Задание 1.

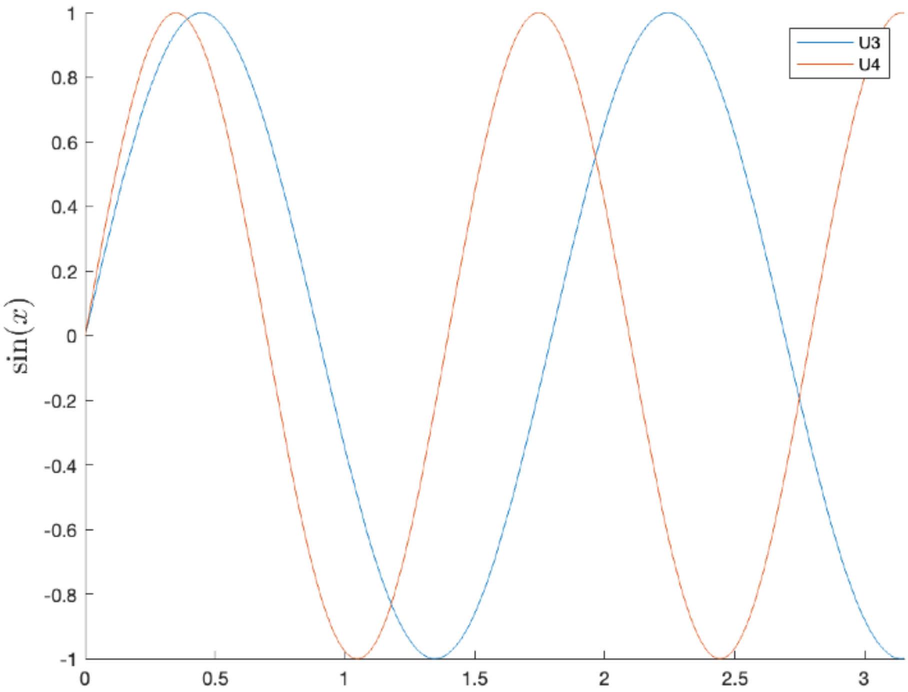
$$u_t(x,t) = 14u_{xx}(x,t)$$
$$u(0,t) = 14$$
$$u_x(\pi,t) = 2$$
$$x \in [0,\pi]$$

Представим решение в виде
$v(x,t) = u(x,t) + S(x,t)$
Причем:
$u(0,t) = 0$
$u_x(\pi,t) = 0$

a) Найдем собственные функции оператора второй производной однородной задачи

$d_x^2 u = zu$
Будем искать решение в виде: $u(x) = Ce^{\lambda x}$
$C\lambda^2 e^{\lambda x} = zCe^{\lambda x}$
$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{z}$
$u(x) = C_1 e^{\sqrt{z}x} + C_2 e^{-\sqrt{z}x}$
Подставим решение в граничные условия
$u(0) = C_1 + C_2 = 0$
$u_x(\pi) = \sqrt{z}C_1 e^{\sqrt{z}\pi} - \sqrt{z}C_2 e^{-\sqrt{z}\pi} = \sqrt{z}(C_1 e^{\sqrt{z}\pi} - C_2 e^{-\sqrt{z}\pi}) = 0$
Будем считать, что $z \neq 0$ и $C1 \neq 0$
$C_1 = -C_2$
$C_1(e^{\sqrt{z}\pi} + e^{-\sqrt{z}\pi}) = 0$
Тогда, остается решить: $e^{\sqrt{z}\pi} + e^{-\sqrt{z}\pi} = 0$
$e^{2\sqrt{z}\pi} = -1$
$e^{2\sqrt{z}\pi} = e^{(\pi+2\pi k)i} \quad k \in Z$
$2\sqrt{z}\pi = (\pi + 2\pi k)i$
$\sqrt{z} = i(\frac{1}{2} + k)$
Собственные функции:
$$u_k(x) = 2iC_1\frac{(e^{i(\frac{1}{2}+k)x} - e^{-i(\frac{1}{2}+k)x})}{2i} = C_1\sin((\frac{1}{2}+k)x)$$
Можно опустить константу

b) Графики 3-й и 4-й собственных функций



Графики 3й-4й собственных функций

c) Требуется построить решение с начальным условием $u(x,0) = sin(3x)$

Будем искать решение в виде $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x)$

- Разложение по всем собственным функциям самосопряжённого оператора d_x^2 при условиях Дирихле на левом краю и Неймана на правом.

