## Особливості моделі

Модель двовимірна, простір моделі обмежений прямокутником певної ширини і висоти.

Модель складається з куль, ліній та перемичок між кулями.

Лінія це відрізок прямої, який задається двома кінцевими точками.

Кулі то кола, але ми будемо називати їх кулями, бо це більше відповідає нашій інтуїції.

Перемички це жорсткі зв’язки між парами куль.

При деформація куль і перемичок можливі втрати енергії, кількість втрат регулюється налаштуваннями моделі.

Кулі не обертаються, тепло, яке виділяється внаслідок деформацій, також ніяк не враховується.

При стиканні куль з кулями і іншими перешкодами тертя вважається відсутнім.

Стикання куль з перешкодами розглядається не як миттєва дія, а як процес, який займає певний проміжок часу. Сила реакції від стикання кулі з перешкодою виникає за рахунок деформації кулі. В моделі деформацію уособлює та частина кулі, яка опиняється в межах перешкоди. Чим більша та частина, тим більша сила реакції, що відповідає закону Гука про пружню деформацію.

Основна думка полягає в тому, що в будь-який момент дискретного часу можна визначити, з якими перешкодами зустрілася куля, знайти міру деформації від кожної перешкоди і відповідну силу реакції, і скласти всі сили. Отримана рівнодіюча дозволяє обчислити поточне прискорення кулі, а також швидкість і положення кулі в наступний момент дискретного часу.

## Стикання куль з лініями

Стикання з лінією починається, коли контур кулі перетинається з лінією. Тут виникає сила реакції, яка направлена по нормалі до напряму лінії і пропорційна деформації кулі (лінії в моделі не деформуються).

Мірою деформації є довжина відрізка CD (рис.1 а) Сила реакції прикладена до точки С, яку будемо називати точкою дотику.



Оцінити ступінь деформації (довжину відрізка CD) можна прирівнявши кінетичну енергію кулі, яку вона мала до зіткнення, до потенційної енергії деформації, яку куля має в момент повної зупинки перед зміню напряму тангенціальної швидкості на протилежний.

Тут *m* – маса кулі, *v* – тангенціальна швидкість кулі відносно лінії, *F(x)* – сила реакції в залежності від розміру деформації *x*, L – максимальна деформація тобто довжина відрізку CD.

По закону Гука , де *k* – коефіцієнт жорсткості. Після підставлення *F(x)* в формулу (1) і інтегрування отримаємо

Рівнянням (2) можна скористатися для перевірки коректності програмної реалізації моделі, що і було зроблено. Воно також дозволяє окреслити межі застосування моделі. Очевидна вимога в тому, що L не повинно перевищувати радіуса кулі r. Тобто .

З чого витікає обмеження на швидкість кулі в моделі . Якщо швидкість кулі перевершить критичне значення, її поведінка може стати непередбаченою, наприклад, вона може пройти крізь перешкоду, або вийти за межі модельного простору.

З того, що стикання є процес у часі, вірогідними стають випадки одночасного стикання кулі з декількома лініями (рис. 1б). В такому разі одночасно існують декілька точок дотику, реакція від яких складається.

Треба також врахувати випадки, коли куля частково перетинає лінію (рис. 2а).

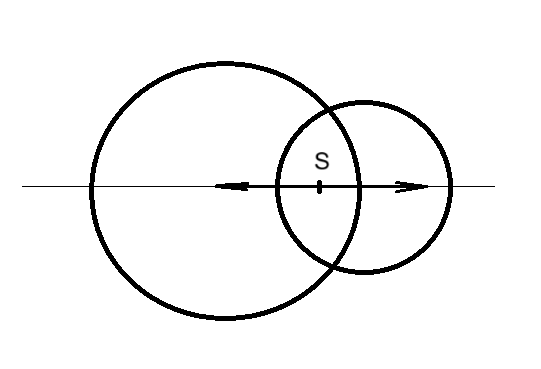


Точка дотику буде розташована на середині тієї частини лінії, яка опиниться в межах кулі. Сила реакції буде направлена до центру кулі, а не по нормалі до напряму лінії. Це не протирічить тому, що зображено на рис.1, просто там ці два напрями співпадають. Таке рішення не випадкове, лише воно забезпечує непереривність поведінки моделі у всіх варіантах взаємного розташування лінії і кули. Два полярних випадка зображені на рис 2б.

## Стикання куль з кулями

Коли відстань між центами куль стає меншою за суму їх радіусів, починається процес стикання. В будь-який момент часу на кожну з куль діє сила, яка направлена від точки дотику до центру кулі. Сила спричиняється пружною деформацією кулі і величина сили, згідно з законом Гука, пропорційна величині деформації.

При стиканні куль величина деформації визначається шириною зони перекриття двох кіл. Згідно з третім законом Ньютона сили реакції куль однакові за величиною, тому і деформації куль повинні бути однаковими. Це змушує вважати точкою дотику куль точку S, яка поділяє навпіл зону перекриття в її найширший частині (рис.3).



