Задание 4.2

$f(x) = e^{-14x^2}$

$\phi_1(x) = e^{-|x|}$ $\qquad$ $\phi_2(x) = e^{-2|x|}$ $\qquad$ $\phi_3(x) = e^{-3|x|}$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

$\psi_1(x) = e^{-|x|}$

$\psi_2(x) = 3\sqrt{2}e^{-2|x|} - 2\sqrt{2}e^{-|x|}$

$$\psi_3(x) = (e^{-3|x|} - \frac{6}{5}e^{-2|x|} + \frac{3}{10}e^{-|x|})\sqrt{300}$$

- ортонормированный набор

Такой что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_3(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x)\psi_3(x)\,dx = 0$$

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + c_3\psi_3(x),$$

причем

$||f(x) - \hat{f}(x)||_{L^2} \to \min,$

где $||f(x)||_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx}$

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x)f(x)dx$$

Найдем каждый коэффициент

$$c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-3|x|} - \frac{6}{5}e^{-2|x|} + \frac{3}{10}e^{-|x|})\sqrt{300}e^{-14x^2}dx = 0.1695$$

$$c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2|x|} - \frac{2}{3}e^{-|x|})e^{-14x^2}dx = 0.085618$$

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-14x^2}dx = 0.40995$$

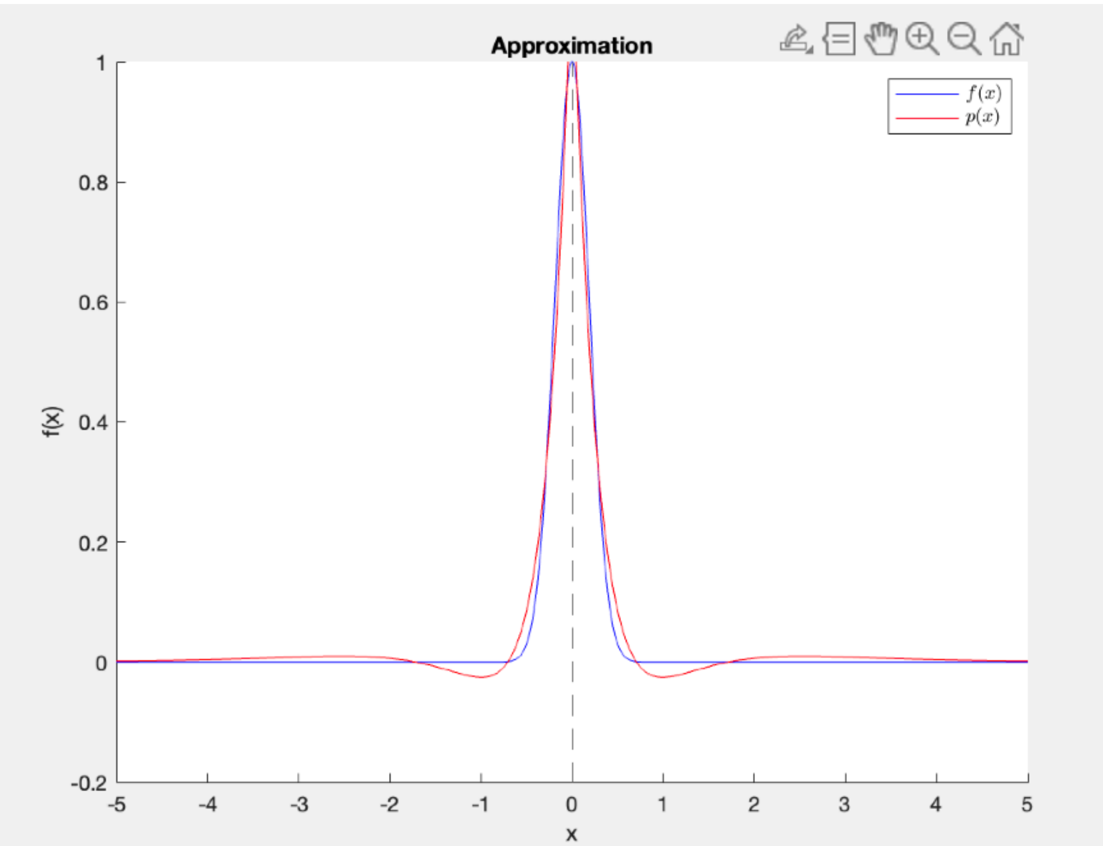
$$\hat{f}(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + c_3\psi_3(x)$$