Определим базис: $\sin((\frac{1}{2})x) \quad \sin((\frac{1}{2})x+1) \quad \sin((\frac{1}{2})x+2)$ ....

$$\langle \sin(\frac{1}{2}+n)(x) sin(\frac{1}{2}+m)(x) \rangle = \int_0^{\pi} sin(\frac{1}{2}+n)(x) sin(\frac{1}{2}+m)(x) dx =$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x) + 14(\frac{1}{2}+k)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x) = 0$$

Поскольку функции $\sin((\frac{1}{2}+k)x)$ при $k \in +Z$ образуют базис,

равенство рядов можно свести к $d_t a_k(t) = -14(\frac{1}{2}+k)^2 a_k(t)$

Решение данного ОДЕ $a_k(t) = C_k e^{-14(\frac{1}{2}+k)^2 t}$

Константы определяются из начальных условий решения

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin((\frac{1}{2}+k)x) + (2x+14) = sin(3x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin((\frac{1}{2}+k)x) = sin(3x) - 2x - 14$$

Умножим скалярно на $\sin((\frac{1}{2}+m)x)$

$$\langle \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin((\frac{1}{2}+k)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle = \langle sin(3x) - 2x - 14, \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle$$

Можно вынести знак суммы и константу за скалярное произведение

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \langle \sin((\frac{1}{2}+k)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle = \langle sin(3x) - 2x - 14, \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle$$

Поскольку собственные функции ортогональны, можно упростить следующим образом

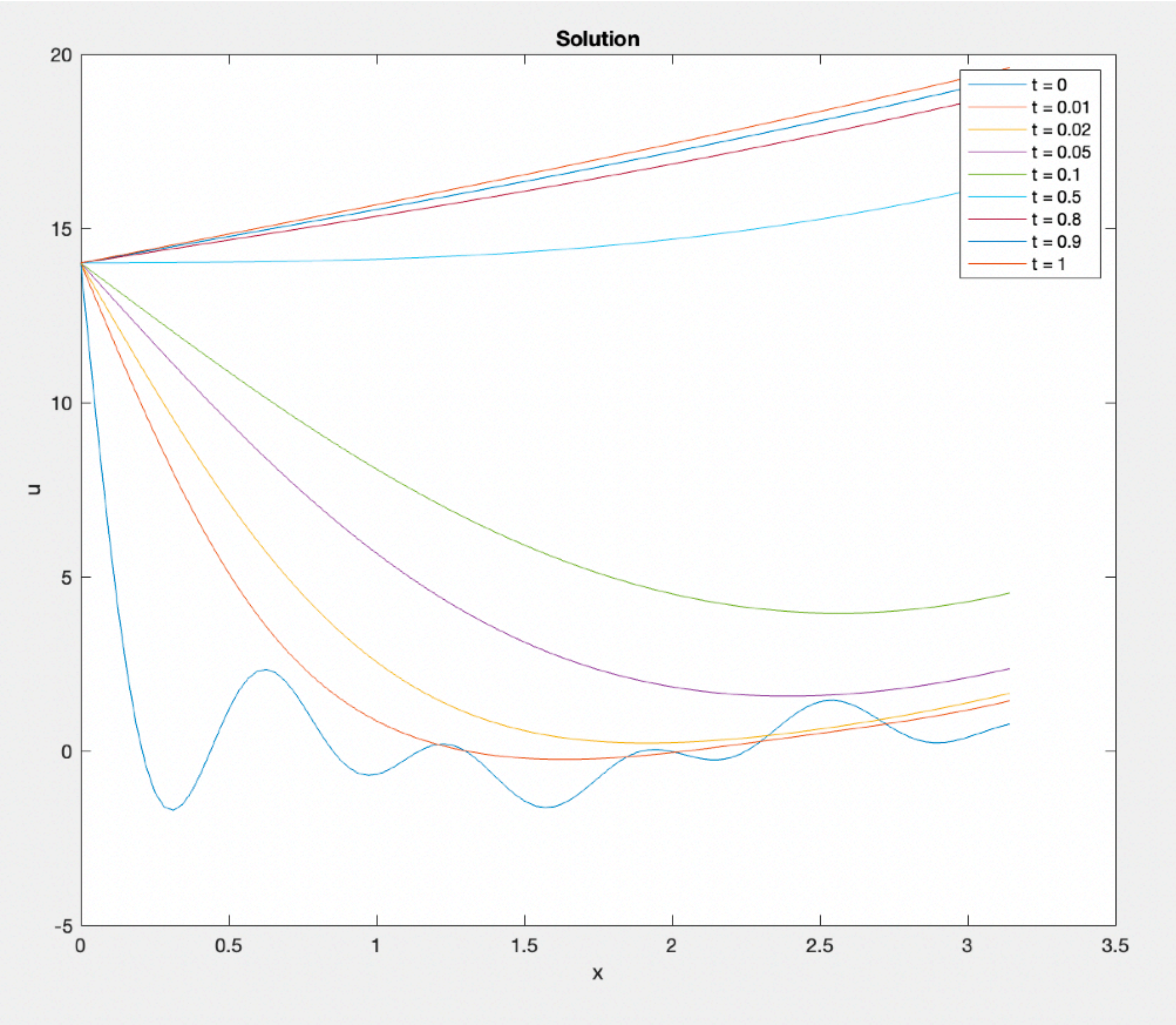
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \langle \sin((\frac{1}{2}+k)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle = C_m \langle \sin((\frac{1}{2}+m)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle$$

