Seminar 11

Subspații vectoriale.
Suma directă

3.137 Se consideră submulțimile $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ date prin

$S = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$T = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

Să se arate că $S, T \leq \mathbb{R}^3$ și $S \oplus T = \mathbb{R}^3$

Soluție

a) i) $0_3 \overset{?}{\in} S$

$0_3 = (0,0,0) \quad 0+0+0 = 0 \Rightarrow 0_3 \in S$

ii) fie $x, y \in S$, $x + y \overset{?}{\in} S$

$x = [x_1, x_2, x_3]$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$y = [y_1, y_2, y_3]$, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$

$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 =$

$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0} + \underbrace{y_1 + y_2 + y_3}_{0} = 0 \in S$

iii) fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $x = [x_1, x_2, x_3]$

$\alpha \cdot x \overset{?}{\in} S$

$\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$

$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 =$

$\alpha(\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0}) =$

$\alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \in S$

$\Rightarrow S$ subspațiu a lui $\mathbb{R}^3$

~ Analog T

$S \oplus T = \mathbb{R}^3$?

fie $x \in S \cap T \Rightarrow x \in S$ și $x \in T$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $x_1 = x_2 = x_3$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

deci $x = 0 \Rightarrow S \cap T = \{0\}$

? avem că $S + T \subseteq \mathbb{R}^3$

arătăm că $\mathbb{R}^3 \subseteq S + T$

fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\exists ?\ s \in S \quad = (s_1, s_2, s_3) \in S$

$s = (s_1, s_2, -s_1 - s_2)$

$\bar{t} \in T = (t, t, t)$ a.î. $x = s + \bar{t}$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (s_1 + t, s_2 + t, -s_1 - s_2 + t)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 = s_1 + t \\ x_2 = s_2 + t \\ x_3 = -s_1 - s_2 + t \end{cases}$$ are sistemul soluție?

$x_1 + x_2 + x_3 = 3t \Rightarrow t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$s_1 = x_1 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$s_1 = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}$, $s_2 = \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}$, $s_3 = \frac{2x_3 - x_2 - x_1}{3}$

$$x = \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}, \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}\right) +$$
$$+ \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

$\Rightarrow x \in S + T$

deci $\left.\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\subseteq S + T \\ S + T &\subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{așadar}} S + T = \mathbb{R}^3$

3.1.38 Se consideră

$S = \{\alpha I_2 \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și

$T = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid Tr(A) = 0\}$

$Tr(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricii A.

urma matricii || suma elem de pe diag principală

Să se arate că $S, T \leq_{\mathbb{R}} M_{2\times2}(\mathbb{R})$ și $S \oplus T = M_{2\times2}(\mathbb{R})$

Soluție

Def: Fie V un K-spațiu vectorial și $S, T \leq_K V$.

$S \oplus T = V \Leftrightarrow \begin{cases} S+T=V \\ S\cap T=\{0\} \end{cases}$

suma a două subspații

I $S, T \leq_{\mathbb{R}} M_{2\times2}(\mathbb{R})$ (cu i, ii, iii)

II $S \oplus T = M_{2\times2}(\mathbb{R})$

Fie $A \in S \cap T \Rightarrow A \in S$ și $A \in T$

deci va respecta ambele condiții

$$\left.\begin{array}{l} A = \alpha I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ pt } \alpha \in \mathbb{R} \\ Tr(A) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$\Downarrow$ adevărat $\Leftrightarrow$

$A = O_2$

Deci $S \cap T = \{O_2\}$

Avem că $S + T \subseteq M_2(\mathbb{R})$ (Suma a două subspații este un subspațiu)

Arătăm că $M_2(\mathbb{R}) \subseteq S + T$

fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = ?(\alpha) \cdot I_2 + \underbrace{(?)}_{Tr(?) = 0}$$

$$A = \underbrace{\frac{a+d}{2} I_2}_{\in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}}_{\in T}$$

(Se poate scrie A ca sumă de două funcții care aparțin lui S și lui T).

