала в минулому.

Планети взаємодіють між собою через силу тяжіння, яка визначається за законом Ньютона. На малих відстанях від центру напруженість поля тяжіння планети стає надто великою і, якщо інші тіла наближаються до центру планети на таку або меншу відстань, обчислювальна схема працює не коректно.

Критичну відстань можна визначити з формули для напруженості .

Запобігти наближенню на критичну відстань може розмір самої планети, тому що, коли тіла стикаються, тобто відстань між центами тіл стає менше за суму їх радіусів, більш масивна планета поглинає планету з меншою масою.

Радіус планети можна зробити яким завгодно, але зі сказаного ясно, що для безпечної роботи системі він не має бути менше критичної відстані. З дослідів визначено, що критичнім значення напруженості поля для нашої моделі , тому, з огляду на модельне значення G=1 , мінімально можливий радіус планети масою m буде . Втім, ніщо не забороняє робити радіус планети більшим за критичний, якщо цього потребує сценарій досліду.

## Ракети

Ракети демонструють, як можна зондувати космічний простір і здійснювати міжпланетні подорожі.

Ракета є космічним тілом малої маси і розміру. Ракета стартує з обраної планети, отримує миттєвий імпульс підчас старту і далі рухається по балістичній траєкторії без можливості керування. Відносно ракет діють два припущення: 1) точкою старту рахується центр материнської планети, 2) тяжіння материнської планети не діє на ракету. Такі припущення кардинально спрощують розрахунки стартової швидкості ракети при вирішенні задач.

Як і інші небесні тіла, ракети можуть стикатися з планетами, і це є закінченням їх життєвого шляху.

## Туманності

Туманності є повноправним учасниками космічного руху, і хоча передбачення їх поведінки не така проста річ, як розрахунки орбіт планет, буде цікаво простежити за їх зіткненнями і утворенням з них планетних систем.

Туманність моделюється сукупністю великої кількості часток порівняно малої маси. Внаслідок взаємного тяжіння частки прагнуть злитися в одне і запобігти цьому можуть тепловий рух і/або відцентрова сила, якщо туманність обертається. Моделювання теплового руху потребує додаткових обчислень, що може зменшити швидкодію рушія до неприпустимо малої, тому для стабілізації туманності покладемося на обертання.

Туманність в своєму початковому стані має низку параметрів: загальна кількість часток, маса однієї частки, координати центра мас, радіус кола, я якому розташовуються частки, закон розподілення часток по площі туманності, колір часток, їх розмір. Щоб не вантажити користувача задаванням великої кількості даних, туманність створюється з вже існуючої планети. В цьому разі треба додатково задати лише кількість часток і радіус кола, в якому вони розташуються, а всі інші параметри будуть запозичені у планети або обчислені. Так маса однієї частки є маса планети, поділена на кількість часток, координати центра туманності є координатами центра планети, розподіл часток рівномірний вздовж радіусів і по куту напряму, колір часток такий як колір планети тощо.

Що стосується обертання туманності, тут критичною є така швидкість часток з якою вони будуть рухатися по круговим орбітам навколо центра мас. За такої умови частки не будуть наближатися одна до одної а хаотична складова руху часток призведе до розпаду туманності. Щоб спостерігати за концентрацією часток и створенням з туманності планетної системи, орбіти часток мають бути еліптичними. Емпірично знайдено що концентрація часток відбувається, коли їх початкова швидкість складає від 0.1 до 0.5 від кругової швидкості.

## Конструктор сцен

**Посилання**

<https://astrograv.soft32.com/>

Програмне забезпечення для моделювання орбіт і гравітаційних систем. Воно підтримує різні типи імітацій і дозволяє вивчати динаміку небесних тіл.

<https://www.orbitsimulator.com/>

Онлайн-симулятор орбіт, який дозволяє вивчати орбіти планет і супутників, а також створювати власні моделі руху небесних тіл.

<https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>

Pyton or C++

Це пакет для чисельного моделювання динаміки небесних тіл. Він використовується для моделювання руху планет, астероїдів, комет і зірок. Rebound підтримує різноманітні чисельні методи для інтеграції орбіт.

<https://stellarium.org/>

Безкоштовний астрономічний симулятор, який дозволяє користувачам спостерігати нічне небо з будь-якої точки на Землі та в будь-який час. Містить функції для моделювання руху планет і зірок.

<https://celestiaproject.space/>

3D

Це вільне програмне забезпечення для тривимірного моделювання та візуалізації космосу. Celestia дозволяє досліджувати планети, зірки, галактики та інші небесні тіла в реальному часі.

[My Solar System - Astronomy | Orbits | Gravitational Force - PhET Interactive Simulations (colorado.edu)](https://phet.colorado.edu/en/simulations/my-solar-system)

**Розділ 1**

Завдання

Є система «зірка-планета» і планета знаходиться на заданій відстані від зірки. Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по круговій орбіті.

