Задание 1

Трехточечный шаблон

$$u_i' = au_{i+1} + bu_i + cu_{i-1}$$

$$i\epsilon - a[e^{i\epsilon h} - e^{-i\epsilon h}] + b = 0 = \quad i\epsilon - 2iasin(\epsilon h) + b$$

Коэффициенты
$b = 0$
Производная в нуле
$i - 2iah = 0$
$$a = \frac{1}{2h} = -c$$
Разностная формула для первой производной

$$u_i' = \frac{1}{2h}u_{i+1} - \frac{1}{2h}u_{i-1}$$

Пятиточечный шаблон

$$u_i' = au_{i+2} + bu_{i+1} + cu_i + du_{i-1} + eu_{i-2}$$

$$u_i' = a[u_{i+2} - u_{i-2}] + b[u_{i+1} - u_{i-1}] + cu_i$$

$$i\epsilon = 2ia\sin(2\epsilon h) + 2ib\sin(\epsilon h) + c$$

Коэффициенты

$\epsilon = 0$ тогда $c = 0$
Первая Производная в нуле

$$i - 4iah - 2ibh = 0$$

Третья Производная в нуле

$$16a + 2b = 0$$

$$b = -8a$$

$1 - 4ah + 16ah = 0$
$a = \frac{1}{12h}$

$b = -\frac{2}{3h}$

$u_i' = \frac{1}{12h}u_{i+2} - \frac{2}{3h}u_{i+1} + \frac{2}{3h}u_{i-1} - \frac{1}{12h}u_{i-2}$

Задание 3

Собственные функции оператора d_x
$d_x u = \lambda u$

$u = Ce^{\lambda u}$

Собственные функции оператора $\sin(14x)$

$sin(14x)u = \lambda u$
$[sin(14x) - \lambda]u = 0$

Если $|\lambda| > 1$ то u - не собственная функция
Если $|\lambda| \leq 1$ то $u = \delta[\frac{\pi k}{7}]$
также $sin'(14x) = 14cos(14x) = 0$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{14}$

Берем $\lambda = sin(\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{14})$

То собственные функции это $u = cos(14x)$ или $\delta[sin(\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{14})]$

Собственные функции для оператора $\frac{d}{dx} + sin(14x)$

$$\frac{du}{dx} + sin(14x)u = \lambda u$$

$$\frac{du}{u} = (\lambda - sin(14x))dx$$

Интегрируем и получаем

$$u = Ce^{\lambda + cos(14x)}$$

Задание 2

Пятиточечный шаблон

$$u_i''' = a[u_{i-2} - u_{i+2}] + b[u_{i-1} - u_{i+1}] + cu_i$$

$$-i\epsilon^3 = -2ai\sin(2\epsilon h) - 2bi\sin(\epsilon h) + c$$

$\epsilon = 0$ тогда c =0

Первая производная

$$0 = -4aih - 2bih \qquad b = -2a$$

Третья производная

$$-6i = -16aih^3 - 2bih^3$$

$$a = \frac{1}{2h^3}$$
$$b = -\frac{1}{h^3}$$

$$u_i''' = \frac{1}{2h^3}[u_{i-2} - u_{i+2}] - \frac{1}{h^3}[u_{i-1} - u_{i+1}]$$

Для нахождения третьей производной необходимо знать 2 вторые. Чтобы определить вторую производную необходимо 3 точки, 2 производные - 5 точек (1 точка общая). Поэтому 3-х точечный шаблон невозможен.

Задание 4

Представим u в виде

$$\hat{u} = \begin{cases} 0 & x \in [-2\pi, -\pi] \,|\, [0,\pi] \\ 1 & x \in (-\pi,0) \,|\, (\pi,2\pi) \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{nx}{2}) + b_n \sin(\frac{nx}{2})]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dx = 1$$