Получается

$$C_m = \frac{\langle sin(3x) - 2x - 14, \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle}{\langle \sin((\frac{1}{2}+m)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle}$$

Построим графики функции решения в нескольких моментах времени

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-14(\frac{1}{2}+k)^2 t} \sin((\frac{1}{2}+k)x) + (2x+14)$$



d)

Рассмотрим часть решения при k = 0

$$u(t,x) = C_0 e^{-14(\frac{1}{2})^2 t} \sin((\frac{1}{2})x) + (2x + 14)$$

Так как $e^{-14(\frac{1}{2})^2 t}$ и $\sin((\frac{1}{2})x)$ - непрерывные функции, то и произведение их - непрерывная функция

А так как сумма непрерывных функций - также непрерывная функция - то и все решение будем непрерывно

Однако есть особые точки

(0, 0) и (0, π), подставив, которые решение не совпадает с начальными условиями

$u_0(0,0) = u_0(0,\pi) = \sin(0) = 0$

Однако решение в этих точках равно соответсвенно:

$u(0,0) = 14$

$u(0,\pi) = 2\pi + 14$

Соответсвенно можно сделать вывод, что решение непрерывно на $(0,\pi)$

е)

$u(t \to \infty, x) = 2x + 14$

На бесконечности экспонента занулит ряд

Задание 2

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) = 14u_{xx}(x,t) \pm 20u \\
u(0,t) = 14 \\
u_x(\pi,t) = 2 \\
x \in [0,\pi]
\end{aligned}
$$

а) Найдем собственные функции оператора второй производной однородной задачи

$d_x^2 u \pm 20u = zu$

Будем искать решение в виде $u(x) = Ce^{\lambda x}$

$\lambda^2 Ce^{\lambda x} \pm 20Ce^{\lambda x} = zCe^{\lambda x}$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{z \mp 20}$

$u(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$

Подставим граничные условия однородной задачи:

$C_1 = -C_2$

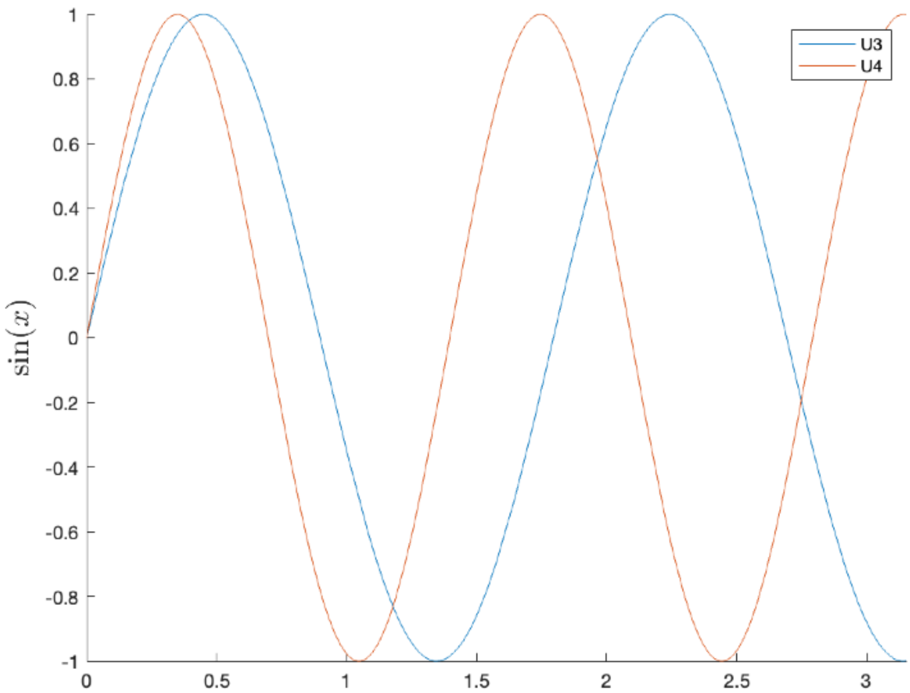
$C_1(e^{\lambda\pi} + e^{-\lambda\pi}) = 0$

Тогда, остается решить: $e^{\lambda\pi} + e^{-\lambda\pi} = 0$

$e^{2\lambda\pi} = -1$

$$e^{2\lambda\pi} = e^{(\pi+2\pi k)i} \quad k \in Z$$
$$2\lambda\pi = (\pi + 2\pi k)i$$
$$\lambda = i(\frac{1}{2} + k)$$
$$\sqrt{z \mp 20} = i(\frac{1}{2} + k)$$
$$z = -(\frac{1}{2} + k)^2 \pm 20$$
$$u_k(x) = 2iC_1\frac{(e^{i(\frac{1}{2}+k)x} - e^{-i(\frac{1}{2}+k)x})}{2i} = C_1\sin((\frac{1}{2} + k)x) = \sin((\frac{1}{2} + k)x)$$

Графики:



Графики 3й-4й собственных функций

с) Требуется построить решение с начальным условием $u(x,0) = sin(3x)$

Будем искать решение в виде $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\sin((\frac{1}{2} + k)x)$

- Разложение по всем собственным функциям самосопряжённого оператора d_x^2 при условиях Дирихле на левом краю и Неймана на правом.

Определим базис: $\sin((\frac{1}{2})x) \quad \sin((\frac{1}{2})x+1) \quad \sin((\frac{1}{2})x+2)$ ....

$$\langle \sin(\frac{1}{2}+n)(x) sin(\frac{1}{2}+m)(x)\rangle = \int_0^{\pi} sin(\frac{1}{2}+n)(x) sin(\frac{1}{2}+m)(x)dx =$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x) + 14(\frac{1}{2}+k)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x) \pm 20 \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\sin((\frac{1}{2}+k)x) = 0$$

Поскольку функции $\sin((\frac{1}{2}+k)x)$ при $k \in +Z$ образуют базис,

равенство рядов можно свести к $d_t a_k(t) = -a_k(t)(14(\frac{1}{2}+k)^2 \pm 20)$

$$a_k(t) = C_k e^{(-14(\frac{1}{2}+k)^2 \pm 20)t}$$

Константы C_k определяются аналогично заданию 1

$$C_m = \frac{\langle sin(3x) - 2x - 14, \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle}{\langle \sin((\frac{1}{2}+m)x), \sin((\frac{1}{2}+m)x)\rangle}$$