[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":1,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"lightblue"}]

Допомога

І зірка, і планета будуть обертатися навкруги центра мас системи. Якщо маса планети є малою відносно маси зірки, центр мас і центр зірки майже співпадають і можна казати про обертання планети навкруги зірки.

Рух по колу потребує щоб відцентрова сила врівноважувалася силою тяжіння, тобто

З (1.1) можна вирахувати необхідну швидкість.

Вирішення

З вихідних даних

Обчислюємо швидкість планети:

В моделі швидкості задаються x і y компонентами, тому в заданому положенні планети *v = (0, 5)*.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]

**Розділ 2**

Завдання

Є система «зірка-планета» і планета знаходиться на заданій відстані від зірки. Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по еліпсу з великою віссю d.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]

Допомога

Найпростіше вирішення буде, якщо в початковому стані планета знаходиться в афелію чи в перигелію своєї орбіти. Спершу визначимо, де саме. Якщо r < d/2, це перигелій, інакше, це афелій.

За законом тяжіння Ньютона потенційна енергія планети масою *m* на відстані від зірки *r* дорівнює .

Знак «мінус» пояснюється тим, що потенційна енергія тим більша, чим більша відстань між масами (на кшталт розтягуванню пружини). На нескінченній відстані енергія найбільша і в той же час прагне до нуля, бо r стоїть у знаменнику.

За законом збереження енергії сума кінетичної і потенційної енергії планети в афелії і в перигелії однакові.

З цієї формули и закону збереження кутового моменту можна отримати початкову швидкість планети.

Вирішення

За законом збереження кутового моменту

тобто

Знаходимо з огляду на те, що .

Так само виводиться і .

Приклад.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":3.162,"color":"lightblue"}]

*Питання 1*. Комети рухаються по дуже витягнутим еліптичним орбітам. Створіть планету, яка б зникала з поля зору и поверталася через заданий час.

**Розділ 3**

Завдання

Створити систему подвійної зірки. Обидві зірки мають однакові маси m, відстанню між їх центрами – r. Обрати таку швидкість окремих зірок, яка забезпечить існування системи подвійної зірки.

Допомога

Подвійна зірка буде існувати, коли зірки будуть обертатися навколо центра мас, а не розлетяться на нескінченну відстань і не впадуть одна на одну.

В будь-який момент часу система має потенційну енергію тяжіння і кінетичну енергію .

Надали зірки можуть зближуватися, розходитися або зберігати початкову відстань, якщо траєкторія кожної зірки коло (рис а). В цьому випадку доцентрова сила

є силою тяжіння до протилежної зірки .

Вирішення

Прирівняємо силу тяжіння до доцентрової сили і знайдемо початкову швидкість.

Приклад. , 1.581.

Зірки можуть розходитися, і при певних значеннях швидкості v розлетяться назвжди. Коли зірки розходяться, кінетична енергія перетікає в потенційну, і якщо запас кінетичної енергії достатній, щоб потенційна енергія сягнула нуля, тобто E >= -H, то відстань між зірками буде зростати до нескінченності.

Наприклад, m = 1000, r = 100. Тоді при планети не будуть розходитися на нескінченність.

Зірки можуть зближуватися і якщо відстань між центрами стане дуже малою, модель не буде працювати правильно.

Обертання зірки навкруги центра мас схоже на рух планети в центральному полі тяжіння. Різниця полягає в тому, що відстані до центу мас вдвічі менші за відстані від однієї зірки до іншої, тому формула для швидкості буде такою

Тут - відстань від зірки до центру мас, коли зірка по відношенню до центра знаходиться в афелії, – теж саме в перигелії. Найменша відстань між зірками дорівнює .

Наприклад, припустимо, що мінімальна відстань між зірками – 60.

Всі швидкості, менші за призводять, якщо не до стиканню зірок, то принаймні до похибок в моделі.

**Розділ 4**

Завдання

Створити систему зірка-планета-супутник. Планета обертається навкруги зірки, а супутник - навкруги планети.

Допомога

В цьому завданні перед нами повстає славнозвісна проблема трьох тіл, але в окремих випадках ця проблема вирішується просто. Зараз «окремість» полягає в тому, що , де

Спочатку змусимо планету обертатися навкруги зірки без супутника, так, як у першому завданні. Швидкість планети вирахуємо за формулою *, –* відстань від планети до зірки.

Потім, дамо планеті супутник, який буде кружляти навкруги планети, як планета кружляє навкруги зірки.

Вирішення

При визначенні швидкості супутника врахуємо, що планета, на відміну від зірки, рухається.

Приклад.

[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":5,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"},

{"name":"Moon","m":0.1,"r":2,"x":410,"y":0,"vx":0,"vy":6,"color":"white"}]

*Питання 1*. На відміну від Місяця, який за рік обертається навкруги Землі приблизно 12 разів, наш супутник обертається приблизно 7.5 разів.

Спираючись на третій закон Кеплера, можна відкоригувати систему так, щоб супутник також робив приблизно 12 обертів за один оберт планети.

*Питання 2*. Що потрібно змінити, щоб супутник обертався навколо планети в протилежному напрямку?

