

**Курс: Функциональное программирование**  
**Домашнее задание 1**  
**Мосин Владислав**

**Задание 0**

- a)  $S\ K\ K = (\backslash f\ g\ x \rightarrow f\ x\ (g\ x)) (\backslash x\ y \rightarrow x) (\backslash x\ y \rightarrow x) =$   
 $= (\backslash g\ x \rightarrow x) (\backslash x\ y \rightarrow x) = \backslash x \rightarrow x = I$   
b)  $K\ I = (\backslash x\ y \rightarrow x) (\backslash x \rightarrow x) = \backslash y \rightarrow (\backslash x \rightarrow x) = \backslash y\ x \rightarrow x = K^*$

**Задание 1**

- a)  $x (\backslash x\ y \rightarrow y\ (x\ w)\ u)\ y\ [x := \backslash z \rightarrow z] = x (\backslash x'\ y' \rightarrow y'\ (x'\ w)\ u)\ y\ [x := \backslash z \rightarrow z] =$   
 $= (\backslash z \rightarrow z) (\backslash x\ y \rightarrow y\ (x\ w)\ u)\ y$   
b)  $(\backslash x \rightarrow x (\backslash y \rightarrow y\ x)\ w) (\backslash x \rightarrow v)\ [w := \backslash v \rightarrow v\ x] =$   
 $= (\backslash x' \rightarrow x' (\backslash y' \rightarrow y'\ x')\ w) (\backslash x \rightarrow v)\ [w := \backslash v \rightarrow v\ x] =$   
 $= (\backslash x' \rightarrow x' (\backslash y' \rightarrow y'\ x')\ (\backslash v \rightarrow v\ x)) (\backslash x \rightarrow v)$

Связные переменные поменяли обозначения: если  $x$  была связной, то она переименовалась в  $x'$ .

**Задание 2**

- a)  $((\backslash x \rightarrow (\backslash y \rightarrow ((x\ y)\ z))) (a\ (b\ c))) = (\backslash x \rightarrow (\backslash y \rightarrow x\ y\ z)) (a\ (b\ c)) =_{\beta}$   
 $=_{\beta} \backslash y \rightarrow a\ (b\ c)\ y\ z$   
b)  $((m\ n)\ m) (\backslash x \rightarrow ((x\ (u\ v))\ y)) = m\ n\ m (\backslash x \rightarrow x\ (u\ v)\ y)$   
c)  $((\backslash x \rightarrow (\backslash y \rightarrow ((y\ x)\ x))) (x\ (x\ y))\ y) = (\backslash x\ y \rightarrow y\ x\ x) (x\ (x\ y))\ y =$   
 $= (\backslash x'\ y' \rightarrow y'\ x'\ x') (x\ (x\ y))\ y =_{\beta} (\backslash y' \rightarrow y'\ (x\ (x\ y))\ (x\ (x\ y)))\ y =_{\beta} y\ (x\ (x\ y))\ (x\ (x\ y))$

**Задание 3**

$$\begin{aligned} K\ S &= (\backslash x\ y \rightarrow x) (\backslash f\ g\ x \rightarrow f\ x\ (g\ x)) = \backslash y \rightarrow (\backslash f\ g\ x \rightarrow f\ x\ (g\ x)) = \backslash y\ f\ g\ x \rightarrow f\ x\ (g\ x) \\ S\ (K\ S)\ K &= (\backslash f\ g\ x \rightarrow f\ x\ (g\ x)) (\backslash y'\ f'\ g'\ x' \rightarrow f'\ x'\ (g'\ x')) (\backslash x''\ y'' \rightarrow x'') = \\ &= (\backslash g\ x \rightarrow (\backslash y'\ f'\ g'\ x' \rightarrow f'\ x'\ (g'\ x'))\ x\ (g\ x)) (\backslash x''\ y'' \rightarrow x'') = \\ &= (\backslash g\ x \rightarrow (\backslash g'\ x' \rightarrow g\ x\ x'\ (g'\ x')))\ (\backslash x''\ y'' \rightarrow x'') = \\ &= (\backslash g\ x\ g'\ x' \rightarrow g\ x\ x'\ (g'\ x')) (\backslash x''\ y'' \rightarrow x'') = \\ &= \backslash x\ g'\ x' \rightarrow (\backslash x''\ y'' \rightarrow x'')\ x\ x'\ (g'\ x') = \backslash x\ g'\ x' \rightarrow x\ (g'\ x') = B \end{aligned}$$

**Задание 4**

$$\text{xor} = \backslash b_1\ b_2 \rightarrow b_1\ (b_2\ \text{false}\ \text{true})\ b_2$$

Проверим на всех возможных парах  $(b_1, b_2)$  и поймем, что результат равен true, тогда и только тогда когда ровно один аргумент true.

**Задание 5**

- 1 способ:  $\text{pow} = \backslash b\ e \rightarrow e\ (\text{mult}\ b)\ 1$   
2 способ:  $\text{pow} = \backslash b\ e\ s\ z \rightarrow e\ b\ s\ z$

**Задание 6**

Для начала поймем, что  $(\text{plus}\ a\ b)\ (\text{plus}\ c)\ 0 = \text{plus}\ (a\ (\text{plus}\ c)\ 0)\ (b\ (\text{plus}\ c)\ 0)$

Левое:  $\text{plus } a \ b$  раз применяем функцию  $\text{plus } c$

Правое: по определению  $\text{plus } (a \ (\text{plus } c) \ 0)$  ( $a$  раз применяем  $\text{plus } c$ ) раз увеличиваем на 1 ( $b \ (\text{plus } c) \ 0$ ) ( $b$  раз применяем  $\text{plus } c$ ), т.е.  $\text{plus } a \ b$  раз применяем функцию  $\text{plus } c$ .

Отсюда, левое = правое.

$$\begin{aligned} \text{mult } (\text{plus } a \ b) \ c &= (\text{plus } a \ b) \ (\text{plus } c) \ 0 = \\ &= \text{plus } (a \ (\text{plus } c) \ 0) \ (b \ (\text{plus } c) \ 0) = \text{plus } (\text{mult } a \ c) \ (\text{mult } b \ c) \end{aligned}$$

Корректность сложения:  $\text{plus } a \ b \rightarrow a \ \text{succ } b = a \ \text{succ } (b \ \text{succ } 0)$ , что эквивалентно  $a + b$  раз применить функцию  $\text{succ}$  к нулю (где  $a + b$  - нормальное сложение чисел).

Корректность умножения:  $\text{mult } a \ b = a \ (\text{plus } b) \ 0 = a \ (b \ \text{succ } 0)$ , что эквивалентно применению функции  $\text{succ}$  к нулю ровно  $a \cdot b$  раз, где умножение - умножение в обычных числах.