09/11/2025

Seminar 6 - Algebră
Grupuri

① (21.44)

Arătăm că $[\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}]$ $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}, \cdot)$ monoid

(M_0) Arătăm că „$\cdot$" e bine def.

fie $a+ib$, $c+id \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = \underbrace{ac-bd}_{\in\mathbb{Z}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$a+ib$, $c+id$ au fost arbitrar alese $\Rightarrow$ „$\cdot$" e bine def pe $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ este parte stabilă)

(M_1) Arătăm că „$\cdot$" e asociativă:

fie $a+ib$, $c+id$, $e+if \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$$[(a+ib)(c+id)](e+if) = [ac-bd+i(ad+bc)]\cdot(e+if) =$$
$$= ace - bde - adf - bdf + i(acf - bcf + ade + bce)$$

$$[(a+ib)[(c+id)(e+if)] = \ldots = ace - bde - adf - bdf + i(acf - bcf + ade + bce)$$

$\Rightarrow [(a+ib)(c+id)](e+if) = (a+ib)[(c+id)(e+if)] \Rightarrow$ „$\cdot$" e asociativă

(M_2) $1 = 1+i\cdot 0 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$1\cdot(a+ib) = (a+ib)\cdot 1 = (a+ib)$ $\forall\, a+ib \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ ★

$\Rightarrow 1$ este elem neutru

$(M_0, M_1, M_2) \Rightarrow (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}, \cdot)$ e monoid

★ $\Rightarrow (a+ib)(c+id) = 1 \Leftrightarrow ac+bd+i(ad+bc) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd=1 \\ ad+bc=0 \end{cases}$

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^* = U(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ – mulțimea elementelor inversabile

* Căutăm elementele inversabile

Fie $a+ib \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ $\quad \exists ?\, c+id \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

a.î. $(a+ib)(c+id) = 1$ ($\cdot$ comutativă)

*

$$\Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

$\boxed{d=0}$ $\begin{cases} ac = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\} \\ bc = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

Am găsit nr. -1 și $+1$, care într-adevăr sunt inversabile

$\boxed{d \neq 0}$ $\quad a = -\frac{bc}{d}$

$$-\frac{bc}{d} \cdot c - bd = 1$$

$$-bc^2 - bd^2 = d$$

$$b = -\frac{d}{c^2+d^2} \Rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ d \in \{\pm 1\} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} b \in \{\pm 1\} \\ a = 0 \end{matrix}$$

Am găsit nr. $\pm i$, care într-adevăr sunt inversabile

$(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1, \pm i\}$

② $\boxed{2.1.45}$

$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x * y = xy - 5x - 5y + 30$

$x * y = x(y-5) - 5(y-5) + 5$

$x * y = (x-5)(y-5) + 5$

$(G, \circ)$
$\downarrow$
$(H \leq G, \circ)$

(G_0) Arătăm că „$*$" e bine definită

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x * y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ „$*$" e bine definită

$\to$ „$*$" comutativă

(G_1) Verificăm as: fie $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x * y) * z = [(x-5)(y-5) + 5] * z$$
$$= [(x-5)(y-5) + 5 - 5](z-5) + 5$$
$$= (x-5)(y-5)(z-5) + 5$$

$$x * (y * z) = \text{------} \; \| \text{------}$$

$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z) \Rightarrow$ „$*$" asociativitate

(G_2) $x * 6 = 6 * x = x$, $6 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow e = 6$ element neutru

(G_3) Căutăm el inversabile / simetrizabile „$*$" e com

Fie $x \in \mathbb{R}$ $\exists ?\, x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x * x' = e$

$$(x-5)(x'-5) + 5 = 6$$
$$(x-5)(x'-5) = 1$$

Dacă $x - 5 \neq 0$

$$x' - 5 = \frac{1}{x-5}$$
$$x' = \frac{1}{x-5} + 5$$

$\boxed{\text{SAU}}$

Dacă $x - 5 = 0$

$$x = 4$$
$$5 * x' = 5 \neq 6$$
$\Rightarrow x = 5$ nu e inversabil

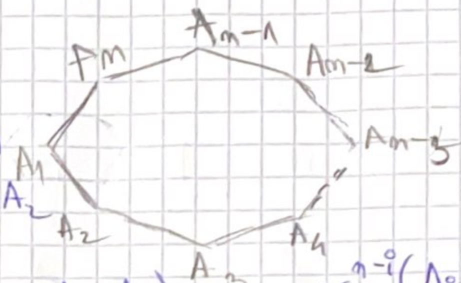
$\Rightarrow (\mathbb{R}, *)$ nu e grup

!DAR $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$ e grup $\forall\, x \neq 5, y \neq 5 \Rightarrow x * y \neq 5$

$((5, +\infty), *)$ e grup

$((-\infty, 5), *)$ NU e grup, nu are elem neutru $e = 6 \notin (-\infty, 5)$

③ 2.1.51



$s(A_1A_2\ldots A_n) = A_2A_3\ldots A_nA_1$

$t(A_1A_2\ldots A_n) = A_1A_nA_{n-1}\ldots A_2$

(1) $s^n(A_1A_2\ldots A_n) = s^{n-1}(A_2A_3\ldots A_nA_1) = \ldots = s^{n-i}(A_{i+1}A_{i+2}\ldots A_i)$

