$\partial_t u = 14\partial^2_{xx}u \pm 20u$

$u(x,0) = u_0(x)$

Применим преобразование Фурье к данному уравнению

$F[u] = \hat{u}(\epsilon, t)$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = k\epsilon^2\hat{u} \pm 20\hat{u}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}(k\epsilon^2 \pm 20)$$

$$\hat{u}(\epsilon, t) = u_0 e^{-14\epsilon t^2 \pm 20t} = u_0 e^{-14\epsilon^2 t} e^{\pm 20t} = \bar{u}_0(\epsilon)\bar{g}(\epsilon, t)$$

$$u(x, t) = (u_0(x) * g)(x, t)$$

$$\bar{g}(\epsilon, t) = e^{-14\epsilon^2 t} e^{\pm 20t}$$

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\epsilon, t) e^{-i\epsilon x} d\epsilon = \frac{e^{\pm 20t}}{2\sqrt{14\pi t}} e^{-\frac{x^2}{56t}}$$

$$u(x, t) = u_0(x) * \frac{e^{\pm 20t}}{2\sqrt{14\pi t}} e^{-\frac{x^2}{56t}} = \frac{e^{\pm 20t}}{2\sqrt{14\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{56t}} dy$$

Если $\overrightarrow{X} = [x, y]$

$$u(X,t) = \frac{e^{\pm 20t}}{(2\sqrt{14\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\vec{l}) e^{-\frac{(\vec{X}-\vec{l})^2}{56t}} dy$$

$$u(X,t) = \frac{e^{\pm 20t}}{(2\sqrt{14\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(l_1, l_2) e^{-\frac{(x-l_1)^2+(y-l_2)^2}{56t}} dl_1 dl_2$$

Задание 2

$xy' = 14y$

Классическое решение $y = C_1 x^{14}$

Обобщенное решение будем иметь вид:

$y = C_1 x^{14} + C_2 x^{14} X(x)$

Действительно

$y' = C_1 14x^{13} + C_2 14x^{13} X(x) + C_2 x^{14} \delta[x]$

$x[C_1 14x^{13} + C_2 14x^{13} X(x) + C_2 x^{14} \delta[x]] = 14 * [C_1 x^{14} + C_2 x^{14} X(x)]$

Так как $C_2 x^{14} \delta[x] = 0$

Код используемый в 3 задании

```
syms x
n = 1;
eqn = besselj(n, sqrt(x) * R1) * bessely(n,sqrt(x) * R2) - besselj(n,sqrt(x) * R2) * bessely(n,sqrt(x) * R1)
fun = matlabFunction(eqn);
x0 = 1:1.5:15;
sol = zeros(length(x0));
for k = 1:numel(x0)
    sol(k) = fsolve(fun,x0(k));
end
lambdas = sol(1:5);

R1=1;
R2=15;
x = 1:1:15;
j0 = zeros(5, length(x));
for i = 0:4
    j0(i+1,:) = besselj(n,lambdas(i+1) * R1) * bessely(n,lambdas(i+1) * x * R2) - besselj(n,lambdas(i+1) * R
end
plot(x,j0)
grid on
legend('J_0','J_1','J_2','J_3','J_4','Location','Best')
title('Bessel Functions of the First Kind for $\nu \in [0, 4]$','interpreter','latex')
xlabel('r','interpreter','latex')
ylabel('$J_\nu(z)$','interpreter','latex')
% J = besselj(1, )
```

Задание 3

Чтобы найти собственные функции оператора Лапласа необходимо решить следующее уравнение

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

Рассмотрим оператор Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Решение в виде: $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, тогда

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -\lambda R(r)\Theta(\theta)$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda$$

Пусть $\dfrac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\gamma$ или $\Theta''(\theta) + \gamma\Theta(\theta) = 0$

Характеритич. Уравнение $p^2 + \gamma = 0$ -> $p = \pm\sqrt{-\gamma}$

Решение: $\Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{\gamma}\theta) + B\sin(\sqrt{\gamma}\theta)$

Так как $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ решение 2π - периодично
$\sqrt{\gamma} = n \quad n \in +Z$

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}A_0 & n = 0 \\ A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta) & n \in Z \end{cases}$$

Уравнения для r

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{1}{r^2}\gamma = -\lambda$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0$$