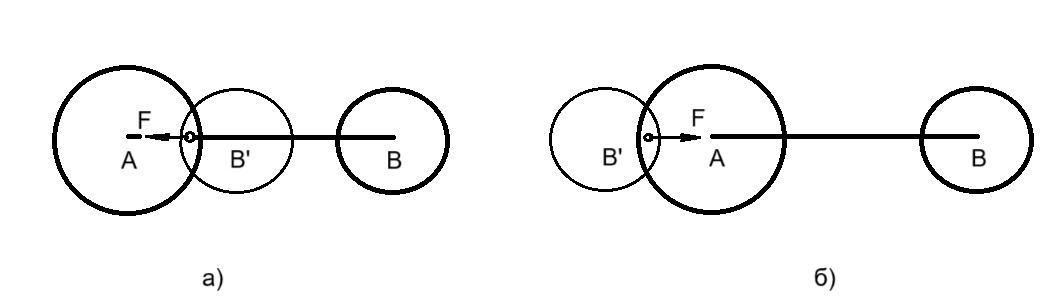
При стиканні куль з кулями діють ті ж самі міркування щодо коефіцієнту жорсткості і обмежень на швидкість, що і при стиканні куль з лініями.

## Реакція перемичок

Окрім куль і ліній, модель включає агрегати, які складаються з двох куль, з’єднаних відрізком прямої, кінці якого співпадають із центрами куль - перемичками. Перемички не абсолютно жорсткі, вони можуть стискатися або розтягуватися, але не гнутися.

Якщо зв’язані кулі змінюють своє положення, відстань між ними може збільшитися або зменшитися. Відповідно перемичка буде розтягуватися або стискатися і діяти на обидві кулі.

На рисунку 4а зображений агрегат, який складається з куль A і B, з’єднаних перемичкою.



Внаслідок зовнішнього впливу куля A зайняла нову позицію і відстань між кулями скоротилася, що спричинило силу спротиву перемички, яка пропорційна скороченню.

Раніш стикання кулі з лініями і з іншими кулями ми виражали в термінах точок дотику, що дозволяло уніфікувати вплив різних перешкод при розрахунку руху кулі. Те саме варто зробити і зараз.

Вочевидь реакція перемички не залежить від її довжини, а лише від зміни тієї довжини. Тому розрахунок реакції перемички можна звести до розрахунку реакції стикання двох куль. Для того треба подумки наблизити другу кулю до першої на відстань , де – довжина ненапруженої перемички, і – радіуси відповідних куль.

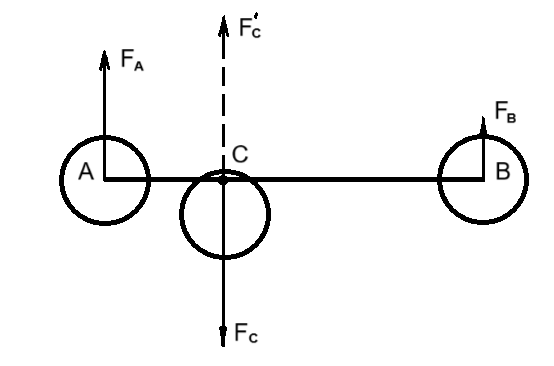
У випадку, коли перемичка не скоротилася, а видовжилася (рис.4б), відстань .

Єдине, що відрізняє точки дотику, отримані від перемичок, ко коефіцієнт жорсткості, який у перемичок може відрізнятися від коефіцієнт жорсткості куль.

## Стикання куль з перемичками

Імітаційні можливості моделі зростуть, якщо кулі зможуть стикатися на тільки з кулями і лініями, але і з перемичками також.

При стиканні з перемичкою точка дотику і сила реакції визначаються так само, як при стиканні кулі з лінією (рис.5).



Сила реакції від кулі C розподіляється між кулями A і B по закону важеля.

Сили Fa і Fb надають кулям A і B прискорення відповідно до їх мас, і цього достатньо, щоб повністю передбачити поведінку системі куля-гантель в процесі стикання.

## Втрати енергії при стиканнях

В реальному житті будь-яка механічна взаємодія супроводжується розсіюванням енергії. В моделі ми також повинні імітувати втрати енергії, якщо хочемо наблизити її поведінку до реальності, бо без такої імітації коливальні процеси, які повсякчасно виникають в ході моделювання, ніколи б не затухали.

При зустрічі кулі з перешкодою процес стикання проходить дві фази – фазу збільшення деформації і фазу зменшення деформації. В першій фазі кінетична енергія кулі переходить у потенційну енергію стискання і швидкість кулі зменшується до нуля. В другій фазі, навпаки, потенційна енергія стискання перетворюється в кінетичну енергію.

Без імітації втрат кінетична енергія, набрана кулею в другій фазі, дорівнювала б потенційній , де k – коефіцієнт жорсткості, d – розмір деформації.

Якщо в обчисленнях, що чисельно моделюють другу фазу, зменшити коефіцієнт жорсткості у w разів, то і набрана кулею кінетична енергія стане меншою у w разів. Те саме стосується і першої фази, в якій кінетична енергія переходить в потенційну. Відмінність в тому, що для імітації втрати енергії в цій фазі коефіцієнт жорсткості треба не зменшувати, а збільшувати у w разів.

## Обчислювальна схема

## Перевірка коректності моделі

## Можливі завдання

Обчислити прискорення тяжіння за допомогою кулі на похилій площині.

Обчислити висоту підйому кулі при пострілу прямо угору.

Визначити час падіння з заданої висоти

Влучити в певну ціль пострілом по параболі

Влучити в баскетбольну корзину