Așadar $M_2(\mathbb{R}) = S \oplus T$

! funcțiile sunt spații vectoriale împreună cu un set de operații;
funcțiile pare/impare pot fi subspații

(ex) Arătați că orice funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se poate scrie ca o sumă dintr-o funcție pară și una impară.

$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f = f_1 + f_2$$

pară: $f(-x) = f(x)$

impară: $f(-x) = -f(x)$

Aplicații liniare

3.1.42. Care dintre următoarele aplicații sunt liniare?
Pt aplicațiile liniare să se determine ec subspațiilor Ker f și Im f.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f[x_1, x_2, x_3] = [x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1]$

fie $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in \mathbb{R}^3$

$x = [x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_1, y_2, y_3]$

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

dem $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= [\alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_2 + \beta y_2), \alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_3 + \beta y_3), \alpha x_3 + \beta y_3 - (\alpha x_1 + \beta y_1)] \\ &= [\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2), \alpha(x_2 - x_3) + \beta(y_2 - y_3), \alpha(x_3 - x_1) + \beta(y_3 - y_1)] \\ &= [\alpha(x_1 - x_2), \alpha(x_2 - x_3), \alpha(x_3 - x_1)] + [\beta(y_1 - y_2), \beta(y_2 - y_3), \beta(y_3 - y_1)] \\ &= \alpha[x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1] + \beta[y_1 - y_2, y_2 - y_3, y_3 - y_1] \\ &= \alpha \cdot f(x) - \beta f(y) \end{aligned}$$

$\to$ aplicație liniară

$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \Rightarrow [x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1] = [0, 0, 0]$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$$\mathrm{Ker} f = \{ x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \}$$

$\mathrm{Im} f = ?$

fie $y \in \mathbb{R}^3$ $\exists ?\, x \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(x) = y$, $y = [y_1, y_2, y_3]$

$$f(x) = y \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_3 - x_1 = y_3 \end{cases} (+)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

Revin

$$\mathrm{Im} f = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2, x_3] = [x_1 - 1, x_2 + 2, x_3 + 1]$

fie $x, y \in \mathbb{R}^3$: $x = [x_1, x_2, x_3]$

$y = [y_1, y_2, y_3]$

fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x + \beta y) \overset{?}{=} \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

$f(\alpha x + \beta y) = [\alpha x_1 + \beta y_1 - 1, \alpha x_2 + \beta y_2 + 2, \alpha x_3 + \beta y_3 + 1]$

$= [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3] + [\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3] + [-1, 2, 1]$ (1)

$\alpha f(x) = [\alpha x_1 - \alpha, \alpha x_2 + 2\alpha, \alpha x_3 + \alpha] = \alpha[x_1, x_2, x_3] + [-\alpha, 2\alpha, \alpha]$

$\beta f(y) = [\beta y_1 - \beta, \beta y_2 + 2\beta, \beta y_3 + \beta] = \beta[y_1, y_2, y_3] + [-\beta, 2\beta, \beta]$

$\alpha f(x) + \beta f(y) = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3] + [-\alpha, 2\alpha, \alpha] + \beta[y_1, y_2, y_3] + [-\beta, 2\beta, \beta]$ (2)

(1) $\neq$ (2) $\Rightarrow f$ nu este aplicație liniară

sau <u>contraexemplu</u>

$f_1(1,0,0) = (0,2,1)$, $f_2(1,1,1) = (0,3,2)$

$\cancel{f_1 + f_2} = f_3(2,1,1) = f_3((1,0,0) + (1,1,1)) = f_3(2,1,1) = (1,3,3)$

$f_3 \neq f_1 + f_2$

c)
d) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2, x_3] = [2x_1 - 3x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2 + 3x_3,$
$x_1 + x_2 + x_3]$