Для более точных вычислений запрограммируем это в Матлаб

SecondTask.m * | L2_inner_product.m | GramShmidt.m

```
syms x
f1 = exp(-abs(x));
f2 = exp(-2 * abs(x));
f3 = exp(-3 * abs(x));

[psi1, psi2, psi3] = GramShmidt(f1, f2, f3);

f = exp(-14 * x * x);
c1 = L2_inner_product(psi1, f);

c2 = L2_inner_product(psi2, f);

c3 = L2_inner_product(psi3, f);

p = c1 * psi1 + c2 * psi2 + c3 * psi3;
figure(1)
hold on
fplot(f, 'b')
fplot(p, 'r')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
title('Approximation')
legend('$f(x)$','$p(x)$','Interpreter','latex')
hold off
```

График



Задание 4.1

Доказательство самосопряженности

$$\langle A[f]; g\rangle = \langle f; A[g]\rangle$$

$$A[u] = -d_x^2 u + 14u$$

$$\int_0^\pi [-d_x^2 f(x) + 14f(x)]g(x)dx = 14\int_0^\pi f(x)g(x)dx - \int_0^\pi [d_x^2 f(x)]g(x)dx = 14\int_0^\pi f(x)g(x)dx - (d_x f(x)g(x) - \int_0^\pi d_x f(x) d_x g(x)dx) =$$

$$14\int_0^\pi f(x)g(x)dx - (d_x f(x)g(x)\Big|_0^\pi - f(x)d_x g(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)d_x^2 g(x)dx)$$

$$= 14\int_0^\pi f(x)g(x)dx - (-af(\pi)g(\pi) + af(\pi)g(\pi)) - \int_0^\pi f(x)d_x^2 g(x)dx$$

$$14\int_0^\pi f(x)g(x)dx - \int_0^\pi f(x)d_x^2 g(x)dx = \langle f; A[g]\rangle$$

Доказать положительно определенность

$$\langle A[f]; f\rangle \geq 0$$

$$\langle -d_x^2 f; f\rangle + 14\langle f; f\rangle \geq 0$$

$$\int_0^\pi -d_x^2 f(x)f(x)dx + 14\int_0^\pi f^2(x)dx = -d_x f(x)f(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (d_x f(x))^2 dx + 14\int_0^\pi f^2(x)dx$$

$$af^2(\pi) + \int_0^\pi [(d_x f(x))^2 + 14f^2(x)]dx \geq 0$$

$a \geq -\dfrac{\int_0^\pi [(d_x f(x))^2 + 14f^2(x)]}{f^2(\pi)} = -k$, где k всегда положительный скаляр

Собственные функции оператора A

$$-d_x^2 u + 14u = ru$$

Характеристическое ур-е: $-\lambda^2 + 14 = r$

$\lambda = \pm\sqrt{14 - r}$

$$u(x) = c_1 e^{x\sqrt{14-r}} + c_2 e^{-x\sqrt{14-r}}$$

Граничные условия

$u(0) = 0 \qquad c_1 = -c2$

Задание 4.3

Идея заключается в том чтобы перебирать какое-то количество b и искать минимум нормы L2

```
% b = linspace(-10, 10, 20);
syms x
b = linspace(-10, 10, 20);

f1 = exp(-abs(x));
f2 = exp(-2 * abs(x));

f = exp(-14 * x * x);
min_diff = inf;
param = 0;
for i = 1:length(b)

    f3 = exp(-b(i) * abs(x));

    [psi1, psi2, psi3] = GramShmidt(f1, f2, f3);
    c1 = L2_inner_product(psi1, f);

    c2 = L2_inner_product(psi2, f);


    c3 = L2_inner_product(psi3, f);
    p = c1 * psi1 + c2 * psi2 + c3 * psi3;
    diff = vpa(sqrt(L2_inner_product(f - p, f- p)));
    if diff < min_diff
        min_diff = diff;
        param = b(i);
    end
end
```

Работает долго ,вероятно, можно ускорить как-то