Пусть $\rho = \sqrt{\lambda}r$

$$R_r = R_\rho \frac{d\rho}{dr} = \sqrt{\lambda}R_\rho$$

$$R_{rr} = \lambda R_{\rho\rho}$$

Тогда

$$R_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}R_\rho + (1 - \frac{n^2}{\rho^2})R = 0$$

$\rho^2R_{\rho\rho} + \rho R_\rho + (\rho^2 - n^2)R = 0$ - уравнение Бесселя

Решение которого имеет вид

$$R_n(\rho) = C_1J_n(\rho) + C_2Y_n(\rho)$$

Где J_n - функция Бесселя, Y_n - функция Неймана

$$\rho = \sqrt{\lambda}r$$

Подставим граничные условия Дирихле

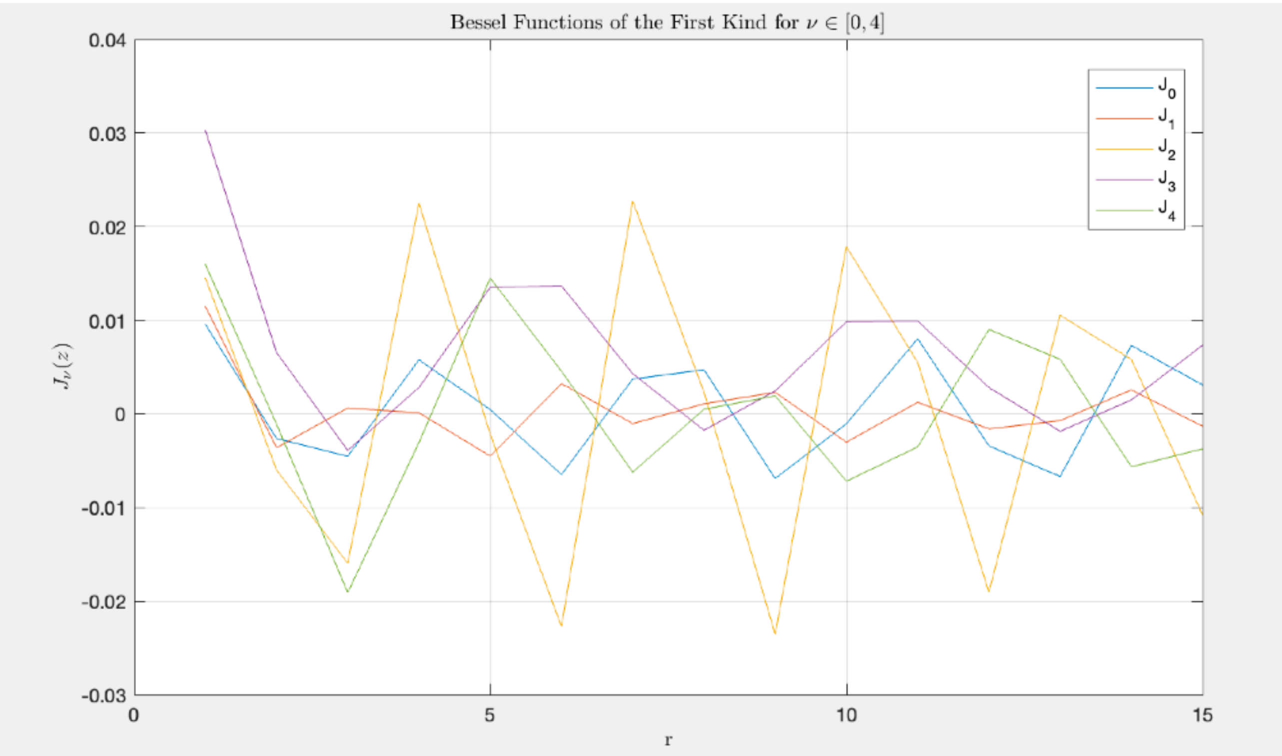
$$C_1 J_n(\sqrt{\lambda} R_1) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda} R_1) = 0$$

$$C_1 J_n(\sqrt{\lambda} R_2) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) = 0$$