*Питання 3*. Можна спостерігати, що система в цілому потихеньку дрейфує в напряму осі Oy. Чому це відбувається і як цього позбутися?

**Розділ 5**

Балістичний політ тіла – це просто падіння його на Землю. Чим більша початкова швидкість тіла, тим віддаленіш точка зустрічі тіла з поверхнею планети. При достатньої швидкості тіло зовсім не зустрінеться з поверхнею, а буде кружляти навколо Землі. Саме це відобразив Ісаак Ньютон на своєму знаменитому малюнку в книзі «Трактат про систему світу».

Мінімальна швидкість, що забезпечить кружляння, зветься першою космічною.

Завдання

Задана планета і висота над поверхнею планети. З цієї висоти робить горизонтальний постріл гармата, яку зобразив Ньютон в книзі «Трактат про систему світу». Оберіть швидкість снаряду, яка забезпечить його політ по колу навкруги планети. Роль снаряду буде виконувати планета-супутник, яку розташуємо на висоті гори.

Допомога

Маса планети - M, радіус планети - r, висота над поверхнею - h, швидкість снаряду – v.

Для польоту по колу радіусом R = r + h нам відома формула

*Вирішення*

Приклад. .

[{"name":"Sun","m":10000,"r":300,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"green"},

{"name":"Noname","m":0.001,"r":5,"x":0,"y":320,"vx":5.590,"vy":0,"color":"white"}]

Друга космічна швидкість дозволить снаряду подолати тяжіння планети і відлетіти у простір космосу.

Як відомо, потенційна енергія тяжіння снаряду масою *m* на відстані від центру планети *r* дорівнює . Початкова швидкість снаряду v має бути достатньою, щоб кінетична енергія перевищила потенційну

Приклад. .

**Розділ 6**

Ракета від Землі до Сонця

Завдання

Планета обертається навкруги центральної зірки по круговій орбіті. Запустити ракету з планети так, щоб вона наблизилась до центра зірки на два її радіуса і після того стала обертатися навкруги зірки. Визначити початкову швидкість ракети.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"}],

Допомога

Нехай R – радіус зірки, M – її маса, S – відстань від планети до зірки.

Тоді ракета має рухатися по еліпсу з великою віссю

Вирішення

Спершу треба визначитись, в афелії чи перигелії знаходиться ракета під час старту.

Якщо S > 2R, це афелій.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"}],

**Розділ 7**

До орбіти Марсу

З будь-якої планети можна запустити ракету по балістичній траєкторії. Ракета має малі масу (10e-6) і розмір (1.) у порівнянні з планетою. Стартує ракета з поверхні планети починає свій рух в напряму руху планети. Початкова швидкість ракети задається перед стартом і складається зі швидкістю самої планети.

Завдання

Дві планети (умовно Земля і Марс) обертаються навкруги центральної зірки (умовно Сонця) по круговим орбітам. Запустити ракету с Землі так, щоб вона досягла орбіти Марса. Визначити мінімально необхідну швидкість ракети.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.5811,"color":"orange"}]

Допомога

Згідно з першим законом Кеплера орбіта ракети має бути еліпсом, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Перигелійна відстань орбіти це відстань від зірки до Землі, афелійна відстань – відстань до Марса.

Будемо зневажати тяжінням Землі, яке діє на ракету. В стартовому положенні ракети прискорення від Землі становить 0.001/9² ≈ 1e-2 , а прискорення від Сонця 1000/300² ≈ 1e-5, тобто в 1000 разів більше.

Вирішення

Скористаємося вже відомою формулою для розрахунку початкової, тобто перигелійної, швидкості ракети.

Щоб визначити швидкість ракети відносно місця старту, віднімемо від неї швидкість Землі.

Приклад. = 0.126

{"planets":[{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"orange"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

"starters":[{"kind":1,"param1":0.126,"param2":0,"startStep":0,"planetName":"Earth"}]}

**Розділ 8**

Подорож на Марс

Завдання

Щоб висадитися на Марс, ракета повинна досягти його орбіти в той самий час, коли там буде знаходитися планета Марс. Треба обрати не лише швидкість ракети, а і час її запуску.

Допомога

Завдяки круговій орбіті Марса, період його обертання можна визначити, поділивши довжину орбіти на швидкість планети.

Третій закон Кеплера говорить, що квадрати періодів обертання відносяться, як куби великих осей орбіт, тому період обертання ракети .

і ракета досягне орбіти Марса за половину свого періоду

Кутова швидкість марса , тому за цей час Марс просунеться на кут .

До зустрічі з ракетою йому не вистачить кута

Тому запускати ракету с Землі варто, коли у своєму русі Марс буде випереджати Землю на кут , або, що те ж саме, Земля буде попереду Марса на кут .

Вирішення

Кутова швидкість Землі відносно Марса

Виходячи з початкового стану системи, потрібне випередження виникне за час

Приклад

-- ----------------------------------

Скористатися гравітацією для прискорення ракети