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = [2x_1 - 3x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2 + 3x_3,\ x_1 + x_2 + x_3]$
$y = [2y_1 - 3y_2 + y_3,\ -y_1 + y_2 + 3y_3,\ y_1 + y_2 + y_3]$

fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x + \beta y) = [\alpha(2x_1 - 3x_2 + x_3) + \beta(2y_1 - 3y_2 + y_3),$$
$$\alpha(-x_1 + x_2 + 3x_3) + \beta(-y_1 + y_2 + 3y_3),$$
$$\alpha(x_1 + x_2 + \cancel{x}_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3)] \ (1)$$

$$\alpha f(x) + \beta(f(y)) = \alpha[2x_1 - 3\cancel{x}_2 + x_3;\ -x_1 + x_2 + 3x_3,\ x_1 + x_2 + x_3] +$$
$$+ \beta[2y_1 - 3y_2 + y_3, -y_1 + y_2 + 3y_3,\ y_1 + y_2 + y_3] \ (2)$$

$1 = 2 \Rightarrow f$ aplicație liniară

$\mathrm{Ker} f = ?$
$\mathrm{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$

$f[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ = are sistemul soluție?

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 9 - (1 + 3 + 6) = -\cancel{18} - 10 = -18 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ sol unică $(0,0,0)$

<u>Obs!</u> dacă $\mathrm{Ker} f = \{(0,0,0)\} \Leftrightarrow f$ injectivă

$\operatorname{Im} f = ?$

fie $y \in \mathbb{R}^3$ $\exists ?$ $x \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(x) = y$

$$f(x) = y \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

?

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 9 - (1 + 6 + 3) = -18$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists !$ soluție $\forall y$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ surj $\Rightarrow f$ izomorf

d)
4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2] = [x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2]$

fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

$f(\alpha x + \beta y) = [\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_2 + \beta y_2),$
$2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2] =$

$= [\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 + y_2),$
$\alpha(2x_1 + x_2) + \beta(2y_1 + y_2)] =$

$= [\alpha(x_1 + x_2), \alpha(x_1 - x_2), \alpha(2x_1 + x_2)] + [\beta(y_1 + y_2), \beta(y_1 - y_2),$
$, \beta(2y_1 + y_3)]$

$= \alpha \cdot f(x) + \beta f(y) \Rightarrow f$ ap. liniară

$\operatorname{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = x_2 \\ 2x_1 = -x_2 \end{cases} \iff x = [0, 0, 0]$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ [0, 0, 0] \}$

$\text{Im} f = ?$

fie $y \in \mathbb{R}^3, \exists ? \, x \in \mathbb{R}^2$ a.î. $f(x) = y$

$$\boxed{\text{Im} f = \{ f(x) \mid x \in V \}}$$

$$\text{Im} f = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \quad (+)$$

(notam o variabilă cu t și scriam în funcție de t)

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4x_1 + x_2$$

$$\text{Im} f = \{ [y_1, y_2, y_3] \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = x_1 + x_2, \; y_2 = x_1 - x_2, \; y_3 = 2x_1 + x_2 \}$$

e) 5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f[x_1, x_2] = x_1^2 - x_2^2$

$f_1[1, 0] = 1^2 - 0 = 1$, $f_1[2 \cdot 1, 2 \cdot 0] = 2$

$f_2[2, 0] = 4 - 0 = 4$, ~~$f_2[2,0] =$~~

$2f_1 \neq f_2 \Rightarrow$ nu e ap liniară

f) 6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; f[x_1, x_2] = [a_{1,1} \cdot x_1 + a_{2,1} x_2, \; a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2]$

unde $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}$ sunt fixate

1) f ap liniară (analog)

2) $\text{Ker} f = ? \quad \text{Im} f = ?$

$$\text{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0 \}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{21}x_2 = 0 \\ a_{12}\cdot x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Caz I:

dacă $\Delta \neq 0$ atunci sistemul are sol unică $\Rightarrow$ sol $=(0,0)$

$\mathrm{Ker} f = \{[0,0]\}$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$

Caz II:

dacă $\Delta = 0$ și $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$

$f[x_1, x_2] = [0,0]$

$\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im} f = \{[0,0]\}$

Caz III:

dacă $\Delta = 0$ și $a_{11} \neq 0$

...