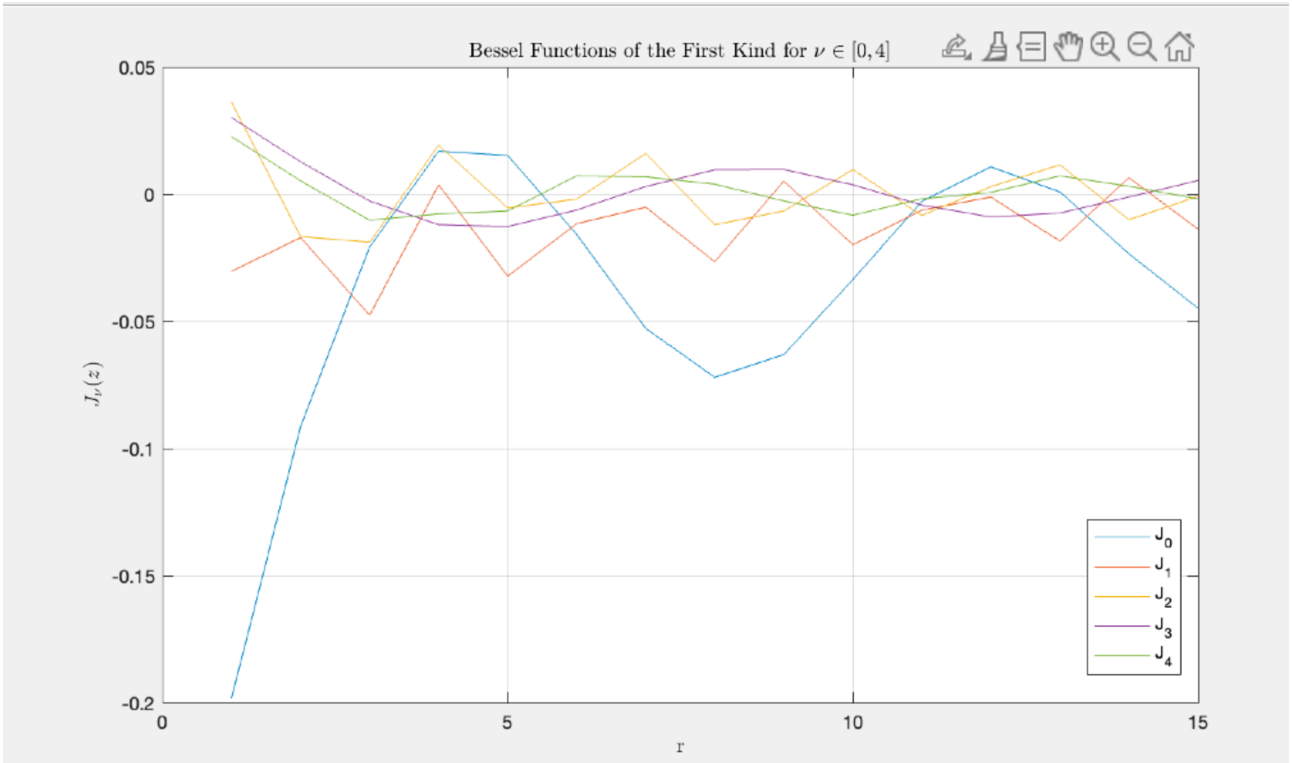
$$J_n(\sqrt{\lambda} R_1) Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) = Y_n(\sqrt{\lambda} R_1) J_n(\sqrt{\lambda} R_2)$$
$$C_1 = Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) \qquad C_2 = -J_n(\sqrt{\lambda} R_2)$$

$$R_n(\rho) = [Y_n(\sqrt{\lambda} R_2) J_n(\rho) - J_n(\sqrt{\lambda} R_2) Y_n(\rho)] * \Theta(\theta)$$

Графики что-то не строятся гладкими
Нулевая гармоника



Первая гармоника



$$\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}[Y_n(\sqrt{\lambda}R_2)J_n(\rho) - J_n(\sqrt{\lambda}R_2)Y_n(\rho)] * \Theta(\theta)drd\theta$$

Под интегралом тригонометрическая функция -> очевидно такой интеграл 0

Задание 3.4

Мы знаем собственные функции оператора лапласа

Решение будем представлять в виде

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

Добавляется условие
$T'' + \lambda T = 0$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{0}^{\infty} C_k exp(\lambda_k t)[Y_n(\sqrt{\lambda}R_2)J_n(\rho) - J_n(\sqrt{\lambda}R_2)Y_n(\rho)] * \Theta(\theta)$$

Где Ck берутся из начальных условий

$$Ck = \frac{< u(x,0), R_k >}{< R_k, R_k >}$$ где Rk - k собственная функция