Seminar 12

Baza unui spațiu vectorial. Independența liniară. Dimensiunea unui s.v.

ex $x = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_m b_m = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$

3.2.33 Să se arate că o listă cu 2 vectori $[x, y]^t \in V^{2\times 1}$ este exact atunci liniar dependentă când există $\alpha \in K$ aî $x = \alpha y$ sau $y = \alpha x$. Să se găsească interpretarea geometrică în cazul $K = \mathbb{R}$ și $V = \mathbb{R}^3$. Când este o listă de vectori $[x, y, z]^t \in (\mathbb{R}^3)^{3\times 1}$ liniar dependentă?

$(x, y)^t$ l.d. $\iff \exists\ \alpha, \beta \in K$ scalari, nu toți nuli aî

$\alpha x + \beta y = 0$

I $\alpha = 0 \Rightarrow \beta y = 0 \overset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} y = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x$

II $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha x = -\beta y$

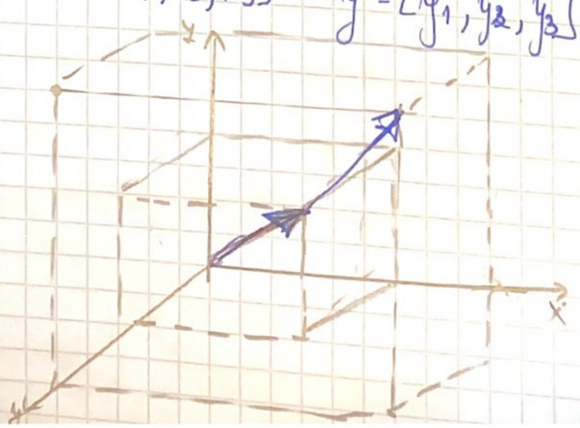
$x = -\frac{\beta y}{\alpha}$

$x = -\frac{\beta}{\alpha} y = (-(\alpha)^{-1} \beta \cdot y)$ (dacă nu e $\mathbb{R}$ nu $\exists$ împărțire)

$\begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + 2\alpha x_3 \end{pmatrix}$

Interpretarea geometrică în $\mathbb{R}^3$ $(\alpha \neq 0)$

$x = [x_1, x_2, x_3]$ $\quad y = [y_1, y_2, y_3]$



• $(x, y, z)^t$ liniar dependentă $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nu toți nuli a.î.
$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\Delta = 0$ (trb să aibă mai multe soluții

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$(x, y, z)^t$ liniar dep $\Leftrightarrow \Delta = 0$
$(x, y, z)^t$ liniar indep $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

3.2.36 Să se arate că $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este un $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial și să se determine o bază și dimensiune.

I $(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2})$ grup abelian
- asociativă
- comutativă
- $\exists$ elem neutru $\in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$
- $\forall$ element are element simetrizabil.

verificăm axiomele s.v.

II determinăm o bază și dimensiunea

$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$x = \alpha \cdot x_1 + \alpha x_2$

$\in \mathbb{Q}$; $\in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

$\forall x \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$, $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ a.î. $x = a \cdot 1 + b\sqrt{2} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle$

$1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \langle 1, \sqrt{2} \rangle$

• $(1, \sqrt{2})$ este liniar independentă ?

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{2} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$

I $\beta \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in \mathbb{Q}}$

P.p. prin absurd că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ a.î. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$q \neq 0$

$(p, q) = 1$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 4 \mid 2q^2 \Rightarrow 2 \mid q^2$

$\Rightarrow 2 \mid q$
$2 \mid p$ contradicție: $(p, q) = 1 \Rightarrow$ p.p. făcută este falsă

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

II $\beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Deci $(1, \sqrt{2})$ liniar independentă

Prin urmare, $(1, \sqrt{2})$ e bază și $\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}) = 2$

3.240. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ lista de vectori $v = [v_1, v_2, v_3]^t$. Folosind două metode (lema substituției, def. bazei) să se găsească $a \in \mathbb{R}$ a.î. v este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, unde

1) $v_1 = [1, -2, 0]$ $v_2 = [2, 1, 1]$, $v_3 = [0, a, 1]$

Metoda 1: (definiția)

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$\alpha_1 (1, -2, 0) + \alpha_2 (2, 1, 1) + \alpha_3 (0, a, 1) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1, -2\alpha_1, 0) + (2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) + (0, \alpha_3 \cdot a, \alpha_3) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0, -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a = 0 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