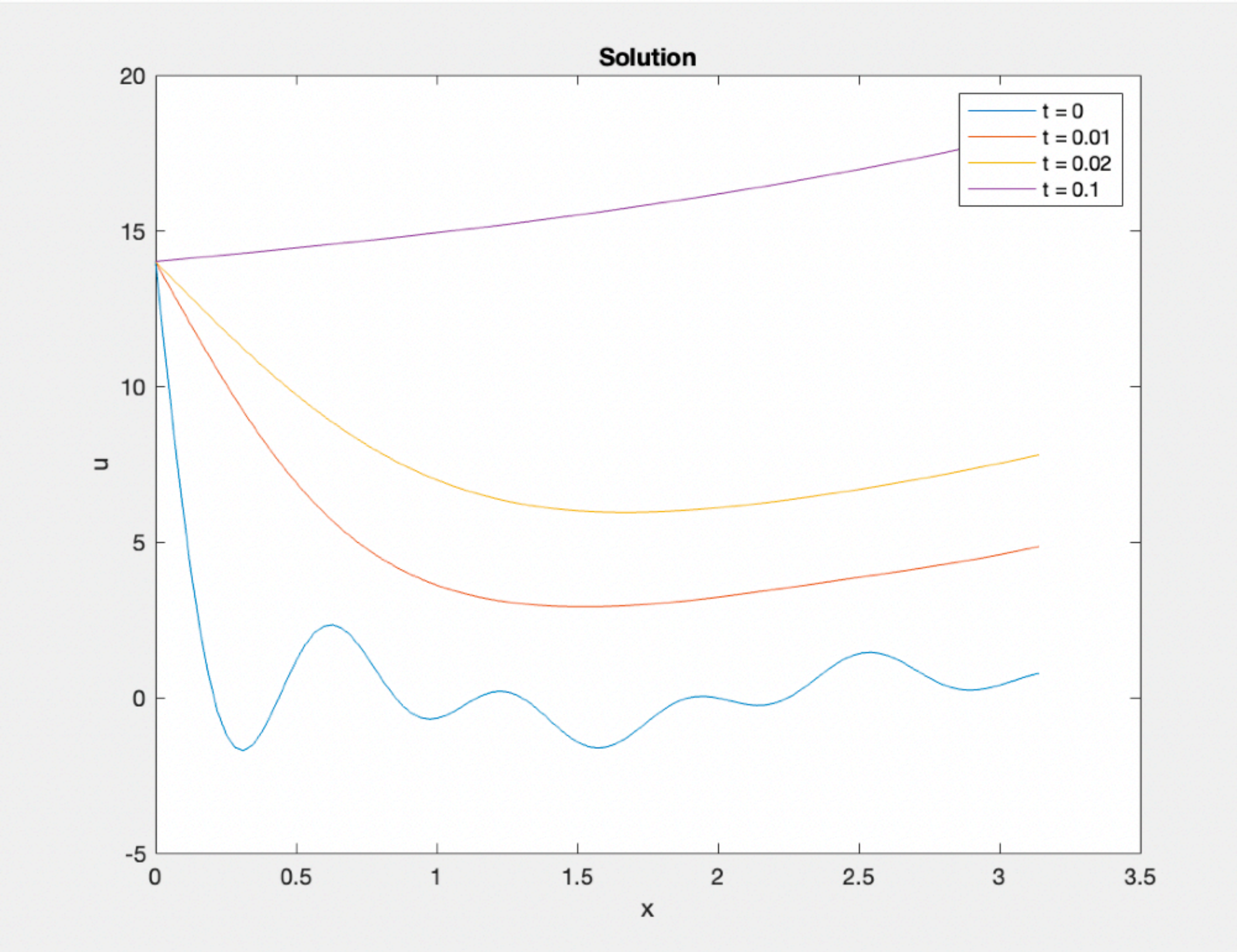
Тогда решение

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{(-14(\frac{1}{2}+k)^2 \pm 20)t} \sin((\frac{1}{2}+k)x) + (2x+14)$$

Построим графики 1. +20
2. -20

Для +20 Уходит в -бесокнечность

$$u(t -> \to \infty, x) = C_0 e^{(-14(\frac{1}{2})^2 + 20)t} \sin((\frac{1}{2}+k)x) + (2x+14)$$