$= s^1(A_nA_1\ldots A_{n-1}) = A_1A_2\ldots A_n$

$t^2(A_1A_2\ldots A_n) = t(A_1A_nA_{n-1}\ldots A_2) = A_1A_2\ldots A_n$

$\Rightarrow s^n = t^2 = 1$

(2) $ts(A_1A_2\ldots A_n) = s(A_2A_3\ldots A_nA_1) = A_2A_1A_n\ldots A_3$

$s^{n-1}t(A_1A_2\ldots A_n) = s^{n-1}(A_1A_n\ldots A_2) = A_2A_1A_n\ldots A_3$

$\Rightarrow ts = s^{n-1}t$

(3) s, t - sunt izometrii

compunerea a două izometrii este izometrie

$\Rightarrow s^it^j$ este izometrie

$\Rightarrow \{1, s, \ldots, s^{n-1}, t, st, \ldots, s^{n-1}t\} \subseteq D_n$

(*) fie α o izometrie

$A_1 \xrightarrow{\alpha} A_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ (n pos)

$A_2 \xrightarrow{\alpha} A_{k-1}$ sau A_{k+1} (2 pos)

A_1, A_2 „generează" întreaga funcție, $\Rightarrow |D_n| \leq 2n$

Prin urmare,

$D_n = \{1, s, \ldots, s^{n-1}, t, st, \ldots s^{n-1}t\}$

(4) $D_n \subseteq S_n$ $(S_n, \circ)$ grup

D_n parte stabilă $\Rightarrow$ „$\circ$" asociativă

1 este element neutru

$\forall s^i t^j \in D_n$ $\exists t^{2-j} s^{n-i} \in D_n$

$i \in \{0, \dots, n-1\}$

$j \in \{0, 1\}$

a.î. $(s^i t^j)(t^{2-j} s^{n-i}) = (t^{2-j} s^{n-i})(s^i t^j) = 1$

$\Rightarrow (D_n, \circ)$ e grup

(5) $\langle s \rangle = \{1, s, s^2, s^3, \dots, s^{n-1}\}$

$\langle t \rangle = \{1, t\}$

$\langle s, t \rangle = D_n$

tabel operații D_3

$D_3 = \{1, s, s^2, t, st, s^2 t\}$

$s^3 = t^2 = 1$

$ts = s^2 t$

$\circ$	1	s	s^2	t	st	s^2t
1	1	s	s^2	t	st	s^2t
s	s	s^2	1	st	s^2t	t
s^2	s^2	1	s	s^2t	t	st
t	t	s^2t	st			
st	st	t	s^2t			
s^2t	s^2t	st	t			

$st \neq ts$

$\Rightarrow (D_3, \circ)$ nu e comutativă

Seminar 6

Exerciţiu 2.1.44. Se consideră mulţimea

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C} \text{ (aici } i^2 = -1).$$

Să se arate că $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ este un monoid în raport cu înmulţirea numerelor complexe. Să se determine $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^\times$.

Exerciţiu 2.1.45. Se consideră operaţia $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Este $(\mathbb{R}, *)$ grup? Dar $(\mathbb{R}\setminus\{5\}, *)$, $((5, \infty), *)$ sau $((-\infty, 5), *)$?

Exerciţiu 2.1.51. Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat (cu n vârfuri şi n laturi) cu centrul O într-un plan α. (considerat ca o mulţime de puncte). O izometrie este o funcţie $f : \alpha \to \alpha$ cu proprietatea că $|f(X)f(Y)| = |XY|$ pentru orice $X, Y \in \alpha$, unde prin $|XY|$ notăm distanţa dintre X şi Y. Se consideră mulţimea tuturor izometriilor care invariază poligonul $A_1A_2\dots A_n$ mai precis

$$D_n = \{f : \alpha \to \alpha \mid f \text{ este o izometrie şi } f(A_1A_2\dots A_n) = A_1A_2\dots A_n\}.$$

Notăm cu s rotaţia în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani, (de la A_1 către A_2) şi cu t simetria axială faţa de axa A_1O. Să observăm că $s, t : \alpha \to \alpha$ sunt izometrii. Să se arate că

(1) $s^n = 1 = t^2$ (aici $1 = 1_\alpha$ este funcţia identitate a planului α).
(2) $ts = s^{n-1}t$.
(3) $D_n = \{1, s, \dots, s^{n-1}, t, st, \dots, s^{n-1}t\}$
(4) D_n este un grup în raport cu compunerea funcţiilor (care este numit *grupul diedral*)
(5) Să se determine $\langle s\rangle$, $\langle t\rangle$, $\langle s, t\rangle$

Să se construiască tablele operaţiilor D_3 şi D_4.

Exerciţiu 2.1.52. Pe mulţimea $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ se defineşte în felul următor o înmulţire:

- 1 este elementul neutru.
- Înmulţirea respectă regula semnelor: $(-x)y = x(-y) = -xy$ (altfel semnele $+$ şi $-$ nu au încă vreun sens).
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.
- $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.

Să se arate că $(H, \cdot)$ este un grup (numit *grupul quaternionilor*).

Exerciţiu 2.1.48. Fie G un grup. Să se arete că dacă pentru orice două elemente $x, y \in G$, exsită $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(xy)^i = x^iy^i$ pentru $i = k - 1, k, k + 1$ atunci G este abelian.

Exerciţiu 2.1.49. Să se arate că o parte stabilă finită a unui grup este întotdeauna un subgrup. Dar o parte stabilă infinită?