! Ca să fie l.i $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 + 4 - a = 5 - a$$

$5 - a \neq 0$

$a \neq 5 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Leftrightarrow v$ liniar indep. | $\Leftrightarrow v$ e bază

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

? Metoda 2 (lema substituției)

Observăm că: $([1,-2,0], [2,1,1], [0,0,1])$ e bază,

$[0,a,1]$

deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\alpha, \beta, \gamma = ?$

$(0, a, 1) = \alpha \cdot (1,-2,0) + \beta(2,1,1) + \gamma(0,0,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = a \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{2a}{5}, \beta = \frac{a}{5}$$

$\Rightarrow (a, a, 1) = -\frac{2a}{5} \cdot (1,-2,0) + \frac{a}{5}(2,1,1) + \left(1 - \frac{a}{5}\right)(0,0,1)$

$([1,-2,0],[2,1,1],[0,a,1])$ e bază $\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{5} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 5$

2) $v_1 = [2, 1, -1]$, $v_2 = [0, 3, -1]$, $v_3 = [1, a, 1]$

Metoda 1 (definiția)

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1[2,1,-1] + \alpha_2[0,3,-1] + \alpha_3[1,a,1]$

$= [2\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_1] + [0, 3\alpha_2, -\alpha_2] + [\alpha_3, a\cdot\alpha_3, \alpha_3]$

$= [2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + a\alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3]$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 0 - (-3 - 2a + 0)$$
$$= 8 - 2a$$

$8 - 2a \neq 0$

$2a \neq 8$

$a \neq 4 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Metoda 2 (lema substituției)

$v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (0, 3, -1)$
$ x_1, x_2, x_3$

$v_1 = \underset{\alpha_1}{2} \cdot e_1 + \underset{\alpha_2}{1} \cdot e_2 + \underset{\alpha_3}{(-1)} \cdot e_3$

$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow U_1 = [v_1, e_2, e_3]$ este bază în $\mathbb{R}^3$

Coord lui v_2 în baza u_1:

$$x_1' = \frac{1}{\alpha_1} \cdot x_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$x_2' = \frac{1}{\alpha_1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot x_1) = \frac{1}{2}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = 3$$

$$x_3' = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 \cdot x_3 - \alpha_3 \cdot x_1) = \frac{1}{2}(2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0) = -1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow v_2 = (0, 3, -1) = \underset{\alpha_1}{0} \cdot v_1 + \underset{\alpha_2}{3} \cdot e_2 + \underset{\alpha_3}{(-1)} e_3$$

$\alpha_2 = 3 \neq 0 \Rightarrow u_2 = (v_1, v_2, e_3)$ este bază în $\mathbb{R}^3$

$v_3 = (1, a, 1)$

- baza în u_1:

$$x_1' = \frac{1}{\alpha_1} \cdot x_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2' = \frac{1}{\alpha_1} \cdot (\alpha_1 \cdot x_2 - \alpha_2 x_1) = \frac{1}{2}(2a - 1 \cdot 1) = \frac{2a-1}{2}$$

??

$$x_3' = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 \cdot x_3 - \alpha_3 x_1) = \frac{1}{2}(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2a-1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} v_1 + \frac{2a-1}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3$$

- baza în u_2:

$$x_1' = \frac{1}{\alpha_2} \cdot (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) = \frac{1}{3}\left(3 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{2a-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x_2' = \frac{1}{\alpha_2} \cdot x_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a-1}{2} = \frac{2a-1}{6}$$

$$x_3' = \frac{1}{\alpha_2}(\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2) = \frac{1}{3}\left(3 \cdot \frac{3}{2} - (-1) \cdot \frac{2a-}{2}\right) = \frac{a+4}{3}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{2a-1}{6} v_2 + \frac{a+4}{3} e_3$$

$$\frac{a+4}{3} \neq 0 \Rightarrow a+4 \neq 0$$

$$a \neq -4 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

3.2.41 Să se arate că $b = [b_1, b_2, b_3, b_4]^t$ ~~unde~~ e o bază a lui $\mathbb{R}^4$ și să se determine coordonatele lui $x = [2,3,2,10]$ în raport cu acea bază

$b_1 = [1,2,-1,2]$

$b_2 = [1,2,1,4]$

$b_3 = [2,3,0,-1]$

$b_4 = [1,3,-1,0]$

Soluție

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_2 \cdot 1 + L_4]{L_2 \cdot 1 + L_1} \Bigg|$$