Для -20

$u(t \to \infty, x) = 2x + 14$

На бесконечности экспонента занулит ряд

Задание 3

$$u_0(x) = \begin{cases} \sin(14\pi x) & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

- финитная функция

Преобразование Фурье

a) $F[u_0(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \sin(14\pi x) dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x} \sin(14\pi x) dx$

$$\sin(14\pi x) = \frac{e^{i14\pi x} - e^{-i14\pi x}}{2i}$$

$$F[u_0(x)] = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x} \frac{e^{i14\pi x} - e^{-i14\pi x}}{2i} dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} (\int_{-1}^{1} e^{ix(14\pi-\xi)} dx - \int_{-1}^{1} e^{-ix(14\pi+\xi)} dx) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} (\frac{e^{ix(14\pi-\xi)}}{i(14\pi-\xi)}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{e^{-ix(14\pi+\xi)}}{i(14\pi+\xi)}\Bigg|_{-1}^{1})$$

$$= -\frac{i\sin(14\pi-\xi)}{\sqrt{2\pi}(14\pi-\xi)} + \frac{i\sin(14\pi+\xi)}{\sqrt{2\pi}(14\pi+\xi)} = \frac{i\sin(\xi)}{\sqrt{2\pi}(14\pi-\xi)} + \frac{i\sin(\xi)}{\sqrt{2\pi}(14\pi+\xi)}$$

$$= \frac{i\sin(\xi)}{\sqrt{2}} \frac{28\pi}{14^2\pi^2 - \xi^2} = \frac{i\sin(\xi)}{\sqrt{2}} \frac{28\pi}{196\pi^2 - \xi^2}$$

б)
Обобщенная функция

$$u_0[\phi] = \int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi(x)dx$$

$$\dot{u}_0[\phi] = -\int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi_x(x)dx$$

$\ddot{u}_0[\phi] = \int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi_{xx}(x)dx$ - обобщенная функция тк операция $\phi \to \phi_x$ линейна и непрерывна

$$\int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi_{xx}(x)dx = \sin(14\pi x)\phi_x(x)\Bigg|_{-1}^{1} - 14\pi \int_{-1}^{1} \cos(14\pi x)\phi_x(x)dx = -14\pi \int_{-1}^{1} \cos(14\pi x)\phi_x(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \cos(14\pi x)\phi_x(x)dx = \cos(14\pi x)\phi(x))\Bigg|_{-1}^{1} + 14\pi \int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi_{xx}(x)dx = -14\pi(\cos(14\pi x)\phi(x))\Bigg|_{-1}^{1} + 14\pi \int_{-1}^{1} \sin(14\pi x)\phi(x)dx)$$

$$u_{0xx} = -14\pi(\delta[1] - \delta[-1]) - 14^2\pi^2 \sin(14\pi x)$$

Код для построения графиков решения

```
K = 10;

L = pi;

x = linspace(0, L, 101);

T = [0, 0.01, 0.02, 0.1];

C = zeros(K, 1);

figure(1)

lengendInfo = zeros(length(T));

for t = 1 :length(T)

    u = zeros(size(x));

    for k = 1 : K

        func_up = @(x) (sin(3*x) - 2*x - 14).* sin((0.5 + k - 1) * x);

        func_down = @(x) sin((0.5 + k - 1) * x) .* sin((0.5 + k - 1) * x);

        inner_product_up = integral(func_up, 0, pi);

        inner_product_down = integral(func_down, 0, pi);

        C(k) = inner_product_up / inner_product_down;

%          u = u + C(k) * exp(-14 * (0.5 + k - 1)^2 * T(t)) .* sin((0.5 + k - 1) * x);

        u = u + C(k) * exp((-14 * (0.5 + k - 1)^2 - 20)* T(t)) .* sin((0.5 + k - 1) * x);

    end

    u_final = u + 2*x + 14;

    plot(x, u_final, 'DisplayName', ['t = ', num2str(T(t))]);

    hold on

end

title('Solution')

xlabel('x');

ylabel('u');

legend('show');

hold off
```