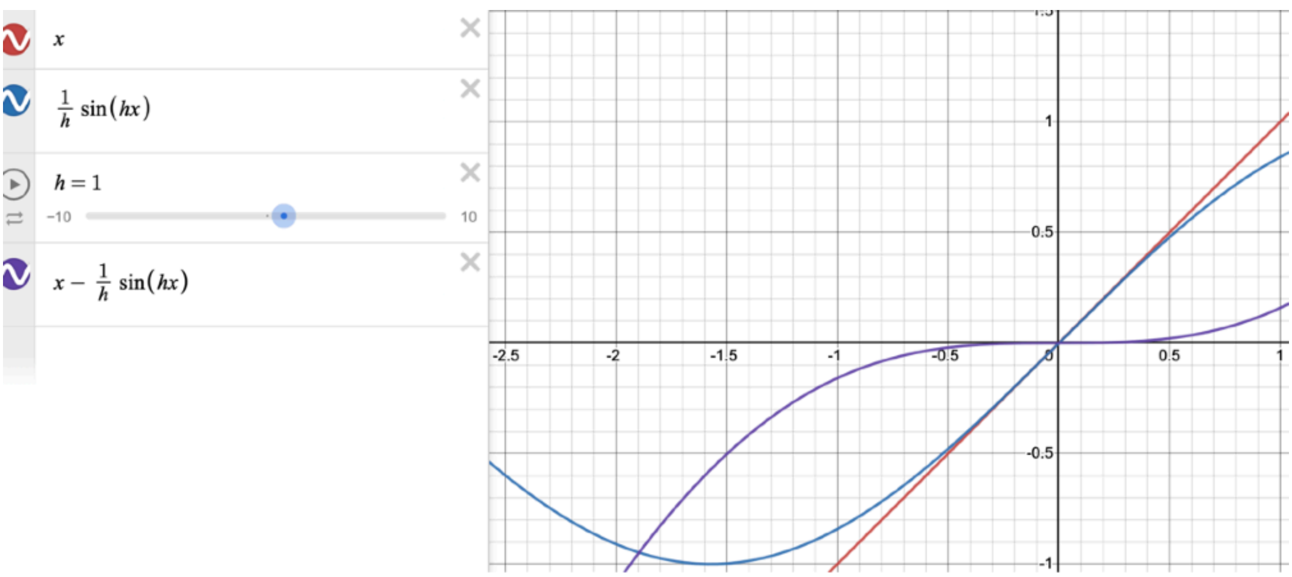
$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u(x) \cos(\frac{nx}{2}) dx = 0$$

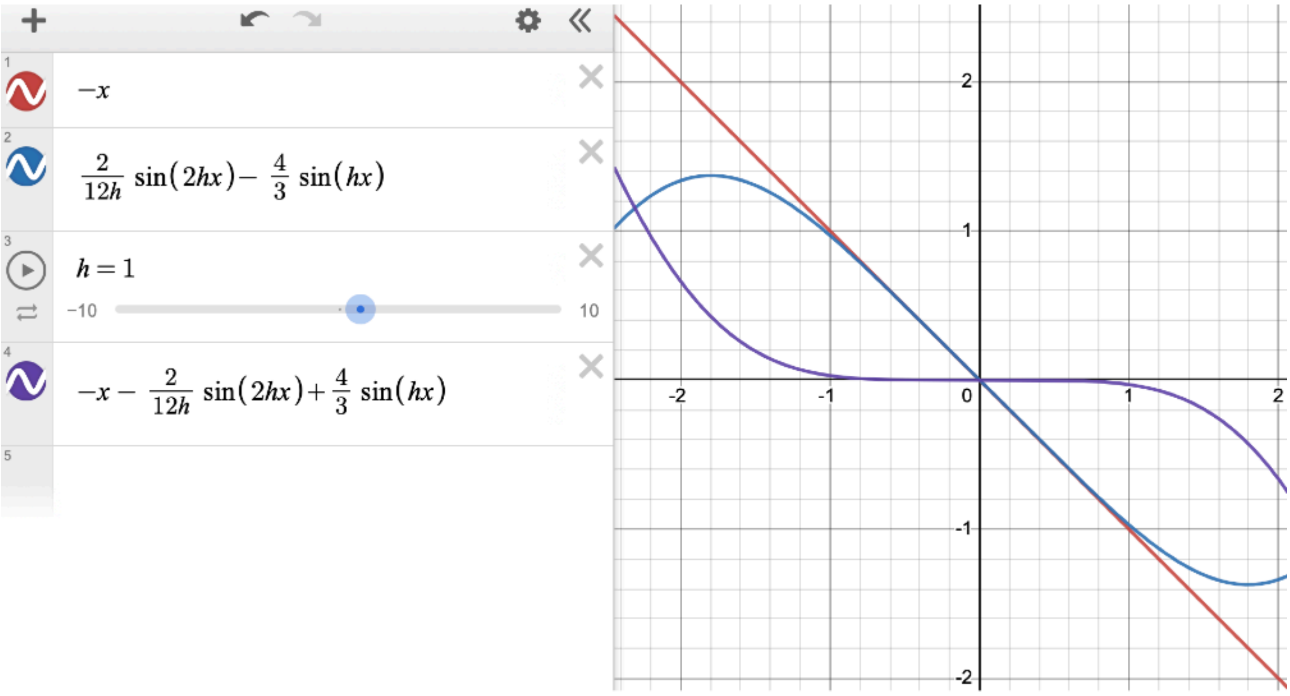
$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u(x) \sin(\frac{nx}{2}) dx = \frac{1}{2\pi} [\frac{2}{n} 2\cos(\frac{nx}{2}) - \frac{2}{\pi} \cos(\pi n) - \frac{2}{n}]$$

$$= \frac{1}{\pi n}(-1 + 2\cos(\frac{\pi n}{2}) - cos(\pi n))$$

$$u(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{\pi n}(-1 + 2\cos(\frac{\pi n}{2}) - cos(\pi n)) \sin(\frac{nx}{2})]$$

Графики к первому заданию





$-x$
$\frac{2}{12h}\sin(2hx)-\frac{4}{3}\sin(hx)$
$h=1$
−10
10
$-x-\frac{2}{12h}\sin(2hx)+\frac{4}{3}\sin(hx)$
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2